گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

WWW.KONKUR.IN

ریاضی ۲ فصل ۶

ماتریس:

آرایشی مستطیلی از اعداد را ماتریس می‌نامند. ماتریس را می‌توان با معرفی اعضای آن که درایه نامیده می شوند، یا به وسیله جمله عمومی آن نمایش داد.

$$A = \underbrace{[a_{ij}]}_{\text{درایه}}{}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

تعداد سطرها — تعداد ستون‌ها — درایه — مرتبه یا رتبه ماتریس

$1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n$

☜ **مثال : اگر $a_{ij} = 2i + j^2$ باشد و $A_{2\times 3}$ باشد، A را معین کنید.**

✍**حل :**

$$a_{11} = 3 \quad a_{12} = 6 \quad a_{13} = 11$$
$$a_{21} = 5 \quad a_{22} = 8 \quad a_{23} = 13 \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

برخی ماتریس‌های پر کاربرد :

۱) ماتریس مربعی: ماتریسی که در آن تعداد سطرها و ستون‌ها برابر است، در این حالت عناصر a_{ii} را قطر اصلی ماتریس می‌نامند.

۲) ماتریس ستونی: اگر ماتریسی فقط از یک ستون تشکیل شده باشد ، به آن ماتریس ، ماتریس ستونی گفته می شود .

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$$

۳) ماتریس سطری: اگر ماتریسی فقط از یک سطر تشکیل شده باشد ، به آن ماتریس ، ماتریس سطری گفته می شود .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

٤) ماتریس همانی: ماتریس مربعی که قطر اصلی آن ۱ و بقیهٔ درایه های آن صفر باشد. $I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{m\times m}$

۵) ماتریس صفر: ماتریس $m\times n$ ای که تمام درایه‌های آن صفر باشد. $\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$

تساوی دو ماتریس :

دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هر گاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم مساوی باشد.

$$[a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

☜ **مثال : اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} 2x-1 & x \\ 2y+1 & 1-x \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4y-1 & 2y \\ x+1 & -y \end{bmatrix}$ برابر باشند، x و y کدامند؟**

✍**حل :**

$$4y - 1 = 2x - 1 \to x = 2y$$

$$2y = x \to x = 2y$$

$$\left.\begin{aligned} x+1 = 2y+1 &\to x = 2y \\ -y = 1-x &\to x-y = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y - y = 1 \to y = 1 \to x = 2$$

جمع ماتریس‌ها و ضرب در اعداد حقیقی :

اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، مجموع دو ماتریس، ماتریسی است هم مرتبه با آن دو و به صورت :

$$A+B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$

یعنی کافی است درایه ها را نظیر به نظیر جمع کنیم .

به ازای هر عدد حقیقی r ماتریس rA به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}$$

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب در اعداد حقیقی :

به ازای ماتریس‌های هم‌مرتبه $A\ ,\ B\ ,\ C$ و عدد حقیقی r داریم:

۱) $A+(B+C)=(A+B)+C$ شرکت پذیری

۲) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ عضو بی اثر

۳) $A+(-A)=\overline{O}$ وجود عضو قرینه

۴) $A+B=B+A$ جابجایی

۵) $(rs)A=r(sA)=s(rA)$

۶) $r(A+B)=rA+rB$

☜ مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&-2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&0&4\\2&-5&9\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس x را از معادله‌ی $3A+\frac{x}{2}=2B$ به دست آورید.

✍حل :

$$3\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&-2\end{bmatrix}+\frac{x}{2}=2\begin{bmatrix}-1&0&4\\2&-5&9\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{x}{2}=\begin{bmatrix}-2&0&8\\4&-10&18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&6&-3\\0&9&-6\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}-5&-6&11\\4&-19&24\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}-10&-12&22\\8&-38&48\end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها :

ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&\cdots&a_{1n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}\\\vdots\\b_{n1}\end{bmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}b_{i1}$$

در حالت ضرب یک ماتریس $m\times n$ در یک ماتریس $n\times p$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C=\left[c_{ij}\right]_{m\times p}=A_{m\times n}B_{n\times p}\Rightarrow c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

منظور از c_{ij} درایه سطر i ام و ستون i ام AB است.

نکته: برای آن که ماتریس $A\times B$ قابل تعریف باشد لازم است تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد. در این صورت مؤلفه سطر iام و ستون jام ماتریس حاصلضرب از ضرب سطر iام ماتریس A در ستون jام ماتریس B حاصل می‌گردد.

☜ **مثال : اگر** $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۵ & ۲ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ٤ \\ ۵ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **باشد،** $C=AB$ ، $C_{۲۳}$ **کدامست؟**

✍**حل :** برای یافتن سطر دوم و ستون سوم حاصل‌ضرب، کافی است سطر دوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم.

$$C_{۲۳}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}=۲۰+۲=۲۲$$

☜ **مثال : اگر** $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **باشد، حاصل** $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\times A\times\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ **کدامست؟**

✍**حل :**

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b \\ c= & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

☜ **مثال : اگر** $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ٤ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **حاصل** $(A\times B)-(B\times A)$ **کدامست؟**

✍**حل :**

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ A\times B-B\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

☜ **مثال : اگر** $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ٤ \end{bmatrix}$ **حاصل** $a+b-c-d$ **کدامست؟**

✍**حل :**

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}\rightarrow d=۱\quad c=۲\quad b=۳\quad a=۴\ \rightarrow\ a+b-c-d=۴$$

☜ **مثال : اگر داشته باشیم :** $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۱ \\ ۳ & b & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ a \end{bmatrix}$ **، مقدار** $a+b$ **کدام است؟**

✍**حل :**

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۱ \\ ۳ & b & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳+a \\ ۳+۲b+a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\rightarrow a-۳=۱\rightarrow a=۴ \\ a+۲b+۳=۱\xrightarrow{a=۴} b=-۳ \end{array}\right\}\Rightarrow a+b=۱$$

☜ **مثال : با فرض آنکه** $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ **مقدار** $x-y$ **کدام است ؟**

✍**حل :**

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -y+۴ \\ y+۲x+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\rightarrow -y+۴=-۱\rightarrow y=۵ \\ y+۲x+۲=۱\xrightarrow{y=۵} x=-۳ \end{array}\right\}\Rightarrow x-y=-۸$$

☜ مثال : ریشه‌های معادله ماتریسی $\begin{bmatrix}1 & -x & 2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ x & -8x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\bar{O}$ کدام است؟

✍حل :

$$\begin{bmatrix}1 & -x & 2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ x & -8x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+x+2x^2 & -1-x-16x^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1+x+2x^2 & -1-x-16x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=2+2x+4x^2-1-x-16x^2=0$$

$$\rightarrow\ -12x^2+x+1=0\ \rightarrow\ (-3x+1)(4x+1)=0\begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}$$

خواص ضرب ماتریس‌ها :

اگر $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{p\times q}$ باشد آنگاه

۱) $A(BC)=(AB)C$ شرکت پذیری

۲) $A(B+C)=AB+AC \quad (A+B)C=AC+BC$ توزیع‌پذیری یا پخشی

۳) $A(rB)=(rA)B=r(AB)$

۴) $A_{m\times n}I_n=I_mA_{m\times n}=A$ عضو بی اثر ضرب ماتریسی

در فاکتورگیری عبارات ماتریسی هیچگاه اعداد را به تنهایی نمی‌نویسیم بلکه حاصلضرب آن عدد در ماتریس همانی با مرتبه مناسب را می‌نویسیم.

$$A^2+2A\neq A(A+2)$$

$$A^2+2A=A(A+2I)$$

تذکر: ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت حذف‌پذیری ندارد (حتی اگر $A\neq\bar{O}$ باشد) مگر آن که A وارون‌پذیر باشد، یعنی :

$$AB=AC \ \not\Rightarrow B=C$$

مثلاً:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

تذکر: حاصلضرب دو ماتریس غیر صفر می‌تواند صفر شود .

مثلاً:

$$\begin{bmatrix}a & a\\ -a & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & b\\ -b & -b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\bar{O}_{2\times 2}$$

لذا حاصلضرب دو ماتریس برابر صفر باشد لزومی ندارد یکی از آنها برابر صفر باشد .

ماتریس‌های تعویض‌پذیر یا جابه‌جا شونده :

ضرب ماتریسها در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نمی باشد . دو ماتریس A و B را تعویض‌پذیر (جابه‌جا شونده) گویند هر گاه $AB=BA$

در حالت کلی اتحادها در مورد ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشند مگر آن که ماتریس‌ها دارای این خاصیت باشند که ضرب آنها دارای خاصیت جابجایی باشد.

☜ مثال : اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a & b \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ مفروض باشند ، $a+b$ کدام است در صورتیکه B,A تعویض‌پذیر باشد؟

✍حل :

$$AB=BA \rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۲a-۱۵ & ۲b-۳۵ \\ ۵a+۶ & ۵b+۱۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲a+۵b & -۵a+۲b \\ ۶+۳۵ & -۱۵+۱۴ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{matrix} ۵a+۶=۴۱ \rightarrow a=۷ \\ ۵b+۱۴=-۱ \rightarrow b=-۳ \end{matrix}\right\} \rightarrow a+b=۴$$

حال این دو عدد موجب برابری سطرهای اول نیز می‌شوند.

نکته: در حالت کلی ماتریس‌هایی به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ با هم خانواده‌های خودشان و ماتریس‌هایی به صورت $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ نیز با هم خانواده‌های خودشان تعویض‌پذیرند. هم چنین ماتریس همانی **(I)** در هر مرتبه با ماتریس‌های مربع هم مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است.

توان‌های طبیعی یک ماتریس مربع :

اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، توان‌های طبیعی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{۱}=A$$
$$A^{۲}=A\times A$$
$$A^{۳}=A^{۲}\times A$$
$$\vdots$$
$$A^{m+۱}=A^{m}\times A$$

خواص :

۱) $A^{m}A^{n}=A^{n}A^{m}=A^{m+n}$

۲) $(A^{m})^{n}=A^{mn}$

۳) $(\lambda A)^{n}=\lambda^{n}A^{n} \qquad \lambda\in R$

٤) $I^{n}=I$

اما چون در ضرب ماتریس خاصیت جابه‌جایی لزوماً برقرار نمی‌باشد لذا تساوی $\mathbf{(AB)^n=A^nB^n}$ لزوماً برقرار نیست.

☜ مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ عنصر واقع در سطر دوم و ستون سوم $A^{۳}$ کدامست؟

✍حل :

برای به دست آوردن سطر دوم و ستون سوم $A^{۳}$، ابتدا سطر دوم $A^{۲}$ را با ضرب سطر دوم A در کلیه‌ی ستون‌های A به دست می‌آوریم.

$$A^{۲} \text{ سطر دوم } =\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲x \end{bmatrix}$$

سطر ایجاد شده را در ستون سوم A ضرب می‌کنیم.

$$A^{۳} \text{ درایه سطر دوم و ستون سوم } =\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \\ ۱ \end{bmatrix}=۳x$$

☜ مثال : اگر $A^{2} = 5A - 2I$ باشد، در این صورت A^{4} برحسب A کدامست؟

✍حل :

$$A^{3} = A^{2}.A = (5A - 2I)A = 5A^{2} - 2A = 5(5A - 2I) - 2A = 25A - 10I - 2A = 23A - 10I$$

$$A^{4} = A^{3}A = (23A - 10I)A = 23A^{2} - 10A = 23(5A - 2I) - 10A = 115A - 46I - 10A = 105A - 46I$$

☜ مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس A^{7} کدامست؟

✍حل :

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{6} = (-I)^{3} = -I^{3} = -I \;\rightarrow\; A^{7} = -A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

☜ مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و رابطه $A^{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A^{5} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد، حاصل $b + c$ کدامست؟

✍حل :

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \;\rightarrow\; A^{4} = (A^{2})^{2} = I^{2} = I \;\Rightarrow\; A^{5} = A^{4}A = IA = A$$

$$\rightarrow I \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

$$-c = 1 \quad -d = 6 \quad -a = 2 \quad -b = 4 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} c = -1 \\ d = -6 \\ a = -2 \\ b = -4 \end{matrix}\right\} \rightarrow\; b + c = -5$$

☜ مثال : اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{2} - A$ کدامست؟

✍حل :

$$A^{2} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{2} - A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

☜ مثال : هرگاه داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A^{2} = xA + yI$، قدرمطلق تفاضل اعداد y, x برابر کدام است ؟

✍حل :

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 2x \\ 3x & 4x+y \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x + y = 7 \\ 2x = 10 \rightarrow x = 5 \\ 3x = 15 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; y = 2$$

که این x و y باعث برقراری تساوی $4x + y = 22$ نیز می‌شوند، پس این تساوی قابل قبول است.

$$|x - y| = 3$$

دترمینان:

دترمینان یک ماتریس ۲×۲ به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=|A|=ad-bc$$

☜ **مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ آن گاه دترمینان ماتریس $A\times B$ چقدر است؟**

✍ **حل :**

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -10 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow |AB|=7\times 14-(6)(-10)=98+60=158$$

☜ **مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} m & -1 \\ -2 & m+1 \end{bmatrix}$ و $|A-I|=2+|A|$ باشد، m کدامست ؟**

✍ **حل :**

$$A-I=\begin{bmatrix} m & -1 \\ -2 & m+1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m-1 & -1 \\ -2 & m \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} |A-I|&=m(m-1)-2=m^2-m-2 \\ |A|+2&=m(m+1)-2+2=m^2+m \end{aligned}\right\} \Rightarrow m^2-m-2=m^2+m \rightarrow 2m=-2 \rightarrow m=-1$$

☜ **مثال : اگر $|A|\neq 0$ ، دترمینان ماتریس $A_{2\times 2}$ باشد ، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{2}{|A|}A$ کدام است؟**

✍ **حل :**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow |A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\frac{2}{|A|}A=\begin{bmatrix} \frac{2}{|A|}a_{11} & \frac{2}{|A|}a_{12} \\ \frac{2}{|A|}a_{21} & \frac{2}{|A|}a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \left|\frac{2}{|A|}A\right|=\frac{4}{|A|^2}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\frac{4}{|A|^2}\times|A|=\frac{4}{|A|}$$

نکته: با توجه به همین مسأله می‌توان در حالت کلی برای ماتریس‌های **۲×۲** گفت:

$$|\lambda A_{2\times 2}|=\lambda^2|A_{2\times 2}| \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

ماتریس وارون یا ماتریس معکوس:

اگر به ازای ماتریس مربعی A ، ماتریس منحصر به فرد B وجود داشته باشد به گونه‌ای که $AB = BA = I$ آنگاه B را معکوس ماتریس A نامیده و با A^{-1} نمایش می‌دهند. توجه کنید که A^{-1} عضو معکوس ضرب ماتریس می‌باشد، اما $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$. لذا $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

قضیه: معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته: شرط لازم و کافی برای معکوس‌پذیری ماتریس A آن است که $|A| \neq 0$

نکات و خواص:

۱) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

۲) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1} \qquad \lambda \neq 0$

۳) $(A^{-1})^{-1} = A$

توجه: رابطه $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ لزوماً برقرار نمی‌باشد.

☜ **مثال : ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ با چه شرطی وارون‌پذیر است؟**

✍**حل :**

شرط وارون‌پذیری ماتریس این است که: $|A| \neq 0$

$$\rightarrow |A| = (a+1)(a+2) - 2 = a^2 + 3a + 2 - 2 \neq 0 \ \rightarrow \ a(a+3) \neq 0 \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -3 \end{cases}$$

☜ **مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$، حاصل ab کدام است؟**

✍**حل :**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$\begin{matrix} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow ab = -\frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

چون $AA^{-1} = I$ می باشد ، لذا داریم :

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 2-4b \\ 0 & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow a = -1$$

$$2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

☜ مثال : اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس A کدامست؟

✍حل :

$$(A^{-۱})^{-۱}=A \Rightarrow (A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۱۲+۲۱}\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ ۷ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{۶}{۳۳} & -\frac{۳}{۳۳} \\ \frac{۷}{۳۳} & \frac{۲}{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(\frac{۱}{۳۳})^{۲}(۶\times۲+۲۱)=\frac{۱}{۳۳}$$

نکته: جالب است بدانید در حالت کلی $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$ است.

☜ مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ٤ & ۱ \\ ۷ & ۲ \end{bmatrix}$، $A-A^{-۱}$ کدام ماتریس است؟

✍حل :

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۷ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۸-۷=۱$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A-A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۷ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

☜ مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A|=-۱$، $A^{-۱}$ کدامست؟

✍حل :

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

☜ مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس $(AB)^{-۱}$ کدامست؟

✍حل :

$$(AB)^{-۱}=\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\right)^{-۱}=\left(\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\right)^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته: می‌توانستیم از رابطه‌ی $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$ نیز بهره بگیریم.

☜ مثال : اگر $۲A+I_{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $۲A^{-۱}$ چقدر است؟

✍حل :

$$۲A+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |۲A^{-۱}|=۲$$

☜ مثال : با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix}$ مقدار a کدام باشد تا دترمینان ماتریس $A^{-۱}$ برابر ۲ باشد؟

✍حل :

$$A^{-۱}=\frac{۱}{a+۲}\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{(a+۲)^{۲}}(a+۲)=\frac{۱}{a+۲}=۲ \Rightarrow a+۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

نکته: می‌توان از رابطه‌ی $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ نیز بهره گرفت:

$$\frac{1}{2}=a+2 \Rightarrow a=\frac{-3}{2}$$

☜ **مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ باشد عنصر واقع بر سطر دوم و ستون اول در وارون ماتریس $2A$ کدام عدد است؟**

✍**حل :**

$$2A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 10\end{bmatrix} \Rightarrow (2A)^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}10 & -6\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/5 & 1/5\\ 1 & -0/5\end{bmatrix}$$

نکته: می‌توان از رابطه‌ی $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$ نیز بهره گرفت:

$$(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/5 & 1/5\\ 1 & -0/5\end{bmatrix}$$

☜ **مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ آنگاه جواب معادله ی $AX=B$ کدام است؟**

✍**حل :**

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow IX=X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

☜ **مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(A^2)^{-1}$ کدام است؟**

✍**حل :**

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -12\\ -4 & 7\end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}=\frac{1}{49-48}\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}\rightarrow |(A^2)^{-1}|=49-48=1$$

☜ **مثال : اگر A یک ماتریس 2×2 معکوس پذیر باشد و در رابطهٔ $A^2=3A+I$ صدق کند، دترمینان ماتریس $A-A^{-1}$ کدام است؟**

✍**حل :**

$$A^2=3A+I \Rightarrow A(A-3I)=I$$

چون معکوس یک ماتریس در صورت وجود منحصر بفرد است، لذا ماتریس $A-3I$ معکوس ماتریس A است که بـا ضـرب کـردن A در آن حاصل برابر I شده است، لذا: $A^{-1}=(A-3I)$

پس:

$$A-A^{-1}=A-(A-3I)=3I \rightarrow |A-A^{-1}|=|3I|=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=9$$

کاربردهای ماتریس:

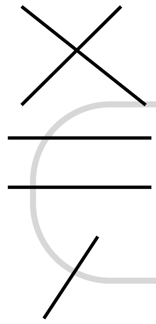
دستگاه دو معادله دو مجهول :

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_{۱} + a_{۱۲}x_{۲} = b_{۱} \\ a_{۲۱}x_{۱} + a_{۲۲}x_{۲} = b_{۲} \end{cases}$$

بیان ماتریسی دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت زیر است :

$$\begin{cases} a_{۱}x + b_{۱}y = c_{۱} \\ a_{۲}x + b_{۲}y = c_{۲} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{۱} & b_{۱} \\ a_{۲} & b_{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{۱} \\ c_{۲} \end{bmatrix}$$

تعبیر هندسی دستگاه فوق معادله‌ی دو خط در صفحه است لذا :



۱) $\dfrac{a_{۱}}{a_{۲}} \neq \dfrac{b_{۱}}{b_{۲}}$ $\Leftarrow$ دو خط متقاطعند $\Leftarrow$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

۲) $\dfrac{a_{۱}}{a_{۲}} = \dfrac{b_{۱}}{b_{۲}} \neq \dfrac{c_{۱}}{c_{۲}}$ $\Leftarrow$ دو خط موازی‌اند $\Leftarrow$ دستگاه جواب ندارد.

۳) $\dfrac{a_{۱}}{a_{۲}} = \dfrac{b_{۱}}{b_{۲}} = \dfrac{c_{۱}}{c_{۲}}$ $\Leftarrow$ دو خط منطبق‌اند $\Leftarrow$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

به بیان دیگر: $\begin{vmatrix} a_{۱} & b_{۱} \\ a_{۲} & b_{۲} \end{vmatrix} \neq ۰ \Leftarrow$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

$\begin{vmatrix} a_{۱} & b_{۱} \\ a_{۲} & b_{۲} \end{vmatrix} = ۰ \Leftarrow$ دستگاه جواب ندارد (یا بی‌شمار جواب دارد)

☜ مثال : دستگاه $\begin{cases} mx + ۲y = ۴ \\ (۱-m)x + ۳y = ۵ \end{cases}$ **با چه شرطی برای m فقط یک جواب دارد؟**

حل :

$$\frac{m}{۱-m} \neq \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳m \neq ۲-۲m \to ۵m \neq ۲ \to m \neq \frac{۲}{۵}$$

☜ مثال : اگر دستگاه $\begin{cases} (۲m-۱)x - y = ۱ \\ -۵x + (n-۲)y = ۲ \end{cases}$ **دارای بی شمار جواب باشد ، مقدار $n-m$ چقدر است؟**

حل :

$$\frac{۲m-۱}{-۵} = \frac{-۱}{n-۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ۲m = -\frac{۳}{۲} \to m = -\frac{۳}{۴} \\ n-۲ = -۲ \to n = ۰ \end{array}\right\} \to n-m = \frac{۳}{۴}$$

☜ مثال : به ازای چه مقدار از m، دستگاه معادلات زیر فاقد جواب (مبهم) می‌شود ؟

$$\begin{cases} (m-۱)x - ۳y = ۴m + ۲ \\ -x + (m+۱)y = m \end{cases}$$

حل :

$$\frac{m-۱}{-۱} = \frac{-۳}{m+۱} \neq \frac{۴m+۲}{m} \Rightarrow m^{۲} - ۱ = ۳ \to m^{۲} = ۴ \to m = \pm ۲$$

$$\begin{cases} m = ۲ \to \dfrac{-۳}{۲+۱} \neq \dfrac{۲+۲}{۲} \to m = ۲ & \text{قابل قبول است} \\ m = -۲ \to \dfrac{-۳}{-۲+۱} \neq \dfrac{-۲+۲}{-۲} \to m = -۲ & \text{قابل قبول است} \end{cases}$$

☜ مثال : به ازای چند مقدار برای m دستگاه $\begin{cases}(m+1)x-2y=m^2-2\\(m-3)y+3x=-1\end{cases}$ فاقد جواب است؟

✍حل :

$$\frac{m+1}{3}=\frac{-2}{m-3}\neq\frac{m^2-2}{-1}$$

$$m^2-2m-3=-6$$

$$m^2-2m+3=0$$

این معادله جواب ندارد $(\Delta<0)$، یعنی دو خط همواره متقاطعند و این دستگاه هرگز فاقد جواب نیست.

روش‌های حل دستگاه در معادله دو مجهولی (در صورت وجود جواب منحصر به فرد) :

۱) روش حذفی :

برای حل دستگاه دو معادله دو مجهول می‌توان یکی از متغیرها را بین دو معادله حذف نمود که در این صورت جواب‌های دستگاه $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ به صورت زیر در می‌آید:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

این روش به **دستور کرامر** مشهور است.

۲) روش ماتریس وارون :

$$AX=B\quad\Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B\quad\Rightarrow\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X=A^{-1}B\quad\Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}b_2 & -b_1\\ -a_2 & a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

☜ مثال : جواب‌های دستگاه $\begin{cases}2x+3y=5\\2x-y=1\end{cases}$ را بدست آورید.

حل:

روش اول: (روش حذفی) دو دستگاه را از هم کم می‌کنیم:

$$4y=4\rightarrow y=1\rightarrow 2x-1=1\rightarrow x=1$$

روش دوم: (روش کرامر)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-8}{-8}=1\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-8}{-8}=1$$

روش سوم:

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

مثال : در دستگاه $\begin{cases} x^2+xy=6 \\ y^2+xy=10 \end{cases}$ مقدار مثبت x کدام است؟

حل :

$$\begin{cases} x(x+y)=6 \\ y(y+x)=10 \end{cases} \rightarrow \frac{x}{y}=\frac{6}{10} \rightarrow y=\frac{5}{3}x \rightarrow x^2+x(\frac{5}{3}x)=6 \Rightarrow 3x^2+5x^2=18 \Rightarrow x^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

مثال : مقدار x از دستگاه معادلات $\begin{cases} \dfrac{xy}{2x+y}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{xy}{y-x}=-\dfrac{5}{7} \end{cases}$ کدام است؟

حل :

$$\frac{\frac{xy}{2x+y}}{\frac{xy}{y-x}}=\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{5}{7}}=-\frac{7}{3} \rightarrow \frac{y-x}{2x+y}=-\frac{7}{3} \Rightarrow 3y-3x=-14x-7y \Rightarrow 10y=-11x \rightarrow y=-\frac{11}{10}x$$

$$\frac{x(-\frac{11}{10}x)}{2x-\frac{11}{10}x}=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{-\frac{11}{10}x^2}{\frac{9}{10}x}=-\frac{11}{9}x=\frac{5}{3} \Rightarrow x=-\frac{9\times5}{3\times11}=-\frac{15}{11}$$