SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

فصل اول توابع برداری

یادآوری

دترمینان ماتریس $n\times n$

۱) $n=1$

$A=[a]$

$\det(A)=|A|=|a|=a$

$A=[-3] \Rightarrow |A|=-3$

۲) $n=2$

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = (2\times 3)-(5\times 6) = -24$

۳) $n\geq 3$ روش بسط

فرض می‌کنیم $n=3$

$A\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ G & H & i \end{vmatrix}$

برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس A به روش بسط:
ابتدا یک سطر یا یک ستون را به دلخواه رسم می‌کنیم
پس برای هر عنصر روی آن سطر، دترمینان ماتریسی
که از حذف سطر و ستونی که آن عنصر قرار دارد را در عدد
خود عنصر × $(-1)^{i+j}$ ضرب می‌کنیم که در آن i نشان‌دهنده‌ی سطر و j
شماره‌ی ستون آن عنصر است. پس این مقدار را برای همه عناصر
روی سطرها یا ستون انتخاب شده محاسبه می‌کنیم و در پایان همه
آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و حاصل دترمینان ماتریس است.

مثال: برای ماتریس ۳×۳ قبلی سطر اول را انتخاب می‌کنیم:

$|A| = a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & f \\ h & I \end{vmatrix} + b\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & I \end{vmatrix} + C(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$a\times(eI-hf) - b(dI-gf) + C(dh-ge)$

سطر اول

تعداد صفر بیشتر دارد

$A\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

سطر اول $2(\underbrace{5-12}_{-7}) + (-1)(\underbrace{1-18}_{-17}) + 2(\underbrace{2-15}_{-13}) + 3\big(2(1-18)+3(2-6)+2(6-1)\big)$ (17)

$-21 + 17 - 26 + 3(34) - 12 + 30$

YEKTA

بردارها:

تعریف (فضای اقلیدسی R^n)

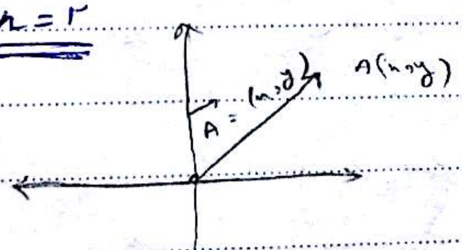
مجموعه همه n تایی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را که در آن مجموعه همه n تایی های مرتب $x_1 x_2 x_n$ را که در آن $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ باشد را فضای R^n می‌نامیم.

$$IR^2 = \{(x,y) \mid x,y \in IR\}$$
$$IR^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in IR\}$$

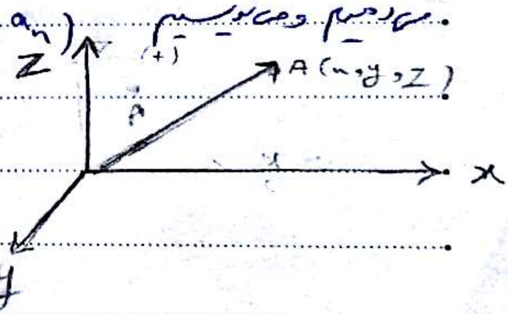
بردار: هر کمیتی که دارای اندازه (طول) و جهت باشد را بردار می‌نامیم مثل سرعت، شتاب و ...

بردارها را می‌توان در فضای R^n به صورت پاره خط جهت داری که نقطه‌ی $(0,0,\dots,0)$ را به نقطه‌ی $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ وصل می‌کند نمایش داد. این بردارها را اغلب با حروف بزرگ انگلیسی نشان می‌دهیم و می‌نویسیم $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$n=2$



$n=3$



در این درس اغلب با فضای IR^2 و IR^3 سروکار داریم بنابراین همه مفاهیم را حداکثر برای حالت سه بعدی مطرح می‌کنیم. واضح است که به راحتی می‌توان این مفاهیم را برای حالت های n بعدی نیز تعمیم داد.

خاصیت اصلی بردارها

دو بردار را هم اندازه یا هم ارز گوییم هرگاه دارای اندازه و جهت یکسان باشند.

* اگر نقطه‌ی ابتدایی بردارها غیر از مبدأ مختصات باشد می‌توان به راحتی بردار هم ارز آن را در نظر گرفت به طوری که نقطه‌ی ابتدایی آن مبدأ مختصات باشد. **مثال:** بردار $\vec{AB}$ را در نظر بگیرید که نقطه‌ی $A(a_1, a_2, a_3)$ و $B(b_1, b_2, b_3)$ وصل می‌کند در این صورت بردار $\vec{AB}$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\vec{AB} = ((b_1 - a_1), (b_2 - a_2), (b_3 - a_3))$$

مثال: $\vec{A} = (2,1,0)$ و $\vec{B}(5,2,4)$ باشد اندازه $\vec{AB}$

$(3,1,4)$

بردار $\vec{A}=(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{B}=(b_1, b_2, b_3)$ را در نظر بگیرید همچنین r یک عدد حقیقی باشد
در این صورت

۱) $-A=(-a_1, -a_2, -a_3)$ را قرینه ی A گویند

۲) ضرب عدد در بردار $r\vec{A}=(ra_1, ra_2, ra_3)$

۳) جمع دو بردار $\vec{A}+\vec{B}=((a_1+b_1), (a_2+b_2), (a_3+b_3))$

۴) (ضرب داخلی): ضرب داخلی دو بردار A و B را با $\vec{A}\cdot\vec{B}$ نمایش میدهیم و بصورت زیر محاسبه میکنیم

$\vec{A}\cdot\vec{B}=|a||b|\cos\theta$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

۱. خاصیت جابجایی دارد $A\cdot(rB)=r(A\cdot B)$

۲) $\vec{A}\cdot\vec{A}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$

۳) اندازه ی بردار $\vec{A}$ را با $|A|$ نمایش میدهیم و بصورت $|A|=\sqrt{A\cdot A}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

مثال: $\vec{A}=(1,2,3)$ و $\vec{B}=(2,4,1)$ باشد ضرب داخلی را بدست آورید؟

$|A|=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(3)^2}=\sqrt{14}$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=1\times2+2\times4+1\times3=13$

۵) بردار یکه: برداری که اندازه ی آن یک واحد باشد

نکته: از هر بردار غیر صفر $\vec{A}$ میتوانیم یک بردار هم جهت و هم راستا با $\vec{A}$ بسازیم این بردار را با $\vec{e}_A$ نمایش میدهیم بصورت زیر نمایش میدهیم معروف ترین بردارهای یکه بردار i و j و k میباشند

بردار یکه $\vec{e}_A=\frac{\vec{A}}{|A|}$

$i=(1,0,0)$

$j=(0,1,0)$

$k=(0,0,1)$

در این صورت هر بردار $A=(a_1, a_2, a_3)$ را میتوان بصورت $a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)$

یا بصورت $a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ نیز میتوان نوشت

$\vec{A}=(2,3,1)=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$

زاویه بین دو بردار:

دو بردار a و b را در نظر بگیرید زاویه ی θ بین این دو بردار باشد داریم $\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}$

تصویر بردار A بر بردار B

تصویر بردار A بر روی B $\quad \text{Proj}_{\vec B}^{\vec A} = \left(\frac{\vec A\cdot\vec B}{|b|^2}\right)\vec b$

تمرین: رابطه بالا را اثبات کنید.

زوایای هادی (کسینوس های هادی)

بردار $A=(a_1, a_2, a_3)$ را در نظر بگیرید اگر α زاویه بین $\vec A$ و محور x ها باشد و β زاویه بین A و محور y و γ زاویه بین A و محور z ها باشد در این صورت

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|A|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|A|} \quad و \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|A|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

تمرین: آیا برداری با زوایای $(\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4})$ وجود دارد $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$$\cos^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1$$

وجود دارد

نامساوی کوشی شوارتز: $\quad \vec A\cdot\vec B \leq |\vec A|\,.\,|\vec B|$

نامساوی مثلث

$$|\vec A+\vec B| \leq |\vec A| + |\vec B|$$

ضرب خارجی:

دو بردار $\quad \vec A = (a_1, a_2, a_3)$

را در نظر بگیرید ضرب خارجی $\vec A$ و $\vec B$ را با $\vec A\times\vec B$ نشان $\quad \vec B = (b_1, b_2, b_3)$

می دهیم و به صورت زیر محاسبه می کنیم: ضرب خارجی

$$\vec A\times\vec B = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec i - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec j + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec k$$

ضرب خارجی دو بردار یک بردار است که بر هر دو بردار عمود است و جهت آن با قاعده‌ی دست راست بدست می‌آوریم و اندازه ضرب خارجی ۲ بردار

1) $|A \times B| = |A| \times |B| \cdot \sin\theta$

2) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

3) $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$

4) $|A \times B|^2 = |A|^2 |B|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$

نکته

تعمیم: دو بردار A و B بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ مساوی صفر باشد

دو بردار A و B زمانی با هم موازی اند که یک مضربی از هم باشند

$A = (a_1, a_2, a_3)$ $\quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$B = (b_1, b_2, b_3)$

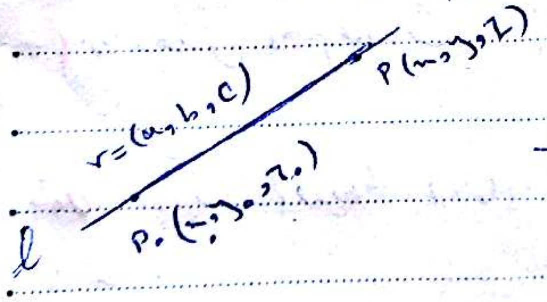
ضرب سه‌گانه: سه بردار $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ را در نظر بگیرید ضرب سه‌گانه بین این سه بردار را با $A \cdot (B \times C)$ نمایش می‌دهیم و محاسبه می‌کنیم

$A \cdot (B \times C) =$

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ دترمینانش به صورت زیر است.

معادله خط و صفحه در فضای R^3

معادله خط: برای نوشتن معادله‌ی خط راست L در فضای R^3 به یک نقطه‌ی $P = (x_0, y_0, z_0)$ متعلق به خط راست و یک بردار (a, b, c) $\vec{v}$ که موازی خط راست L است نیاز داریم در اینجا بردار $\vec{v}$ را بردار هادی خط راست می‌نامیم.



$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ معادله‌ی دکارتی خط راست l است.

توجه: اگر در معادلات بالا یکی از مخرج های کسر صفر بود صورت کسر را مساوی با صفر قرار می‌دهیم.

مثال: اگر $b=0$ بود $y-y_0=0$ ⇐ $y=y_0$ و $\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}$

معادلهٔ پارامتری معادلهٔ خط راست:

اگر هر سه کسر را در رابطهٔ * را برابر با t قرار دهیم

$$\frac{x-x_0}{a}=t,\quad \frac{y-y_0}{b}=t,\quad \frac{z-z_0}{c}=t \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \Leftarrow$$

معادلهٔ پارامتری خط راست

مثال: معادلهٔ خط راستی که از دو نقطهٔ $A(1,2,3)$ و $B(2,4,-1)$ می‌گذرد را بنویسید؟

$\underset{\text{بردار هادی}}{L}=\overrightarrow{AB}=(1,2,-4)$ ⇐ معادلهٔ خط $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-4}$

$$x=1+t$$
$$y=2+2t$$
$$z=3-4t$$

توازی بین دو خط راست

دو خط L_1 و L_2 که به ترتیب از نقاط $P_1(x_1,y_1,z_1)$ و $P_2(x_2,y_2,z_2)$ می‌گذرند را در نظر بگیرید

همچنین بردارهای $\vec{v}_1=(a_1,b_1,c_1)$ و $\vec{v}_2=(a_2,b_2,c_2)$ بردار هادی دو خط L_1 و L_2

هستند در این صورت ۱) دو خط راست موازیند اگر بردار هادی آنها موازی باشند $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_2}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

۲) دو خط راست متنافرند (نه موازی نه متقاطع‌اند)

تشخیص خط متنافر ⇐ هرگاه $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\neq 0$ باشد

۳) دو خط راست L_1 و L_2 بر هم عمودند هرگاه الف) متنافر نباشند

ب) بردار هادی بر هم عمود باشند $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$

مثال: خط گذرنده از نقاط $(1,1,4)$ و $(5,0,2)$ نسبت به خط $\frac{x}{7}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{3}$ چه وضعیتی دارند؟

$\vec{v}_2=\overrightarrow{PD}=(1,-1,-1)$ $\qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$

$\vec{v}_1=(7,4,3)$ $\qquad \frac{x}{7}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{3}$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ $\qquad v_1\times v_2$

متنافرند $\overrightarrow{PP_2}\cdot(v_1\times v_2)=(-1,2,-10)\cdot(1\times 4-(-1)\times 3\ ,\ 1\times 3-(-7)\ ,\ 1\times 4-(-1)7)\neq$

$(-1,2,-10)\cdot(1,-10,11)=-1-20-110=-131$

$(1,-1,-1)\cdot(7,4,3)=7-4-3=0$

ولی دو خط بر هم عمود نیستند چون متنافرند

فاصله‌ی یک نقطه از خط راست

فاصله‌ی نقطه‌ی $P_1(x_1,y_1,z_1)$ از این خط راست گذرنده از نقطه‌ی $P_0(x_0,y_0,z_0)$ و بردار هادی $\vec{v}=(a,b,c)$ برابر است با

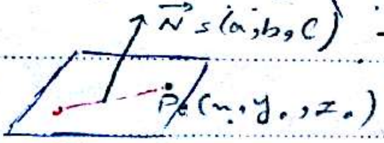
$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

اثبات: $\sin\theta=\frac{d}{|P_0P_1|} \Longrightarrow d=|\overrightarrow{P_0P}|\cdot\sin\theta \Longrightarrow d=\frac{|P_0P|\,|v|\sin\theta}{|v|}$

$$=\frac{|P_0P_1\times v|}{|v|}$$

معادله‌ی صفحه

برای نوشتن معادله‌ی یک صفحه در فضای R^3 به یک نقطه‌ی واقع در صفحه مثل $P_0(x_0,y_0,z_0)$ و یک بردار عمود بر صفحه (یعنی برداری که بر همه‌ی بردارهای واقع در صفحه عمود باشد) که به بردار نرمال معروف است و با N نمایش می‌دهیم نیاز است. بردار نرمال بر خط روی آن صفحه نیز عمود است.



$(\overrightarrow{PP_0}\cdot\vec{N})=0$ عمودند

$PP_0\perp\vec{N}$

$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(a,b,c)=0$

معادله‌ی صفحه $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

اگر سه نقطه‌ی $P_0(x_0,y_0,z_0)$ و $P_1(x_1,y_1,z_1)$ و $P_2(x_2,y_2,z_2)$ واقع در یک صفحه را داشته باشیم بردار نرمال به صورت $\vec{n}=\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_1P_2}$

فصل مشترک دو صفحه

1) دو صفحه‌ی P_1 و P_2 موازی هستند در صورتی که بردارهای نرمال آنها نیز موازی باشند یعنی $\vec{n}_1\parallel\vec{n}_2$.

اگر دو صفحه‌ی P_1 و P_2 موازی نباشند متقاطع‌اند.

فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع یک خط راست است.

بردار هادی

در این صورت بردار هادی این خط راست عمود بر بردارهای نرمال $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ است پس $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

برای بدست آوردن نقطه‌ای واقع بر فصل مشترک دو صفحه معادلات

$P_1 = ax_1 + by_1 + cz_1 = d_1$

$P_2 = ax_2 + by_2 + cz_2 = d_2$

ابتدا یکی از متغیرها را به‌عنوان انتخاب می‌کنیم در این صورت دستگاه معادلات بالا به صورت دو معادله و دو مجهول تبدیل می‌شود که محل آن نقطه‌ای x_0 و y_0 و z_0 بدست می‌آید

مثال: معادله فصل مشترک دو صفحه زیر را بدست آورید

$P = 2x + 3y - z = 2 \quad \vec{N}_1(2, 3, -1)$

$P\ 5x - 4y + 6z = 2 \quad \vec{N}_2(5, -4, 6)$ موازی نیستند $n_1 \not\parallel n_2$

بردار هادی $(14, 17, -23)$ فصل مشترک $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$x = 0 \Rightarrow 3y - z = 2 \Longrightarrow 18y - 6z = 12$

$-4y + 6z = 2 \qquad -4y + \cancel{6z} = 2$

$P = (0, 1, 1)$ $\qquad 14y = 14 \quad y = 1$

$v = (14, -17, -23)$ $\qquad 18 - 6z = 12$

$6 = -6z$

$\frac{x-0}{14} = \frac{y-1}{-17} = \frac{z-1}{-23}$ $\qquad z = +1$

فاصله یک نقطه از صفحه

فاصله نقطه $P_2(x_2, y_2, z_2)$ از صفحه $P_1 = ax + by + cz = d$ برابر است با:

$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$(-5, 2)$

فصل ۲

توابع برداری

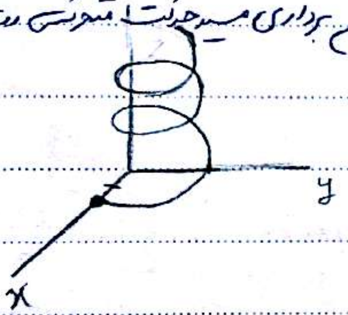
در این بخش با توابعی با فرم $f:R\to R^n$ آشنا می‌شویم که ورودی آن یک متغیر و خروجی آن یک بردار در فضای R^n است. به این دسته از توابع، توابع برداری گفته می‌شود.

در این جا ۲ حالت خاص $f:R\to R^2$ و $f:R\to R^3$ بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در حالت خاص $f:R\to R^3$ می‌توان این گونه تعبیر نمود که یک متحرک بر روی منحنی C که مسیر حرکت آن می‌باشد در حال حرکت است. به وضوح با گذشت زمان (t) مختصات مکان این متحرک تغییر می‌کند یعنی x و y و z توابعی از زمان t هستند. به عبارت دیگر $x=x(t)$ و $y=y(t)$ و $z=z(t)$ حال اگر مبدأ مختصات را به نقاط متحرک وصل کنیم بردارهایی به دست می‌آید به همین دلیل به این توابع، توابع برداری می‌گویند.

به عنوان مثال:

تابع برداری $\vec{R}(t) = (2\cos t, \sin t, t)$ را در نظر بگیرید. این تابع برداری مسیر حرکت متحرکی روی منحنی زیر را نمایش می‌دهد؟
$t=0 \Rightarrow \vec{R}(0) = (2,0,0)$



توجه: تابع برداری $f:R\to R^n$ در حالت کلی به صورت $f(t)=(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ تعریف می‌شود.

تعریف دامنه تابع: دامنه‌ی تابع $f:R\to R^n$ به صورت زیر مشخص می‌شود: دامنه‌ی f برابر است با: $D_{f_1}\cap D_{f_2}\cap\dots\cap D_{f_n}$

مثال: دامنه‌ی توابع برداری زیر را تعیین کنید؟

$f(t) = \left(\frac{t-1}{t+3}, \ln\left(\frac{1}{t-2}\right), \sqrt{t^2-1}\right)$ ادامه مثال

$f_1(t)=\frac{t-1}{t+3} \Rightarrow D_{f_1}=\mathbb{R}-\{-3\}$, $f_2(t)=\ln\left(\frac{1}{t-2}\right) \Rightarrow D_{f} = \frac{1}{t-2}>0 \Rightarrow t-2>0$

$D_{f_1} = t>2 = (2,+\infty)$

$$f_3(t)=\sqrt{t^2-1} \Longrightarrow D_{f_3} = t^2-1\geq 0 \Longrightarrow t^2\geq 1 \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} t\geq 1 \\ t\leq -1\end{matrix}}$$

$$D_{f_3} = (-\infty , -1] \cup [1 , +\infty)$$

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} \Longrightarrow (2 , +\infty)$$

حد تابع $\vec{f}(t)$ یا حد تابع برداری $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ در نقطه‌ی $t=t_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t_1) , \lim_{t\to t_0} f(t_2) , \lim_{t\to t_0} f(t_3)\right)$$

* لازمه‌ی وجود حد تابع برداری $R^n \to R$ این است که حد هر یک از مؤلفه‌ها موجود باشد.

حد توابع برداری زیر را در صورت وجود بیابید؟

1) $f(t) = \left(te^{-2t} , \dfrac{\sin t}{2t} , \cos t\right)$ $\quad t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} te^{-2t} = 0 \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{t\to 0}\cos t = 1$$

بنابراین حد هر سه مؤلفه موجود است پس تابع حد دارد

$$\left(0 , \frac{1}{2} , 1\right)$$

2) $\vec{R}(t) = \left(\dfrac{t^2-1}{t+1} , \sin\left(\dfrac{1}{t}\right) , \sqrt{t}\right)$ $\quad t\to 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2-1}{t+1} = -1 , \quad \lim_{t\to 0}\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \text{وجود ندارد} \qquad \lim_{t\to 0}\sqrt{t} = 0$$

پس حد وجود ندارد

تعریف: تابع برداری $f:R\to R^n$ را در نظر بگیرید در این صورت انتگرال f به صورت زیر است

$$\int \vec{f}(t)\,dt = \left(\int f_1(t)\,dt , \int f_2(t)\,dt , \dots \int f_n(t)\,dt\right) + \vec{C}$$

به طوری که $(c_1 , c_2 , \dots , c_n) = \vec{C}$

YEKTA

اگر $f(t) = (t^3, t\sin t, e^{2t})$ در این صورت داریم:

$$\int f(t)\,dt = \int t^3\,dt\ ,\ \int t\sin t\,dt\ ,\ \int e^{2t}\,dt$$

$$\int t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\ ;\ \int e^{2t} = \frac{1}{2}e^{2t}\ ,$$

$$\int t\sin t\,dt = \begin{array}{c|l} t & \sin t \\ \hline 1 & -\cos t \\ 0 & -\sin t \end{array} = \int t\sin t = -t\cos t + \sin t$$

$$\left(\frac{t^4}{4}\ ,\ -t\cos t + \sin t\ ,\ \tfrac{1}{2}e^{2t}\right)$$

مشتق توابع برداری:

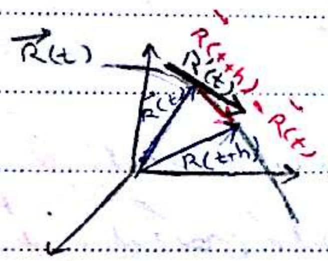
فرض کنید $R(t) = (x(t)i + y(t)j + Z(t)k)$ در این صورت مشتق این تابع برداری خود یک بردار است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{R}'(t) = x'(t)i + y'(t)j + Z'(t)k$$

$$\vec{R}''(t) = x''(t)i + y''(t)j + Z''(t)k$$

$\vdots$

تعبیر هندسی مشتق:



$$R'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{R}(t+h) - \vec{R}(t)}{h}$$

توجه: از دیدگاه فیزیک بردار $R'(t)$ را بردار سرعت متحرک می‌نامیم و اندازه‌ی بردار سرعت را سرعت یا تندی می‌نامیم:

$\vec{v}(t) = \vec{R}'(t)$ بردار سرعت

و به بعد $\vec{v}(t)$ نمایش می‌دهیم.

$|\vec{v}(t)| = |R'(t)|$ تندی یا سرعت در لحظه‌ی t

توجه: با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که بردار سرعت در لحظه‌ی t همیشه مماس بر منحنی نمایش $R(t)$ در لحظه‌ی t است.

به عنوان مثال: بردار $R(t) = (3t, 4\sin t, 4\cos t)$ مکان یک متحرک را در لحظه‌ی t نمایش می‌دهد مطلوب است محاسبه بردار سرعت و سرعت جسم در لحظه‌ی $t = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{v}(t) = (3, 4\cos t, -4\sin t)$$

$$|\vec{v}(t)| = (3, 5, -4)$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{9 + 16\cos^2 t + (-4\sin t)^2} = \sqrt{9 + 16(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1})} = \sqrt{25} = 5$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی به معادلات پارامتری $R(t) = (2\cos t, \sin t, t)$ در نقطه $t = \frac{\pi}{2}$ را بدست آورید؟

برای نوشتن معادله خط مماس بر منحنی $\vec{R}(t)$: $v(t) = m = R'(t) = (-2\sin t, \cos t, 1) = (-2, 0, 1)$

در نقطه $t = t_0$ از نقطه $\vec{R}(t_0)$ و بردار هادی $v(t) = R'(t)$ استفاده میکنیم

$$A = (2\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) =$$

$$A_0 = (0, 1, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{x}{-2} = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{1}, \quad y = 1$$

$$\begin{cases} x = 0 - 2t \\ y = 1 + 0t \\ z = \frac{\pi}{2} + t \end{cases}$$

۹۶/۱۲/۵

بردار یکه مماس بر منحنی

بردار یکه مماس بر منحنی C که در آن C نمایش تابع برداری $\vec{R}(t)$ است را با نماد $T(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|}$$

توجه: اندازه $T(t)$ برابر یک است.

نکته: از آنجایی که اندازه $T(t)$ برابر یک است میتوان نشان داد که بردارهای $T(t)$ و $T'(t)$ بر هم عمودند. فرض کنید: $\vec{T}(t) = (A(t), B(t), C(t))$ و میدانیم که $|T(t)| = 1$

$$\Longrightarrow \sqrt{A^2(t) + B^2(t) + C^2(t)} = 1 \Longrightarrow A^2(t) + B^2(t) + C^2(t) = 1$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2A(t)\cdot A'(t) + 2B(t)\cdot B'(t) + 2C(t)\cdot C'(t) = 0$$

$$2(A(t)\cdot A'(t) + B(t)\cdot B'(t) + C(t)\cdot C'(t)) = 0$$

$$(A(t), B(t), C(t)) \cdot (A'(t), B'(t), C'(t)) = 0$$

$$T(t)\cdot T'(t) = 0 \Longrightarrow \boxed{T(t) \perp T'(t)}$$

بردار یکه قائم

با توجه به نکته ی یاد شده بردار یکه ی قائم بر منحنی بصورت زیر تعریف می شود. بردار یکه ی قائم بر منحنی $\vec{R}(t)$ را با $\vec{N}(t)$ نمایش می دهیم و بصورت زیر نمایش می دهیم.

$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

مثال: مطلوب است محاسبه ی بردار یکه ی قائم بر منحنی $\vec{R}(t) = (3\cos(2t), 5t, 3\sin(2t))$ در نقطه ی $t = \frac{\pi}{2}$ را بدست آورید.

$$R'(t) = (-6\sin(2t), 5, 6\cos(2t))$$

$$|R'(t)| = \sqrt{(-6\sin 2t)^2 + 5^2 + (6\cos 2t)^2} = \sqrt{36\sin^2 2t + 25 + 36\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$$

$$\vec{T}(t) = \left(\frac{-6\sin 2t, 5, 6\cos 2t}{\sqrt{61}}\right)$$ بردار یکه مماس بر منحنی

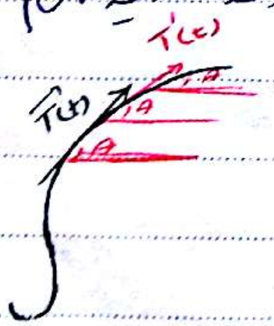
$$T'(t) = \left(\frac{-12}{\sqrt{61}}\cos 2t, 0, \frac{-12}{\sqrt{61}}\sin 2t\right)$$

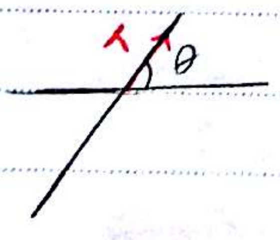
$$|T'(t)| = \sqrt{\left(-\frac{12}{\sqrt{61}}\cos 2t\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{12}{\sqrt{61}}\sin 2t\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{61}} = \frac{12}{\sqrt{61}} \Rightarrow$$ بردار یکه قائم

$$\vec{N}(t) = (-\cos 2t, 0, -\sin 2t) \Longrightarrow \vec{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, 0)$$

انحنای منحنی

فرض کنید C منحنی نمایش تابع برداری $R(t)$ باشد در این صورت تغییرات زاویه بین بردار سرعت (یکه مماس) بر منحنی در هر نقطه با جهت مثبت محور x ها را انحنا می گوییم.





انحنا = ۰

توجه: از روی شکل های بالا مشاهده می شود که انحنای خط راست برابر صفر و انحنای یک دایره برابر با یک مقدار ثابت است

تعریف ریاضی: بردار انحنای تابع برداری $\vec{R}(t)$ از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$\vec{k}(t) = \frac{T'(t)}{|\vec{v}(t)|}$$

انحنای تابع برداری $\vec{R}(t)$ را با $k(t)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$k(t) = |\vec{k}(t)|$$ طای منحنی

تمرین: نشان دهید انحنای خط راست $y = ax + b$ برابر صفر است.

SUBJECT: Sa Su Mo Tu We Th Fr DATE: / /

مثال: نشان دهید انحنای $y=ax+b$ همواره صفر است؟

* ابتدا باید فرم پارامتری منحنی $y=f(x)$ را به صورت $\vec{R}(t)=x(t)+y(t)$

$\vec{R}(t)=(t, f(t))=t\vec{i}+f(t)\vec{j}$

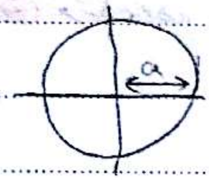
در اینجا

$R(t)=(t, at+b)$

$|v(t)|=R'(t)=(1, a) \Longrightarrow |R'(t)|=\sqrt{1+a^2}$

$$T(t)=\frac{R'(t)}{|R'(t)|}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

$$T'(t)=(0, 0) \Longrightarrow k(t)=\frac{T'(t)}{|v(t)|}=\left(\frac{0}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{0}{\sqrt{1+a^2}}\right)=(0, 0) \Rightarrow k(t)=0$$



انحنای دایره $x^2+y^2=a^2$ را بیابید.

بطور کلی برای نوشتن فرم پارامتری دایره‌های به شکل $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$:

$\underbrace{x-\alpha}_{r\cos t}$, $\underbrace{y-\beta}_{r\sin t}$

$x-\alpha=r\cos t$, $r\sin t=y-\beta$

$x=r\cos t+\alpha$, $y=r\sin t+\beta$

$\boxed{x=a\cos t}$ $\boxed{y=a\sin t}$

$R(t)=(a\cos t, a\sin t)$

$R'(t)=(-a\sin t, a\cos t)$

$$T(t)=\frac{R'(t)}{|R(t)|}=\frac{(-a\sin t, a\cos t)}{\underbrace{\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}}_{=a}}$$

$T(t)=(-\sin t, \cos t)$

$T'(t)=(-\cos t, -\sin t)$

$$k(t)=\frac{T'(t)}{R'(t)}=\frac{(-\cos t, -\sin t)}{(-a\sin t, a\cos t)}=\left(\frac{1}{a}\cot t, -\frac{1}{a}\tan t\right)$$

انحنای دایره $|k(t)|=\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{a}$

نکته: برای پارامتری کردن بیضی به فرم $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ به صورت زیر عمل می‌کنیم $\frac{x-\alpha}{a}=\cos t$

$\frac{y-\beta}{b}=\sin t$

$x=\alpha+a\cos t$, $y=\beta+b\sin t$

توجه!: در حالت کلی محاسبه انحنای منحنی با استفاده از $k(t)$ کار مشکلی است. برای رفع این مشکل می‌توان نشان داد که به دو فرم زیر در نظر گرفت ① انحنای (کاپا) یک تابع برداری مانند $\vec{R}(t)$ و $\mathbb{R}^3$ را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$k(t)=\frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^3}=\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

② فرمول انحنای منحنی در قسمت ۱ را می‌توان در توابع برداری $R(t)=(x(t), y(t))$ در فضای $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر خلاصه کرد:

$$k(t)=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

③ فرمول اثبات شده در قسمت (۲) را می‌توان برای منحنی‌هایی به فرم $y=f(x)$ در فضای $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر نوشت:

$$\vec{R}(t)=(t, f(t)) \Longrightarrow x=t \Longrightarrow y(x)=f(t)$$

$$k(t)=\frac{|1\cdot f''(t)-\cancel{f'(t)\times 0}|}{(1^2+f'^2(t))^{\frac{3}{2}}}=$$

$$k(t)=\frac{|f''(t)|}{(1^2+f'^2(t))^{\frac{3}{2}}}\simeq\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال: انحنای منحنی $R(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ را در نقطه‌ی $t=0$ بیابید؟

روش ۱

$$R'(t)=\vec{i}+2t\vec{j}+3t^2\vec{k} \quad (1, 2t, 3t^2) \Longrightarrow |R'(t)|=1$$

$$R''(t)=0+2\vec{j}+6t\vec{k} \quad (0, 2, 6t) \Longrightarrow |R''(t)|=2$$

$$k(t)=\frac{(6t^2, -6t, 2)}{1}$$

$$|k(t)|=\sqrt{(2)^2}=\underline{\underline{2}}$$

روش ۲

$$R'(t)=(1, 2t, 3t^2)$$

$$|R'(t)|=\sqrt{1+4t^2+9t^4} \Longrightarrow T(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\right)$$

$$T'(t)=\ldots$$

$$k(t)=\frac{T'(t)}{R'(t)} \Longrightarrow |k(t)|$$

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

فرض کنید $\boxed{\vec{a}(t) = \vec{R}''(t)}$ بردار شتاب متحرک در لحظه‌ای از مسیر باشد همچنین $\nu(t) = |v(t)|$

در این صورت می‌توان بردار شتاب $\vec{a}(t)$ را در راستای بردارهای $N(t)$ و $T(t)$ تجزیه کرد یعنی $\vec{a}(t)$

را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{a}(t) = a_T(t)\,T(t) + a_N(t)\,N(t)$$

که در آن $a_T(t)$ مولفه مماسی شتاب و $a_N(t)$ مولفه قائم شتاب نامیده می‌شود و می‌توان نشان داد که

$$a_T(t) = \frac{d\nu(t)}{dt} \qquad a_N(t) = k(t)\,[\nu(t)]^2$$

فرض کنید C منحنی تابع با ضابطه $y = e^x$ باشد مطلوب است محاسبه بردار $T(t)$ و $\vec{N}(t)$ و $\vec{K}(t)$

و $k(t)$ و $a(t)$ و $a_N(t)$ و $a_T(t)$؛

معادله پارامتری $y = e^x$ به صورت $\vec{R}(t) = (t, e^t)$

1) $T(t) = \dfrac{R'(t)}{R(t)}$

$$R'(t) = (1, e^t)$$

$$|R'(t)| = (1 + e^{2t})^{1/2}$$

$$T(t) = \left(\frac{1}{(1+e^{2t})^{1/2}}, \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{1/2}}\right) = \left((1+e^{2t})^{-1/2}, e^t(1+e^{2t})^{-1/2}\right)$$

2) $N(t) = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|} \Rightarrow T'(t) \Rightarrow l_1 = -e^{2t}(1+e^{2t})^{-3/2}$

$$l_2 = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{1/2}} - \frac{e^{3t}}{(1+e^{2t})^{3/2}}$$

$$\frac{e^t(1+e^{2t}) - e^{3t}}{(1+e^{2t})^{3/2}} = \frac{e^t + \cancel{e^{3t}} - \cancel{e^{3t}}}{(1+e^{2t})^{3/2}} = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}$$

$$T'(t) = \left(-e^{2t}(1+e^{2t})^{-3/2}, \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}\right)$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\left(\frac{-e^{2t}}{(1+e^{2t})^{3/2}}\right)^2 + \left(\left(\frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}\right)\right)^2} = \sqrt{-\frac{e^{4t}}{(1+e^{2t})^3} + \frac{e^{2t}}{(1+e^{2t})^3}}$$

$$\sqrt{\frac{e^{2t}\left(e^{2t}+1\right)}{(1+e^{2t})^3}} = \frac{e^t}{(1+e^{2t})}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{\left(\frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}, \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}\right)}{\left(\frac{e^t}{1+e^{2t}}\right)} =$$

$$\left(-(1+e^{2t})^{-1/2} \cdot e^t, (1+e^{2t})^{-1/2}\right)$$

(3) $$\vec{k}(t) = \frac{T'(t)}{} = \left(\frac{-\frac{e^{2t}}{(1+e^{2t})^{3/2}}}{(1+e^{2t})^{1/2}}, \frac{\frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}}{(1+e^{2t})^{1/2}}\right) = \left(\frac{-e^{2t}}{(1+e^{2t})^2}, \frac{e^t}{(1+e^{2t})^2}\right)$$

4) $$k(t) = |\vec{k}(t)| = \sqrt{\frac{e^{2t}}{(1+e^{2t})^2}} = \sqrt{\left(\frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}\right)^2} = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}$$

5) $$\vec{a}(t) = R''(t) \Longrightarrow (1, e^t) \Longrightarrow R''(t) = (0, e^t)$$

6) $$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \cancel{2}\cdot\cancel{\tfrac{1}{2}}(1+e^{2t})^{-1/2} \cdot e^{2t} = \frac{e^{2t}}{(1+e^{2t})^{-1/2}}$$

$$v(t) = |v(t)| = |R'(t)| = (1+e^{2t})^{1/2}$$

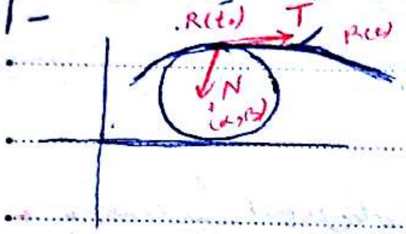
7 $$a_N(t) = k(t)\, v(t)^2 = \left(\frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}\right)(1+e^{2t}) = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{1/2}}$$

نکته: برای حل مثال شکل بعد

$$\vec{a}(t) = a_T(t)\vec{T} + a_N(t)\vec{N}$$

دایره بوسان

تعریف: فرض کنید C منحنی باشد تابع برداری $R(t)$ در صفحه باشد در این صورت متناظر یک دایره بر منحنی C در هر نقطه مانند میتوان رسم کرد که در آن نقطه بیشترین تماس ممکن را داشته باشد یعنی بردار یکه مماس بر منحنی در نقطه ی مورد نظر همان بردار یکه مماس بر دایره خواهد بود دایره ی مورد نظر را دایره بوسان می نامیم.



تعریف: اگر $k(t)$ انحنای تابع برداری $R(t)$ باشد بطوری که $k(t) \neq 0$ باشد آنگاه شعاع انحنا (شعاع دایره بوسان) را با $\rho(t)$ نمایش می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

معادله دایره بوسان: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

برای نوشتن معادله دایره بوسان به شعاع دایره و مرکز آن نیاز داریم با توجه به تعریف شعاع دایره بوسان در لحظه $t=t_0$ داریم $\rho(t_0) = \frac{1}{k(t_0)}$ در نظر می‌گیریم و برای بدست آوردن مرکز دایره بوسان یعنی (α,β) بصورت زیر عمل می‌کنیم

$$(\alpha,\beta) = \vec{C}(t_0) = \vec{R}(t_0) + \rho(t_0)\,\vec{N}(t_0)$$

پس معادله دایره ی بوسان بصورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \rho(t)^2$ نوشته می‌شود.

مثال: دایره ی بوسان را برای منحنی $y=e^x$ در نقطه $(0,1)$ بیابید. روش ۱

$$y=e^x \longrightarrow R(t)=(t,e^t)$$

$$k(t) = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}$$

نقطه ی $(0,1)$ یعنی $x=0$ و $y=1$

$$t_0=0 \Longrightarrow k(0)=\frac{e^0}{(1+e^0)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\rho(0) = \frac{1}{k(t)} = 2\sqrt{2}$$

در مثال قبل دیدیم که $N(t)$ داریم بصورت زیر:

$$\vec{N}(t) = \left(\frac{-e^t}{(1+e^{2t})^{1/2}}, \frac{1}{(1+e^{2t})^{1/2}}\right) \Longrightarrow N(0) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$C(t_0) = R(t_0) + \rho(t_0) N(t_0)$

$$(0,1) + 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0,1) + (-2,2) = (-2,3)$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

همانطور که مشاهده می‌شود، برای نوشتن دایره بوسان هم محاسبات بردار $N(t)$ سخت و زمان‌بر است. لذا این دو روش بعدی را برای محاسبه معادله دایره بوسان ارائه می‌شود.

روش ۲)

* با توجه به اینکه انحنای دایره بوسان و منحنی $y = f(x)$ در نقطه تماس با هم برابرند و شیب خط مماس منحنی (y') با هم برابر است. همچنین می‌توان نتیجه گرفت $k(t) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ که مشتق دوم دایره بوسان و منحنی $y = f(x)$ در نقطه تماس نیز با هم برابر است. لذا می‌توان نتیجه گرفت که با دوبار مشتق گیری از معادله دایره بوسان که $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ است، مرکز دایره را بدست می‌آوریم.

$y'(t_0)_{\text{دایره}} = y'(t_0)_{\text{منحنی}}$

$$\frac{|y''|_{\text{دایره}}}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|y''|_{\text{منحنی}}}{(1+y'^2)^{3/2}} \Longrightarrow |y''|_{\text{دایره}} = |y''|_{\text{منحنی}}$$

مثال: در مثال قبل با این روش دایره بوسان را برای منحنی $y = e^x$ در نقطه $(0,1)$ با روش دوم بدست آورید؟

$$\begin{cases} y = e^x \Longrightarrow y' = e^x \Longrightarrow y'' = e^x \\ y(0) = e^0 = 1 \Longrightarrow y' = 1 \Longrightarrow y'' = 1 \end{cases}$$

$$k(0) = \frac{|y''(0)|}{(1+y'(0))^{3/2}} = \frac{1}{(2\sqrt{2})}$$

$$\rho(0)_{\text{شعاع}} = \frac{1}{k(0)} = 2\sqrt{2}$$

پس معادله دایره بوسان بصورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(\sqrt{8})^2$

$y(0)_{\text{دایره}} = 1$

$y'(0)_{\text{دایره}} = 1 \Longrightarrow 2(x-\alpha) + 2(y-\beta)y' = 0$

$y''(0) = 1 \Longrightarrow 2 + 2(y'^2 + y''(y-\beta)) = 0$

$$y'^2 + y''(y-\beta) = -1$$

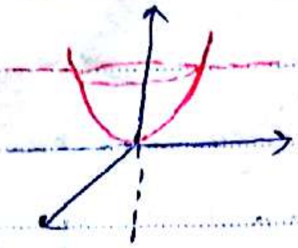
$$1 + (1-\beta) = -1$$

$$1-\beta = -2 \qquad \boxed{\beta = 3}$$

SUBJECT: DATE: / /

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

شکل : $x = 2+\sqrt{y^2+z^2}$ را رسم کنید؟



$z = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ ✓ سهمی گون

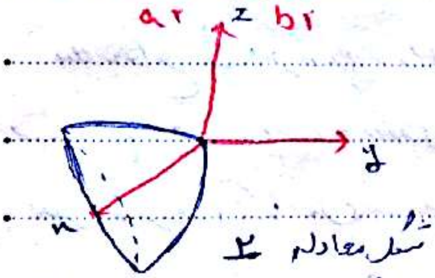
$x=0 \Rightarrow \cancel{\frac{x^2}{a^2}} + \frac{y^2}{b^2} = z$ سهمی

$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = z$ سهمی

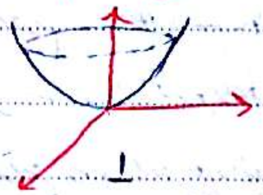
$z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$ مبدأ مختصات $(0,0)$

$z=k \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = k \quad , \quad k \geq 0$ بیضی

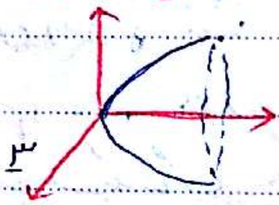
(1) $z = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (2) $x = \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ (3) $y = \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$



شکل معادله 2

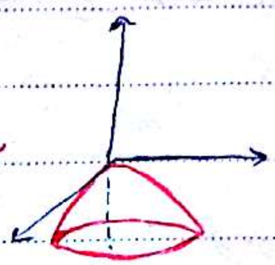


1



3

مثال: شکل $-z = x^2+y^2$ را رسم کنید؟



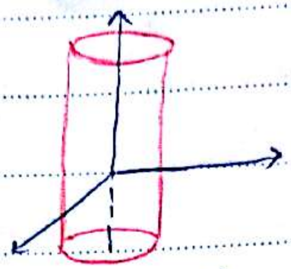
سطح مقطع دایره‌ای با شعاع k

مثال: شکل سهمی $x = 3-(y^2+z^2)$

استوانه:

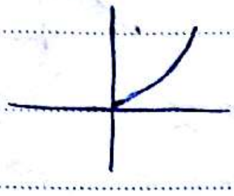
$x^2 + y^2 = 1$

در فضای $xyoz$

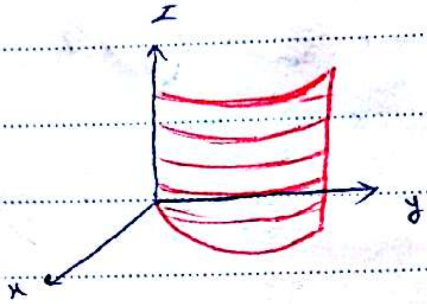


اگر در معادله‌ی رویه یکی از متغیرها غایب باشد در این صورت رویه به شکل استوانه است:

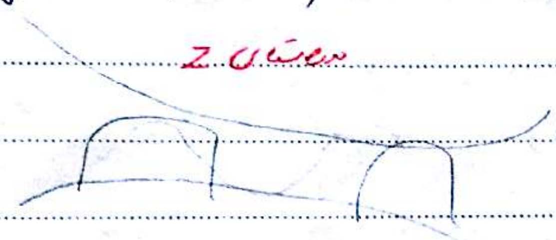
$y = x^2$ (سهمی) نمودار در صفحه



$y = x^2$ (استوانه) در سه بعد



موازی محور z



فصل ۳

توابع چند متغیره:

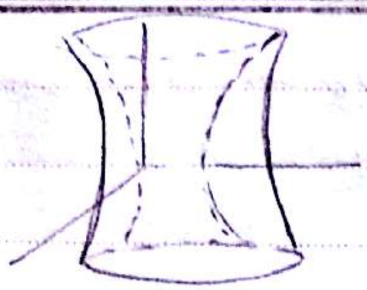
قبلاً با توابع یک متغیره یعنی توابعی که به صورت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $y = f(x)$ آشنا شده‌ایم یعنی توابعی که ورودی و خروجی آن یک متغیر است. در ادامه با توابعی آشنا می‌شویم که ورودی آن‌ها چند متغیره و خروجی آن‌ها همان یک متغیر است این گونه توابع را توابع چند متغیره می‌نامند. در حالت کلی یک تابع n متغیره به صورت $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $f = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ تعریف می‌شود. در حالت خاص توابع دو متغیره و سه متغیره به صورت‌های زیر هستند.

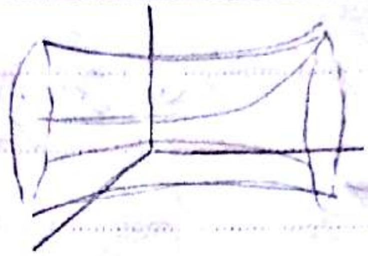
دو متغیره $\begin{matrix} x \to \\ y \to \end{matrix} \boxed{f}$ $z = f(x, y)$

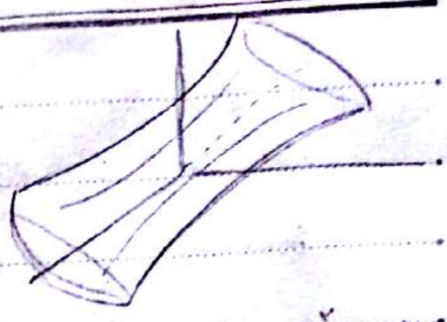
$\begin{matrix} x \to \\ y \to \\ z \to \end{matrix} \boxed{f}$ $w = f(x, y, z)$

دامنه توابع چند متغیره:

توجه: در مورد دامنه‌ی توابع چند متغیره توابع مربوط به توابع یک متغیره برقرار است یعنی همان قواعد مربوط به توابع کسری، مثلثاتی، لگاریتمی و رادیکالی و ...



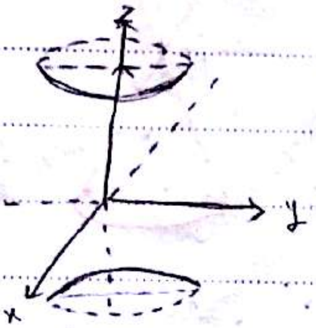




$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

حول محور Z حول محور y حول محور x

هذلولی گون دو پارچه



معادله این گون به صورت $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ است

$x=0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ هذلولی

$y=0 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ هذلولی

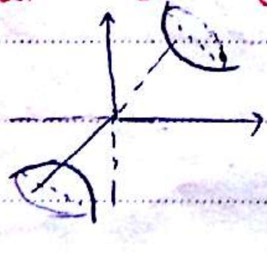
$z=0 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\times$

$z=k \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$

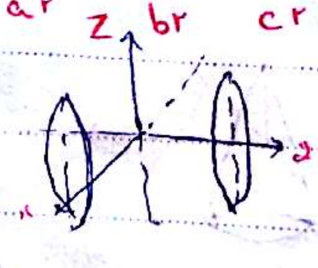
$\frac{k^2}{c^2}-1\geq 0 \Rightarrow \frac{k^2}{c^2}\geq 1 \Rightarrow k^2\geq c^2 \Rightarrow |k|\geq c$ ($k\geq c$ و $k\leq -$

۱) اگر $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ به صورت شکل بالا است

۲) $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



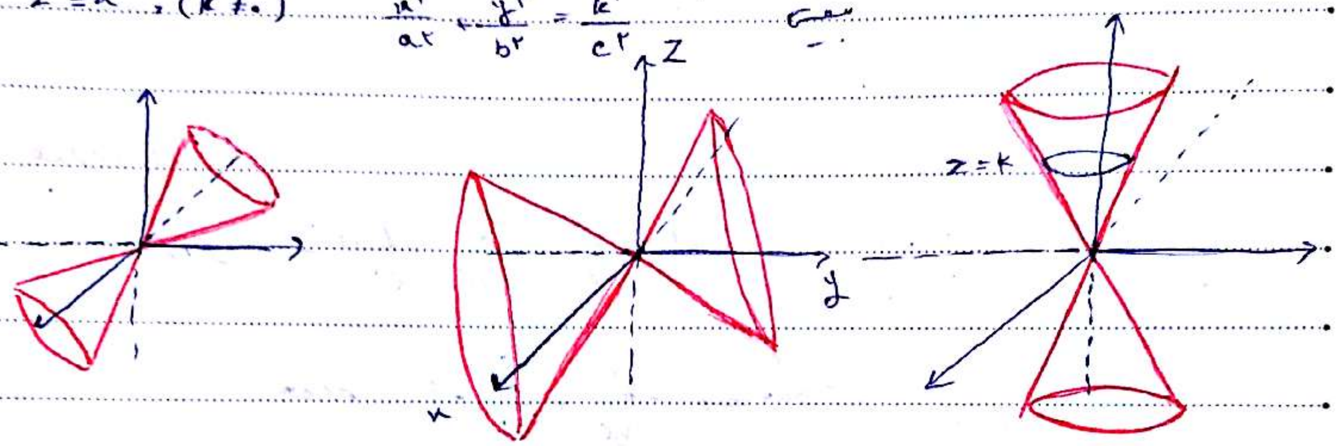
مخروط بیضوی: معادله ی آن بصورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ است:

$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ دو خط راست که از مبدا مختصات می گذرند

$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$ دو خط راست که از مبدا می گذرد.

$z=0 \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ مبدا مختصات $(x,y)=(0,0)$

$Z=k \ , (k\neq 0) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$ بیضی



1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ در راستای z

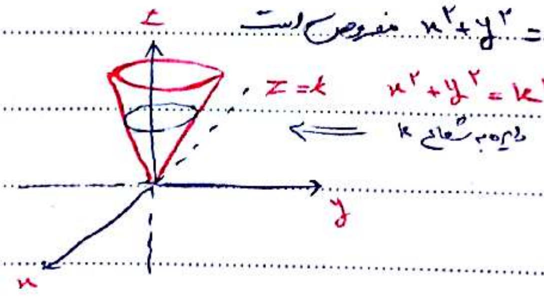
2) $\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y^2}{a^2}$ در راستای y

3) $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{b^2}$ در راستای x

مثال: مخروط $x^2+y^2=z^2$ مفروض است

$Z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

$Z=\sqrt{x^2+y^2}$



مثال: مخروط $Z=\sqrt{x^2+y^2}-1$ را رسم کنید

شکل $\sqrt{x^2+y^2}$ را بالا رسم کردیم اگر آن را قرینه کنیم در راستای محور z یک واحد به سمت بالا ببریم

SUBJECT: DATE: / /

مثال: معادله صفحه بوسان را برای منحنی پارامتری $R(t)=(\cos t, \sin t, t)$ در نقطه $t=\pi$ را بدست آورید؟

$P_0 = R(\pi) = (-1, 0, \pi)$

$B(t) = T(t) \times N(t) \xrightarrow{\text{پس از ساده‌سازی}} \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

بردار نرمال صفحه بوسان $n = B(\pi) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

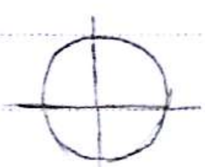
$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(z-\pi) \Longrightarrow y + z = \pi$

سطوح (رویه‌ها درجه دوم)

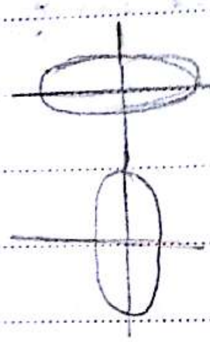
دایره

1) $x^2 + y^2 = a^2$



بیضی

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

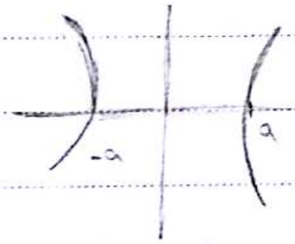


* یادآوری $a > b$

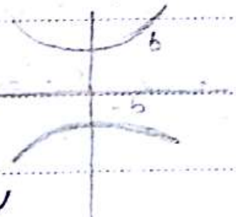
$b > a$

هذلولی

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$



تعریف: نمودار یک معادله درجه دوم با سه متغیر x و y و z را در یک سطح یا رویه درجه دوم می‌گویند و فرم کلی آن بصورت زیر است.

$* \; a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ معادله نقطه $(0,0,0)$

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کره به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات

VEKTA

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri $\sqrt{1-u^2}$ DATE: / /

نکته: چنانچه در معادله $F(x,y,z)=0$ قرار دهیم $x=0$ تصویر رویه روی صفحه yoz بدست می‌آید اگر قرار دهیم $y=0$ تصویر رویه روی صفحه xoz بدست می‌آید همچنین اگر $z=0$ قرار دهیم تصویر رویه روی صفحه xoy بدست می‌آید

برخی از رویه‌های درجه دوم معروف

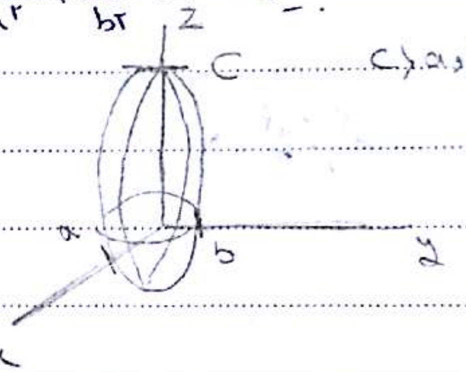
۱- بیضی‌گون: فرم کلی این گونه به صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ است. فرض کنید $c>a,b$ باشد در این صورت

$x=0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بیضی

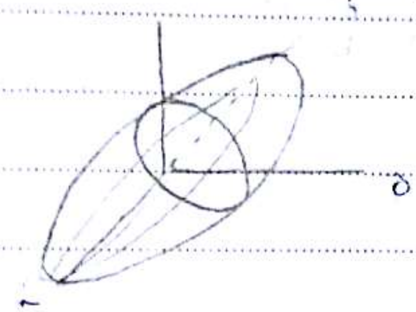
$z=0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضی

$y=0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بیضی

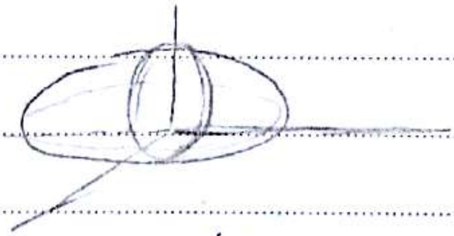
$c>a,b$



$a>b,c$



$b>a,c$



سوال: به ازای چه k هایی صفحه $z=k$ بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را قطع می‌کند؟

$z=k \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$

$\Longrightarrow 1-\frac{k^2}{c^2}\geq 0 \Longrightarrow \frac{k^2}{c^2}\leq 1 \Longrightarrow k^2\leq c^2 \Longrightarrow \boxed{-c\leq k\leq c}$

۲- هذلولی‌گون یک پارچه:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

$x=0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ هذلولی

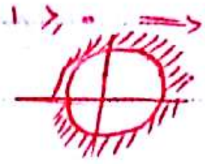
$z=0 \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضی

$y=0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ هذلولی

YEKTA

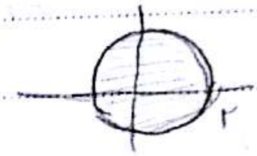
1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$ $\quad x^2+y^2-1\geq 0 \Longrightarrow x^2+y^2\geq 1$

$D_f=\{(x,y) \,/\, x^2+y^2\geq 1\}$



2) $f(x,y)=\ln(4-x^2-y^2)$

$4-x^2-y^2\geq 0 \longrightarrow 4-(x^2+y^2)\geq 0 \quad (x^2+y^2)\leq 4$



3) $f(x,y)=\dfrac{5}{3+x-y}$ $\quad 3+x-y=0 \quad x-y=-3$

$\mathbb{R}-\{x-y=3\}$

حد توابع چند متغیره

قبلاً با حد توابع $f(x)$ وقتی $x\to x_0$ آشنا شده اید می دانیم که $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ یعنی

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 \quad 0<|x-x_0|<\varepsilon \quad |f(x)-L|<\varepsilon$

برای حد تابع $f(x,y)$ زمانی که $(x,y)\to(x_0,y_0)$ از آنجایی که ورودی تابع صفحه می باشد (x,y) را داخل یک دایره به مرکز (x_0,y_0) و شعاع δ در نظر می گیریم پس تعریف حد دو متغیره به صورت زیر است.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

یعنی

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \Big|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \longrightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

ما در اینجا حدها را $(x_0,y_0)=(0,0)$ در نظر می گیریم در ادامه خواهیم دید می توان نقاط غیر صفر را به $(0,0)$ تغییر داد. لذا تعریف حدها به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \Big|\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

در اثبات حد با استفاده از تعریف، نامساوی‌های زیر بسیار پرکاربرد هستند

1) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$

2) $x^2 \leq x^2 + y^2 \implies \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$

3) $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$

4) $x^2 < x^2 - y^2 \longrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2-y^2} \implies |x| < \sqrt{x^2-y^2} \implies \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}} \leq 1$

5) $\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

6) $|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in R$

7) $|\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in R$

8) $|\sin x| \leq |x|$ در همسایگی صفر

9) $\dfrac{|\sin x|}{|x|} \leq 1$

با استفاده از تعریف حد نشان دهید:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;|\; \sqrt{x^2+y^2} < \delta \implies \left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$

فرض می‌کنیم $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ داریم:

$\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| |y| \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2+y^2} |y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2-y^2} < \delta$

بنابراین کافی است $\delta < \varepsilon$ در نظر گرفته شود. در این صورت $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$ خواسته مطلب ثابت می‌شود.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2+1} = 0$$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Longrightarrow \left|\frac{x+y}{x^2+y^2+1}\right|<\varepsilon$

فرض می‌کنیم داریم: $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

$\left|\frac{x+y}{x^2+y^2+1}\right| = \left|\frac{1}{x^2+y^2+1}\right| |x+y| \Longrightarrow \frac{|x+y|}{x^2+y^2+1} \leqslant |x+y| < |x|+|y|$

$< \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow \leqslant \delta+\delta = 2\delta$

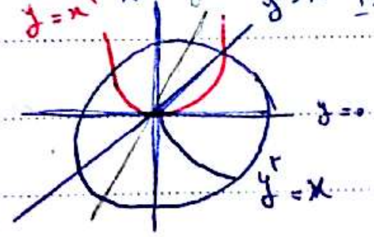
$2\delta<\varepsilon$ در نظر گرفته می‌شود

$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2+1}\right| < 2\delta < \varepsilon$

عدم وجود حد:

تمام قواعد مربوط به محاسبه حد $y=f(x)$ درمورد توابع چند متغیره نیز برقرار است.

درمورد حد تابع $f(x)$ و $f(x,y)$ در نقطه‌ی x_0 می‌دانیم که زمانی که x دارای حد است که حد چپ و راست موجود و با هم برابر باشند اما برای $f(x,y)$ از آنجایی که بی‌نهایت مسیر جهت رسیدن به نقطه‌ی (x_0,y_0) وجود دارد لذا زمانی تابع در (x_0,y_0) دارای حد است که حد در تمام این مسیر موجود و با هم برابر باشد از این رو اگر حد این تابع در یک مسیر خاص موجود نباشد یا حد آن در دو مسیر خاص موجود ولی با هم برابر نباشد آنگاه حد تابع $f(x,y)$ دیگر وجود ندارد.



حد تابع زیر را در نقطه‌ی $(0,0)$ بررسی کنید!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

مسیر ۱: $y=x \longrightarrow \lim \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

مسیر ۲: $y=x^2 \longrightarrow \lim \frac{x^3}{x^2+x^4} = \lim \frac{x^3}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2} = \frac{0}{1} = 0$

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

تذکر: می‌توانیم در مثال بالا مسیرهای دیگر مثل $y = mx$ را انتخاب کنیم و اگر حاصل حد فقط برحسب m باشد آنگاه تابع در نقطه $(0,0)$ دارای حد نمی‌باشد زیرا با تغییر m در واقع مسیر حرکت به سمت $(0,0)$ تغییر کرده و همزمان مقدار حد نیز تغییر می‌کند. اما اگر مقدار حد یک عدد ثابت باشد در این صورت باید مسیرهای دیگر را امتحان کنیم. مسیرهای پیشنهادی:

$$\begin{cases} y = mx \\ x = my \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx^2 \\ x = my^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx^3 \\ x = my^3 \end{cases} \quad , \ldots$$

مثال: نشان دهید تابع زیر در مبدا حد ندارد؟

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \begin{cases} y = mx \\ x \to 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim \frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim \frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)}$$

پس حد وجود ندارد.

نشان دهید حد زیر وجود ندارد؟

$$\lim \frac{x^4}{x^4+y^2} \xrightarrow{\text{مسیر ۱}} \begin{cases} y = mx \\ x \to 0 \end{cases} \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2(x^2+m^2)} = \lim \frac{x^2}{x^2+m^2} = 0$$

حد امکان دارد

$$\text{مسیر ۲} \begin{cases} y = mx^2 \\ x \to 0 \end{cases} \longrightarrow \lim \frac{x^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{1}{m^2}$$

به m بستگی پس حد ندارد

نشان دهید تابع زیر در مبدا حد ندارد

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{(x+y)^3} = \frac{x^2(mx)^3}{(x+mx)^3} = \frac{m x^5}{x^3}$$

$$y = m\sqrt[3]{x} \quad \lim \frac{x^2m^3x}{(x+\sqrt[3]{x}\,m)^3} = \frac{m^3x^3}{}$$

پیوستگی تابع چندمتغیره

تابع $f(x,y)$ را در نقطه (x_0,y_0) پیوسته گوییم هرگاه $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ باشد. پس

در صورتی تابع در (x_0,y_0) پیوسته نیست که:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجود نباشد.

توجه: کلیه مثال‌ها با توابع یک متغیره بیشتر توابعی که با آنها کار می‌کنیم در ~~[illegible]~~ دامنه‌شان پیوسته هستند مثل توابع نمایی، مثلثاتی، لگاریتمی، چندجمله‌ای و ...

مثال: نشان دهید در R^2 به جز نقطه $(0,0)$ پیوسته است؟

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

تابع در R^2 به جز نقطه $(0,0)$ پیوسته است بنابراین فقط باید پیوستگی را روی $(0,0)$

باید نشان دهیم: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(0,0) = 0$ ⟵ اثبات شد

مشتق های جزئی

قبلاً با مشتق تابع یک متغیره ی $f(x)$ $y=$ به صورت زیر آشنا شده اید:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

در مورد توابع چندمتغیره منظور از مشتق تابع نسبت به یک متغیر این است که آن متغیر به عنوان اندکی افزایش یا کاهش دهیم و نسبت به متغیرهای دیگر بدون تغییر در نظر بگیریم (یعنی ثابت نگه داریم) این نوع از مشتق را مشتق های جزئی می نامیم و آن را با نماد ∂ نمایش می دهیم.

به عنوان مثال: هر تابع متغیره ی $f(x,y)$ دو مشتق جزئی به صورت زیر موجود است:

1) مشتق f نسبت به x $= \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

2) مشتق f نسبت به y $= \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

به عنوان مثال: مشتق های جزئی تابع $f(x,y) = x^2 + 2xy$ را با استفاده از تعریف بیابید؟

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)y - x^2 - 2xy}{\Delta x} = \text{رفع ابهام } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + 2y + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \boxed{2x + 2y}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + 2x(y+\Delta y) - x^2 - 2xy}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x\,\cancel{\Delta y}}{\cancel{\Delta y}} = 2x$$

مشتق

توجه: در مثال بالا ملاحظه می‌شود که برای بدست آوردن مشتق‌های جزئی یک تابع کافیست تا نسبت به متغیر مربوطه مشتق بگیریم و با سایر متغیرها مانند یک عدد ثابت برخورد کنیم.

توجه: تمام قواعد مشتق‌گیری که در مورد توابع یک متغیره‌ی $y = f(x)$ مطرح شد، با مطالعه‌ی مشتق‌های جزئی توابع چند متغیره نیز بکار برد.

مثال: مشتق‌های توابع زیر را بدست آورید؟

$$f(x,y) = xe^{xy} + 2\sin(xy)$$
$$f_x = e^{xy} + xye^{y} + 2y\cos(x,y)$$
$$f_y = xxe^{x} + 2x\cos(x,y)$$

$$f(x,y,z) = x^2yz - x\sin yz + e^{xz^2}$$
$$f_x = 2xyz - \sin yz + z^2e^{xz^2}$$
$$f_y = x^2z - xz\cos y + 0$$
$$f_z = x^2y - x\cancel{y}\cos y + 2zx\,e^{xz^2}$$

مشتق‌های جزئی توابع زیر را بدست آورید؟

1) $f(x,y) = x\sin(x^2y) + x\ln(\frac{x}{y})$

$f_x = \sin x^2y + 2x^2y\cos(x^2y) + \ln(\frac{x}{y}) +$ ([illegible]) x

$f_y = x^3\cos(x^2y) + x\dfrac{x(-}{\frac{x}{y}} = x^3\cos(x^2y) + \dfrac{x}{y}$

2) $f(x,y,z) = xy\sin(xyz)$

$f_x = y\sin(xyz) + (xy)(yz)\cos(xyz)$

3) $f(x,y) = \int_{\sin(x^5 y^3)}^{e^{x^2y^3} - xy} \sin(t^2)\,dt$

یادآوری: $\beta'(x)\cdot f(\beta(x)) + \alpha'(x)\cdot f(\alpha(x)) = \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\right)'$

نکته: قبلاً در مورد توابع یک متغیره می‌دانستیم که مشتق‌پذیری یک تابع پیوستگی آن تابع را ایجاب می‌کند اما در مورد توابع چندمتغیره وجود مشتق‌های جزئی پیوستگی را ایجاب نمی‌کند

مثال: نشان دهید تابع زیر در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌های جزئی آن وجود دارد ولی پیوسته نیست؟

$$f = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2(\Delta x)\,0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

صفر مطلق / صفر حدی

$$f_y \Rightarrow \lim \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim \frac{(0, \Delta y) - 0}{\Delta x} = \frac{\text{0 حدی}}{\text{0 حدی}} = 0$$

اما می‌توان نشان داد که تابع در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته نیست زیرا حد تابع در این نقطه موجود نیست ⇐ پیوستگی

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \xrightarrow{y=mx} \frac{2x(mx)}{x^2+m^2x^2} = \frac{2mx^2}{x^2(1+m^2)}$$
$x \to 0$ = حد ندارد، به m وابسته است

به m ⇐ ناپیوسته است

پس همانطور که مشاهده شد در مورد توابع چندمتغیره وجود مشتق‌های جزئی پیوستگی را ایجاب نمی‌کند بنابراین به یک مفهوم جامع‌تری از مشتق نیاز داریم که در زیر تعریف می‌شود

مشتق‌پذیری کامل

در مورد توابع یک متغیره داشتیم $f'(x) + \alpha(\Delta x) = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (1) که در آن $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$

اگر طرفین معادله‌ی (1) را در Δx ضرب کنیم داریم:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$$\Delta x = 0 \Longrightarrow df = f'(x)\cdot dx$$

که این مسئله را برای مجموعه توابع دو متغیره داریم:

تعریف: گوییم تابع دو متغیره $f(x,y)$ مشتق‌پذیر کل است هرگاه توابع $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ و $\beta(\Delta x,\Delta y)$ با توان موجود باشند که $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha(\Delta x,\Delta y) = 0$ و $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \beta(\Delta x,\Delta y) = 0$

$$\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}^{df} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

$$\xrightarrow[\Delta y\to 0]{\Delta x\to 0} df = f_x\,dx + f_y\,dy$$ دیفرانسیل کل

مثال: مقدار $A = \sqrt{(2.99)^2 + (4.02)^2}$ را تخمین بزنید؟

$$A = f\big((3+(-0.01)), (4+0.02)\big) = 5$$ در این صورت $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$df = f_x(3,4)\underset{(-0.01)}{dx} + f_y(3,4)\underset{(0.02)}{dy} =$$

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$df = \frac{-3}{5}\times\frac{1}{100} + \frac{4}{5}\times\frac{2}{100} = \frac{-3+8}{500} = \frac{5}{500}$$ 0.01

$$f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$A = f(3,4) + df = 5 + 0.01 = 5.01$$

۲

مشتق های جزئی مرتبه اول

مشتق های جزئی f_x و f_y را مشتق های جزئی مرتبه اول برای $f(x,y)$ می‌نامیم که برحسب x و y نوشته می‌شوند بنابراین می‌توان دوباره نسبت به x و y مشتق گرفت و مشتق های جزئی مرتبه دوم را بدست آورد.

$$f(x,y) \xrightarrow{\text{مشتق های مرتبه ۱}} \begin{cases} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

مشتق های مرتبه ۲

$$\begin{cases} 1)\ f_{xx} = (f_x)_x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ 2)\ (f_{xy}) = (f_x)_y = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ 3)\ (f_{yx}) = (f_y)_x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} \\ 4)\ f_{yy} = (f_y)_y = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases}$$

به عنوان مثال: مشتق‌ها جزئی مرتبه دوم تابع $f(x,y) = x^2y^3$ را بیابید.

$f_x = 2xy^3$

$f_y = 3y^2x^2$

$f_{xx} = 2y^3$

$f_{xy} = 6xy^2$

$f_{yy} = 6yx$

$f_{yx} = 6xy^2$

قاعده‌ی زنجیره‌ای برای تابع چند متغیره:

به یاد داریم هرگاه $y = f(u)$ و $u = u(x)$ آنگاه برای محاسبه‌ی مشتق f نسبت به x از قاعده‌ی زنجیره‌ای به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx} = u' \cdot f'(u)$$

$$f \xrightarrow{d} u \xrightarrow{d} x$$

این مطلب را می‌توان برای توابع چندمتغیره بصورت زیر تعمیم داد.

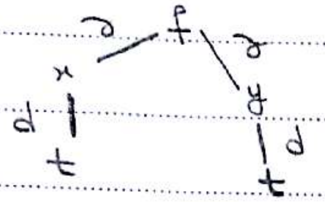
فرض کنید $x=x(t)$, $y=y(t)$ و $f(x,y)$ تابعی برحسب x و y باشد در این صورت برای محاسبه f نسبت به t خواهیم داشت.

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}$$

$$+$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$

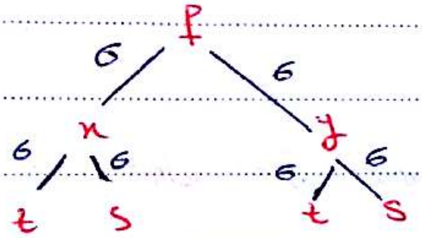
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$



اکنون فرض کنید f تابعی برحسب x و y و x و y نیز هرکدام توابعی برحسب s و t باشند یعنی

$f=f(x,y)$ $\quad x=x(t,s)$, $y(t,s)=y$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:



1) $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\times\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\times\dfrac{\partial y}{\partial t}$

2) $\dfrac{\partial f}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\times\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\times\dfrac{\partial y}{\partial s}$

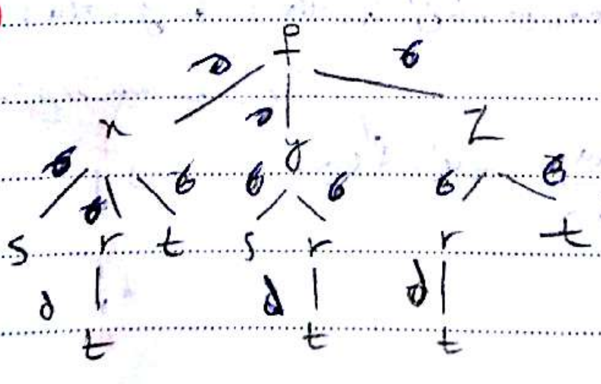
مثال: نمودار مشتق‌های زنجیره‌ای برای تابع $f=f(x,y,z)$ با شرایط زیر بدست بیاورید

$x=x(s,r,t)$ $\quad f=f(x,y,z)=$

$y=y(s,r)$

$z=(r,t)$

$r=(r(t))$



$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial r}\times$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\times\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\times\frac{\partial z}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial t}$$

مثال: استوانه‌ای به شعاع 15cm و ارتفاع 24cm را در نظر بگیرید چنانچه شعاع استوانه با سرعت $2\,cm/s = \frac{dr}{dt}$ افزایش و ارتفاع آن با سرعت $3\,cm/s$ $\left(\frac{dH}{dt}\right)$ کاهش بیابد در این صورت مطلوب است محاسبه‌ی آهنگ تغییرات حجم استوانه نسبت به زمان؟

$$V = \pi r^2 h$$

$$r = r(t) \quad , h = h(t)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\times\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial H}\times\frac{dH}{dt} = (2\pi rh\times 2) + (-3\times\pi r^2)$$

$$4\pi rh - 3\pi r^2 \Longrightarrow \pi r(4h - 3r) \Longrightarrow \pi\times 15\,(\underbrace{4\times 24}_{96} - \underbrace{3\times 15}_{45}) = 765\pi$$

51

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times\,15 \\ \hline 765 \end{array}$$

* مشتق‌گیری ضمنی *

فرض کنید y تابعی برحسب x باشد به جای اینکه فرم صریح y برحسب x را داشته باشیم یک عبارت برحسب x و y در دسترس باشد مثل $f(x,y) = 0$ در این صورت می‌خواهیم مشتق y نسبت به x

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \overset{\partial}{\swarrow} & & \overset{\partial}{\searrow} \\ x & & y \\ & & \downarrow d \\ & & x \end{array}$$

$$f(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \frac{df}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

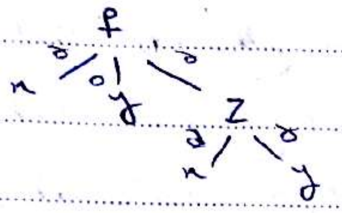
$$f_y\,\frac{dy}{dx} = -f_x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}}$$

به طور مشابه اگر x تابعی برحسب y باشد و عبارت $f(x,y)=0$ در دسترس باشد در این صورت:

$$\frac{dx}{dy} = x' = \boxed{-\frac{f(y)}{f(x)}}$$

این مطلب برای توابع دو متغیره نیز قابل تعمیم است یعنی فرض کنید Z تابعی برحسب x و y باشد و در عین اینکه فرم صریح Z برحسب x و y در دسترس نباشد عبارت $f(x,y,z)=0$ موجود باشد در این صورت $\frac{\partial Z}{\partial y}$ و $\frac{\partial Z}{\partial x}$ با مشتق گیری ضمنی به صورت زیر به دست می‌آید:



$$f(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f(x) + f(z) \times \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}}$$

به طور مشابه: $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$

به طور مشابه اگر x تابعی برحسب z و y باشد و داشته باشیم $f(x,y,z)=0$ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_x} \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_x}$$

همچنین اگر y تابعی برحسب x و z باشد و داشته باشیم $f(x,y,z)=0$ در این صورت

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y} \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_y}$$

فرض کنید $x = y^2 + \operatorname{arctg}(yz)$ در این صورت مطلوب است محاسبه

$$f = x - y^2 - \operatorname{arctg}(yz) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{1}{-\frac{y}{1+(yz)^2}} = +\frac{1+(yz)^2}{y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{1+\frac{z}{1+(yz)^2}}{-2y} = \frac{(1+(yz)^2+z)\times 2y}{1+(yz)^2}$$