



International
Mathematics Competition



خازن ریاضی تهران



سازمان دانش آموزی شهر تهران

آزمون انتخابی شانزدهمین دوره

مسابقات جهانی ریاضی

IMC 2015

مدت زمان پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

دبیرستان دوره اول

لطفاً پیش از پاسخ‌گویی به سوالات به موارد زیر دقت نمایید:

۱- آزمون در دو بخش سوالات پاسخ کوتاه و سوالات پاسخ تشریحی برگزار می‌شود. تعداد سوالات پاسخ کوتاه ۱۵ سوال و تعداد سوالات تشریحی ۴ سوال است.

۲- در قسمت سوالات پاسخ کوتاه فقط باید جواب نهایی هر سوال را که یک عدد است، در محل مخصوص آن در پاسخ‌نامه بنویسید و از نوشتن راه حل خودداری کنید.

۳- پاسخ سوالات بخش دوم را بایستی به صورت تشریحی بنویسید. از نوشتن موارد نامربوط و اضافه خودداری کنید.

۴- استفاده از ماشین حساب و هرگونه وسیله الکترونیکی در زمان برگزاری آزمون ممنوع بوده و در صورت مشاهده‌ی چنین مواردی تخلف محسوب شده و نمره‌ی دانش‌آموز خاطی صفر می‌باشد.

۵- پاسخ هر سوال را فقط با خودکار آبی و بدون خط‌خوردگی و به طور خوانا بنویسید. پاسخ‌های ناخوانا و نامرتب توسط کمیته‌ی داوران مورد بررسی و تصحیح قرار نگرفته و نمره‌ای به آن‌ها تعلق نمی‌گیرد.

۶- آزمون نمره‌ی منفی ندارد.

بخش اول: سوالات پاسخ کوتاه

۱- رقم یکان عدد زیر را به دست آورید.

$$2 \times 2014 + 3 \times 2013 + 4 \times 2012 + \dots + 1008 \times 1008$$

۲- چه تعداد از کسرهای زیر قابل ساده شدن نیستند؟

$$\frac{1}{2014}, \frac{2}{2014}, \frac{3}{2014}, \frac{4}{2014}, \dots, \frac{2012}{2014}, \frac{2013}{2014}$$

۳- فرض کنید که x یک عدد اول و y عددی صحیح باشد. اگر حاصل عبارت زیر عددی صحیح باشد، حداکثر مقدار ممکن برای y چیست؟

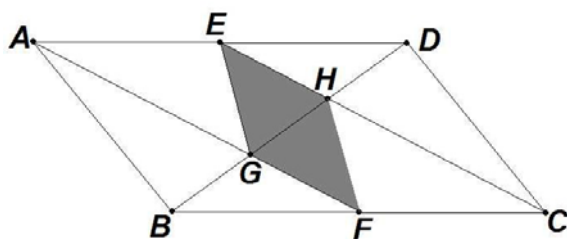
$$\frac{1}{xy} + \frac{2}{xy} + \frac{3}{xy} + \frac{4}{xy} + \dots + \frac{54}{xy} + \frac{55}{xy}$$

۴- می‌دانیم N عددی طبیعی است که ارقامش متمایزند. در صورتی که هر رقم N جزء مقسوم‌علیه‌هایش باشد، بیشترین مقدار برای N را به دست آورید.

۵- با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ اعداد پنج رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌سازیم. یکصدمین عدد از کوچک به بزرگ چیست؟

۶- می‌خواهیم ۱۰ سکه را طوری در یک ردیف قرار دهیم که هیچ دو سکه‌ی مجاور به رو نباشند. این کار را به چند روش می‌توان انجام داد؟

۷- در شکل زیر چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و $AD = 60$ و $AB = 36$ هستند. قطر BD بر ضلع AB عمود است. نقاط E و F به ترتیب اضلاع AD و BC را نصف می‌کنند. نقاط H و G نیز به ترتیب محل برخورد DB با EC و AF هستند. مساحت چهارضلعی $EFGH$ را پیدا کنید.



۸- دو عدد طبیعی را به طور تصادفی از اعداد طبیعی بین ۱ تا ۴۹ (با در نظر گرفتن خود این اعداد) انتخاب می‌کنیم. احتمال این که نمایش اعشاری معکوس‌های این اعداد به صورت گردشی و پایان ناپذیر باشد، چه قدر است؟

۹- از ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ فقط و فقط یک بار به عنوان رقم‌های یکان و دهگان تعدادی از اعداد استفاده می‌کنیم، به طوری که حاصل جمع این اعداد برابر با ۱۰۸ شود. این کار به چند روش ممکن است؟

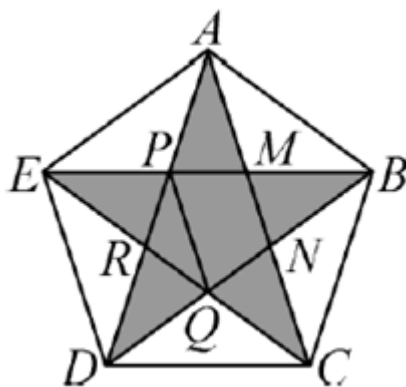
۱۰- در چند عدد ۱۳ رقمی با ارقام ۱ و ۲ هشتمین رقم از سمت چپ برابر با ۱ است و ضمناً هیچ دو رقم ۲ مجاور نیستند؟

۱۱- در جدول زیر چند مستطیل می‌توان پیدا کرد که حاصل جمع اعداد داخل آن‌ها مضربی از هفت باشد؟

۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹
۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲
۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵
۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸
۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

۱۲- چند عدد طبیعی مانند n می‌توان پیدا کرد که اگر با مجموع رقم‌هایش جمع شود، حاصل برابر با ۱۰۱۱ شود؟

۱۳- در شکل زیر $ABCDE$ یک پنج ضلعی منتظم است و مساحت چهارضلعی $ACQP$ برابر با یک واحد است. مساحت ناحیه‌ی رنگ شده چند واحد است؟



۱۴- اعداد ۱ تا ۵۰ را پشت سرهم و به ترتیب می‌نویسیم تا عدد زیر به دست آید :

۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲...۴۷۴۸۴۹۵۰

چنانچه این عدد را به صورت تجزیه شده به حاصل ضرب عوامل اول بنویسیم، توان عدد ۳ چیست؟

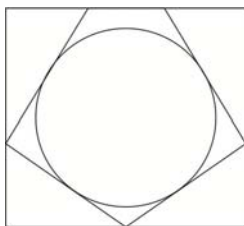
۱۵- بیشترین تعداد عددهای طبیعی متوالی که حاصل جمع رقم‌های هیچ کدامشان بر ۵ بخش پذیر نیست را به دست آورید.

سوالات تشریحی

۱- به چند روش مختلف می‌توان یک جدول 2×5 را با موزاییک‌های 1×1 و 1×2 فرش کرد؟ (همپوشانی بین موزاییک‌ها مجاز نیست و الزامی به استفاده از هر دو نوع موزاییک در هر حالت فرش کردن وجود ندارد).

۲- اولین رقم سمت چپ عدد 2^{2004} که یک عدد 604 رقمی است، برابر با ۱ می‌باشد. اولین رقم سمت چپ چند تا از اعداد مربوط به مجموعه اعداد $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{2003}\}$ برابر با ۴ می‌شود؟

۳- شکل زیر یک مستطیل 8×7 را نشان می‌دهد که در هر گوشه‌ی آن یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع $3, 4$ و 5 رسم شده است. دو مثلث پایینی دو ضلع به طول ضلع ۴ خود را روی ضلع پایینی مستطیل قرار داده‌اند، در حالی که دو مثلث بالایی دو ضلع به طول ضلع ۳ خود را روی ضلع بالایی مستطیل قرار داده‌اند. یک دایره نیز بر هر چهار وتر مثلث‌های قائم‌الزاویه مماس است. قطر این دایره را به دست آورید.



۴- با یک رقم ۱، دو رقم ۲، سه رقم ۳، ...، نه رقم ۹، یک عدد می‌سازیم. ثابت کنید که ارقام این عدد 45 رقمی را هر طور که بچینیم، عدد حاصل مربع کامل نخواهد بود.