۱) اگر $F(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۴}}$ باشد حاصل $F^{-۱}(\sqrt{۶})$ را بدست آورید .

حل :

$$x-۴\geq ۰\Rightarrow x\geq ۴ \qquad \sqrt{۶}\in D_{f^{-۱}} \qquad \sqrt{۶}\in R_F$$

$$\sqrt{۶}=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۴}}\Rightarrow ۶=x+۲\sqrt{x-۴}\Rightarrow ۶-x=۲\sqrt{x-۴}\Rightarrow (۶-x)^۲=۴(x-۴)$$

$$\Rightarrow ۳۶+x^۲-۱۲x=۴x-۱۶\Rightarrow x^۲-۱۶x+۵۲=۰\Rightarrow \{x=۸\pm\sqrt{۱۲}$$

۲) آیا دو تابع روبرو با هم برابرند؟

$$f(x)=\sqrt{۱-\sin^۲ x}\ ,g(x)=\cos x$$

حل :

$$f(x)=\sqrt{۱-\sin^۲ x}=\sqrt{\cos^۲ x}=|\cos x|\neq g(x)$$

خیر زیرارابطه ها برابر نیست .

۳) توضیح دهید که نمودار g چگونه از نمودار f به دست می آید .

$$g(x)=۲\sqrt{x-۱}+۳,\ f(x)=\sqrt{x}$$

حل :

نمودار $y=\sqrt{x}$ را به اندازه یک واحد در امتداد جهت مثبت محور x ها منتقل می کنیم تا نمودار $y=\sqrt{x-۱}$ به دست می آید. عرض نقاط این منحنی را دو برابر کنیم تا $y=۲\sqrt{x-۱}$ به دست می آید . این نمودار را نسبت بـه محور x ها قرینه می کنیم سپس ۳ واحد به سمت بالا منتقل می کنیم .

۴) تابع f صعودی و از مبداء می گذرد . دامنه ی تعریف تابع g با ضابطه ی $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام مجموعه است ؟

حل :

$$\Rightarrow x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)\leq f(x_۲)$$

$$\Rightarrow f(۰)=۰$$

$$x<۰\Rightarrow f(x)\leq f(۰)\rightarrow f(x)\leq ۰\Rightarrow xf(x)\geq ۰$$

$$x>۰\rightarrow f(۰)\leq f(x)\rightarrow ۰\leq f(x)\Rightarrow xf(x)\geq ۰$$

$$x=۰\rightarrow f(x)=۰\rightarrow xf(x)=۰$$

بنابراین برای تمام اعضای D_f رادیکال تعریف شده است . پس $D_f=D_g$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) دوره تناوب تابع با ضابطه ی $f(x)=(-1)^{[x]}(x-[x])$ را بدست آورید ؟

حل :

$$f(x+T)=f(x)(T>0) \Rightarrow f(x+T)=(-1)^{[x+T]}(x+T-[x+T])$$

برای اینکه رابطه ی یک برابر باشد باید اولاً T صحیح باشد :

$$f(x+T)=(-1)^{[x]+T})x+T-[x]-T)=(-1)^{[x]}(-1)^{T}(x-[x])$$

ثانیاً : باید Tزوج باشد ، زیرا باید $(-1)^{T}=1$: بنابراین $T=2$.

۶) فرض کنیم $g(x)=x-\frac{1}{x},\ fog(x)=x^2+\frac{1}{x^2}-4$ در این صورت ضابطه ی $f(x)$ را بیابید ؟

حل :

$$f(g(x))=x^2+\frac{1}{x^2}-4=x^2+\frac{1}{x^2}-2-2=(x-\frac{1}{x})^2-2$$

$$\Rightarrow f(x-\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})^2-2 \rightarrow f(t)=t^2-2$$

۷) اگر $g(x)=\cos 3x,\ f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{4})$ باشند . دوره تناوب $(fg)(x)$ را بدست آورید .

حل :

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\cos(x+\frac{\pi}{4}).\cos 3x$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(4x+\frac{\pi}{4})+\cos(2x-\frac{\pi}{4})]$$

$$T_1=\frac{\pi}{2} \text{ و } T_2=\pi$$

$$T=\pi(\text{ک م م } T_1 \text{ و } T_2)$$

۸) a را طوری بیابید که $f(x)=\log(\sqrt{a^2x^2+1}+5x)$ یک تابع فرد باشد ؟

حل :

$$f(x)+f(-x)=0$$

$$\log(\sqrt{a^2x^2+1}-5x)+\log(\sqrt{a^2x^2+1}+5x)=0 \Rightarrow \log(\sqrt{a^2x^2+1})^2-(5x)^2)=0$$

$$\log(a^2x^2+1-25x^2)=0=\log 1 \Rightarrow a^2x^2=25x^2 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=\pm 5$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) اگر $x^۲ + x < ۰$ باشد آنگاه $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ را بیابید .

حل :

$$x^۲+x<۰ \Rightarrow -۱<x<۰ \Rightarrow \begin{cases}[x]=-۱\\ [x^۲]=۰\\ [x^۳]=-۱\\ [x^۴]=۰\end{cases} \Rightarrow [x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=۰+(-۱)+۰+(-۱)=-۲$$

۱۰) دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{۴-x^۲}}{\sqrt{|x|-x}}$ را به دست آورید .

حل :

$$\begin{cases}۴-x^۲\geq ۰ \to x^۲\leq ۴ \to -۲\leq x\leq ۲\\ |x|-x>۰ \to |x|>x \to x<۰\end{cases} \Rightarrow D_f=[-۲,۰)$$

۱۱) برد تابع $f(x)=\sqrt{۵-|x|}$ را به دست آورید .

حل :

$$y=\sqrt{۵-|x|} \to y\geq ۰ \quad (۱)$$

$$y^۲=۵-|x| \to |x|=۵-y^۲ \to ۵-y^۲\geq ۰ \to y^۲\leq ۵ \to -\sqrt{۵}\leq y\leq \sqrt{۵} \quad (۲)$$

$$۱,۲ \to R_f=[۰,\sqrt{۵}]$$

۱۲) اگر توابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x}$, $g(\dfrac{۱}{x})=|x+a^۲|$ مفروض باشد . مقدار a را طوری به دست آورید که داشته باشیم . $g(f(۲))=۴$

حل :

$$f(۲)=\frac{۱}{۲} \to g(f(۲))=g(\frac{۱}{۲})=۴ \to |۲+a^۲|=۴ \to$$

$$\begin{cases}۲+a^۲=۴ \to a^۲=۲ \to a=\pm\sqrt{۲}\\ ۲+a^۲=-۴ \to a^۲=-۶ \to \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۳) اگر تابع $y=x^۴+۳x^۳+A(x+۱)^۳+Bx$ زوج باشد $A+B$ چقدر است.

حل :

چون تابع زوج است . پس باید $f(x)=f(-x)$ باشد .

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f(x)=x^{۴}+۳x^{۳}+Ax^{۳}+۳Ax^{۲}+۳Ax+A+Bx$$

$$f(-x)=f(x)\to ۶x^{۳}+۲Ax^{۳}+۶Ax+۲Bx=۰\to\begin{cases}۶+۲A=۰\to A=-۳\\ ۶A+۲B=۰\to B=۹\end{cases}$$

۱۴) اگر $g(x)=[x+1]$ و $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$ باشند مطلوبست دامنه ی تابع fog

حل :

$D_g=R$ $\quad$ $\left.\begin{matrix}x-3\geq 0\to x\geq 3\\ 3-x\geq 0\to x\leq 3\end{matrix}\right\}\to D_f=\{3\}$

$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\in R|[x+1]=3\}=\{x\in R|3\leq x+1<4\}=[2,3)$

۱۵) با فرض $f(x)=۲x+۵$ و $g(x)=x-\frac{۱}{۲}$ ضابطه ی $g^{-۱}of^{-۱}$ را بنویسید .

حل :

$$f(x)=۲x+۵\to y=۲x+۵\to y-۵=۲x\to x=\frac{y-۵}{۲}\to f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

$$g(x)=x-\frac{۱}{۲}\to y=x-\frac{۱}{۲}\to x=y+\frac{۱}{۲}\to g^{-۱}(x)=x+\frac{۱}{۲}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}(x)=g^{-۱}(f^{-۱}(x))=g^{-۱}(\frac{x-۵}{۲})=\frac{x-۵}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{x-۴}{۲}$$

۱۶) آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x(x-۱)}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۱}$ مساویند ؟

حل :

$$D_f:\{x(x-۱)\geq ۰\to D_f=(-\infty,۰]\cup[1,+\infty)\ ,\ D_g:\begin{cases}x\geq ۰\\ x-۱\geq ۰\end{cases}\to x\geq ۱\to D_g=[۱,+\infty)$$

x	۰ ۱
$x(x-۱)$	+ ۰ − ۰ +

چون دامنه دو تابع برابر نیست بنابراین با هم مساوی نیستند .

۱۷) دامنه ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{-|x|+۲}}{|x|-۲}$ را بیابید .

حل :

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\left.\begin{array}{l}-|x|+۲\geq ۰\rightarrow |x|\leq ۲\rightarrow -۲\leq x\leq ۲\\ |x|-۲\neq ۰\rightarrow |x|\neq ۲\rightarrow x\neq \pm ۲\end{array}\right\}\rightarrow -۲<x<۲\rightarrow D_f=(-۲,۲)$$

۱۸) f تابعی یک به یک و $f^{-۱}$ وارون آن است : الف) معکوس تابع $g(x)=۱-۲f(x+۳)$ را بیابید .

ب) معکوس تابع $h(x)=۱+۲f(x-۳)$ را بیابید .

حل الف)

$$y=۱-۲f(x+۳)\rightarrow x=۱-۲f(y+۳)\rightarrow ۱-x=۲f(y+۳)\rightarrow f(y+۳)=\frac{۱-x}{۲}\rightarrow$$

$$f^{-۱}(f(y+۳))=f^{-۱}(\frac{۱-x}{۲})\rightarrow y+۳=f^{-۱}(\frac{۱-x}{۲})\rightarrow y=f^{-۱}(\frac{۱-x}{۲})-۳\rightarrow g^{-۱}(x)=f^{-۱}(\frac{۱-x}{۲})-۳$$

حل ب)

$$y=۱+۲f(x-۳)\rightarrow x=۱+۲f(y-۳)\rightarrow x-۱=۲f(y-۳)\rightarrow f(y-۳)=\frac{x-۱}{۲}\rightarrow$$

$$f^{-۱}(f(y-۳))=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})\rightarrow y-۳=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})\rightarrow y=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})+۳\rightarrow$$

$$h^{-۱}(x)=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})+۳$$

۱۹) تابع f معکوس پذیر است و تابع g در رابطه ی $g(x)=\frac{۲f(\sqrt{x})}{۳-۵f(\sqrt{x})}$ صدق می کند $(x>۰)$

وارون تابع g را بر حسب تابع f بدست آورید .

حل : ابتدا $g(x)$ را مساوی y قرار می دهیم .

$$y=\frac{۲f(\sqrt{x})}{۳-۵f(\sqrt{x})}\rightarrow ۳y-۵yf(\sqrt{x})=۲f(\sqrt{x})$$

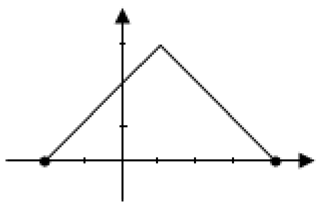
$$۳y=f(\sqrt{x})(۲+۵y)\rightarrow f(\sqrt{x})=\frac{۳y}{۲+۵y}$$

f تابعی وارون پذیر است از طرفین $f^{-۱}$ می گیریم .

$$f^{-۱}(f(\sqrt{x}))=f^{-۱}(\frac{۳y}{۲+۵y})\rightarrow \sqrt{x}=f^{-۱}(\frac{۳y}{۲+۵y})\rightarrow x=(f^{-۱}(\frac{۳y}{۲+۵y}))^۲$$

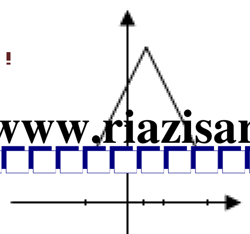
$$\xrightarrow{x=g^{-۱}(y)} g^{-۱}(y)=(f^{-۱}(\frac{۳y}{۲+۵y}))^۲\rightarrow g^{-۱}(x)=(f^{-۱}(\frac{۳x}{۲+۵x}))^۲$$

۲۰) اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد .



الف) دامنه و برد تابع f را بنویسید .

حل :



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$D_f=[-۲,۴]$$
$$R_f=[۰,۳]$$

ب) دامنه و برد تابع $f(۲x)+۱$ را تعیین کرده و نمودار آنرا رسم کنید .

حل :

$$-۲\le ۲x\le ۴\to -۱\le x\le ۲\to D=[-۱,۲]$$
$$۰\le f(۲x)\le ۳\to ۱\le f(۲x)+۱\le ۴\to R=[۱,۴]$$

۲۱) زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=|x|+x\sin x$ را مشخص کنید .

حل :

$D_f=R$ متقارن است . (۱)

$$f(-x)=|-x|+(-x)\sin(-x)=|x|-x(-\sin x)=|x|+x\sin x=f(x) \qquad (۲)$$

$\xrightarrow{(۱),(۲)}$ تابع زوج می باشد

۲۲) دامنه و برد تابع زیر را بیابید .

$$f(x)=\frac{\sqrt{[x]-۲}}{\sqrt{۴-[x]}}$$

حل :

$$D_f:\begin{cases}[x]-۲\ge ۰\to [x]\ge ۲\to x\ge ۲\\ ۴-[x]>۰\to [x]<۴\to x<۴\end{cases}\to D_f=[۲,۴)$$

$$R_f:\begin{cases}۲\le x<۳\to f(x)=۰\\ ۳\le x<۴\to f(x)=۱\end{cases}\to R_f=\{۰,۱\}$$

۲۳) اگر $f(x)=\sqrt{۹-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x}$ تابع $f(g(x))$ را با دامنه اش مشخص کنید . هم چنین اگر $h(x)=[x]$ تابع $f(h(x))$ را با دامنه اش مشخص کنید .

حل :

$$D_f:۹-x^۲\ge ۰\to ۹\ge x^۲\to ۳\ge |x|\to -۳\le x\le ۳\to D_f=[-۳,۳]$$
$$D_g:۲-x\ge ۰\to ۲\ge x\to D_g=(-\infty,۲]$$
$$\left.\begin{aligned}&D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in(-\infty,۲] \mid \sqrt{۲-x}\in[-۳,۳]\}\\ &\sqrt{۲-x}\in[-۳,۳]\to\sqrt{۲-x}\le ۳\to ۲-x\le ۹\to x\ge -۷\end{aligned}\right\}\to D_{fog}=[-۷,۲)$$
$$f(g(x))=\sqrt{۹-۲+x}=\sqrt{x+۷}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\left.\begin{array}{l} D_{foh}=\{x\in D_h \mid h(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid [x]\in[-۳,۳]\} \\ [x]\in[-۳,۳]\rightarrow -۳\le x<۴ \end{array}\right\}\rightarrow D_{foh}=[-۳,۴)$$

۲۴) اگر $f(۶)=۱۲$ آنگاه ریشه های معادله $f^{-۱}(\frac{x}{x+۲})=۶$ را محاسبه کنید .

حل :

$$f(f^{-۱}(\frac{x}{x+۲}))=f(۶)\rightarrow \frac{x}{x+۲}=۱۲\rightarrow x=۱۲x+۲۴\rightarrow ۱۱x=-۲۴\rightarrow x=\frac{-۲۴}{۱۱}$$

۲۵) دامنه تابع زیر را به دست آورید .

$$f(x)=\sqrt{[x]^۲-۵[x]+۴}$$

حل :

$$[x]^۲-۵[x]+۴\ge ۰\rightarrow P=([x]-۱)([x]-۴)\ge ۰\rightarrow \begin{cases}[x]=۱\rightarrow ۱\le x<۲\\ [x]=۴\rightarrow ۴\le x<۵\end{cases}$$

x	$-\infty$ ۱ ۲	۴ ۵	$+\infty$
$[x]-۱$	− ۰ ۰	+ + +	+
$[x]-۴$	− −	− ۰ ۰	+
P	+ ۰ ۰	− ۰ ۰	+

$$D_f=(-\infty,۲]\cup[۴,+\infty)$$

۲۶) توابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ مفروضند.

الف)مقدار $(\frac{۲f-g}{f})(-۲)$ را به دست آورید.

ب) دامنه ی تابع gof را به کمک تعریف به دست آورید.

حل الف)

$$f(-۲)=\sqrt{۳},g(-۲)=\frac{۱}{۳}\rightarrow (\frac{۲f-g}{f})(-۲)=\frac{۲f(-۲)-g(-۲)}{f(-۲)}=\frac{۲\sqrt{۳}-\frac{۱}{۳}}{\sqrt{۳}}$$

حل ب)

$$D_f=(-\infty,۱],D_g=R-\{\pm۱\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,۱],\sqrt{۱-x}\in R-\{\pm۱\}\}$$

$\sqrt{۱-x}\ne -۱$ همواره برقرار و $\sqrt{۱-x}\ne ۱\rightarrow x\ne ۰\rightarrow D_{gof}=(-\infty,۱]-\{۰\}$

۲۷) در مستطیلی با محیط ۴۰ سانتی متر مربع عرض مستطیل را به شکل تابعی از مساحت آن بیان کنید.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

حل :

طول مستطیل $= b$ و عرض مستطیل $= a$ و مساحت مستطیل $= S$

$$p=۲(a+b)=۴۰\to a+b=۲۰\to b=۲۰-a, s=ab\to s=a(۲۰-a)=۲۰a-a^۲$$

$$a^۲-۲۰a+s=۰\to a=۱۰\pm\sqrt{۱۰۰-s}\to(a\le ۱۰)a=۱۰-\sqrt{۱۰۰s}$$

۲۸) زوج یا فرد بودن توابع روبرو را مشخص کنید .

الف) $f(x)=\dfrac{x^۲}{[x]+[-x]}$

ب) $f(x)=۳^x$

حل الف) $D_f=R-Z$ متقارن است .

$$f(-x)=\frac{(-x)^۲}{[-x]+[x]}=\frac{x^۲}{[-x]+[x]}=f(x)$$

بنابراین تابع f تابعی زوج است .

حل ب) $D_f=R$ متقارن است .

$$f(-x)=۳^{-x}=\frac{۱}{۳^x}=\frac{۱}{f(x)}$$

این تابع نه زوج است و نه فرد .

۲۹) مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۲۰ سانتی متر است طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از محیط آن به دست آورید.

حل :

(مساحت $= S$ و طول وتر $= c$ ومحیط $= P$)

$$S=۲۰=\frac{۱}{۲}ab\to ab=۴۰\to c^۲=a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab\to(a+b)^۲=c^۲+۲ab$$

$$(ab=۴۰)\to(a+b)^۲=c^۲+۸۰\to a+b=\sqrt{c^۲+۸۰}$$

$$(p=a+b+c)\to p=\sqrt{c^۲+۸۰}+c\to(p-c)^۲=c^۲+۸۰\to p^۲-۸۰=۲pc$$

$$\to c=\frac{p^۲-۸۰}{۲p}$$

۳۰) اگر $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x>۰\\ x-۱ & x\le ۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x & x\ge -۲\\ x-۲ & x<-۲\end{cases}$ ضابطه تابع $f+۲g$ را بنویسید.

حل :

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(f+۲g)(x)=\begin{cases} ۳x-۵ & x<-۲ \\ ۳x-۱ & -۲\le x\le ۰ \\ ۳x+۱ & x>۰ \end{cases}$$

۳۱) اگر $f\left(\sqrt{2}\sin x\right)=\cos 2x$ آنگاه $f(\cos x)$ را بیابید.

حل :

$$f\left(\sqrt{2}\sin x\right)=\cos 2x \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\sin x\right)=1-2\sin^2 x$$

$$\sin x=t \Rightarrow f\left(\sqrt{2}t\right)=1-2t^2$$

$$\sqrt{2}t=a \Rightarrow t=\frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(a)=1-2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow f(a)=1-a^2$$

$$f(\cos x)=1-\cos^2 x \Rightarrow f(\cos x)=\sin^2 x$$

۳۲) معکوس تابع $f(x)=x+۴+۴\sqrt{x}$ را بدست آورید.

حل :

$$f(x)=(\sqrt{x}+۲)^۲$$

$$y=(\sqrt{x}+۲)^۲ \rightarrow \pm\sqrt{y}=\sqrt{x}+۲ \xrightarrow{(\sqrt{x}+۲)>۰} \sqrt{y}=\sqrt{x}+۲$$

$$\rightarrow \sqrt{y}-۲=\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x}-۲=\sqrt{y} \rightarrow x+۴-۴\sqrt{x}=y$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x)=x+۴-۴\sqrt{x}$$

۳۴) اگر $f(x^۲+x)=x^۴+۲x^۳+x^۲$ باشد آنگاه $f(\sqrt{۳})$ چقدر است؟

حل :

$$f(x^۲+x)=(x^۲+x)^۲ \rightarrow f(x)=x^۲ \rightarrow f(\sqrt{۳})=۳$$

۳۵) دامنه تابع $y=\sqrt{x^۳-x^۲}$ کدام است؟

حل :

$$x^۳-x^۲\ge ۰ \rightarrow x^۲(x-۱)\ge ۰ \xrightarrow{x^۲\ge ۰} (x-۱)\ge ۰ \rightarrow x\ge ۱ \rightarrow D=[۱,+\infty)\cup\{۰\}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۶) اگر $f(x)=\begin{cases} x-5 , x\geq 1 \\ x-1 , x<1 \end{cases}$ و $g(x)=x^2-4x+5$ باشند ، ضابطه ی تابع fog را به ازای $x\leq 2$ به دست آورید .

حل :

$$g(x)=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1\geq 1 \rightarrow fog(x)=(x-2)^2+1-5=x^2-4x$$

۳۷) اگر $f(x)=\begin{cases} x & x\geq 1 \\ 2 & x<1 \end{cases}$ ، حاصل $f(\sqrt[3]{2})$ و $f(\log 2)$ را بیابید .

حل :

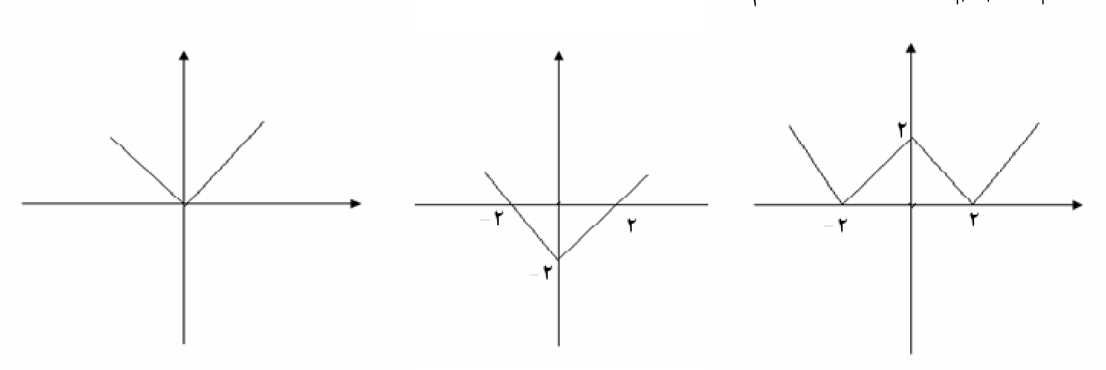
از آنجایی که $\sqrt[3]{1}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{8}=2$ پس $\sqrt[3]{2}>1$ و از ضابطه بالا استفاده می کنیم .

$$f(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}$$

و از آنجایی که $\log 2<\log 10$ بنابراین $\log 2<1$ و از ضابطه بالا استفاده می کنیم

$$f(\log 2)=2$$

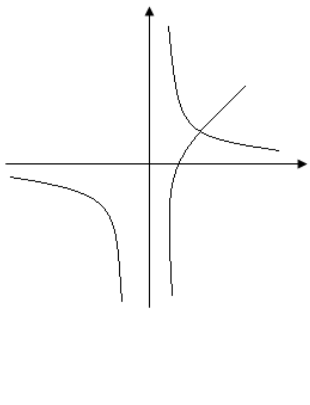
۳۸) منحنی نمایش $f(x)=\left||x|-2\right|$ را رسم کنید .



$y=|x|$ $\quad$ $y=|x|-2$ $\quad$ $y=\left||x|-2\right|$

۳۹) تعداد ریشه های معادله زیر را پیدا کنید .

$$x\log x-1=0$$



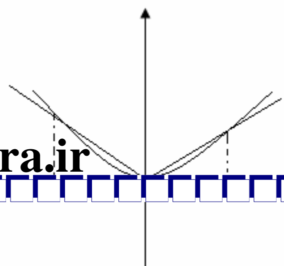
حل :

$$x\log x=1\rightarrow \log x=\frac{1}{x}\rightarrow y_1=\frac{1}{x} , y_2=\log x$$

۴۰) مجموعه جواب نامعادله $x^2\leq |x|$ را بیابید .

حل :

دو تابع $y_1=x^2$ و $y_2=|x|$ را رسم می کنیم . در بازه $[-1,1]$ تابع $y=x^2$ پائین یا مساوی نمودار $y=|x|$ است .



www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۱) اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ **آنگاه** $f(4)$ **را بیابید .**

حل :

در این سوال باید سمت راست را به صورت تابعی از $x+\frac{1}{x}$ **بنویسیم ، با استفاده از اتحاد** $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ **داریم :**

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2x(\frac{1}{x})\rightarrow\ f(t)=t^2-2\rightarrow\ f(4)=4^2-2=14$$

۴۲) ضابطه معکوس تابع $y=\sqrt{x}+1$ **را بیابید .**

حل :

برد این تابع $R_f=[1,+\infty]$ **و تابع یک به یک است .**

$$y=\sqrt{x}+1\rightarrow$$
$$y-1=\sqrt{x}\rightarrow\ \ x=(y-1)^2\rightarrow y=(x-1)^2\rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^2\ ,[1,+\infty]$$

۴۳) حاصل $[\log_3 28]$ **را بیابید .**

حل :

باید ببینیم که $\log_3 28$ **بین کدام دو عدد متوالی است از آنجایی که** $3^3<28<3^4$ **پس**

$$\log_3^{3^3}<\log_3^{28}<\log_3^{3^4}\ \rightarrow\ 3\log_3^{3}<\log_3^{28}<4\log_3^{3}\rightarrow 3<\log_3 28<4\rightarrow[\log_3 28]=3$$

۴۴) اگر $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ و $f(g(x))=5-x^2$ باشد ضابطه‌ی $g(x)$ را مشخص کنید.

حل :

$$f(g(x))=\frac{2g(x)+1}{g(x)-3}=5-x^2$$
$$2g(x)+1=(5-x^2)(g(x)-3)$$
$$g(x)=\frac{3x^2-16}{x^2-3}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۵) حدود m را طوری بیابید که دامنه توابع زیر برابر با مجموعه اعداد حقیقی شود.

الف) $f(x)=\dfrac{x}{x^۲+mx+۱}$ ب) $g(x)=\sqrt{x^۲+m^۲-۱}$

حل الف) $\Delta<۰ \Rightarrow \Delta=m^۲-۴<۰ \Rightarrow m\in(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$

حل ب)

$$x^۲+m^۲-۱\ge۰ \Rightarrow \Delta\le۰ \Rightarrow \Delta=-۴(m^۲-۱)\le۰ \Rightarrow m^۲-۱\ge۰ \Rightarrow m\in(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$$

۴۶) اگر $g(x)=x^۳-۱$ و $f(x)=\begin{cases}۲x & x\le۱\\ ۴ & ۱<x<۲\\ \sqrt[۳]{x} & x\ge۲\end{cases}$ باشد، عبارت fog را محاسبه کنید.

حل :

$$x^۳-۱\le۱ \Rightarrow x^۳\le۲ \Rightarrow x\le\sqrt[۳]{۲} \Rightarrow f(g(x))=۲x^۳-۲$$
$$۱<x^۳-۱<۲ \Rightarrow ۲<x^۳<۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲}<x<\sqrt[۳]{۳} \Rightarrow f(g(x))=۴$$
$$x^۳-۱\ge۲ \Rightarrow x^۳\ge۳ \Rightarrow x\ge\sqrt[۳]{۳} \Rightarrow f(g(x))=\sqrt[۳]{x^۳-۱}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}۲x^۳-۲ & x\le\sqrt[۳]{۲}\\ ۴ & \sqrt[۳]{۲}<x<\sqrt[۳]{۳}\\ \sqrt[۳]{x^۳-۱} & x\ge\sqrt[۳]{۳}\end{cases}$$

۴۷) اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g(x)=\dfrac{x+۱}{x-۱}$ ، دامنه و ضابطه $gof(x)$ را به دست آورید .

حل :

$$Dgof=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[۳,+\infty)\mid \sqrt{x-۳}\in R-\{۱\}\}$$

$$D_{gof}=[۳,۴]\cup(۴,+\infty)\Rightarrow\sqrt{x-۳}\ne۱\Rightarrow x-۳\ne۱\Rightarrow x\ne۴\Rightarrow$$

۴۸) $fog(x)=۲x$ و $f(x)=\dfrac{x}{x-۲}$ آنگاه $g(x)$ را تعیین کنید.

حل :

$$\left.\begin{aligned}f(g(x))&=۲x\\ f(g(x))&=\frac{g(x)}{g(x)-۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{g(x)}{g(x)-۲}=۲x\Rightarrow g(x)=۲xg(x)-۴x$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\Rightarrow g(x)(۱-۲x)=-۴\Rightarrow g(x)=\frac{-۴x}{۱-۲x}$$

۴۹) اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ ، دامنه و ضابطه $gof(x)$ را به دست آورید.

حل :

$$Dgof=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[۳,+\infty) \mid \sqrt{x-۳}\in R-\{۱\}\}$$

$$D_{gof}=[۳,۴]\cup(۴,+\infty)\Rightarrow \sqrt{x-۳}\neq ۱\Rightarrow x-۳\neq ۱\Rightarrow x\neq ۴\Rightarrow$$

۵۰) $fog(x)=۲x$ و $f(x)=\frac{x}{x-۲}$ آنگاه $g(x)$ را تعیین کنید.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} f(g(x))=۲x \\ f(g(x))=\dfrac{g(x)}{g(x)-۲} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-۲}=۲x\Rightarrow g(x)=۲xg(x)-۴x$$

$$\Rightarrow g(x)(۱-۲x)=-۴\Rightarrow g(x)=\frac{-۴x}{۱-۲x}$$

۵۱) اگر $f(x)=\frac{x}{۲-x}$ و $gof(x)=\frac{x}{۲}$ ضابطه $g(x)$ را بیابید .

حل :

$$g(f(x))=\frac{x}{۲}\Rightarrow g(\frac{x}{۲-x})=\frac{x}{۲}$$

$$\frac{x}{۲-x}=t\Rightarrow x=۲t-۲tx\Rightarrow x+۲tx=۲t$$

$$g(x)=\frac{۲x}{۱+۲x}\Rightarrow x(۱+۲t)=۲t\Rightarrow x=\frac{۲t}{۱+۲t}\Rightarrow g(t)=\frac{۲t}{۱+۲t}\rightarrow$$

۵۲) $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۲}$ مطلوب است محاسبه ضابطه و دامنه fog .

حل :

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$D_{fog}=\{x\varepsilon D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\in R-\{۲\} \middle| \frac{x}{x-۲}\in[۱,+\infty)\right\}$$

$$\frac{x}{x-۲}\geq ۱\Rightarrow\frac{x}{x-۲}-۱\geq ۰\Rightarrow\frac{x-x+۲}{x-۲}\geq ۰\Rightarrow\frac{۲}{x-۲}\geq ۰\to x-۲>۰\to x>۲\to D_{fog}=(۲,+\infty)$$

$$fog(x)=f(\frac{x}{x-۲})=\sqrt{\frac{x}{x-۲}-۱}$$

۵۳) زوج و یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید:

الف) $f(x)=\left[\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right]$

حل :

$f(-x)=\left[\frac{(-x)^۲}{(-x)^۲+۱}\right]=\left[\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right]=f(x)$ $\quad x^۲+۱\neq ۰\to D=R$ تابع زوج است

ب) $g(x)=x[x]$

حل :

$g(-x)=(-x)[-x]=x[x]=g(x)$ و $D=R$ تابع زوج است

ج) $h(x)=\log_۲\frac{x-۴}{x+۴}$

حل :

$$h(-x)=\log_۲\frac{-x-۴}{-x+۴}=\log_۲\frac{-(x+۴)}{-(x-۴)}=\log_۲(\frac{x-۴}{x+۴})^{-۱}=-h(x)$$

$\frac{x-۴}{x+۴}>۰\to D_h=(-\infty,-۴)\cup(۴,+\infty)\to$ تابع فرد است .

۵۴) توابع $f(x)=\frac{۲}{x-۳}$ و $g(x)=\sqrt{x-۴}$ مفروضند.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) ضابطه gof را در صورت وجود به دست آورید.

ب) دامنه تابع gof, g, f را تعیین کنید.

حل الف)

$$gof(x) = g(\frac{۲}{x-۳}) = \sqrt{\frac{۲}{x-۳} - ۴}$$

حل ب)

$$D_f = R - \{۳\} \qquad D_g = [۴, +\infty]$$

$$D_{gof} = \left\{ x \varepsilon \mid R - \{۳\} \mid \frac{۲}{X-۳} \varepsilon [۴, +\infty] \right\}$$

$$D_{gof} = (-\infty, \frac{۵}{۴}) \quad \frac{۲}{x-۳} \geq ۴ \Rightarrow ۴x - ۳ \leq ۲ \Rightarrow ۴x \leq ۵ \Rightarrow x \leq \frac{۵}{۴} \rightarrow$$

۵۵) اگر $f(x) = \frac{۲}{x}$ و $g(x) = \frac{۱}{۱-x^۲}$ باشد دامنه تابع $\frac{f}{g}$ و fog را به دست آورید.

حل :

$$D_f = R - \{۰\} \qquad D_g = R - \{-۱, ۱\}$$

$$D_{F/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = R - \{-۱, ۰, ۱\}$$

xی وجود ندارد. $g(x) = ۰$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{ x \in R - \{-۱, ۱\} \mid \frac{۱}{۱-x^۲} \in R - \{۰\} \right\}$$

$$\frac{۱}{۱-x^۲} \neq ۰ \Rightarrow x \in R \qquad D_{fog} = R - \{-۱, ۱\}$$

۵۶) بیشترین مقدار $f(x) = (k+۳)x^۲ - ۴x + ۷$ برابر صفر است. مقدار k را بیابید.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

حل :

$$x_s = \frac{-b}{۲a} = \frac{۴}{۲(k+۳)}$$

$$f(x_s) = ۰ \Rightarrow (k+۳)(\frac{۴}{۲(k+۳)})^۲ - ۴(\frac{۴}{۲(k+۳)}) + ۷ = ۰ \Rightarrow ۷k + ۲۱ = ۴ \Rightarrow k = \frac{-۱۷}{۷}$$

۵۷) اگر $f(x) = \frac{۱}{a^۲x^۲+۱}$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt{a-x}}$ به طوری که دامنه gof برابر $\Re$ باشد، حدود تغییرات a را بیابید .

حل :

$$D_f = \Re \quad , \quad D_g = (-\infty, a)$$

$$D_{gof} = \left\{x \in \Re \mid \frac{۱}{a^۲x^۲+۱} \in (-\infty, a)\right\} \Rightarrow \frac{۱}{a^۲x^۲+۱} < a \Rightarrow \frac{۱-a^۳x^۲-a}{a^۲x^۲+۱} < ۰$$

$$a^۲x^۲+۱>۰ \Rightarrow a^۳x^۲+a-۱>۰ \Rightarrow \begin{cases} a>۰ \\ \Delta<۰ \end{cases}$$

$$\Delta = -۴a^۳(a-۱) < ۰ \quad , \quad a > ۰$$

$$a \in ((-\infty, ۰) \cup (۱,+\infty)) \cap (۰,+\infty) \Rightarrow a \in (۱,+\infty)$$

۵۸) اگر $h(\frac{x^۲+۱}{x}) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۴$, $g(x) = ۲x + ۵$ مطلوب است.

الف: ضابطه $(fog)(x)$ ب: دامنه $(fog)(x)$

حل الف)

$$h(x) = x^۲ - ۵ \quad h(\frac{x^۲+۱}{x} = \frac{۱}{x} + x) =$$

$$h(\frac{۱}{x}+x) = (\frac{۱}{x}+x)^۲ - ۵ = \frac{۱}{x^۲} + x^۲ + ۱ - ۵ = \frac{۱}{x^۲} + x^۲ - ۴$$

$$(hog)(x) = h(g(x)) = h(۲x+۵) = (۲x+۵)^۲ - ۵ = ۴x^۲ + ۲۰x + ۲۵ - ۵$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = ۴x^۲ + ۲۰x + ۲۰$$

حل ب : $D_{fog(x)} = \{x \mid x \in Dg \; , \; q(x) \in Df\} = \{x \mid x \in R \; , ۲x+۵ \in R\} = R$

۵۹) در مورد زوج و یا فرد بودن توابع زیر تحقیق کنید.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

الف: $h(x)=\sin(\log\frac{۲-x}{۲+x})$ ب: $h(x)=۲x^۲-\sqrt{|x|-\cos^۳(x)}$

حل الف : $\frac{۲-x}{۲+x}>۰\Rightarrow$ تعیین علامت $\Rightarrow D_f=(-۲,۲)$ دامنه متقارن می باشد

$$h(-x)=\sin(\log\frac{۲-(-x)}{۲+(-x)})=\sin(\log\frac{۲+x}{۲-x})$$

$-\log x=ly\frac{۱}{x}$ چون $\Rightarrow h(-x)=\sin(-\log\frac{۲-x}{۲+x})$

$h(-x)=-\sin(\log\frac{۲-x}{۲+x})$ بنابراین h فرد است.

حل ب: $D_h=R$ دامنه متقارن است

$h(-x)=۲(-x)^۲-\sqrt{|-x|}-\cos^۳(-x)=۲x^۲-\sqrt{|x|}g^۳x=h(x)\Rightarrow$ f زوج است

۶۰) زوج یا فرد بودن $f(x)=|۳x+۵|+|۳x-۵|$ را تعیین کنید.

حل :

$D_f IR$ دامنه متقارن است.

$$f(-x)=|۳(-x)+۵|+|۳(-x)-۵|=|-۳x+۵|+|-۳x-۵|=|-(۳x-۵)|+|-(۳x+۵)|=$$
$$|۳x-۵|+|۳x+۵|=f(x)$$

تابع زوج است.

۶۱) در تابع با ضابطه $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$ مقدار $f^{-۱}(۴)$ را بیابید.

حل :

$f(x)=۴$ $\quad$ $۴=-x+\sqrt{-۲x}$

$\underbrace{۴+x}_{\geq ۰}=\sqrt{\underbrace{-۲x}_{\geq ۰}}$ $\quad D=[-۴,۰]$

$(۴+x)^۲=(\sqrt{-۲x})^۲$

$x^۲+۸x+۱۶=-۲x$

$x^۲+۱۰x+۱۶=۰\left\langle\begin{array}{l}x=-۸ \text{ غ ق ق}\\ x=-۲ \text{ ق ق}\end{array}\right.$ $\quad f^{-۱}(۴)=-۲$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۲) اگر $g(x)=۲x+۴$, $fog(x)=\frac{\sqrt{x}}{۳x-۱}$ باشد $f(x)$ را بدست آورید .

حل :

$$fog(x)=f(g(x))\longrightarrow\frac{\sqrt{x}}{۳x-۱}=f(۲x+۴)$$

با قرار دادن $۲x+۴=t$ داریم :

$$f(t)=\frac{\sqrt{۲(t-۴)}}{۳t-۱۴}\quad\longrightarrow\quad f(x)=\frac{\sqrt{۲(x-۴)}}{۳x-۱۴}$$

۶۳) اگر $f(x)=\begin{cases}x-۱ & x>۰\\ ۲x & x\le ۰\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x & x\ge ۱\\ x+۲ & x<۱\end{cases}$ باشند ضابطه fog را بیابید .

حل :

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}g(x)-۱ & g(x)>۰\\ ۲g(x) & g(x)\le ۰\end{cases}$$

و در حالت $g(x)>۰$ داریم : $g(x)=\begin{cases}x & x\ge ۱\\ x+۲ & -۲<x<۱\end{cases}$

و در حالت $g(x)\le ۰$ داریم : $g(x)=\{x+۲ \quad x\le -۲$ بنابرین نتیجه می گیریم که

$$fog(x)=\begin{cases}x-۱ & x\ge ۱\\ x+۱ & -۲<x<۱\\ ۲(x+۲) & x\le -۲\end{cases}$$

۶۴) فرض کنید $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ ، ضابطه و دامنه gof را تعیین کنید .

حل : ابتدا $f(x)$ را تشکیل می دهیم. از تغیرمتغیر استفاده می کنیم. یعنی:

$$\frac{x}{x-1}=t\to x=xt-t\to x-xt=-t\to x(1-t)=-t$$

$$x=\frac{t}{t-1}\to f(t)=\frac{t-1}{t}\to f(x)=\frac{x-1}{x}$$

$$gof(x)=g\big(f(x)\big)=\sqrt{1-(f(x))^2}=\sqrt{1-(\frac{x-1}{x})^2}=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$$

$$Df=R-\{0\}\quad,\quad Dg=1-x^2\ge 0\ ,Dg=[-1,1]$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$Dgof = \{x \in Df \,|\, f(x) \in Dg\} = \left\{x \in R - \{0\} \,\middle|\, \frac{x-1}{x} \in [-1,1]\right\}$$

$$-1 \le \frac{x-1}{x} \le 1$$

$$D1(1): -1 \le \frac{x-1}{x} \to \frac{x-1}{x} + 1 \ge 0 \to \frac{x-1+x}{x} \ge 0 \to \frac{2x-1}{x} \ge 0$$

$2x+1=0 \to x=-\frac{1}{2}$

$x=0$

$D1 = (-\infty,0) \cup (\frac{1}{2},+\infty)$

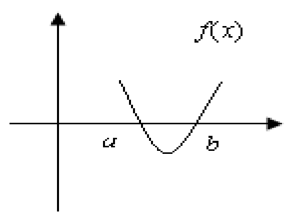
x	$x<0$	0	$\frac{1}{2}$
$۲x-۱$	-	-	+
x	-	+	+
$\frac{2x+1}{x}$		ن + -	+

$$D2(2): \frac{x-1}{x} \le 1 \to \frac{x-1}{x} - 1 \le 0 \to \frac{x-1-x}{x} \le 0 \to \frac{-1}{x} \le 0 \to \frac{1}{x} \ge 0 \to x > 0 \to D2 = (0,+\infty)$$

$D': D1 \cap D2 = \left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

$Dgof = D' \cap \ddot{D} = \left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

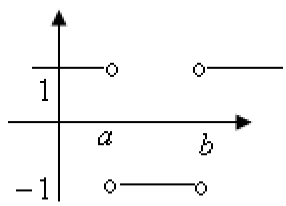
۶۵) با توجه به نمودار $f(x)$



الف) نمودار $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$ را رسم کنید.

ب) حدود a چقدر باشد تا معادله $\frac{|f(x)|}{f(x)} = x$ جواب نداشته با شد

حل : $a < 1$



نمودار $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$

۶۶) اگر $f = \{(۳,۴),(۸,۹),(۵,۲)\}$ و $g = \{(۱,۳),(-۲,۷),(۵,۹),(۱۱,۰)\}$ باشدآنگاه fog و $\frac{۳f+۴}{g}$ را بیابید.

حل :

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$fog = \{(۱,۴)\} \quad , \quad \frac{۳f+۴}{g} = \frac{۳f(۵)+۴}{g(۵)} = \frac{۱۰}{۹}$$

۶۷) اگر f معکوس پذیر باشد با فرض معکوس پذیری g معکوس تابع $g(x) = \dfrac{۵ - f(۳-۴x)}{f(۳-۴x)}$ را بیابید.

حل :

$$g^{-1}(y) = x \quad , \quad y = \frac{۵ - f(۳-۴x)}{f(۳-۴x)} \Rightarrow f(۳-۴x) = \frac{۵}{y+۱} \quad \Rightarrow f^{-۱}(\frac{۵}{y+۱}) = ۳ - ۴x \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{۱}{۴}(۳ - f^{-۱}(\frac{۵}{y+۱}))$$

$$g^{-1}(x) = \frac{۱}{۴}(۳ - f^{-۱}(\frac{۵}{x+۱}))$$

۶۸) توابع g, f با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x-۱}$ و $g(x) = \dfrac{۱}{x}$ مفروضند .

الف) بدون تشکیل ضابطه ، D_{fog} را تعیین کنید .

ب) ضابطه تابع fog را بنویسید .

حل الف)

$$D_f = [۱, +\infty) \ , \ D_g = R - \{۰\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R - \{۰\} \mid \frac{۱}{x} \geq ۱\} = (۰, ۱]$$

حل ب)

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{۱}{x} - ۱}$$

۶۹) معکوس تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{۳x-۲}$ و دامنه‌ی تابع معکوس را مشخص کنید.

حل :

$$y = \sqrt{۳x-۲} \Rightarrow y^۲ = ۳x - ۲ \Rightarrow x = \frac{y^۲+۲}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x^۲+۲}{۳}$$

با توجه به اینکه $D_{f^{-۱}} = R_f$ و $R_f = [۰, +\infty)$ پس $D_{f^{-۱}} = [۰, +\infty)$ می‌باشد.

۷۰) k را طوری تعیین کنید که دوتابع g, f مساوی باشند .

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - x}{x} & x \neq ۰ \\ k+۱ & x = ۰ \end{cases} \qquad\qquad g(x) = x - ۱$$

حل :

$$x \neq ۰ \rightarrow f(x) = x - ۱ \rightarrow f(۰) = g(۰) \rightarrow k + ۱ = -۱ \rightarrow k = -۲$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۱) اگر $f=\{(۲,-۱),(۳,۰),(۴,۱),(۵,۲)\}$, $g=\{(-۱,۱),(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$ باشد توابع زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید .

الف) gof ب) $\frac{۲f}{g-۱}$

حل :

x	2	3	4	5
$f(x)$	-1	0	1	2
$gof(x)$	1	------	3	1

$gof=\{(۲,۱),(۴,۳),(۵,۱)\}$

x	2	3
$۲f(x)$	--2	0
$g(x)-۱$	0	1
$\frac{۲f}{g-۱}$	ت ن	0

$\frac{۲f}{g-۱}=\{(۳,۰)\}$

۷۲) توابع g, f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-۲}$, $g(x)=x^۲+x$ مفروضند . دامنه تابع fog رابدون تعیین ضابطه آن بدست آورید .

حل :

$$D_f=[۲,+\infty), D_g=R$$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, x^۲+x\in d_f\}=\{x|x\in R, x^۲+x\geq ۲\}=(-\infty,-۲\cup(۱,+\infty)$$

۷۳) هزینه ی مکالمه تلفنی بین دو شهر ۲۰ تومان برای کمتر از ۳ دقیقه و ۵ تومان برای هر دقیقه ی اضافی است .

(کسر دقیقه یک دقیقه به حساب می آید) تابع هزینه ی مکالمه ی تلفنی بین این دو شهر را بر حسب زمان (tدقیقه)

بنویسید . (به صورت جزءِ صحیح)

حل : ابتدا تابع هزینه ی مکالمه تلفنی را بر حسب زمان به صورت چند ضابطه ای می نویسیم :

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$P(t)=\begin{cases} ۲۰ & ۰<t<۳ \\ ۲۰+(۱\times ۵) & ۳\le t<۴ \\ ۲۰+(۲\times ۵) & ۴\le t<۵ \\ ۲۰+(۳\times ۵) & ۵\le t<۶ \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

پس داخل براکت باید به صورت $t-۲$ باشد . بنابراین برای $t\ge ۳$ داریم :

$$t\ge ۳\to f(t)=۲۰+۵[t-۲]=۵[t]+۱۰=۵([t]+۲)=۵[t+۲]$$

$$f(t)=\begin{cases} ۲۰ & ۰<t<۳ \\ ۵[t+۲] & t\ge ۳ \end{cases}$$

۷۴) اگر تابع $f=\{(۰,a-۱),(-۱,۲-d),(a+۲b-۲,c)\}$ هم زوج و هم فرد باشد حاصل d,c,b,a چقدر است ؟

حل :

چون تابع هم زوج وهم فرد است پس اولا دامنه تابع باید متقارن باشد وثانیا تابع باید تابع ثابت صفر باشد

$$D_f=\{۰,-۱,a+۲b-۲\}\to a+۲b-۲=۱\to a+۲b=۳$$

$$a-۱=۰\to a=۱\to b=۱$$

$$c=۰\quad ,\quad ۲-d=۰\to d=۲$$

۷۵) اگر $g(x)=\sqrt{x},\ f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ دامنه $(f+g)of$ را بدست آورید.

حل :

$$D_f:۱-x^۲\ge\to x^۲\le ۱\ x\in[-۱,۱]$$

$$D_g:[۰,+\infty)$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[۰,۱]$$

$$D(f+g)of=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_{f+g}\}$$

$$=\{x\in[-۱,۱] \mid \sqrt{۱-x^۲}\in[۰,۱]\}$$

$$x\to ۰\le\sqrt{۱-x^۲}\le ۱\to ۰\le ۱-x^۲\le ۱$$

$$-۱\le -x^۲\le ۰\xrightarrow{\times(-۱)}۱\ge x^۲\ge ۰\to x^۲\le ۱\to -۱\le x\le ۱$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۶) تابع $y = x^{۲} - ۲x + ۳$ در چه بازه ای یک به یک است. در آن بازه وارون آن را به دست آورید و نشان دهید.

$$f^{-۱}(f(x)) = x$$

حل :

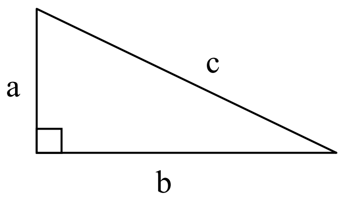
$$y = x^{۲} - ۲x + ۳ = (x-۱)^{۲} + ۲$$

پس برای $x \geq ۱$ تابع یک به یک است.

$$y = (x-۱)^{۲} + ۲ \to y - ۲ = (x-۱)^{۲} \to \sqrt{y-۲}^{\,x\geq ۱} = x - ۱ \to x = ۱ + \sqrt{y-۲}$$
$$f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{\mathrm{x-۲}}$$
$$f^{-۱}(f(x) = ۱ + \sqrt{(x-۱)^{۲} + ۲ - ۲} = ۱ + x - ۱ = x$$

۷۷) مساحت مثلث قائم الزاویه ای $۲۰cm^{۲}$ است. طول وتر این مثلث را بعنوان تابعی از محیط آن بدست آورید.

حل :

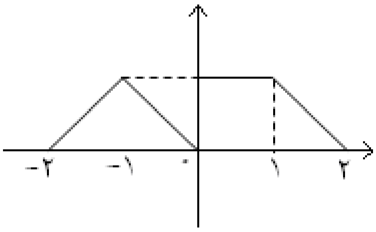


$$p = a + b + c$$
$$\begin{cases} S = ۲۰ = \frac{۱}{۲}ab \Rightarrow ab = ۴۰ \\ c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} \Rightarrow (a+b)^{۲} = c^{۲} + ۲ab \end{cases} \Rightarrow (a+b)^{۲} = c^{۲} + ۸۰ \Rightarrow a + b = \sqrt{c^{۲} + ۸۰}$$
$$c = p - (a+b) \Rightarrow c = p - \sqrt{c^{۲} + ۸۰} \Rightarrow p - c = \sqrt{c^{۲} + ۸۰} \Rightarrow$$
$$(p-c)^{۲} = c^{۲} + ۸۰ \Rightarrow p^{۲} + c^{۲} - ۲pc = c^{۲} + ۸۰ \Rightarrow c = \frac{p^{۲} - ۸۰}{۲p}$$

۷۸) اگر نمودار تابع f بصورت مقابل باشد نمودار تابع $y = f(۲x + ۲)$ را رسم کنید.

حل :

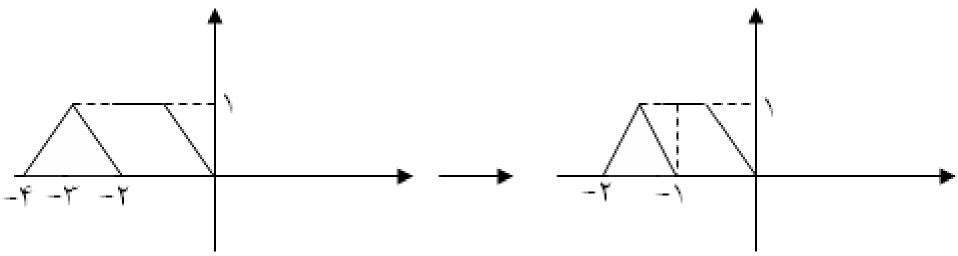
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا



ابتدا نمودار تابع $g(x)=f(x+۲)$ را رسم نموده یعنی نمودار f را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می دهیم

وسپس نمودار $g(۲x)=f(۲x+۲)$ را رسم می کنیم یعنی نمودار $g(x)$ را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور

xها منقبض می کنیم.



۷۹) دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-۲}$ را تعیین کنید.

حل :

$D_۱ : x \geq ۰$

$D_۲ : \sqrt{x}-۲ \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x} \geq ۲ \Rightarrow x \geq ۴$

$D = D_۱ \cap D_۲ = [۴,+\infty)$

۸۰) اگر $f(x)=۱+\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲$ و $x>۰$ آن‌گاه ضابطه $(fog)^{-۱}$ را محاسبه کنید.

حل :

$(fog)(x)=۱+\sqrt{x^۲}$

$y=۱+|x|$

$x=۱+|y| \xrightarrow{y>۰} x-۱=y$

$x \geq ۰$

$\Rightarrow (fog)^{-۱}(x)=x-۱$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۱) اگر $D_f=[۲,۵]$, $R_f=[-۱,۵]$, $g(x)=f(۳x-۱)+۲$ باشد اولاً دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. ثانیاً توضیح دهید که از روی نمودار f چگونه نمودار g را رسم می کنیم .

اولاً : $۲\le ۳x-۱\le ۵ \to D_g=[۱,۲]$

$-۱\le f(۳x-۱)\le ۵ \to ۱\le g(x)\le ۷ \to R_g=[۱,۷]$

ثانیاً : $g(x)=f(۳x-۱)+۲=f(۳(x-\frac{۱}{۳}))+۲$

ابتدا نمودار تابع f را به اندازه $\frac{۱}{۳}$ به سمت راست می بریم . نمودار تابع $f(x-\frac{۱}{۳})$ رسم می شود سپس طول نقاط روی این تابع را به ۳ تقسیم می کنیم تا نمودار تابع $f(۳(x-\frac{۱}{۳}))$ رسم شود برای رسم نمودار تابع g این نمودار را ۲ واحد موازی محور عرضها به سمت بالا می بریم .

۸۲) نشان دهید رابطه ی $y^۲-۲y+x^۲+۲x-۷=۰$ با شرط $y\le ۱$ معادله یک تابع است.

حل :

$\to y=۱-\sqrt{۹-(x+۱)^۲}$ $(y-۱)^۲+(x+۱)^۲=۹ \ , \ y\le ۱$ تابع است

۸۳) با فرض $f(x)=۲x+۵$ و $g(x)=x-\frac{۱}{۲}$ ضابطه $g^{-۱}of^{-۱}$ را بنوسید ؟

حل :

$$f(x)=۲x+۵ \to x=\frac{f(x)-۵}{۲} \to f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

$$g(x)=x-\frac{۱}{۲} \to x=g(x)+\frac{۱}{۲} \to g^{-۱}(x)=x+\frac{۱}{۲}$$

$$(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}\left(\frac{x-۵}{۲}\right)=\frac{x-۴}{۲}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴) اگر $f=\{(-۳,۲),(۲,-۲),(۳,۳)\}$, $g=\{(۱,۰),(۲,-۱),(۳,۲)\}$ دو تابع باشند ، توابع زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید.

الف) $f-۳g$ ب) fog

الف) $f-۳g=\{(۲,۱),(۳,-۳)\}$ ب) $fog=\{(۳,-۲)\}$

۸۵) مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\log(x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})$ زوج باشد .

حل :

چون f تابعی زوج است پس :

$$f(x)=f(-x)\Rightarrow \log(x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})=\log(-x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})\Rightarrow$$
$$x+\sqrt{x^۲+۴a^۲}=-x+\sqrt{x^۲+۴a^۲}$$
$$\Rightarrow x=-x\Rightarrow ۲x=۰\Rightarrow x=۰$$

اگر x صفر باشد ، a نمی تواند صفر باشد زیرا لگاریتم صفر تعریف نشده است اما a اعداد مخالف صفر می تواند باشد زیرا تابع ثابت با دامنه متقارن زوج است.

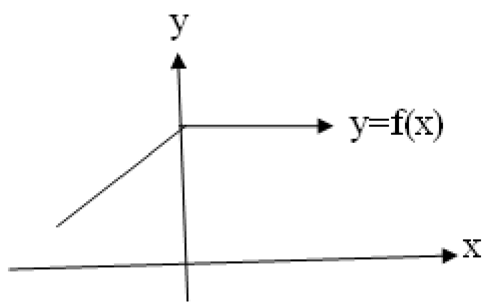
۸۶) g تابعی است یک به یک و $g^{-۱}$ معکوس g است معکوس تابع $f(x)=۱+۲g(x-۳)$ را حساب کنید ؟

حل :

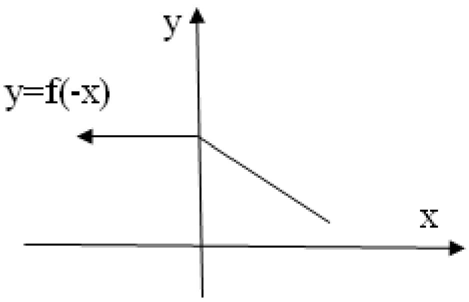
$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-۱}(y)$$
$$y=۱+۲g(x-۳)\Rightarrow g(x-۳)=\frac{y-۱}{۲}\Rightarrow$$
$$x-۳=g^{-۱}\left(\frac{y-۱}{۲}\right)\Rightarrow x=g^{-۱}\left(\frac{y-۱}{۲}\right)+۳,\Rightarrow$$
$$f^{-۱}(y)=g^{-۱}\left(\frac{y-۱}{۲}\right)+۳\xrightarrow{y\leftrightarrow x}f^{-۱}(x)=g^{-۱}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)+۳$$

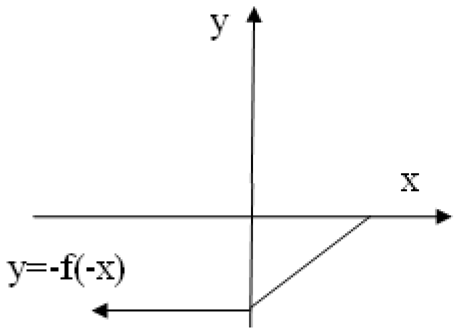
۸۷)نمودار تابع f به صورت زیر است . نمودار تابع به معادله $y=-f(-x)$ را رسم کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



حل :





(۹۲

۸۸) اگر g, f توابعی فرد باشند. نشان دهید fog نیز تابعی فرد است .

حل : ابتدا نشان می دهیم دامنه fog متقارن است. یعنی اگر $x \in D_{fog}$ آنگاه $-x \in D_{fog}$. با توجه به اینکه g, f فرد هستند داریم :

$$x \in D_{fog} \to x \in D_g ,\ g(x) \in D_f \to -x \in D_g ,\ -g(-x) \in D_f \to$$
$$-x \in D_g , g(-x) \in D_f \to -x \in D_{fog}$$

همچنین ثابت می کنیم $(fog)(-x) = -(fog)(x)$

$$fog(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = -f\big(g(x)\big) = -(fog)(x)$$

۸۹) اگر $F(x) + xF(۲) = x^۳ + ۱$ باشد حاصل $F(-۲)$ چقدر است ؟

حل :

$$x = ۲ \Rightarrow F(۲) + ۲F(۲) = ۲^۳ + ۱$$
$$۳F(۲) = ۹ \Rightarrow F(۲) = ۳$$
$$x = -۲ \to F(-۲) + (-۲)(۳) = (-۲)^۳ + ۱ \Rightarrow$$
$$F(-۲) = ۶ + (-۸) + ۱ = -۱ \Rightarrow F(-۲) = -۱$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۰) آیا دو تابع $F^{-1}oF$ و FoF^{-1} همواره مساویند چرا؟

حل :

$$D_{FoF^{-1}} = \{X \in D_{F^{-1}} \mid F^{-1}(X) \in D_F\}$$
$$D_{F^{-1}oF} = \{X \in D_F \mid F(X) \in D_{F^{-1}}\}$$

لذا ممکن است $D_{FoF^{-1}} \neq D_{F^{-1}oF}$ بنابراین $FoF^{-1} \neq F^{-1}oF$

۹۱) اگر $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$ آنگاه مشتق تابع معکوس $f\left(\sqrt{۱-x}\right)$ در مبدا مختصات کدام است؟

حل:

$$f\left(\sqrt{۱-x}\right)=\frac{۱-x-۱}{۱-x+۱}=\frac{-x}{۲-x} \quad \Rightarrow \quad g(x)=f\left(\sqrt{۱-x}\right)$$

$$g'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}}\, f'\left(\sqrt{۱-x}\right)$$

$$g(۰)=f(۱)=۰ \quad \Rightarrow \quad (۰,۰)\in g \quad \Rightarrow \quad (۰,۰)\in g^{-۱}$$

$$\left(g^{-۱}(۰)\right)'=\frac{۱}{g'(۰)}=\frac{۱}{\frac{-۱}{۲}f'(۱)}=-۲$$

۹۲) f تابعی یک به یک و وارون پذیر است معکوس تابع $g(x)=۱+۲f(x-۳)$ را حساب کنید.

حل:

$$y=۱+۲f(x-۳) \Rightarrow \quad x=۱+۲f(y-۳) \Rightarrow \quad ۲f(y-۳)=x-۱$$

$$\Rightarrow \quad f(y-۳)=\frac{x-۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad y-۳=f^{-۱}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)$$

$$y=f^{-۱}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)+۳ \quad \Rightarrow \quad g^{-۱}(x)=f^{-۱}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)+۳$$

۹۳) آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sin^{۲} x}$, $g(x)=\cos x$ مساویند؟چرا؟

حل :

بررسی دامنه: $\begin{cases} D_f\ ۱-\sin^{۲} x \geq ۰ \Rightarrow Sin^{۲}x \leq ۱ \Rightarrow Df = IR \\ D_g = IR \end{cases}$

بررسی ضابطه: $\begin{cases} F(x)=\sqrt{۱-Sin^{۲}x}=\sqrt{Cos^{۲}x}=|Cosx| \\ g(x)=Cosx \end{cases}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$Df = Dg \quad \Rightarrow f \neq g \quad f(x) \neq g(x)$$

۹۴) توابع g, f با ضابطه های $g(x)=\sqrt{x(x-۲)}, f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲x-x^۲}}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنه توابع g, f را محاسبه کنید. **ب)** آیا تابع $f+g$ وجود دارد ؟ چرا ؟

حل :

$$D_f : ۲x-x^۲>۰ \Rightarrow x(۲-x)>۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases} \to D_f = (۰,۲)$$

$$D_g = (-\infty,۰]\bigcup[۲,+\infty]\ D_g : x(x-۲)\geq ۰ \Rightarrow x=۰, x=۲ \to$$

$D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = \{\ \} \Rightarrow f+g$ **وجود ندارد.**

۹۵) اگر $f(x)=\frac{x-۱}{۲x+۱}$ و $gof(x)=x^۲$، ضابطه ی $g(x)$ را بیابید.

حل :

$$gof(x)=g(f(x))=g(\frac{x-۱}{۲x+۱})=x^۲$$

پس اگر فرض کنیم $\frac{x-۱}{۲x+۱}=u$، آن گاه $۲xu+u=x-۱$ یا $x(۱-۲u)=u+۱$ و در نتیجه $x=\frac{u+۱}{۱-۲u}$، بنا بر این $g(x)=(\frac{x+۱}{۱-۲x})^۲$.

۹۶) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۲-x}{۱+x}$ تعریف شوند، دامنه و برد تابع gof را به دست آورید.

حل:

$$D_{gof} = \{x \in D_f ,\ f(x) \in D_g\}$$
$$= \{x \geq ۰ \quad , \quad \sqrt{x} \neq -۱\} = [۰,+\infty)$$

برای تعیین برد، اگر ضابطه gof را تشکیل دهیم داریم :

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x}\right)=\frac{۲-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$$

فرض کنید که $y=\frac{۲-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$ با طرفین وسطین و تعیین x بر حسب y داریم :

$$\sqrt{x}=\frac{۲-y}{y+۱}\geq ۰\Rightarrow -۱<y\leq ۲ \quad R_f=(-۱,۲]$$

۹۷) با توجه به مشخصات زیر ضابطه ی تابع f را بنویسید و سپس آن را رسم کنید.

الف) دامنه f اعداد حقیقی است.

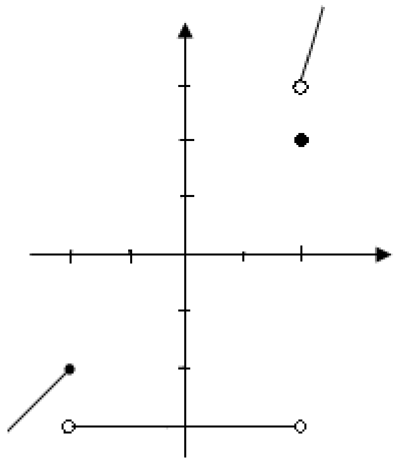
ب) تابع در فاصله $(-\infty,-۲]$ تابعی همانی است.

ج) $f(۲)=۱$

د) تابع f برای هر عدد بزرگتر از ۲، مربع آن عدد منهای یک را نسبت می دهد.

هـ) تابع f در فاصله $(-۲,۲)$ تابعی ثابت است که محور عرض ها را در ۳- قطع می کنند.

حل :



$$f(x)=\begin{cases} x & x\leq -۲ \\ -۳ & -۲<x<۲ \\ ۱ & x=۲ \\ x^۲-۱ & x>۲ \end{cases}$$

۹۸) معادله ی $\left[\frac{x}{۵}\right]=\frac{x}{۸}+۱$ را حل کنید.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

حل : از معادله داریم $\left[\frac{x}{۵}\right]-۱=\frac{x}{۸}$ و چون طرف راست معادله ی اخیر، عددی صحیح است، پس $\frac{x}{۸}$ نیز عددی صحیح است و باید داشته باشیم $\frac{x}{۸}=k\in Z$ یا $x=۸k$. از طرفی داریم

$$\left[\frac{x}{۵}\right]=\frac{x}{۸}+۱=k+۱ \quad\Rightarrow\quad k+۱\le\frac{x}{۵}<k+۲ \quad\Rightarrow$$

$$k+۱\le\frac{۸k}{۵}<k+۲ \quad\Rightarrow\quad ۵k+۵\le ۸k<۵k+۱۰\Rightarrow$$

$$۵\le ۳k<۱۰ \quad\Rightarrow\quad \frac{۵}{۳}\approx ۱/۶۶\le k<\frac{۱۰}{۳}\approx ۳/۳۳$$

$$\xrightarrow{k\in Z} k=۲,۳ \quad \xrightarrow{x=۸k} x=۱۶,۲۴$$

۹۹) آیا اگر مجموع یا تفاضل دو تابع زوج باشند می توان نتیجه گرفت که هردو تابع نیز زوج هستند . چرا ؟

حل : خیر

مثال :

$$f=\{(1,-1),(-1,-1),(2,4),(3,5),(-2,4)\}, g=\{(1,3),(-1,-3),(2,5),(-2,5),(4,1)\}$$
$$f+g=\{(1,2),(-1,-4,(2,9),(-2,9)\}, f-g=\{(1,-4)(-1,2),(2,-1),(-2,-1)\}$$

همانطور که ملاحظه می شود $f-g, f+g$ هر دو زوج هستند اما نه f ونه g هیچ کدام زوج نیستند .

۱۰۰) n,m را چنان بیابید که تابع مقابل هم زوج باشد و هم فرد .

$$f(x)=\frac{(3m+6)x+m-n+1}{1+x^4}$$

حل :

$$D_f=R \qquad f(x)=0$$

$$(3m+6)x+m-n+1=0\rightarrow\begin{cases}3m+6=0\rightarrow m=-2\\ m-n+1=0\rightarrow -2-n+1=0\rightarrow n=-1\end{cases}$$

f هم زوج و هم فرد است .

۱۰۱) نشان دهید ترکیب هر تابع همانی با یک تابع برابر خود تابع است .

حل : اگر $f(x)=x$ و $g(x)$ تابعی دلخواه باشد .

$$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}=\{x\in D_g | g(x)\in R\}=D_g$$
$$fog(x)=f(g(x))=g(x)$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}=\{x\in R | f(x)\in D_g\}=D_g$$
$$gof(x)=g(f(x))=g(x)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲) دامنه تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{[x]}$ را بنویسید.

حل:

$$D_f=\{x \mid ۱-x^{۲}\geq ۰\,,\,[x]\neq ۰\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۱-x^{۲}\geq ۰\rightarrow ۱\geq x^{۲}\rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \\ [x]=۰\rightarrow ۰\leq x<۱\rightarrow [x]\neq ۰\rightarrow x<۰ \vee x\geq ۱ \end{array}\right\}\rightarrow D_f=[-۱,۰)$$

۱۰۳) فرض کنید $f(x)=(2-x)^{2010}+ax+b$ ، مقادیر b,a را چنان بیابید که $f(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر و باقیمانده تقسیم آن بر $x-3$ مساوی ۶ باشد .

حل :

$$f(1)=0\rightarrow (2-1)^{2010}+a(1)+b=0\rightarrow a+b=-1$$

$$f(3)=6\rightarrow (2-3)^{2010}+a(3)+b=6\rightarrow 3a+b=5$$

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+b=5 \end{cases}\rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

۱۰۴) آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ و $g(x)=(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1})$ با هم برابر اند .

حل :

خیر زیرا $D_f\neq D_g$

$$D_f=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$$

$$D_g=[2,+\infty)$$

۱۰۵) a را چنان تعیین کنید که رابطه f در R یک تابع باشد .

$$f(x)=\begin{cases} 5a+x+2 & x\geq 2 \\ 2x^2+\cos(x-2) & x\leq 2 \end{cases}$$

حل :

$$5a+2+2=2(2)^2+\cos(2-2)\rightarrow 5a+4=9\rightarrow a=1$$

۱۰۶) تابع معکوس تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۱-\sqrt{x}} & ۰\leq x\leq ۱ \\ x^{۳}-۱ & x<۰ \\ x^{۲}+۳ & x>۱ \end{cases}$ را بیابید .

حل :

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$۱)\ y=\sqrt{۱-\sqrt{x}}$

$۰\le x\le ۱\to ۰\le \sqrt{x}\le ۱\to -۱\le -\sqrt{x}\le ۰\to ۰\le ۱-\sqrt{x}\le ۱\to ۰\le \sqrt{۱-\sqrt{x}}\le ۱$

$y=\sqrt{۱-\sqrt{x}}\to y^{۲}=۱-\sqrt{x}\to \sqrt{x}=۱-y^{۲}\to x=(۱-y^{۲})^{۲}\to f^{-۱}(x)=(۱-x^{۲})^{۲}$

$۲)\ y=x^{۳}-۱$

$x<۰\to x^{۳}<۰\to x^{۳}-۱<-۱$

$y=x^{۳}-۱\to x^{۳}=y+۱\to x=\sqrt[۳]{y+۱}\to f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}$

$۳)\ y=x^{۲}+۳$

$x>۱\to x^{۲}>۱\to x^{۲}+۳>۴\to y>۴$

$y=x^{۲}+۳\to x^{۲}=y-۳\to x=\sqrt{y-۳}\to f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۳}$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}(۱-x^{۲})^{۲} & ۰\le x\le ۱\\ \sqrt[۳]{x+۱} & x<-۱\\ \sqrt{x-۳} & x>۴\end{cases}$$

۱۰۷) اگر g تابعی فرد و $f(x)+۲f(-x)=۵g(x)$ باشد ثابت کنید f فرد است .

$g(-x)=-g(x)$

$f(x)+۲f(-x)=۵g(x)$

$f(-x)+۲f(x)=۵g(-x)=-۵g(x)$

$۳f(x)+۳f(-x)=۰\to f(-x)=-f(x)$

۱۰۸) f تابعی یک‌به‌یک است و $f^{-۱}$ معکوس f است. معکوس تابع $g(x)=۱+۲f(x-۳)$ را حساب کنید .

حل :

$y=g(x)\Rightarrow x=g^{-۱}(y)$

$y=۱+۲f(x-۳)\Rightarrow f(x-۳)=\frac{y-۱}{۲}\Rightarrow x-۳=f^{-۱}(\frac{y-۱}{۲})\Rightarrow x=f^{-۱}(\frac{y-۱}{۲})+۳$

$\Rightarrow g^{-۱}(x)=f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})+۳$

۱۰۹) اگر f وارون پذیر باشد،وارون تابع $h(x)=\frac{f(x)}{۱+f(x)}$ را بدست آورید ؟

حل : فرض کنیم g وارون h باشد ، در این صورت داریم :

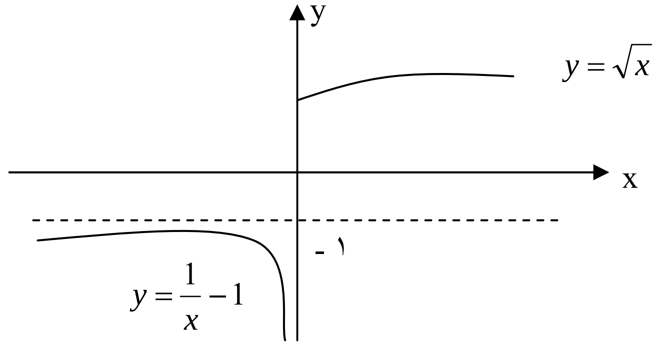
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$g(h(x)) = x \Rightarrow g(\frac{f(x)}{۱+f(x)}) = x$$

$$\frac{f(x)}{۱+f(x)} = t \Rightarrow tf(x)+t = f(x) \Rightarrow f(x)(t-۱) = t \Rightarrow f(x) = \frac{t}{t-۱} \Rightarrow t = f^{-۱}(\frac{t}{t-۱})$$

$$g(t) = f^{-۱}(\frac{t}{۱-t}) \Rightarrow g(x) = f^{-۱}(\frac{x}{۱-x})$$

۱۱۰) ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 : x \geq 0 \\ \frac{1}{x}-1 : x < 0 \end{cases}$ و اورن پذیر است ضابطه ی و اورن آن را بیابید:



حل :

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} f_1^{-1}(x) : x \in Df_1^{-1} = Rf_1 \\ f_2^{-1}(x) = x \in Df_2^{-1} = Rf_2 \end{cases}$$

مشاهده می شود که هیچ خط افقی منحنی را در پیش از یک نقطه قطع نمی کند لذا ازآنجا که هریک از ضابطه های تابع f دردامنه مربوط واورن پذیر ند پس ضابطه ی واورن

$$y-1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$$

$$f_1(x) = y = \sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x} = y-1 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = x \Rightarrow f_1^{-1}(x) = (x-1)^2 : x \geq 1$$

$$y+1 < 0 \Rightarrow y \leq -1$$

$$f_2(x) = y = \frac{1}{x}-1 \Rightarrow y+1 = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y+1} \Rightarrow f_2^{-1}(x) = \frac{1}{x+1} : x < -1$$

درنتیجه ضابطه ی تابع واورن بصورت زیر خواهد بود .

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} (x-1)^2 : x \geq 1 \\ \frac{1}{x+1} : x < -1 \end{cases}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا