



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



معاونت دانش پژوهان جوان

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی - روز اول

تاریخ: ۱۳۹۵/۲/۹ - ساعت: ۸:۳۰ مدت: ۲۷۰ دقیقه

شماره صندلی



توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- ۱- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.
- ۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنان‌چه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- ۴- با توجه به آن‌که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچ‌گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوال‌ها را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و سپس در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
- ۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۸- شرکت‌کنندگان در دوره تابستان از بین دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.



۱. فرض کنید $c \geq b \geq a > 0$ ، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

(۷ نمره)



۲. مثلث ABC با دایره محیطی w مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطه A مماسی بر دایره w رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطه E قطع کند. دایره w_1 را طوری رسم می‌کنیم که در نقطه C بر ضلع AC مماس باشد و هم‌چنین از نقطه B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطه F قطع می‌کند. از نقطه E مماس EK را بر دایره w_1 رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایره w_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

(۷ نمره)



۳. فرض کنید شورایی شش عضو دارد و تصمیم‌ها در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضا گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجه نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجه نهایی باید باز هم مثبت باشد.

- شرط تقارن: اگر همه اعضا نظر خود را تغییر دهند، نتیجه نهایی نیز باید تغییر کند.



یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضا وزن‌های نامنفی $w_1, w_2, \dots, w_6$ و w_i تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسه مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ و برای هر $i \geq 2, w_i = 1$ ، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.

یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

(۷ نمره)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سؤالات و راه حل های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

آزمون مرحله دوم سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۹ و ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵ در سراسر کشور و با شرکت دانش آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار شد. شرکت کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار و نیم ساعت به سه سؤال تشریحی پاسخ دادند. دفترچه پیش رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آنهاست. لازم به ذکر است که این دفترچه صرفاً برای هدف آموزشی تهیه شده است و بarmبندی تصحیح آزمون، مستقلاً توسط گروهی از کارشناسان تهیه می شود.

۱. فرض کنید $0 < a \leq b \leq c$ ، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

راه حل اول. صرفاً برای خلاصه شدن عبارات، تعریف می کنیم $S = a + c$ و $P = ac$. در این صورت برای سمت راست نابرابری مسأله داریم:

$$R = \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{S+b}{3} - \frac{3Pb}{Sb+P}.$$

هدف این است که عبارت اخیر را به عنوان تابعی بر حسب متغیر b مینیمم کنیم؛ توجه کنید که عبارت مورد بحث بر حسب متغیر b شامل یک جزء خطی، یعنی $\frac{S+b}{3}$ و یک جزء کسری است که مخرج آن $Sb+P$ است. اکنون با تغییر متغیر $t = Sb + P$ عبارت را بازنویسی می کنیم و با کمی محاسبه ساده به عبارت زیر می رسیم:

$$R = \frac{S+b}{3} - \frac{3Pb}{Sb+P} = \frac{S^2 - 10P}{3S} + \frac{t}{3S} + \frac{3P^2}{St}.$$

اکنون توجه کنید که حاصل ضرب دو جمله آخر، عبارتی بدون متغیر t است. پس طبق نابرابری $u+v \geq 2\sqrt{uv}$ داریم:

$$R \geq \frac{S^2 - 10P}{3S} + 2\sqrt{\frac{P^2}{S^2}} = \frac{S^2 - 4P}{3S} = \frac{(c-a)^2}{3(c+a)} \geq \frac{(c-a)^2}{6c}.$$

راه حل دوم. برای راحتی در نوشتن، به ازای هر فرمول دلخواه $F(a, b, c)$ بر حسب سه متغیر a, b و c جمع دوری

$$F(a, b, c) + F(b, c, a) + F(c, a, b)$$

را با $\sum F(a, b, c)$ نمایش می دهیم. با این نمادگذاری سمت راست نابرابری مسأله را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sum a}{3} - \frac{3}{\sum \frac{1}{a}} &= \frac{\sum a}{3} - \frac{3abc}{\sum ab} = \frac{(\sum a)(\sum ab) - 9abc}{3\sum ab} \\ &= \frac{\sum(a^2b + ab^2) - 6abc}{3\sum ab} = \frac{\sum a(b-c)^2}{3\sum ab}. \end{aligned}$$

بنابراین نابرابری مسأله معادل با نابرابری زیر است:

$$\sum a(b-c)^2 \geq \left(\frac{\sum ab}{2c}\right)(c-a)^2. \quad (1)$$

اما توجه کنید که با توجه به ترتیب $a \leq b \leq c$ ، $\frac{ab}{2c}$ از $\frac{b}{4}$ بیشتر نیست و در نتیجه برای سمت راست نابرابری بالا داریم:

$$\left(\frac{\sum ab}{2c}\right)(c-a)^2 = \left(\frac{ab}{2c} + \frac{a+b}{2}\right)(c-a)^2 \leq \left(\frac{a}{2} + b\right)(c-a)^2. \quad (2)$$

برای سمت چپ نابرابری (۱) هم به دست می آید:

$$\sum a(b-c)^2 \geq b(c-a)^2 + a((c-b)^2 + (b-a)^2). \quad (3)$$

حال توجه کنید که برای هر دو عدد X و Y ,

$$\begin{aligned} (X-Y)^2 \geq 0 &\implies X^2 + Y^2 - 2XY \geq 0 \implies 2(X^2 + Y^2) \geq (X+Y)^2 \\ &\implies X^2 + Y^2 \geq \frac{(X+Y)^2}{2}. \end{aligned}$$

در نتیجه اگر قرار دهیم، $X = c - b, Y = b - a$ ، با استفاده از نابرابری (۳) می توان نتیجه گرفت که:

$$\sum a(b-c)^2 \geq b(c-a)^2 + a((c-b)^2 + (b-a)^2) \geq b(c-a)^2 + \frac{a}{2}(c-a)^2.$$

و این نابرابری به همراه نابرابری (۲)، نابرابری (۱) که معادل حکم مسأله است را نتیجه می دهد.

توجه. راه حل های دیگری برای این سؤال را می توانید در صفحه زیر مشاهده کنید:

http://artofproblemsolving.com/community/c6h1234734_iran_inequality

۲. مثلث ABC با دایره محیطی w_1 مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطه A مماسی بر دایره w_1 رسم می کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطه E قطع کند. دایره w_2 را طوری رسم می کنیم که در نقطه C بر ضلع AC مماس باشد و همچنین از نقطه B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطه F قطع می کند. از نقطه E مماس EK را بر دایره w_2 رسم می کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایره w_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه حل اول. اگر محل تقاطع FK و BC را D بنامیم، آنگاه در دایره w_2 داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ACB} &= \widehat{\frac{BC}{2}} \\ \widehat{FBC} &= \widehat{\frac{FC}{2}} \\ \widehat{C} &= 2\widehat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{FC},$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{CDK} &= \widehat{\frac{BF+CK}{2}} \\ \widehat{DKE} &= \widehat{\frac{FC+CK}{2}} \\ \widehat{BF} &= \widehat{FC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{EDK} = \widehat{DKE} \Rightarrow ED = EK. \quad (4)$$

از طرفی طبق قوت نقطه E نسبت به دو دایره w_1 و w_2 می دانیم:

$$\left. \begin{aligned} EK^2 &= EC \cdot EB \\ EA^2 &= EC \cdot EB \end{aligned} \right\} \Rightarrow EK = EA. \quad (5)$$

و ترکیب (۴) و (۵) نتیجه می دهد که:

$$ED = EA \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DAE}.$$

حال اگر AD را امتداد دهیم تا دایره w_1 را در N قطع کند، در دایره w_1 داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{DAE} &= \widehat{\frac{AC+CN}{2}} \\ \widehat{ADE} &= \widehat{\frac{AC+BN}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{CN} = \widehat{BN}.$$

و N وسط کمان BC (یعنی همان M) است.

حال طبق قوت D در دو دایره داریم:

$$FD \cdot DK = BD \cdot DC = MD \cdot DA,$$

پس $FD \cdot DK = MD \cdot DA$ در نتیجه چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه حل دوم. اگر قوت نقطه E را نسبت به دو دایره w_1 و w_2 بنویسیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} EC \cdot EB &= EA^2 \\ EC \cdot EB &= EK^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow EA = EK.$$

حال ثابت می کنیم که نیمساز زاویه $\widehat{BAC}$ و نیمساز زاویه $\widehat{BKC}$ روی ضلع BC هم دیگر را قطع می کنند. برای این منظور کافی است اثبات کنیم که $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$.

دو مثلث EKB و EKC با هم متشابه اند، پس $\frac{KB}{KC} = \frac{EB}{EC}$. همچنین دو مثلث EBA و EAC نیز متشابه اند و داریم: $\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}$.

و چون می دانیم $EK = EA$ پس $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$. حال اگر محل برخورد این نیمسازها با ضلع BC را D بنامیم، F و M وسط کمان BC از دو دایره هستند، پس K و D و F هم خطند و A و D و M نیز هم خطند.

قوت D را در دو دایره می نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} BD \cdot DC &= AD \cdot DM \\ BD \cdot DC &= FD \cdot DK \end{aligned} \right\} \Rightarrow AD \cdot DM = FD \cdot DK,$$

پس چهارضلعی $AFMK$ محاطی است.

۳. فرض کنید شورایی شش نفر عضو دارد و تصمیمات در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضا گرفته می شود. یک «روش قابل قبول تصمیم گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجه نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجه نهایی باید باز هم مثبت باشد.
- شرط تقارن: اگر همه اعضا نظر خود را تغییر دهند، نتیجه نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم گیری، «رأی گیری وزن دار» است. به این ترتیب که به اعضا وزن های نامنفی $w_1, w_2, \dots, w_6$ تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسه مجموع وزن رأی دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ و برای هر $i \geq 2, w_i = 1$ ، تصمیم گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود. یک روش قابل قبول تصمیم گیری مثال بزنید که به شکل رأی گیری وزن دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.



راه حل. اعضای شورا را با شماره های ۱ تا ۶، شماره گذاری می کنیم. روش زیر برای تصمیم گیری را در نظر بگیرید:

اگر نفرات اول تا سوم هم رأی بودند، رأی آنها را به عنوان نتیجه نهایی در نظر می گیریم و در غیر این صورت نتیجه نهایی بر اساس اکثریت آراء نفرات چهارم تا ششم تعیین می شود.

این روش تصمیم گیری به وضوح دارای دو شرط صعودی بودن و تقارن است و بنابراین یک روش قابل قبول است. ادعا می کنیم که به هیچ صورتی نمی توان به اعضا وزن داد، به طوری که این روش از مقایسه وزن اعضای موافق و مخالف حاصل شود.

با برهان خلف فرض می کنیم چنین نباشد و وزن دهی $(w_1, \dots, w_6)$ یک وزن دهی برای این روش باشد. (یعنی وزن نفر اول، w_1 وزن نفر دوم، w_2 و به همین ترتیب وزن نفر i -ام، w_i است) با توجه به یکسان بودن نقش سه عضو اول با یکدیگر و همچنین سه عضو آخر با هم در این روش،

$$(w_2, w_3, w_1, w_5, w_6, w_4)$$

و همین طور

$$(w_3, w_1, w_2, w_6, w_4, w_5)$$

وزن دهی های دیگری برای این روش هستند. به سادگی می توان دید که اگر چند وزن دهی به یک روش تصمیم گیری منجر شوند، جمع آنها هم همان روش تصمیم گیری را به ما می دهد. پس جمع سه وزن دهی ذکر شده یک وزن دهی برای روش تصمیم گیری پیشنهادی ماست، یعنی اگر قرار دهیم $a = w_1 + w_2 + w_3$ و $b = w_4 + w_5 + w_6$ یک وزن دهی برای این روش است.

حال ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که سه نفر اول موافق و سه نفر دوم مخالف باشند. در این صورت در روش ما نتیجه نهایی موافق است و بنابر وزن دهی ادعا شده، $3a > 3b$. حالت دیگری را هم می توان در نظر گرفت که دو نفر از سه نفر اول و یک نفر از سه نفر آخر موافق و بقیه مخالف باشند. در این حالت، تصمیم نهایی مخالف است و جمع وزن موافقان $2a + b$ و وزن مخالفان $2b + a$ است. باز اگر وزن دهی ادعا شده همین نتیجه را بدهد، باید داشته باشیم $2a + b > 2b + a$ و در نتیجه $b > a$. این نابرابری با نابرابری قبلی متناقض است و در نتیجه فرض خلف ما به تناقض منجر می شود. پس روش تصمیم گیری ارائه شده وزن دار نیست.

تذکر. روش های تصمیم گیری قابل قبول دیگری نیز می توان ارائه کرد که وزن دار نباشند. ما در اینجا به دو نمونه دیگر اشاره می کنیم:

- اگر یک تصمیم (موافق یا مخالف)، بیشتر از سه رأی داشته باشد، به عنوان تصمیم نهایی انتخاب می شود و در صورت تساوی آراء موافق و مخالف، تصمیمی که تعداد موافقان آن در میان نفرات اول تا سوم، عددی فرد باشد، اتخاذ می شود.
- فرض کنید پنج نفر اول دور یک میز نشسته اند. در این صورت اگر سه نفر مجاور از آنها هم نظر بودند، نظر مشترک آنها و در غیر این صورت نظر نفر ششم اتخاذ می شود.