باسمه تعالی

کار در خانه ۱

هدف از این تکلیف در نهایت اثبات قضیه زیر است.

قضیه ۱: فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر است. اگر به ازای هر نقطه x در (a,b) داشته باشیم $f'(x)>0$ در این صورت f بر $[a,b]$ اکیداً صعودی است.

در واقع همانطور که در ابتدای درس گفته بودیم می‌خواهیم راهی بیابیم برای فهمیدن صعودی و نزولی بودن تابع؛ که آن را با استفاده از مشتق است. برای اثبات این قضیه از ۲ قضیه اثبات شده در کلاس استفاده می‌کنیم و ۲ قضیه دیگر را نیز اثبات می‌کنیم تا بتوانیم قضیه ۱ را اثبات کنیم.

مروری دو قضیه گفته شده در کلاس:

قضیه ۲: اگر f روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f هر دو مقدار ماکزیمم مطلق M و مینیمم مطلق m را دارد. به عبارت دیگر $\exists x_1, x_2 \in [a,b] \mid f(x_1)=m,\ f(x_2)=M$ و $m \leq f(x) \leq M$ وجود دارد.

قضیه ۳: اگر f در یک نقطه مانند c دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی باشد و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c)=0$

اثبات دو قضیه جدید به نام قضیه رول و قضیه مقدار میانگین

قضیه رول: فرض کنید $f(x)$ در هر نقطه از بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد. اگر $f(a)=f(b)$ باشد آنگاه لااقل یک عدد c در (a,b) موجود است بطوریکه در آن $f'(c)=0$

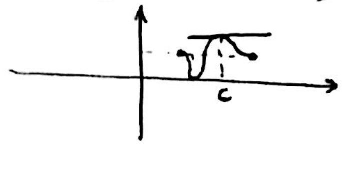
اثبات: بنابر قضیه ۲ تابع f مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد. از طرفی بنابر قضیه ۳ و آنچه سر کلاس گفته شد این مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق می‌تواند در ۳ حالت رخ دهد: ۱- در نقطه‌ای درونی جایی که $f'(c)=0$ است که در این صورت حکم سوال اثبات می‌شود زیرا $f'(c)=0$ است و c عضو (a,b) است.

۲- در نقطه‌ای درونی جایی که $f'(c)$ موجود نیست: این حالت رخ نخواهد داد زیرا فرض کرده‌ایم تابع مشتق پذیر است.

۳- در نقاط ابتدایی و انتهایی یعنی a و b که در این صورت تابع باید ثابت باشد. زیرا ماکزیمم و مینیمم مطلق در دو سر است. بنابراین: $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ است و $f(b)=f(a)$ است بنابراین: $f(x)=f(a)=f(b)=$ ثابت

بنابراین $f'(c)=0$ وجود دارد و حکم اثبات می‌شود.

معنای هندسی این قضیه می‌شود اینکه اگر هر تابع مشتق پذیری در a و b مقدار برابر داشته باشد روی $[a,b]$ مماس افقی دارد:



قضیه بعد قضیه مقدار میانگین است .

صورت قضیه : فرض کنید $y=f(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد . در این صورت لااقل یک نقطه مانند c در (a,b) هست بطوریکه :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

اثبات ، برای اثبات این قضیه تابع $h(x)$ و $g(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

از آنجا که تابع $g(x)$ یک تابع خطی است پیوسته است روی $[a,b]$ و $f(x)$ نیز که پیوسته و مشتق پذیر بود . بنابراین $h(x)$ نیز پیوسته و مشتق پذیر خواهد بود بر روی $[a,b]$. از طرفی بنابر تعریف h و g : $h(a)=0$, $h(b)=0$

$$\Rightarrow h(a)=h(b)$$

بنابراین تابع h در مفروضات قضیه رول صدق می‌کند . بنابراین $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوریکه $h'(c)=0$

دوباره با توجه به تعریف h خواهیم داشت :

$$h'(c)=0\Rightarrow f'(c)-g'(c)=0$$

$$\Rightarrow f'(c)=g'(c)$$

از طرفی $g'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow g'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\Longrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

✓ حکم اثبات شد.

■

حال با استفاده از قضیه مقدار میانگین می‌توان قضیه I را که به دنبال اثبات آن بودیم اثبات کنیم :

قضیه I : برای اثبات این قضیه کافی است اثبات کنیم که اگر $x,y\in[a,b]$ باشد و $x>y$ آنگاه $f(x)>f(y)$ خواهد بود . برای اثبات این با استفاده از قضیه مقدار میانگین بر روی $[y,x]$ خواهیم داشت $c\in[y,x]$ وجود دارد به طوریکه $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$ شود . از طرفی می‌دانیم که $x>y$ است و بنابر فرض قضیه I $f'(z)>0$ است ($z\in[a,b]$) بنابراین $f'(c)>0$ خواهد بود و در نتیجه $f(x)>f(y)$ و حکم اثبات می‌شود . ✓

■

خارج از متن : با استفاده از قضیه مقدار میانگین دو قضیه ساده، اما مهم دیگر اثبات می‌شود .

قضیه اول : توابعی که مشتق آنها صفر هستند ، ثابت هستند : با استفاده از قضیه مقدار میانگین روی $[a,b]$. از آنجا که $f'(x)=0$ است بنابراین $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ که $f'(c)=0$ است . بنابراین ، $f(b)=f(a)$ و همین طور به ازای هر دو عدد f هاشان برابر است که کل تابع برابر و ثابت می‌شود .

قضیه دوم: اگر مشتق دو تابع ثابت باشد آن دو تابع در یک مقدار ثابت تفاوت دارند:

$$f'(x) = g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

اثبات:

$$h(x) := f(x) - g(x) \Rightarrow h'(x) = 0 \xRightarrow[\text{از قضیه اول}]{\text{با استفاده}} h(x) = c$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$