به نام خداوند بخشنده مهربان

تمرین ریاضی مهندسی ـ سری ۲

الف ـ دو تابع داده شده را در سه دوره تناوب رسم کنید. ب ـ در یک دوره تناوب، در نقاط ناپیوستگی تابع، مقدار همگرایی سری فوریه را تعیین کنید. ج ـ ضرایب سری فوریه توابع را محاسبه کنید.

$$1)\quad f(t)=e^{-t}\cos 2\pi t \quad , \quad -1<t<1 \quad , \quad T=2$$
$$2)\quad f(t)=\cosh t \quad , \quad 0<t<1 \quad , \quad f(-t)=-f(t) \quad , \quad T=2$$

۳) تابع f متناوب با دوره تناوب T را دارای تقارن نیم موج می‌نامند هرگاه:

$$f\left(t+\frac{T}{2}\right)=-f\left(t\right)$$

یا بطور معادل:

$$f\left(t-\frac{T}{2}\right)=-f\left(t\right)$$

الف ـ یک تابع دلخواه با تقارن نیم موج رسم کنید. (برای اینکار در فاصله 0 تا $\frac{T}{2}$ یک تابع دلخواه رسم کنید. سپس با توجه به شرط تقارن نیم موج در بالا تابع را در $\frac{T}{2}$ دیگر بدست آورید. اکنون در یک دوره تناوب، تابع معلوم است)

ب ـ نشان دهید که ضرایب سری فوریه برای یک تابع متناوب با دوره تناوب T که تقارن نیم موج هم دارد از روابط زیر بدست می‌آید:

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t & , \quad n \text{ is odd}\\ 0 & , \quad n \text{ is even}\end{cases}$$
$$b_n=\begin{cases}\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t\right)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t & , \quad n \text{ is odd}\\ 0 & , \quad n \text{ is even}\end{cases}$$

۴) اگر تابعی علاوه بر داشتن تقارن نیم موج، زوج یا فرد هم باشد، تابع را دارای تقارن ربع موج می‌نامند.

الف ـ یک تابع دلخواه با تقارن ربع موج زوج و یک تابع با تقارن ربع موج فرد رسم کنید. (برای اینکار در فاصله 0 تا $\frac{T}{4}$ یک تابع دلخواه رسم کنید. سپس با استفاده از زوج یا فرد بودن تابع، تابع را در فاصله $-\frac{T}{4}$ تا 0 بدست آورید. نتیجه تابع مورد نظر در بازه‌ای به اندازه $\frac{T}{2}$ است. حال خاصیت تقارن نیم موج را نیز اعمال کنید تا تابع در یک دوره تناوب بدست بیاید)

ب ـ نشان دهید برای یک تابع با تقارن ربع موجی زوج ضرایب سری فوریه از روابط زیر بدست می‌آید:

$$a_0=0,\quad b_n=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{8}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\cos\left(\dfrac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t & , \quad n \text{ is odd}\\ 0 & , \quad n \text{ is even}\end{cases}$$

ج- نشان دهید برای یک تابع با تقارن ربع موجی فرد ضرایب سری فوریه از روابط زیر بدست می‌آید:

$$a_0=0\quad ,a_n=0\quad ,b_n=\begin{cases}\dfrac{8}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\sin\left(\dfrac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t & , \quad n \text{ is odd}\\ 0 & , \quad n \text{ is even}\end{cases}$$

۵) بفرض تابع $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد. و بفرض $f_N(t)$ یک تقریب برای تابع $f(t)$ با تعریف زیر باشد:

$$f_N(t)=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+B_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

اگر بخواهیم این تقریب، تقریب خوبی باشد باید تابع خطای تقریب یعنی

$$e_N(t)=f(t)-f_N(t)$$

انرژی کمینه داشته باشد. برای انتخاب بهینه ضرایب A_0 و A_n و B_n و کمینه کردن انرژی تابع $e_N(t)$ در یک دوره تناوب یعنی

$$E_N=\int_T\left(f(t)-f_N(t)\right)^2\mathrm{d}t$$

از E_N نسبت به ضرایب فوق مشتق بگیرید و صفر قرار دهید و نشان دهید که انتخاب بهینه برای این ضرایب همان ضرایب سری فوریه تابع $f(t)$ است.

۶) معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید:

$$y''+\omega^2y=r(t)$$

الف- جواب عمومی معادله همگن را به‌دست آورید.

ب- در دو حالت زیر جواب خصوصی برای معادله غیر همگن بدست آورید:

6-a) $r(t)=\begin{cases}t & \text{if}\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\\ \pi-t & \text{if}\quad \frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}\end{cases}\quad , \quad T=2\pi\quad , \quad \omega=\pi$

6-b) $r(t)=t^2\quad , \quad -\pi<t<\pi\quad , \quad T=2\pi\quad , \quad \omega=4$

در این مسأله آخر به حالت استثنایی که در تعیین جواب خصوصی پیش می‌آید، دقت کنید.

۷) مسأله‌ای را که در کلاس در مورد کاربرد اتحاد پارسوال برای تعیین مقدار یک سری عددی طرح شد حل کنید.

با استفاده از مشتق‌گیری و توابع تعمیم یافته ضرایب سری فوریه توابع متناوب زیر را بدست آورید:

8) $r(t)=t^2\quad , \quad -\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{1}{2}\quad , \quad T=1$

9) $r(t)=t^2\quad , \quad 0<t<1\quad , \quad T=1$

10) $r(t)=\begin{cases}l+2t & \text{if}\quad -l<t<0\\ l-2t & \text{if}\quad 0<t<l\end{cases}\quad , \quad T=2l$

11) $f(t)=|\sin t|$

در ضمن به حل دو مثال ۳-۲-۳ و ۴-۲-۳ در فصل ۳ کتاب دکتر طائری مربوط به توابع تعمیم‌یافته توجه کنید.

موفق باشید. نیما انزابی‌نژاد