

# تئوری پیشرفته مخابرات (مخابرات دیجیتال)

دکتر معصومه نصیری کناری

مرجع:

Digital Communication

John G. Proakis

Edition Five

بدینوسیله از آقای دکتر مهدی کریمی، دانشجوی سابق دکترای آزمایشگاه  
مخابرات بی سیم که در تدوین و نگارش این نوشتار همکاری وافری  
داشته اند، تشکر می گردد.

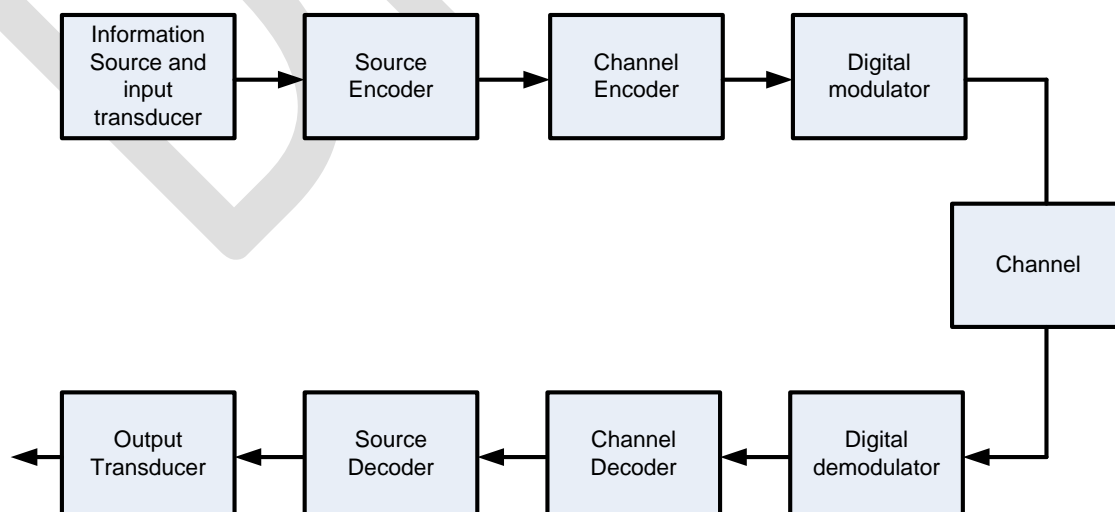
## فصل ۱

## مقدمه

هدف از این درس بیان قواعد پایه‌ای برای طراحی گیرنده در سیستم‌های مخابرات دیجیتال تحت شرایط متفاوت و آنالیز عملکرد آن است. موضوع مخابرات دیجیتال بررسی ارسال اطلاعات به صورت دیجیتال (گسسته) از یک منبع به یک یا چند مقصد می‌باشد. از مهمترین لوازم برای طراحی گیرنده و آنالیز عملکرد آن در دست داشتن مشخصات فیزیکی و آماری کانالی است که اطلاعات در آن ارسال می‌شود. در زیر اجزای اصلی یک سیستم مخابراتی به اختصار معرفی می‌شوند.

### ۱-۱) اجزای یک سیستم مخابراتی دیجیتال

شکل زیر بلوک دیاگرام یک سیستم مخابرات دیجیتال را نشان می‌دهد:



شکل (۱-۱) - بلوک دیاگرام یک سیستم مخابرات دیجیتال

خروجی منبع می‌تواند یک سیگنال آنالوگ یا دیجیتال باشد. در یک سیستم مخابرات دیجیتال، پیامی که توسط منبع تولید می‌شود، به دنباله‌ای از بیتها تبدیل می‌گردد. پروسه تبدیل خروجی یک منبع آنالوگ یا دیجیتال را به دنباله‌ای از حداقل تعداد بیتها، کدینگ منبع<sup>۱</sup> یا فشرده‌سازی اطلاعات<sup>۲</sup> گویند. نرخ نهایی فشرده سازی توسط قضیه اول شانون بررسی شده است. این نرخ به مشخصات آماری خروجی منبع وابسته است.

دنباله بیتها از خروجی کدر منبع وارد کد کننده کانال می‌شود. در این قسمت بصورت کنترل شده تعدادی بیت، به نام بیتهای پریتی به دنباله اطلاعاتی اضافه می‌گردد تا به گیرنده امکان غلبه بر نویز و تداخلی که در کانال به سیگنال اضافه شده است داده شود. بدین طریق بیتهای اضافه شده، قابلیت اطمینان مخابره اطلاعات را افزایش می‌دهند. طبق قضیه دوم شانون تا مادامیکه نرخ ارسال اطلاعات کوچکتر از کمیتی به نام ظرفیت کانال باشد، کدینگ و سیگنالینگی وجود دارد که یک مخابره با احتمال خطای به اندازه دلخواه کوچک را تضمین نماید.

خروجی کدر کانال وارد مدولاتور دیجیتال می‌شود. در یک مدولاتور دیجیتال  $M$ -تایی،  $M$  شکل موج متفاوت وجود دارد که در هر پریود ارسال بسته به مقدار  $k = \log_2 M$  بیت ارسالی آن فاصله، یکی از شکل موجها انتخاب و در کانال مخابراتی ارسال می‌گردد. در این قسمت بسته به نوع مدولاتور دیجیتال، شکل موجها در دامنه، فاز، فرکانس، یا ترکیبی از این پارامترها متفاوت هستند.

پس از طی این مراحل سیگنال آماده می‌شود که وارد کانال شود. کانال یک محیط فیزیکی است که برای ارسال سیگنال بین فرستنده و گیرنده استفاده می‌شود. به عنوان مثال در مخابرات بی‌سیم، کانال فضای آزاد می‌باشد. مشخصه اصلی یک کانال مخابراتی این است که سیگنال به صورت تصادفی تحت تاثیر عوامل مخرب قرار می‌گیرد. این عوامل ناخواسته ممکن است نویز حرارتی، نویزهای ساخت انسان، نویز اتمسفری، فیدینگ و انواع تداخلها باشد.

در طرف گیرنده، تمام مراحل که در بالا در طرف فرستنده صورت گرفته است را باید بصورت معکوس انجام داد تا به سیگنال اصلی رسید. دمدولاتور دیجیتال سیگنال دریافتی را پردازش نموده و دنباله بیتهای ارسالی در ورودی مدولاتور را آشکارسازی می‌نماید. این دنباله وارد دکدر کانال شده تا دنباله بیتهای اطلاعاتی اولیه بر

<sup>۱</sup> Source Encoding<sup>۲</sup> Data Compression

اساس مینیم کردن احتمال خطا بدست آید. معیار خوب و بد عمل کردن دمدولاتور و دکدر مقدار متوسط احتمال خطا در سیستم است. در مرحله نهائی، دکدر منبع از روی دنباله بیت‌های دریافتی از دکدر کانال، سیگنال اولیه را بازسازی می‌نماید. توجه کنید که با توجه به خطا در دمدولاتور و دکدر، این سیگنال تقریبی از سیگنال اولیه است.

هدف در این درس بررسی مدولاتور و دمدولاتور و آنالیز عملکرد دمدولاتور تحت شرایط متفاوت و کانالهای متفاوت می‌باشد. مباحث مورد بررسی در این درس بصورت زیر است:

### ۱- نمایش سیگنالها

در این بخش ابتدا به انواع نمایش سیگنال‌های باند میانی پرداخته، و سیگنال‌ها و سیستم‌های معادل باند پایه را برای سیگنال‌ها و سیستم‌های باند میانی مطرح می‌نماییم. در بسیاری از موارد ساده تر است که سیگنال‌های باند میانی را به باند پایه برده و در آنجا مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس به معرفی فضای سیگنال‌ها و نمایش برداری آنها می‌پردازیم. مزیت نمایش برداری در وهله اول به منظور بدست آوردن ساختار گیرنده بهینه است در ضمن، در بدست آوردن یک پیش بینی در مورد گستره احتمال خطای سیستم به ما کمک خواهد کرد.

### ۲- مروری بر مدولاتورهای دیجیتال

### ۳- محاسبه چگالی طیفی خروجی مدولاتور دیجیتال

### ۴- ساختار گیرنده بهینه برای کانال معین با نویز گوسی سفید جمع شونده AWGN و آنالیز عملکرد آن

### ۵- ساختار گیرنده بهینه (آشکارساز غیرهمدوس) برای کانال AWGN با شیفت فازی رندوم و آنالیز عملکرد آن

### ۶- ساختار گیرنده بهینه برای کانال AWGN با بهره رندوم (کانال fading) و آنالیز عملکرد آن

### ۷- ساختار گیرنده بهینه (آشکارساز غیرهمدوس) برای کانال AWGN با بهره و شیفت فاز رندوم

روش مقابله با مشکل ارسال با بهره رندوم بکارگیری تکنیک دایورسیتی است که منجر به داشتن کانال‌های چند ورودی و چند خروجی است. ساختار گیرنده‌های بهینه همدوس و غیرهمدوس را در حالت کلی برای سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی بدست آورده و به آنالیز عملکرد آنها می‌پردازیم.

تا اینجا وارد بحث محدودیت پهنای باند کانال نشده ایم. در واقع فرض کردیم ریت ارسال آنقدر کم است که تداخل بین سمبلی<sup>۱</sup> ISI ایجاد نمی‌شود. در ادامه کانالهائی که محدودیت پهنای باند در آنها وجود دارد و باعث ایجاد تداخل بین سمبلی می‌شود مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

#### ۸- کانال با محدودیت پهنای باند

در این بخش موارد زیر مد نظر است:

- به ازای پهنای باند داده شده حداکثر ریت ارسال برای اینکه ISI نداشته باشیم،

- ISI کنترل شده و سیگنالینگ (PR(Partial Response)

#### ۹- ساختار گیرنده ML در حضور ISI

در این قسمت گیرنده ML(Maximum Likelihood) برای کانالهای با ISI بدست می‌آید که یک آشکارساز دنباله بوسیله دنباله (Sequence by sequence) است. برای این کانالها، ابتدا به سراغ الگوریتمهای آشکارسازی سمبل به وسیله سمبل، که زیربینه می‌باشند، رفته و انواع اکوالایزرهای زیربینه به قرار زیر را بررسی می‌نماییم:

خطی (با معیارهای ZF (Zero Forcing) و (MMSE(Minimum Mean Square Error)

DF (Decision Feedback) (با معیارهای ZF و MMSE)

سپس نحوه پیاده سازی گیرنده بهینه (آشکارساز ML) توسط الگوریتم ویتربی بررسی می‌شود و پس از آن آشکارساز ML<sup>۲</sup> با کاهش پیچیدگی مطرح خواهد شد.

#### ۱۰- کانالهای چند مسیره متغیر با زمان (فیدینگ):

در این قسمت کانالهای چندمسیره متغیر با زمان بررسی می‌شود. مدلسازی ریاضی این کانالها، انواع دسته بندی، روشهای سیگنالینگ مناسب و ساختار گیرنده بهینه متناظر با انواع دسته بندی و آنالیز عملکرد آنها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

<sup>۱</sup> Inter symbol Interference

<sup>۲</sup> Reduced Complexity (RCSD)

## فصل ۲

## نمایش سیگنال‌ها

## ۱-۲ نمایش سیگنال باند میانی

به طور کلی نمایش یک سیگنال باند میانی حول فرکانس مرکزی  $f_0$  ( $\omega_0 = 2\pi f_0$ ) به صورت زیر است:

$$x(t) = r_x(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_x(t)) \quad (1-1-2)$$

که در این رابطه  $r_x(t)$ ، پوش سیگنال، و  $\theta_x(t)$ ، فاز سیگنال، سیگنال‌های باند پایه‌ای هستند که توسط بیت‌های اطلاعاتی ورودی مدولاتور دیجیتال تعیین می‌شوند. با بسط تابع سینوسی رابطه (۱-۱-۲) می‌توان  $x(t)$  را بصورت مولفه‌های متعامد جدا از هم نوشت:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_i(t) \cos(2\pi f_c t) - x_q(t) \sin(2\pi f_c t) \\ x_i(t) &= r_x(t) \cos \theta_x(t) \\ x_q(t) &= r_x(t) \sin \theta_x(t) \end{aligned} \quad (2-1-2)$$

حال می‌خواهیم با استفاده از این رابطه سیگنال معادل باند پایه را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} x_I(t) &= x_i(t) + jx_q(t) \\ x(t) &= \text{Re}\{x_I(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \end{aligned} \quad (3-1-2)$$

که در این رابطه  $x_I(t)$  سیگنال معادل باند پایه برای  $x(t)$  است. می‌توان از سیگنال تبدیل فوریه گرفت و در حوزه فرکانس بسیاری از خواص آنرا بررسی کرد. با استفاده از تعریف برای تبدیل فوریه  $x(t)$  داریم:

$$X(f) = \int x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4-1-2)$$

حال با استفاده از  $\text{Re}(x) = \frac{1}{2}(x + x^*)$  و با ترکیب روابط (۳-۱-۲) و (۴-۱-۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(f) &= \frac{1}{2}[X_l(f-f_0) + X_l^*(-f-f_0)] \Rightarrow 2X(f+f_0) = X_l(f) + X_l^*(-f-2f_0) \quad (5-1-2) \\ \Rightarrow 2X(f+f_0)U(f+f_0) &= X_l(f) \Rightarrow X_l(f) = 2X(f+f_0)U(f+f_0) \end{aligned}$$

که در این روابط  $X_l(f)$  تبدیل فوریه سیگنال باند پایه است. رابطه (5-1-2)، رابطه پایه بین طیف‌های سیگنال در باند میانی و باند پایه است.

انرژی سیگنال بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{Re}\{x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\}|^2 dt \quad (6-1-2)$$

با جایگذاری روابط بالا در فرمول انرژی سیگنال، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}\{x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = \frac{1}{2}[x_l(t)e^{j2\pi f_0 t} + x_l^*(t)e^{-j2\pi f_0 t}] \\ \Rightarrow E_x &= \frac{1}{2} \int |x_l(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_l(t)|^2 \cos(4\pi f_0 t + 2\theta_x(t)) dt \end{aligned} \quad (7-1-2)$$

رابطه دوم را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه  $x_l(t)$  یک سیگنال باند پایه است، تغییرات  $x_l(t)$  نسبت به تابع کسینوسی بسیار کمتر است. بنابراین می‌توان نشان داد که انتگرال دوم با تقریب خوبی برابر صفر است. پس داریم:

$$E_x = \frac{1}{2} \int |x_l(t)|^2 dt \quad (8-1-2)$$

حال که توانستیم رابطه بین سیگنال باند میانی و سیگنال معادل باند پایه آن را بدست آوریم، برای اینکه بتوانیم محاسبات خود را در باند پایه دنبال کنیم، باید بتوانیم سیستم را نیز در باند پایه بیان کنیم. فرض کنید که پاسخ ضربه کانال را در باند میانی توسط  $h(t)$  نشان دهیم و فرض می‌کنیم که  $h_l(t)$  پاسخ ضربه کانال معادل باند پایه باشد. رابطه زیر بین سیگنال باند میانی و سیگنال معادل باند پایه آنرا در نظر بگیرید:

$$X_l(f) = 2X(f+f_0)U(f+f_0) \Leftrightarrow x_l(t) \Leftrightarrow x(t) = \text{Re}\{x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (9-1-2)$$

به طور مشابه رابطه زیر را می‌توان بین پاسخ ضربه‌های کانال باند میانی و کانال معادل باند پایه نوشت:

$$\begin{aligned} H_l(f) &= 2H(f+f_0)U(f+f_0) \Rightarrow H(f) = \frac{1}{2}[H_l(f-f_0) + H_l^*(-f-f_0)] \\ \Rightarrow h(t) &= \text{Re}\{h_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \end{aligned}$$

$$(10-1-2)$$



اگر  $y(t)$  سیگنال خروجی کانال باشد، رابطه زیر را در حوزه فرکانس می توان نوشت:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (۱۲-۱-۲)$$

لذا خواهیم داشت:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow$$

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{1}{2}[X_1(f - f_0) + X_1^*(-f - f_0)] \times \frac{1}{2}[H_1(f - f_0) + H_1^*(-f - f_0)]$$

$$= \frac{1}{4}[X_1(f - f_0)H_1(f - f_0) + X_1(f - f_0)H_1^*(-f - f_0) \\ + X_1^*(-f - f_0)H_1(f - f_0) + X_1^*(-f - f_0)H_1^*(-f - f_0)]$$

$$= \frac{1}{4}[X_1(f - f_0)H_1(f - f_0) + X_1^*(-f - f_0)H_1^*(-f - f_0)]$$

(۱۲-۱-۲)

بنابراین برای کانال معادل باند پایه می توان نوشت:

$$\Rightarrow Y_1(f) = \frac{1}{2} X_1(f)H_1(f) \Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2} x_1(t) * h_1(t) \quad (۱۳-۱-۲)$$

که همان رابطه کانال باند میانی با تفاوت در ضریب  $\frac{1}{2}$  است. این روابط به ما کمک می کند که از تبدیل فرکانسی که در حین مدولاسیون سیگنال برای انتقال به یک کانال بخصوص رخ می دهد صرف نظر کرده و برای سادگی روابط ریاضی، کلیه محاسبات را در باند پایه انجام داد. سپس نتایج را به سادگی به باند مورد نظر انتقال داد.

## ۲-۲) فرآیندهای تصادفی باند باریک میان گذر:

در این بخش می خواهیم نمایش یک فرایند باند میانی تصادفی و ایستان را برحسب فرآیند معادل باند پایه بررسی کنیم. بطور خاص می خواهیم رابطه بین تابع خود همبستگی و چگالی طیف توان را برای فرایند باند میانی و فرایند معادل باند پایه بدست آوریم. فرایند باند میانی  $X(t)$  را در نظر بگیرید. برای هر نمونه بعنوان یک سیگنال باند میانی می توان نوشت:

$$X(t) = r_x(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_x(t))$$

$$\begin{cases} X_i(t) = r_x(t) \cos \theta_x(t) \\ X_q(t) = r_x(t) \sin \theta_x(t) \end{cases} \Rightarrow X(t) = X_i(t) \cos(2\pi f_c t) - X_q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (1-2-2)$$

$X_i(t)$  و  $X_q(t)$  فرآیندهای باند پایه خواهند بود، یعنی چگال طیف توان آنها حول فرکانس صفر است. فرایند معادل باند پایه (و یا پوش مختلط سیگنال) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_l(t) \triangleq X_i(t) + jX_q(t) \quad (2-2-2)$$

در ادامه به دنبال این هستیم که ارتباط بین آمارگان‌های  $X(t)$  و  $X_l(t)$  را بدست آوریم. فرض می‌کنیم که  $X(t)$  ایستاد به مفهوم باز (WSS) باشد. برای این منظور باید روابط زیر را داشته باشیم:

$$E\{X(t)\} = cte \quad E\{X(t+\tau)X(t)\} = R_x(\tau) \quad (3-2-2)$$

از رابطه اول داریم:

$$E\{X(t)\} = E\{X_i(t)\} \cos 2\pi f_c t - E\{X_q(t)\} \sin 2\pi f_c t = cte$$

$$\Rightarrow E\{X_i(t)\} = E\{X_q(t)\} = 0 \Rightarrow E\{X(t)\} = 0 \quad (4-2-2)$$

بنابراین اگر فرآیند باند باریک میانی بخواهد WSS باشد باید میانگین آن حتما صفر باشد. با یک سری روابط ساده که در کتاب‌های فرایند تصادفی نیز آمده است، از رابطه دوم در (3-2-2) نتایج زیر را برای توابع همبستگی بین  $X_i(t)$  و  $X_q(t)$  می‌توان بدست آورد:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} [R_{X_i X_i}(\tau) + R_{X_q X_q}(\tau)] \cos 2\pi f_c \tau + \frac{1}{2} [R_{X_i X_i}(\tau) - R_{X_q X_q}(\tau)] \cos 2\pi f_c (2t + \tau)$$

$$- \frac{1}{2} [R_{X_q X_i}(\tau) - R_{X_i X_q}(\tau)] \sin 2\pi f_c \tau - \frac{1}{2} [R_{X_q X_i}(\tau) + R_{X_i X_q}(\tau)] \sin 2\pi f_c (2t + \tau) \quad (5-2-2)$$

$$E\{X(t+\tau)X(t)\} = R_x(\tau) \Rightarrow \begin{cases} R_{X_i X_i}(\tau) = R_{X_q X_q}(\tau) \\ R_{X_i X_q}(\tau) = -R_{X_q X_i}(\tau) \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_x(\tau) = R_{X_i}(\tau) \cos 2\pi f_c \tau - R_{X_q X_i}(\tau) \sin 2\pi f_c \tau$$

فرایند معادل باند پایه در (2-2-2) را در نظر بگیرید. تابع همبستگی آنرا بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 R_{X_i}(t+\tau, t) &\triangleq E\{X_i(t+\tau)X_i^*(t)\} \\
 &= E\left\{\left(X_i(t+\tau) + jX_q(t+\tau)\right)\left(X_i(t) - jX_q(t)\right)\right\} \\
 &= [E\{X_i(t+\tau)X_i(t)\} + E\{X_q(t+\tau)X_q(t)\} \\
 &\quad + j[E\{X_q(t+\tau)X_i(t)\} - E\{X_i(t+\tau)X_q(t)\}]]
 \end{aligned} \tag{۶-۲-۲}$$

با توجه به روابط بالا می توان نوشت:

$$R_{X_i}(\tau) = [R_{X_i}(\tau) + R_{X_q}(\tau) + j(R_{X_q X_i}(\tau) - R_{X_i X_q}(\tau))] \tag{۷-۲-۲}$$

با استفاده از روابطی که از ایستادن بودن فرایند باند باریک در (۵-۲-۲) بدست آمده است، (۷-۲-۲) بصورت زیر ساده می شود:

$$\Rightarrow R_{X_i}(\tau) = 2(R_{X_i}(\tau) + jR_{X_q X_i}(\tau)) \tag{۸-۲-۲}$$

با استفاده از این روابط، به معادله زیر بین تابع همبستگی فرایند باند میانی و فرایند معادل باند پایه می رسیم:

$$\Rightarrow R_X(\tau) = \frac{1}{2} \text{Re}\{R_{X_i}(\tau)e^{j2\pi f_0 \tau}\} \tag{۹-۲-۲}$$

البته همچنان می توان روابط دیگری را بین توابع همبستگی  $X_i(t)$  و  $X_q(t)$  بدست آورد. با استفاده از تعریف روابط تابع همبستگی و استفاده از (۵-۲-۲) نتایج زیر نیز بدست می آید:

$$\left. \begin{aligned}
 &\Rightarrow R_{X_i X_q}(\tau) = R_{X_q X_i}(-\tau) \\
 &\Rightarrow R_{X_i X_q}(\tau) = -R_{X_q X_i}(\tau)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} R_{X_q X_i}(-\tau) = -R_{X_q X_i}(\tau) \\ R_{X_i X_q}(-\tau) = -R_{X_i X_q}(\tau) \end{cases}$$

تعریف تابع همبستگی

این نتایج به ما نشان می دهد که  $X_i(t)$  و  $X_q(t)$  در لحظات یکسان  $t$  ( $\tau = t - t = 0$ ) بر هم عمودند. این نتیجه بصورت زیر بدست می آید:

$$R_{X_q X_i}(-\tau) = -R_{X_q X_i}(\tau) \Rightarrow R_{X_q X_i}(0) = -R_{X_q X_i}(0) \Rightarrow R_{X_q X_i}(0) = 0 \tag{۱۰-۲-۲}$$

البته از (۱۰-۲-۲) نمی توان نتیجه گیری نمود که  $X_i(t)$  و  $X_q(t)$  دو فرایند عمود بر هم هستند. برای این

منظور باید داشته باشیم  $X_i(t)$  بر  $X_q(t+\tau)$  عمود است یعنی  $R_{X_i X_q}(\tau) = 0$ .

برای ارتباط بین چگالی طیف فرایند باند میانی و فرایند معادل باند پایه داریم:

$$S_X(f) = F\{R_X(\tau)\} = \frac{1}{4}[S_{X_i}(f - f_c) + S_{X_i}(-f - f_c)] \tag{۱۱-۲-۲}$$

با توجه به اینکه رابطه  $R_{X_i}(-\tau) = R_{X_i}^*(\tau)$  برای تابع همبستگی فرایند باند پایه برقرار است و اینکه:

$$S_{X_i}(f) = F\{R_{X_i}(\tau)\} \quad (12-2-2)$$

نتیجه می‌گیریم که  $S_{X_i}(f)$  تابع حقیقی است.

تابع همبستگی یک تابع حقیقی است اگر و تنها اگر چگالی طیف توان آن تابعی زوج باشد. بنابراین اگر  $X_i(t)$  و  $X_q(t)$  در کلیه لحظات بر هم عمود باشند، آنگاه  $R_{X_i X_q}(\tau)$  همواره صفر است. پس نتیجه می‌گیریم که  $R_{X_i}(\tau)$  حقیقی است و بنابراین چگالی طیف توان آن زوج خواهد بود و برعکس.

برای یک فرآیند باند باریک ایستاد، مؤلفه‌های متعامد در لحظات یکسان ناهمبسته‌اند و اگر فرآیند گوسی باشد، مولفه‌های متعامد در لحظات یکسان مستقل خواهند بود و در ضمن اگر چگالی طیف توان فرآیند معادل باند پایه تابعی زوج باشد، مولفه‌های متعامد در لحظات متفاوت نیز ناهمبسته و در نتیجه مستقل خواهند بود.

مثال:

در **SSB**: مؤلفه‌های متعامد ناهمبسته نیستند (در لحظات دلخواه متفاوت) ولی در لحظات یکسان ناهمبسته‌اند.

در **DBS**: مولفه‌های متعامد در همه لحظات ناهمبسته‌اند.

### نمایش معادل باند پایه نویز سفیدگوسی:

نویز گوسی یک فرایند تصادفی است که طیف آن در تمام محدوده فرکانس سفید است. این نویز را، به دلیل داشتن کلیه مؤلفه‌های فرکانسی، نمی‌توان بر حسب مؤلفه‌های متعامد بیان کرد. فرض کنید که سیگنال دریافتی در گیرنده بصورت زیر باشد:

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (13-2-2)$$

برای آنالیز عملکرد، و تعریف سیستم معادل باند پایه لازم است که برای نویز هم نویز معادل باند پایه تعریف کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم که سیگنال دریافتی در گیرنده از یک فیلتر ایده‌آل باند میانی عبور می‌کند که طیف سیگنال را در بر دارد. این فیلتر را می‌توان نادیده گرفت، چون روی سیگنال تاثیری ندارد و از طرفی مولفه‌های نویز را در خارج از محدوده سیگنال حذف می‌کند که تاثیری روی آشکارسازی بهینه نخواهد داشت.

نویزی که از این فیلتر عبور کند را نویز سفید باند میانی<sup>۱</sup> گویند. اگر نویز باند میانی دارای چگالی طیفی توام سفید برابر  $N/2$  باشد، چگالی طیف نویز معادل باند پایه،  $S_z(f)$ ، بصورت زیر خواهد بود:

$$S_z(f) = \begin{cases} 2N_0 & (|f| \leq W) \\ 0 & (|f| > W) \end{cases} \quad (14-2-2)$$

بنابراین تابع همبستگی آن بصورت زیر در می آید:

$$R_z(\tau) = 2N_0 \frac{\sin 2\pi W\tau}{\pi\tau} \quad (15-2-2)$$

هنگامی که  $W$  به اندازه کافی بزرگ باشد،  $(15-2-2)$  به سمت تابع همبستگی نویز گوسی سفید میل می کند.

یعنی:

$$R_z(\tau) \approx 2N_0\delta(\tau) \quad (16-2-2)$$

### ۳-۲ فضای سیگنال‌ها و نمایش برداری سیگنال‌ها

در این قسمت، یک معادل برداری برای سیگنال‌ها ارائه می کنیم. برای این منظور ابتدا نیاز به تعریف ضرب دو سیگنال داریم. این ضرب برای یک مجموعه سیگنال که در بازه  $[a, b]$  مقدار دارند، بصورت زیر تعریف می شود.

$$\langle x(t), y(t) \rangle \triangleq \int_a^b x(t) y^*(t) dt \quad (1-3-2)$$

با این تعریف نرم یک تابع بصورت زیر خواهد بود:

$$\|x(t)\| = \left( \int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-3-2)$$

با این تعاریف، نخستین قضیه را بصورت زیر بیان می کنیم:

**قضیه (۱-۲):** فرض کنیم  $\{s_m(t)\}_{m=1}^M$  یک مجموعه از  $M$  شکل موج معین با انرژی محدود در فاصله زمانی  $[0, T]$  باشد (فاصله زمانی محدود لازم نیست ولی انرژی محدود لازم است).  $N$  شکل موج اورتونرمال  $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^N$  که  $N \leq M$  وجود دارد به نحوی که بتوان این سیگنال‌ها را بر حسب آنها بصورت زیر بیان کرد،

یعنی:

<sup>۱</sup> Band-pass white noise

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^N s_{mn} \phi_n(t) \quad m=1, \dots, M \quad (3-3-2)$$

$$s_{mn} = \int s_m(t) \phi_n^*(t) dt$$

$M = N$  است اگر و تنها اگر این شکل موجها مستقل خطی باشند. با توجه به تعریف ضرب داخلی، دو شکل موج بر هم عمودند اگر و تنها اگر:

$$\langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle = \int \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt = 0 \quad (4-3-2)$$

انرژی یک شکل موج بصورت زیر تعریف می شود:

$$E_s = \langle s(t), s(t) \rangle = \int |s(t)|^2 dt \quad (5-3-2)$$

اکنون تعاریف زیر را نیز برای مجموعه توابع خواهیم داشت:

۱- مجموعه شکل موجهای  $\{\phi_n(t)\}$  را اورتونرمال گویند هرگاه برای هر  $m$  و  $n$  داشته باشیم:

$$\langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle = \delta(n-m) = \delta_{n,m} \quad (6-3-2)$$

۲- مجموعه  $\{\phi_n(t)\}$  را به طور خطی مستقل گویند هرگاه

$$a_1 \phi_1(t) + a_2 \phi_2(t) + \dots + a_n \phi_n(t) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \quad (7-3-2)$$

در غیر اینصورت  $\{\phi_n(t)\}$  را وابسته خطی گویند. به عنوان اولین خاصیت از مجموعه توابع مستقل خطی براحتی می توان دید که یک مجموعه از توابع اورتونرمال مستقل خطی است اما برعکس درست نیست.

اگر بتوان برای یک فضای سیگنال بردارهای پایه متعامد را بدست آورد، می توان هر سیگنال را به صورت یک بردار به شکل زیر نشان داد.

$$S_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}] \quad (8-3-2)$$

$$s_{mn} = \int s_m(t) \phi_n^*(t) dt = \langle s_m(t), \phi_n(t) \rangle \quad n=1, \dots, N$$

بنابراین اگر بتوانیم یک مجموعه پایه برای فضای سیگنال پیدا کنیم، یک تناظر یک به یک بین مختصات بردارهای به طول  $N$  و سیگنالهای  $s_m(t)$  وجود دارد. اما طبق قضیه، که با استفاده از روش گرام اشمیت قابل اثبات است، همیشه می توان یک پایه اورتونرمال برای هر مجموعه شکل موجها بدست آورد.

(۴-۲) تکنیک گرام اشمیت:

روش گرام اشمیت یک روش دنباله‌ای برای پیدا نمودن پایه‌های اورتونرمال می‌باشد. پایه اول را در جهت یکی از سیگنال‌ها، به عنوان مثال سیگنال اول، بصورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \quad E_1 = \langle s_1(t), s_1(t) \rangle \Rightarrow s_1(t) = \sqrt{E_1} \phi_1(t) \quad (1-4-2)$$

حال مؤلفه سیگنال دوم را از تصویر سیگنال روی پایه اول کم کرده و داریم:

$$\gamma_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle \phi_1(t) \Rightarrow \phi_2(t) = \frac{\gamma_2(t)}{\sqrt{\langle \gamma_2(t), \gamma_2(t) \rangle}} \quad (2-4-2)$$

در صورتی که سیگنال تفاضل مخالف صفر باشد، پایه دوم در جهت سیگنال تفاضل انتخاب می‌شود. لذا داریم:

$$\Rightarrow s_2(t) = \langle s_2(t), \phi_2(t) \rangle \phi_2(t) + \langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle \phi_1(t) \quad (3-4-2)$$

به همین ترتیب پایه‌های سوم و ... انتخاب می‌شود:

$$\phi_2 \text{ و } \phi_1 \text{ های پایه های } s_3(t) \text{ در جهت پایه های } \phi_2 \text{ و } \phi_1 = \langle s_3(t), \phi_1(t) \rangle \phi_1(t) + \langle s_3(t), \phi_2(t) \rangle \phi_2(t)$$

$$\gamma_3(t) = s_3(t) - \langle s_3(t), \phi_1(t) \rangle \phi_1(t) - \langle s_3(t), \phi_2(t) \rangle \phi_2(t) \quad (4-4-2)$$

اگر  $\gamma_3(t)$  مخالف صفر باشد، پایه سوم در راستای آن انتخاب می‌شود:

$$\phi_3(t) = \frac{\gamma_3(t)}{\sqrt{\langle \gamma_3(t), \gamma_3(t) \rangle}} \quad (5-4-2)$$

فرض کنید  $k$  مرحله جلو رفته باشیم و  $k'$  پایه انتخاب کرده باشیم:  $k' \leq k$

یعنی  $\phi_1(t)$  تا  $\phi_{k'}(t)$  انتخاب شده و  $s_1(t)$  تا  $s_k(t)$  برحسب آنها قابل توصیف هستند. حال بررسی می‌کنیم شکل موج  $s_{k+1}(t)$  توسط فضایی که با این  $k'$  پایه توصیف می‌شود قابل بیان است یا نه. اگر قابل بیان نباشد، یک بخش آن روی این فضا تصویر نمی‌شود. داریم:

$$\text{مولفه } s_{k+1}(t) \text{ در جهت پایه‌های فوق} = \sum_{l=1}^{k'} \langle s_{k+1}(t), \phi_l(t) \rangle \phi_l(t)$$

بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\gamma_{k+1}(t) = s_{k+1}(t) - \sum_{l=1}^{k'} \langle s_{k+1}(t), \phi_l(t) \rangle \phi_l(t) \quad (6-4-2)$$

اگر  $\gamma_{k+1}(t) = 0$ ، پایه جدیدی بدست نمی‌آید و  $s_{k+1}(t)$  بصورت ترکیب خطی از  $\phi_1(t)$  تا  $\phi_k(t)$  قابل بیان است. اگر  $\gamma_{k+1}(t) \neq 0$  باشد، یک پایه جدید بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi_{k'+1}(t) = \frac{\gamma_{k+1}(t)}{\sqrt{\langle \gamma_{k+1}(t), \gamma_{k+1}(t) \rangle}} \quad (7-4-2)$$

این فرآیند را ادامه می‌دهیم تا فضا به اندازه کافی بزرگ شود تا کلیه شکل موجها قابل بیان باشند و چون با هر شکل موج حداکثر یک پایه جدید اضافه می‌شود، حداکثر تعداد پایه‌ها برابر  $M$  یعنی تعداد شکل موجها است. حداکثر مقدار  $M$  زمانی بدست می‌آید که  $s_i(t)$ ها مستقل خطی باشند.

توجه کنید که اگر ترتیب انتخاب سیگنالها متفاوت باشد، مجموعه پایه‌ها تغییر می‌یابد، اما تعداد پایه‌ها که بعد فضا را تشکیل می‌دهد ثابت می‌ماند. با توجه به مطالب بالا داریم:

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^N s_{mn} \phi_n(t) \quad m=1, \dots, M \Leftrightarrow \underline{S}_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}] \quad (8-4-2)$$

اگر نمایش برداری برای سیگنالها داشته باشیم، ضرب داخلی دو سیگنال به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\langle s_m(t), s_k(t) \rangle = \sum_{n=1}^N s_{mn} s_{kn}^* = \underline{S}_m \cdot \underline{S}_k^* \quad (9-4-2)$$

## ۵-۲) ضریب همبستگی و فاصله بین سیگنالها

حال می‌توانیم ضریب همبستگی بین دو شکل موج  $j$ ام و  $m$ ام را بدست آوریم. داریم:

$$r_{j,m} \triangleq \frac{\langle s_j(t), s_m(t) \rangle}{\sqrt{E_j E_m}} = \frac{\underline{S}_j \cdot \underline{S}_m^*}{|\underline{S}_j| \cdot |\underline{S}_m|}$$

$$r_{j,m} = 1 \Leftrightarrow s_j(t) = k s_m(t) \quad , k > 0 \quad (1-5-2)$$

$$r_{j,m} = -1 \Leftrightarrow s_j(t) = k s_m(t) \quad , k < 0$$



می توان ضریب همبستگی را بر حسب سیگنال های معادل باند پایه نیز بدست آورد. برای سیگنال های معادل باند پایه داشتیم:

$$s_k(t) = \text{Re}\{s_{kl}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad s_m(t) = \text{Re}\{s_{ml}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (2-5-2)$$

به عنوان تمرین نشان دهید که:

$$\langle s_k(t), s_m(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\langle s_{kl}(t), s_{ml}(t) \rangle\} \quad (3-5-2)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} E_m &= \int |s_m(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int |s_{ml}(t)|^2 dt \\ \Rightarrow r_{k,m} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E_k E_m}} \text{Re} \int s_{kl}(t) s_{ml}^*(t) dt \end{aligned} \quad (4-5-2)$$

با توجه به مطالب بالا ضریب همبستگی سیگنال های معادل باند پایه بصورت زیر بدست می آید:

$$\rho_{k,m} = \frac{1}{2\sqrt{E_m E_k}} \int s_{kl}(t) s_{ml}^*(t) dt = \frac{\langle s_{kl}(t), s_{ml}(t) \rangle}{\sqrt{E_{kl} E_{ml}}} \quad (5-5-2)$$

با استفاده از (5-5-2) براحتی ملاحظه می شود که ضریب همبستگی سیگنال های باند میانی، قسمت حقیقی ضریب همبستگی سیگنال های معادل باند پایه است، یعنی:

$$r_{k,m} = \text{Re}\{\rho_{k,m}\} \quad (6-5-2)$$

برای فاصله بین سیگنال ها داریم:

$$\begin{aligned} d_{k,m}^2 &= |S_k - S_m|^2 \\ &= \int |s_k(t) - s_m(t)|^2 dt = \int |s_k(t)|^2 dt + \int |s_m(t)|^2 dt - 2 \int s_k(t) s_m^*(t) dt \quad (7-5-2) \\ \Rightarrow d_{k,m}^2 &= E_k + E_m - 2r_{k,m} \sqrt{E_k E_m} \end{aligned}$$

اگر دو سیگنال هم انرژی با انرژی  $E$  باشند، می توان نوشت:

$$d_{k,m}^2 = 2E(1 - r_{k,m}) \quad (8-5-2)$$

برای دو شکل موج هم انرژی بزرگترین فاصله وقتی است که  $r_{k,m} = -1$  باشد یعنی  $s_m(t) = -s_k(t)$  و این انتخاب شکل موجها را Antipodal می نامند. در این صورت داریم:

$$\text{Antipodal} \leftrightarrow d_{k,m}^2 = 4E \quad (9-5-2)$$

برای دو سیگنال متعامد (Orthogonal) داریم  $r_{k,m} = 0$  که اگر هم انرژی هم باشند، فاصله سیگنالها بصورت زیر در می آید:

$$d_{k,m}^2 = 2E \quad (10-5-2)$$

برای یک مقایسه ساده بین مدولاتورهای آنتی پودال و متعامد، کانال گوسی با نویز سفید با واریانس  $\sigma_n^2$  را در نظر می گیریم. احتمال خطای این مدولاتورها همانگونه که بعداً خواهیم دید برابر است با:

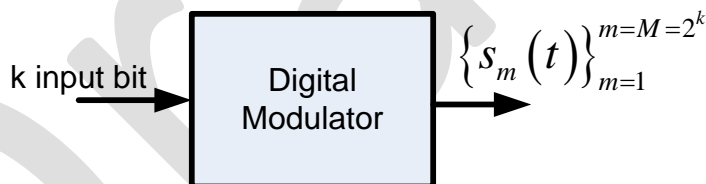
$$P_e = Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_n}\right) \quad (11-5-2)$$

بنابراین با توجه به روابط (9-5-2) تا (11-5-2) برای اینکه احتمال خطاهای مدولاتورهای Antipodal و Orthogonal یکسان باشند، باید انرژی سیگنالهای Orthogonal دو برابر انرژی سیگنالهای Antipodal باشد، یعنی مدولاتور Orthogonal ، ۳dB بدتر از Antipodal عمل می کند.

## فصل ۳

## مروری بر مدولاتورهای دیجیتال

مدولاتورهای دیجیتال در درس مخابرات ۲ بررسی شده است. در این فصل مروری اجمالی بر انواع مدولاتورهای دیجیتال داشته، سپس روش بدست آوردن چگالی طیف توان سیگنال خروجی مدولاتورهای مختلف را بررسی می‌کنیم. بطور کلی در یک مدولاتور دیجیتال  $M = 2^k$  تایی در هر فاصله ارسال،  $k$  بیت وارد مدولاتور شده و یکی از  $M$  شکل موج مدولاتور انتخاب و ارسال می‌شود. مدولاتور فوق را مدولاتور  $M$  تایی می‌نامند که در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. اگر نرخ ارسال سمبل  $\frac{1}{T_s}$  باشد، نرخ ارسال بیت  $R_b = \frac{k}{T_s}$  خواهد بود.



شکل (۱-۳) - بلوک دیاگرام مدولاتور  $M$  تایی

**(۱-۳) مدولاسیون PAM یا ASK**

در این مدولاسیون سیگنال باند میانی و سیگنال معادل باند پایه بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} s_{im}(t) &= A_m g(t) \\ s_m(t) &= A_m g(t) \cos 2\pi f_c t \end{aligned} \quad (1-1-3)$$

این یک مدولاسیون دامنه است که اطلاعات (بیت‌های اطلاعاتی ورودی)، دامنه پالس ارسالی را مدوله می‌کند. اگر محدودیت پهنای باند نداشته باشیم می‌توانیم سیگنال  $g(t)$  را بصورت زیر انتخاب کنیم:

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} & 0 < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2-1-3)$$

واضح است که فضای سیگنال‌ها یک بعدی است:

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t \quad E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \quad (3-1-3)$$

بنابراین نمایش برداری برای هر سیگنال برابر است با:

$$S_m = (A_m \sqrt{E}) \quad E \triangleq \frac{E_g}{2} \quad (4-1-3)$$

$$A_m = 2m - 1 - M$$

با این انتخاب برای دامنه شکل موج‌ها نمایش برداری بصورت زیر (شکل (2-3)) در می‌آید.



شکل (2-3) - نمایش برداری شکل موجها در مدولاسیون PAM

به دو دلیل زیر سعی می‌شود که مرکز ثقل سیگنال‌ها روی مبدا قرار گیرد:

۱- اجتناب از داشتن ضربه در چگالی طیف توان (همانگونه که بعداً خواهیم دید).

۲- صرفه جوئی در مقدار متوسط انرژی مصرفی

نکته قابل توجه دیگر این است که همانگونه که بعداً خواهیم دید اگر ریت ارسال  $\frac{1}{T_s}$  باشد، حداقل پهنای باند در

باند پایه برای اینکه  $ISI$  نداشته باشیم برابر است با  $W = \frac{1}{2T_s}$ . پهنای باند در باند میانی در ارسال DSS برابر است

با  $\frac{1}{T_s}$ . در ارسال بصورت SSB پهنای باند باند پایه و میانی یکسان است. در این ارسال، سیگنالها در باند پایه و

میانی بصورت زیر می‌باشند:

$$s_m(t) = A_m (g(t) \pm jg(t))$$

$$s_m(t) = A_m g(t) \cos 2\pi f_c t \pm A_m g(t) \sin 2\pi f_c t \quad (5-1-3)$$

این سیگنالینگ همچنان یک بعدی است و داریم:

$$\phi(t) = \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle}} \quad (3-1-6)$$

$$\gamma(t) = g(t) \cos 2\pi f_c t \pm g(t) \sin 2\pi f_c t$$

در سیگنالینگ PAM، اگر داشته باشیم  $M = 2$ ، به آن BPSK گویند که یک سیگنالینگ آنتی پودال است.

### ۲-۳) سیگنالینگ QAM<sup>۱</sup>

این مدولاسیون پرکاربرد نیز یک مدولاسیون دامنه دو بعدی است. سیگنال باند میانی بصورت زیر است:

$$s_m(t) = A_{mi} g(t) \cos 2\pi f_c t - A_{mq} g(t) \sin 2\pi f_c t \quad (3-2-1)$$

سیگنال‌های معادل باند پایه و پایه‌های اورتونرمال مناسب بصورت زیر هستند:

$$s_{im}(t) = A_{mi} g(t) + jA_{mq} g(t)$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t \quad E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \quad (3-2-2)$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin 2\pi f_c t$$

با در نظر گرفتن پایه‌های فوق، نمایش برداری سیگنال‌ها برابر است با:

$$\underline{S}_m = \begin{pmatrix} A_{mi} \sqrt{E} & A_{mq} \sqrt{E} \end{pmatrix} \quad E \triangleq E_g / 2$$

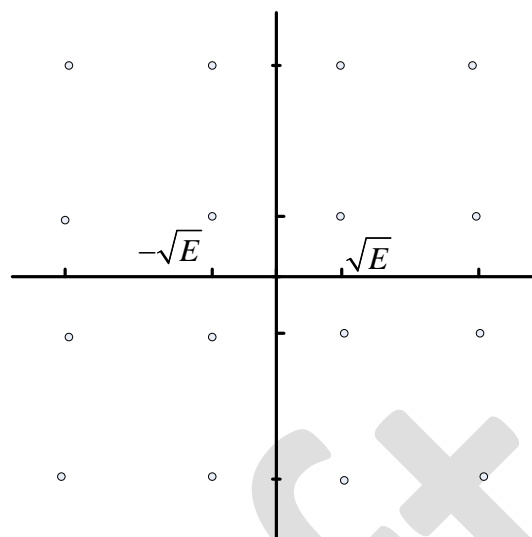
$$A_{mi} = \{\pm 1, \pm 3, \dots\} \quad (3-2-3)$$

$$A_{mq} = \{\pm 1, \pm 3, \dots\}$$

با انتخاب  $A_{mi}$  و  $A_{mq}$  مطابق (3-2-3)، نمایش برداری سیگنال‌ها یک منظومه<sup>۱</sup> مستطیلی است که در شکل زیر

برای  $M = 16$  نشان داده شده است:

<sup>۱</sup> constellation



شکل (۳-۳) - نمایش برداری سیگنال‌ها برای مدولاسیون QAM ۱۶ تا یی مستطیلی

وقتی تعداد سیگنال‌ها توان زوجی از ۲ است، معمولاً از constellation مستطیلی استفاده می‌شود. نکته جالب در مورد constellation مستطیلی این است که می‌تواند به دو مدولاسیون PAM موازی تبدیل شود. یعنی QAM معادل با دو تا PAM موازی است. (استفاده از دو مدولاتور PAM که یکی مولفه  $\cos$  و دیگری مولفه  $\sin$  را مدوله می‌کند). بعنوان مثال چهار بیت  $b_0b_1b_2b_3$  را به دو دسته تقسیم می‌کنیم بطوریکه  $b_0b_1$  تعیین کننده  $A_{mi}$  و  $b_2b_3$  تعیین کننده  $A_{mq}$  باشند.

### ۳-۳) مدولاسیون (PSK (Phase Shift Keying

در این مدولاسیون اطلاعات، فاز حامل را مدوله می‌نماید. شکل سیگنال معادل باند پایه در این مدولاسیون بصورت زیر است:

$$s_m(t) = \text{Re}(A g(t) e^{j2\pi f_c t} e^{j\theta_m})$$

$$= A g(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_m), \quad \theta_m = \frac{2\pi}{M}(m-1) \quad m = 1, \dots, M \quad (۱-۳-۳)$$

با تجزیه عبارت کسینوسی، می‌توان ملاحظه کرد که این سیگنالینگ نیز دو بعدی است:

$$s_m(t) = A g(t) \cos(\theta_m) \cos(2\pi f_c t) - A g(t) \sin(\theta_m) \sin(2\pi f_c t)$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2-3-3)$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t)$$

بنابراین نمایش برداری سیگنال‌ها بصورت زیر خواهد بود:

$$S_m = \left( A\sqrt{E} \cos\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right), A\sqrt{E} \sin\left(\frac{2\pi}{M}(M-1)\right) \right)$$

$$\theta_m = \frac{2\pi}{M}(m-1) \quad m=1, \dots, M \quad (3-3-3)$$

این مدولاسیون یک مدولاسیون دامنه ثابت است. برای کانال‌های فیدینگ اگر نخواهیم بهره کانال را تخمین بزنیم، نمی‌توان اطلاعات را در دامنه گذاشت و مدولاسیون PSK مناسب است. علاوه بر این، تقویت کننده RF مورد استفاده دارای رنج دینامیکی کوچکتری است و ارزان قیمت‌تر خواهد بود.

برای کلیه مدولاتورهایی که تا حال معرفی شده‌اند، به ازای کلیه نگاشت‌های ممکن  $k$  بیت ورودی مدولاتور و شکل موج‌ها احتمال خطا بر سمبول تغییر نمی‌کند، اما احتمال خطا بر بیت به نوع نگاشت بستگی دارد. بهترین نگاشت، نگاشتی است که محتمل‌ترین خطا بر سمبول، کمترین تعداد خطای بیت را ایجاد نماید. لذا نگاشت را باید به نحوی انجام داد که سمبول‌های مجاور در کمترین تعداد بیت با هم متفاوت باشند. زیرا محتمل‌ترین خطا، خطا بین سمبول‌های مجاور است. نگاشت مطلوب نگاشت گری است که در آن سمبول‌های مجاور حتی‌الامکان در یک بیت با هم متفاوتند. در این صورت خواهیم داشت که:

$$P_b \approx \frac{1}{k} P_M \quad (4-3-3)$$

تساوی هنگامی رخ می‌دهد که احتمال خطای بین سیگنال‌های غیر مجاور صفر باشد.

مدولاتور PSK با  $M=4$ ، QPSK نامیده می‌شود که از بقیه بیشتر کاربرد دارد.

### ۳-۴) سیگنالینگ FSK<sup>۱</sup>

در این مدولانور اطلاعات در فرکانس نهفته است. سیگنال معادل باند پایه به قرار زیر است:

$$s_{lm}(t) = g(t)e^{j(2\pi m\Delta f t)} \quad (۱-۴-۳)$$

مشکل اساسی این سیگنالینگ این است که به پهنای باند زیادی احتیاج دارد. همچنین به خاطر پرش فاز در فواصل سیگنالینگ مجاور، دامنه لوبهای فرعی زیاد است. جهت رفع این مشکل مدولاسیون فرکانس با حافظه CPFSK(Continuous Phase FSK) مطرح شده است که متعاقباً معرفی خواهد شد.

مدولاسیون FSK همواره بصورت یک مدولاسیون متعامد استفاده می‌شود. عبارتی  $\Delta f$  بصورتی انتخاب می-

شود که کلیه شکل موجها بر هم عمود باشند. با استفاده از ضریب همبستگی داریم:

$$\rho_{k,m} = \frac{2E}{T} \int_0^T e^{j2\pi(m-k)\Delta f t} dt = \frac{\sin \pi T(m-k)\Delta f}{\pi T(m-k)\Delta f} e^{j\pi(m-k)\Delta f T} \quad (۲-۴-۳)$$

ضریب همبستگی در باند میانی برابر است با:

$$r_{k,m} = \text{Re}\{\rho_{k,m}\} = \frac{\sin 2\pi T(m-k)\Delta f}{2\pi T(m-k)\Delta f} \quad (۳-۴-۳)$$

با استفاده از (۳-۴-۳) اگر داشته باشیم  $\Delta f = \frac{n}{2T}$ ، هر دو شکل موج دلخواه متفاوت بر هم عمود خواهند بود. لذا

حداقل پهنای باند مورد نیاز این سیگنالینگ، برای اینکه مدولاتور متعامد داشته باشیم، برابر است با:

$$\text{Band Width} \approx M \cdot \Delta f^{\text{Orthogonal}} = \frac{M}{2T} \quad (۴-۴-۳)$$

وقتی سیگنالینگ متعامد باشد، شکل موجهای آن مستقل خطی اند و در نتیجه بعد سیگنالینگ برابر تعداد شکل

موجها یعنی  $M$  است. در این حالت پایه‌ها به صورت زیر هستند:

$$\phi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\sqrt{E}} \quad (۵-۴-۳)$$

برای نمایش برداری و فاصله بین سیگنالها داریم:



$$S_i = (0, 0, \dots, \sqrt{E}, \dots, 0) \quad (6-4-3)$$

$$d_{i,j}^2 = 2E \quad i \neq j$$

نکته قابل توجه برای سگنالینگ‌های متعامد این است که چون تمام شکل موجها در فاصله مساوی از هم قرار دارند، رابطه احتمال خطا بر بیت مستقل از نوع نگاشت بیتها بر سمبل‌ها خواهد بود.

توجه کنید که از روش‌های متفاوتی می‌توان سگنالینگ متعامد ایجاد کرد. یک روش استفاده از FSK است که در بالا به آن اشاره شد و روش دیگر استفاده از PPM<sup>۱</sup> است. طریق دیگر استفاده از کدهای متعامد است (به عنوان مثال کدهای والش). ماتریس والش برای  $M=4$  بصورت زیر است.

$$M=4, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-4-3)$$

اگر کد والش  $H_M$  را داشته باشیم،  $H_{2M}$  به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$H_{2M} = \begin{bmatrix} H_M & H_M \\ H_M & \overline{H_M} \end{bmatrix} \quad (8-4-3)$$

در این حالت بر خلاف حالت PPM در تمام بازه زمانی پالس داریم. فرض کنید:

$$\Pi(t) = \begin{cases} \alpha & 0 < t < \frac{T}{M} \\ 0 & \text{Other} \end{cases} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2E}{T}} \quad (9-4-3)$$

با استفاده از کدهای والش، شکل موج‌های متعامد به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$s_k(t) = \sum_{i=1}^N c_{k_i} \Pi\left(t - \frac{(i-1)T}{N}\right) \quad k = 1, \dots, M$$

$$\int s_k(t) s_m(t) dt = \sum_i \sum_j c_{k_i} c_{m_j} \int \Pi\left(t - \frac{(i-1)T}{N}\right) \Pi\left(t - \frac{(j-1)T}{N}\right) dt$$

$$= \sum_i \sum_j c_{k_i} c_{m_j} \alpha^2 \frac{T}{N} = \alpha^2 \frac{T}{N} N \delta_{k,m} = 2E$$

$\log_2 M$  بیت وارد مدولاتور شده و یکی از شکل موج‌ها انتخاب و ارسال می‌شود.

<sup>۱</sup> Pulse Position Modulation

### ۳-۵) مدولاتور M-Bi-Orthogonal

برای ایجاد مدولاتور فوق به یک مدولاتور متعامد  $M/2$  تائی احتیاج است. فرض کنید  $s_{M/2}(t), \dots, s_1(t)$  شکل موجهای متعامد باشند، بقیه  $\frac{M}{2}$  شکل موج Bi-Orthogonal برابرند با  $-s_{M/2}(t), \dots, -s_1(t)$ . همانطور که واضح است، فضای سیگنالها  $\frac{M}{2}$  بعدی است. پایه‌های آن برابرند با:

$$\phi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\sqrt{E}} \quad i = 1, \dots, \frac{M}{2} \quad (1-5-3)$$

و نمایش برداری سیگنالها بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \underline{S}_i &= [0 \ 0 \ 0 \dots \sqrt{E} \ 0 \dots 0]_{i_{th}} \quad i = 1, \dots, \frac{M}{2} \\ \underline{S}_i &= [0 \ 0 \ 0 \dots -\sqrt{E} \ 0 \dots 0]_{\left(i - \frac{M}{2}\right)_{th}} \quad i = \frac{M}{2} + 1, \dots, M \end{aligned} \quad (2-5-3)$$

### ۳-۶) مدولاتور M\_ary Simplex

این مدولاتور از روی یک مدولاتور متعامد M-ary ساخته می‌شود. اگر  $s_m(t), \dots, s_1(t)$  شکل موجهای متعامد با نمایشهای برداری  $\underline{S}_M, \dots, \underline{S}_1$  باشند، می‌دانیم مرکز ثقل مخالف صفر خواهد شد. داریم:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \underline{S}_i \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M s_i(t) \neq 0 \quad (1-6-3)$$

شکل موجهای simplex صرفاً با شیفت مرکز ثقل شکل موجهای متعامد بدست می‌آید تا مرکز ثقل روی صفر قرار گیرد. برای نمایش برداری داریم:

$$\underline{S}_{i, sim} = \underline{S}_i - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \underline{S}_j \quad i = 1, \dots, M \quad (2-6-3)$$

این عمل باعث می‌شود که بعد فضای سیگنالها یکی کم می‌شود ( برابر با  $M-1$  می‌شود). از طرفی فاصله سیگنالها تغییر نکرده و  $d_{\min}$  ثابت است. اما انرژی متوسط کم می‌شود. براحتی می‌توان ملاحظه کرد که

$$E_{\text{Simplex}} = E_{\text{Orth.}} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \quad (3-6-3)$$

انرژی برای  $M=2$  دقیقاً نصف می‌شود، ولی برای  $M$  های بزرگ تاثیر روی انرژی بسیار کم است.

### ۷-۳) جمع‌بندی مدولاتورهای بدون حافظه

در بخش‌های قبلی مدولاسیون‌های مختلفی بررسی شد. در زیر سیگنال‌های معادل باند پایه برای این مدولاتورها بطور خلاصه ارائه شده است:

$$PAM : s_{lm}(t) = A_m g(t)$$

$$QAM : s_{lm}(t) = A_{mi} g(t) + j A_{mq} g(t) = (A_{mi} + j A_{mq}) g(t) \quad (1-7-3)$$

$$PSK : s_{lm}(t) = g(t) e^{j \frac{2\pi}{M}(m-1)}$$

$$FSK : s_{lm}(t) = \sqrt{E} g(t) e^{j 2\pi(m-1)\Delta f t}$$

با توجه به (۱-۷-۳)، شکل موج ارسالی در فاصله ارسال  $n$  ام برابر است با  $s_{lm}(t-nT)$ . اگر شکل موج ارسالی باند پایه با در نظر گرفتن کلیه فواصل ارسال را در نظر بگیریم داریم:

$$v(t) = \sum_n s_{lm,n}(t-nT) = \sum_n I_n g(t-nT) \quad (2-7-3)$$

$I_n$  متغیر تصادفی است که مقدار آن بسته به  $k$  بیت اطلاعاتی فاصله ارسال  $n$  ام است. در سه مدولاسیون اولیه،  $s_{lm}$  ضریبی از  $g(t)$  است. به همین دلیل به آنها مدولاتور خطی می‌گویند. برای این مدولاسیون‌ها داریم:

$$PAM : I_n \in \{A_m = (2m-1-M) \quad m=1, \dots, M\}$$

$$QAM : I_n \in \{A_{mi} + j A_{mq}\} \quad (3-7-3)$$

$$PSK : I_n \in \{e^{j \frac{2\pi}{M}(m-1)} \quad m=1, \dots, M\}$$

در حالت کلی برای هر مدولاتور شکل موج ارسالی در هر فاصله ارسال،  $M$  مقدار ممکن دارد که وابسته به  $k$  بیت اطلاعاتی آن فاصله ارسال و حافظه مدولاتور می‌باشد و داریم:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t-nT; I_n, \sigma_n) \quad (4-7-3)$$

$\sigma_n$  متغیر تصادفی است که بیانگر حافظه مدولاتور در فاصله ارسال  $n$ ام است. برای مدولاتورهای بدون حافظه (۳-۷-۴) بصورت زیر در می‌آید:

برای مدولاتور بدون حافظه:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t-nT; I_n) \quad (۳-۷-۵)$$

برای مدولاتور خطی بدون حافظه (سه مدولاتور اول) داریم:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n g(t-nT) \quad (۳-۷-۶)$$

### ۳-۸) مدولاسیون Offset QPSK:

مدولاتور QPSK معمولی را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم نرخ ارسال بیت مورد نظر  $R_b = \frac{1}{T_b}$  باشد، در این

صورت ریت ارسال سمبل برابر  $\frac{1}{2T_b}$  خواهد بود. بنابراین شکل موج ارسالی معادل باند پایه برابر است با:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I'_n g(t-2nT) \quad I'_n = \{\pm 1 \pm j\} \quad (۳-۸-۱)$$

در این مدولاتور نرخ جهش فاز برابر با  $\frac{1}{2T_b}$  و ماکزیمم جهش فاز برابر با  $180^\circ$  درجه می‌باشد. جهش فاز فوق

موجب افزایش دامنه لبهای فرعی و لذا افزایش پهنای باند مدولاتور می‌گردد. برای رفع مشکل فوق، offset QPSK (OQPSK) معرفی شده است. قبل از بررسی این مدولاتور پیاده‌سازی معادل دیگر (۳-۸-۱) را در نظر

می‌گیریم. فرض کنیم از دو بیت هر فاصله ارسال، بیت‌های زوج تعیین کننده دامنه مولفه‌های کسینوس و بیت‌های فرد تعیین کننده دامنه مولفه‌های سینوس باشند، در این صورت می‌توان نوشت:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n} g(t-2nT) + j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n+1} g(t-2nT) \quad I_{2n}, I_{2n+1} \in \{\pm 1\} \quad (۳-۸-۲)$$

جهت اجتناب از جهش فاز  $180^\circ$  درجه، مدولاسیون Offset QPSK مطرح شده است که در آن زمان ارسال مولفه

سینوس  $T$  ثانیه بعد از مولفه کسینوس می‌باشد و در نتیجه حداکثر جهش فاز  $90^\circ$  درجه است، یعنی داریم:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n} g(t-2nT) + j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n+1} g(t-2nT-T) \quad (3-8-3)$$

بنابراین نرخ جهش فاز برابر با  $\frac{1}{T}$  و ماکزیمم جهش فاز برابر با ۹۰ درجه است. می‌توان نشان داد که offset QPSK و QPSK دارای دامنه لوب‌های فرعی یکسانی هستند. عبارتی چگالی طیفی توان آنها یکی می‌باشد. صرفاً تفاوتشان بعد از فیلتر شدن در باند میانی است. همانگونه که در بالا اشاره شد به علت جهش فاز در یک فاصله ارسال به فاصله بعد، دامنه لب‌های فرعی افزایش می‌یابد که منجر به افزایش پهنای باند خواهد شد. جهت اجتناب از آن از یک فیلتر باند میانی بعد از مدولاتور استفاده می‌شود. QPSK فیلتر شده لحظاتی دارای دامنه صفر نیز می‌باشد، لذا نسبت ماکزیمم دامنه به مینیمم آن مساوی بینهایت است. اما برای OQPSK این نسبت حدود  $\sqrt{2}$  است لذا با بکارگیری آن می‌توان از یک تقویت کننده RF ارزانتری بهره جست.

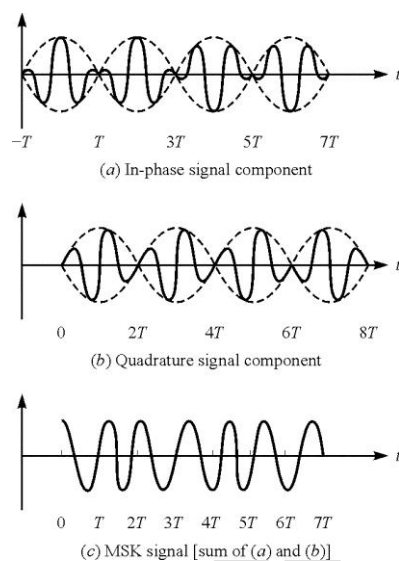
یکی از مدولاسیون‌هایی که از خانواده offset QPSK است اما در آن مشکل جهش فاز کاملاً حل شده است، مدولاسیون<sup>۱</sup> MSK است. در مدولاسیون MSK بجای پالس مستطیلی از نیم سیکل سینوسی استفاده می‌شود یعنی:

$$g(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi t}{2T} & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (4-8-3)$$

شکل (۴-۳) سیگنال MSK را نشان می‌دهد. این مدولاسون فاز پیوسته دارد و لذا از لحاظ پهنای باند وضعیتی به مراتب بهتر از offset QPSK با شکل موج مستطیلی دارد.

مشکلی که برای PSK مطرح شد برای FSK نیز وجود دارد که برای رفع آن FSK با فاز پیوسته یا CPFSK مطرح شده است. لازم به ذکر است که ارائه دیگری از MSK، بعنوان مدولاتور از خانواده CPFSK است که بعد از معرفی مدولاتور CPFSK به آن خواهیم پرداخت. می‌توان نشان داد که دو ارائه فوق از MSK دارای چگالی طیفی توان یکسانی هستند.

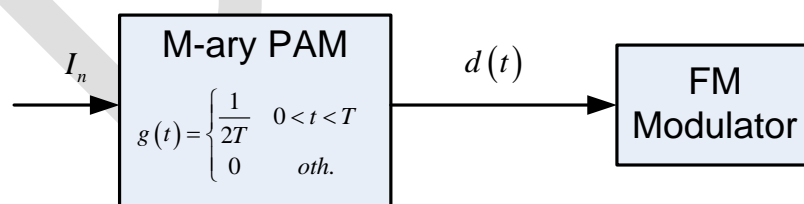
<sup>۱</sup> Minimum Shift Keying



شکل (۳-۴) - سیگنال MSK بصورت سیگنال OQPSK با پوش سینوسی

### ۹-۳) مدولاسیون CPFSK:

بلوک دیاگرام معادل این مدولاتور در باند پایه در شکل (۳-۵) ارائه شده است. این یک مدولاتور با حافظه است که در آن مشکل جهش فاز مدولاتور FSK حل شده است.



شکل (۳-۵)

در شکل (۳-۵) داریم:

$$d(t) = \sum I_n g(t - nT) \quad (۳-۹-۱)$$

شکل موج خروجی مدولاتور در باند پایه برابر است با:

$$v(t) = A \exp\{j[4\pi T f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) d\tau + \theta_0]\} \quad (2-9-3)$$

برای سیگنال باند میانی می توان نوشت:

$$s(t) = \text{Re}\{v(t)e^{j2\pi f_c t}\} = A \cos(2\pi f_c t + \varphi(t; I) + \theta_0) \quad (3-9-3)$$

$$\varphi(t; I) = 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) d\tau = 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k g(\tau - kT) d\tau$$

بنابراین داریم:

$$\varphi(t; I) = 4\pi T f_d \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k q(t - kT) \quad q(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{2T} & 0 < t < T \\ \frac{1}{2} & t > T \end{cases} \quad (4-9-3)$$

در فاصله ارسال  $n$  ام، یعنی  $nT \leq t < (n+1)T$  داریم:

$$\varphi(t; I) = 2\pi T f_d \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + 2\pi T f_d (t - nT) I_n \quad (5-9-3)$$

می توان نوشت:

$$\varphi(t; I) = \theta_n + \pi h I_n \frac{t - nT}{T} \quad \theta_n = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k, \quad h = 2T f_d \quad (6-9-3)$$

پس در نهایت می توان نوشت:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta_n + \pi h I_n \frac{t - nT}{T}) \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (7-9-3)$$

اگر  $h = \frac{l}{m}$  و  $l$  عددی زوج باشد، و  $l$  و  $m$  نسبت به هم اول باشند،  $\theta_n$  و از آنجا حافظه مدولاتور  $m$  مقدار متفاوت خواهد داشت و اگر  $l$  فرد باشد، حافظه  $2m$  مقدار متفاوت دارد. بنابراین دیاگرام حالت مدولاتور حداکثر  $2m$  حالت خواهد داشت. همانگونه که قبلا اشاره شد، ارائه دیگر MSK بعنوان مدولاتوری از خانواده CPFSK است. در حقیقت با قرار دادن  $h=0.5, M=2$ ، به ارائه دیگر MSK خواهیم رسید. در این حالت

دارای  $\theta_n = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k$  مقدار متفاوت است. در حقیقت می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A \cos(2\pi f_c t + \theta_n + \pi h I_n \frac{t-nT}{T}) \\
 &= A \cos(2\pi(f_c + \frac{1}{4T} I_n)t + \theta_n - I_n \frac{n\pi}{2}) \\
 \left. \begin{aligned}
 \text{if } I_n = 1 &\Rightarrow f_1 = f_c + \frac{1}{4T} \\
 \text{if } I_n = -1 &\Rightarrow f_2 = f_c - \frac{1}{4T}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta f = f_1 - f_2 = \frac{1}{2T}
 \end{aligned}$$

(۸-۹-۳)

بعبارتی حالت فوق را می توان یک مدولاتور باینری FSK با فرکانس های  $f_1$  و  $f_2$  در نظر گرفت که فاصله بین این فرکانس ها مینیمم فاصله فرکانسی ممکن بین دو فرکانس برای داشتن سیگنالینگ متعامد:  $\Delta f = f_1 - f_2 = \frac{1}{2T}$  است. به همین دلیل CPFSK باینری با  $h=0.5$  را مدولاتور MSK (Minimum Shift Keying) می نامند. حافظه مدولاتور پیوستگی فاز را از یک فاصله به فاصله دیگر تضمین می کند. برای بررسی این موضوع دو فاصله ارسال متوالی  $n$  ام و  $n+1$  ام را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
 nT \leq t < (n+1)T \\
 \varphi(t; I)|_{t=(n+1)T^-}: \quad \varphi(t; I) &= \theta_n + \frac{\pi}{2} I_n \left( \frac{t-nT}{T} \right) \\
 (n+1)T \leq t < (n+2)T : \\
 \varphi'(t; I)|_{t=(n+1)T^+}: \quad \varphi'(t; I) &= \theta_{n+1} + \frac{\pi}{2} I_{n+1} \left( \frac{t-(n+1)T}{T} \right)
 \end{aligned}$$

(۹-۹-۳)

در انتهای فاصله ارسال  $n$  ام خواهیم داشت:

$$\varphi(t; I)|_{t=(n+1)T^-} = \theta_n + \frac{\pi}{2} I_n \tag{۱۰-۹-۳}$$

در ابتدای فاصله ارسال  $n+1$  ام بدست می آید:

$$\varphi'(t; I)|_{t=(n+1)T^+} = \theta_{n+1} + 0, \quad \theta_{n+1} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + \frac{\pi}{2} I_n = \theta_n + \frac{\pi}{2} I_n \tag{۱۱-۹-۳}$$

لذا از فاصله  $n$  ام به  $n+1$  ام پیوستگی فاز را خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \varphi(t; I)|_{t=(n+1)T^-} = \varphi'(t; I)|_{t=(n+1)T^+} \tag{۱۲-۹-۳}$$



اگر شکل موج‌های ارسالی در باند میانی را برای دو ارائه متفاوت از MSK در کلیه فواصل ارسال در نظر بگیریم داریم:

۱- شکل موج ارسالی باند میانی برای MSK بعنوان مدولاتور از خانواده OQPSK

$$g(t) = \sin \frac{\pi t}{2T} \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s(t) = \sum_n AI_{2n} g(t - 2nT) \cos 2\pi f_c t - \sum_n AI_{2n+1} g(t - 2nT - T) \sin 2\pi f_c t \quad (13-9-3)$$

۲- شکل موج ارسالی باند میانی برای MSK بعنوان مدولاتور از خانواده CPSK

$$s(t) = \sum_n A \cos(2\pi(f_c t + \theta_n + \frac{\pi}{2} I_n(\frac{t-nT}{T}))) \Pi(t-nT)$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{oth.} \end{cases} \quad (14-9-3)$$

اگر چه شکل موج‌های زمانی فوق در (۱۳-۹-۳) و (۱۴-۹-۳) دقیقاً یکسان نیستند ولی چگالی طیف یکسانی دارند و لذا پهنای باند یکسانی را اشغال می‌کنند.

### ۳-۱۰) مدولاسیون GMSK:

مدولاسیون GMSK از خانواده مدولاسیون CPM است که حالت کلی تری از مدولاسیون CPFSK می‌باشد. در واقع در مدولاسیون CPM شکل موج بکار رفته  $g(t)$  در مدولاتور M-PAM در بلوک دیاگرام شکل (۳-۵) مربوط به مدولاسیون CPFSK، هر شکل موج دلخواه با هر دوره زمانی می‌تواند باشد. با انتخاب دوره زمانی بزرگتر از  $T$  یا شکل موج با تغییرات نرم‌تر و آرام‌تر از یک پالس مستطیلی، در مقایسه با CPFSK، می‌توان به مدولاتور از لحاظ پهنای اند کارتر رسید. در مدولاسیون GMSK، از یک پالس گوسی که به شکل زیر تعریف می‌شود استفاده می‌گردد.

$$g(t) = h(t) * \Pi(t) \quad (1-10-3)$$

که در آن داریم:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma T} e^{-t^2/2\sigma^2 T^2}$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1/T & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases} \quad (2-10-3)$$

$$\sigma = \sqrt{\ln 2} / 2\pi BT$$

که در آن  $BT$  را پهنای باند  $3\text{dB}$  فیلتر با پاسخ ضربه  $h(t)$  می‌نامند. در استاندارد GMSK،  $BT=0.3$  انتخاب شده است. به ازای  $BT=\infty$  تابع گوسی به سمت تابع ضربه میل می‌کند و مدولاسیون GMSK به مدولاسیون CPFSK تقلیل می‌یابد. دقت شود که در مدولاسیون GMSK هرچه مقدار  $BT$  کوچکتر باشد مدولاسیون، به بهای پیچیدگی بیشتر برای دمدولاتور، از لحاظ پهنای باند کارآتر است.

## فصل ۴

## محاسبه چگالی طیفی خروجی مدولاتور دیجیتال

در بخش قبل مدولاسیون‌های متفاوتی را بررسی کردیم. برای مقایسه این مدولاسیون‌ها از لحاظ پهنای باند، لازم است چگالی طیف توان خروجی مدولاتورهای فوق را بدست آوریم. لازم به ذکر است که به دلیل ماهیت تصادفی داده‌های ارسالی، شکل موج‌های خروجی مدولاتورهای فوق فرایندهای تصادفی هستند. در ادامه خود را محدود به مدولاتورهای خطی می‌نمائیم. روندی که برای محاسبه چگالی طیفی توان خروجی مدولاتورهای خطی مطرح می‌شود، برای مدولاتورهای غیر خطی نیز صادق است. به دلیل وجود رابطه زیر بین شکل موج‌های معادل باند پایه و باند میانی:

$$s(t) = \text{Re} \{ v_l(t) e^{j2\pi f_c t} \}$$

$$v_l(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l(t - nT; I_n) \quad (1-9-3)$$

$$s_l(t) = I_n g(t)$$

که در این رابطه  $v_l(t)$  و  $s_l(t)$  بترتیب سیگنال مدوله شده باند پایه ارسالی با در نظر گرفتن کل فواصل ارسال و شکل موج باند پایه هستند. با توجه به (۲-۹-۳) رابطه چگالی طیف شکل موج باند میانی و شکل موج باند پایه بصورت زیر است:

$$S_s(f) = \frac{1}{4} [S_{v_l}(f - f_c) + S_{v_l}(-f - f_c)] \quad (3-9-3)$$

که در آن  $S_s(f)$  و  $S_{v_l}(f)$  به ترتیب چگالی طیفی توان  $s(t)$  و  $v_l(t)$  می‌باشند. لذا ابتدا تابع همبستگی  $v_l(t)$  را بدست می‌آوریم. تابع همبستگی  $v_l(t)$  برابر است با:

$$\begin{aligned}
R_{v_l}(t+\tau, t) &= E[v_l(t+\tau)v_l^*(t)] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E[s_l(t+\tau-nT; I_n)s_l^*(t-mT; I_m)] \\
&= E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_n g(t+\tau-nT)I_m^* g^*(t-mT)\right] \quad (4-9-3) \\
&= \sum_n \sum_m E[I_n I_m^*] g(t+\tau-nT)g^*(t-mT) \\
&= \sum_k R_l(k) \sum_n g(t+\tau-nT)g^*(t-nT+kT) \quad k=n-m
\end{aligned}$$

رابطه (4-9-3) نشان می‌دهد که  $v_l(t)$  یک فرایند ایستان نیست، بلکه یک فرایند ایستان دوری است. یعنی تابع همبستگی و میانگین فرایند تابعی پریودیک از زمان با پریود  $T$  می‌باشند. یعنی:

$$\begin{aligned}
R_{v_l}(t+\tau+T, t+T) &= R_{v_l}(t+\tau, t) \\
v_l(t) &= \sum_n I_n g(t-nT) \quad (5-9-3) \\
E[v_l(t)] &= \sum_n \mu_l g(t-nT) = \mu_l \sum_n g(t-nT) \quad , \mu_l = E(I_n)
\end{aligned}$$

در حقیقت فرایند خروجی یک مدولاتور خطی، یک فرایند ایستان به مفهوم باز دوری<sup>۱</sup> می‌باشد. برای این فرایندها به سه طریق می‌توان محاسبه طیفی انجام داد:

۱- متوسط  $R_{v_l}(t)$  را روی یک پریود محاسبه نماییم:

$$\begin{aligned}
\overline{R_{v_l}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_T R_{v_l}(t+\tau, t) dt \quad (6-9-3) \\
S_{v_l}(f) &= F\{\overline{R_{v_l}}(\tau)\}
\end{aligned}$$

۲- تبدیل فرایند به یک فرایند معادل ایستان:

$$\begin{aligned}
v_l(t) &\rightarrow v'_l(t) = v_l(t-\Delta) \\
S_{v_l}(f) &= S_{v'_l}(f) \quad (7-9-3)
\end{aligned}$$

که در این رابطه  $\Delta$  یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت است.

$$f_{\Delta}(\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 < \Delta < T \\ 0 & \text{oth.} \end{cases} \quad (8-9-3)$$

<sup>۱</sup> Cyclo Stationary

۳- استفاده از تبدیل فوریه دو بعدی نسبت به  $t$  و  $t+\tau$ :

$$\begin{aligned} S_{v_i}(f_1, f_2) &= F\{R_{v_i}(t+\tau, t)\} \\ &= \sum S_n(f_1) \delta(f_1 - f_2 - \frac{n}{T}), S_0(f_1) = S_{v_i}(f) \end{aligned} \quad (9-9-3)$$

توجه کنید که هر ۳ روش به یک نتیجه منتهی می شود. ما از روش اول یعنی متوسط گیری از تابع چگالی روی یک پرپود استفاده می کنیم. طبق (۳-۹-۴) داریم:

$$\begin{aligned} R_{v_i}(t+\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_I(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g^*(t-nT) g(t+\tau-nT-kT) \\ \overline{R_{v_i}}(\tau) &= \sum_k R_I(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-nT}^{+\frac{T}{2}-nT} g^*(t') g(t'+\tau-kT) dt', \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T}{2}-nT}^{+\frac{T}{2}-nT} f(t) dt \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \quad (10-9-3) \\ \Rightarrow \overline{R_{v_i}}(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_k R_I(k) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t') g(t'+\tau-kT) dt'}_{g(t)*g^*(-t)|_{t=\tau-kT}} \quad g(t)*g^*(-t) = R_g(t) \end{aligned}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \overline{R_{v_i}}(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_k R_I(k) R_g(\tau-kT) \\ S_{v_i}(f) &= \frac{1}{T} \sum_k R_I(k) e^{-j2\pi f k T} |G(f)|^2 \\ &= \frac{1}{T} |G(f)|^2 \underbrace{\sum_k R_I(k) e^{-j2\pi f k T}}_{S_I(f)} \\ &= \frac{1}{T} |G(f)|^2 S_I(f) \end{aligned} \quad (11-9-3)$$

همانطور که مشاهده می شود،  $S_{v_i}(f)$  تابعی از شکل موج پایه مدولاتور و میزان همبستگی دنباله  $I_n$ ، که بیانگر دنباله اطلاعاتی است، می باشد. معمولاً با کنترل  $|G(f)|$ ، چگالی طیف را کنترل می نمایند.

برای ایجاد صفرهای خاص در چگالی توان از  $S_I(f)$  استفاده می شود. در حالت کلی، مولفه های دنباله  $I_n$  ناهمبسته هستند (در حالت ایده آل، کدینگ منبع همبستگی را از بین می برد و دنباله i.i.d است). بعنوان یک مثال، مدولاسیون M-PAM را در نظر بگیرید و فرض کنید  $I_n$  یک دنباله حقیقی i.i.d باشد. داریم:

$$\begin{aligned}
 R_I(m) &= E\{I_{n+m}I_n^*\} = E\{I_{n+m}\}E\{I_n^*\} = \mu_I^2 \\
 E\{I_n\} &= \mu_I, \sigma_I^2 = E\{(I_n - \mu_I)^2\} = E\{I_n^2\} - \mu_I^2 \\
 \Rightarrow E\{I_n^2\} &= \sigma_I^2 + \mu_I^2 \quad (12-9-3) \\
 \Rightarrow R_I(m) &= \begin{cases} \mu_I^2 & m \neq 0 \\ \sigma_I^2 + \mu_I^2 & m = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

با استفاده از این روابط می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 S_I(f) &= \sigma_I^2 + \mu_I^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fmT} = \sigma_I^2 + \frac{\mu_I^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{m}{T}) \quad (13-9-3) \\
 S_I(f) &= \frac{1}{T} \sigma_I^2 |G(f)|^2 + \frac{\mu_I^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |G(\frac{m}{T})|^2 \delta(f - \frac{m}{T})
 \end{aligned}$$

اگر  $\mu_I = 0$  قرار دهیم، یعنی مرکز ثقل شکل موج‌ها روی مبدا واقع شود، از مولفه دوم (قطار impulse) در رابطه فوق اجتناب می‌گردد و لذا کنترل بهتری روی چگالی طیف توان خواهیم داشت.

در مرجع [۱]، مطابق روندی که برای مدولاتورهای خطی مطرح شد، چگالی طیف توان برای مدولاتورهای غیر خطی و با حافظه محاسبه شده است. بر اساس این نتایج، چگالی طیف توان برای مدولاتور MSK به قرار زیر است:

$$S_v(f) = \frac{16A^2T}{\pi^2} \left[ \frac{\cos 2\pi fT}{1-16f^2T^2} \right]^2, T = T_b \quad (14-9-3)$$

با توجه به رابطه (۱۱-۹-۳) چگالی طیف توان برای QPSK و OQPSK به سادگی بدست می‌آید. برای مدولاسیون OQPSK:

$$S_v(f) = A^2T \left[ \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} \right]^2, T = 2T_b \quad (15-9-3)$$

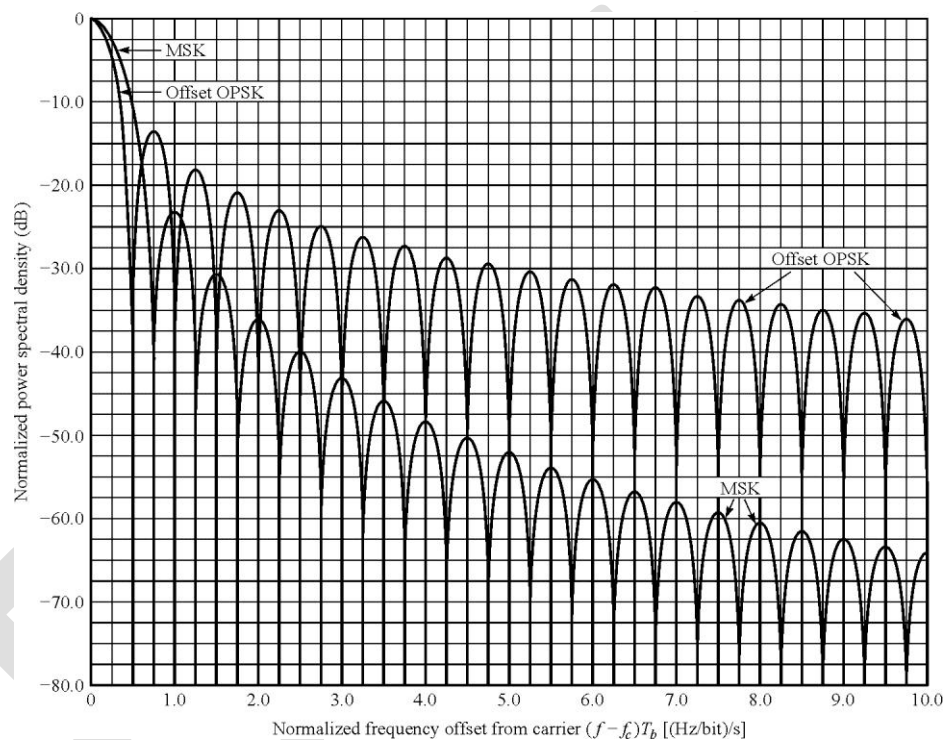
از روابط (۱۴-۹-۳) و (۱۵-۹-۳) می‌توان مشاهده نمود که لوب اصلی MSK دو برابر OQPSK است اما دامنه لوب‌های فرعی آن به شدت افت می‌نماید. پهنای لوب اصلی MSK دو برابر OQPSK است، و اگر پهنای باند

نود و نه درصد انرژی را در نظر بگیریم، MSK به مراتب بهتر از QPSK و OQPSK عمل می‌نماید، یعنی داریم:

$$MSK : \quad W \approx \frac{1.2}{T_b} \quad (۱۶-۹-۳)$$

$$QPSK, OQPSK : \quad W \approx \frac{8}{T_b}$$

شکل (۱-۴) چگالی طیف توان را برای دو مدولاسیون MSK و OQPSK نشان می‌دهد.



شکل (۱-۴) - چگالی طیف توان برای دو مدولاسیون MSK و OQPSK

## فصل ۵

## ساختار گیرنده بهینه برای کانال معین<sup>۱</sup> با نویز سفید جمع شونده AWGN و آنالیز عملکرد آن

### ۵-۱) گیرنده بهینه

فرض می‌کنیم در انتقال اطلاعات،  $M$  حالت  $s_1, s_2, \dots, s_M$  (هر یک متناظر با یکی از  $M$  شکل موج خروجی مدولاتور) با احتمال‌های پیشین  $P_1, P_2, \dots, P_M$  داریم. مسلماً در فرستنده یک حالت رخ می‌دهد. باید بر اساس مشاهده خروجی کانال که با  $r$  نشان می‌دهیم، در مورد حالت رخ داده (یا شکل موج ارسالی) تصمیم‌گیری نمائیم. تشخیص بر اساس معیاری است که به بهینه‌ترین تصمیم منجر می‌شود. معیار مورد نظر در مخابرات مینیمم کردن احتمال خطا است. لذا تصمیم‌گیری به نحوی است که احتمال تشخیص نادرست مینیمم گردد.

فرض می‌کنیم تابع چگالی  $r$  به شرط رخ دادن  $s_m$  را بدانیم:

$$p(r | s_m) \quad 1 \leq m \leq M \quad (1-1-5)$$

احتمال خطا را می‌توان با شرطی‌کردن و متوسط‌گیری بصورت زیر بدست آورد:

$$P_e = \int p(e | r) p(r) dr \quad (2-1-5)$$

<sup>۱</sup> Deterministic



در گیرنده بهینه هدف مینیم کردن احتمال خطای غیرشرطی بالا است. براحتی می توان ملاحظه کرد که به ازای مشاهده هر  $r$ ، اگر  $p(e|r)$  را مینیم کنیم، احتمال خطای غیرشرطی نیز مینیم خواهد شد. فرض می کنیم که  $s_m$  بر اساس معیاری آشکارسازی شده باشد. در آن صورت، می توان نوشت:

$$p(e|r) = P\{s_m \text{ ارسال نشده باشد} | r \text{ مشاهده}\}$$

بنابراین داریم:

$$p(e|r) = \sum_{i=1, i \neq m}^M p(s_i|r) = 1 - p(s_m|r) \quad (3-1-5)$$

پس برای مینیم کردن احتمال خطا به شرط  $r$ ، گیرنده بهینه باید  $s_m$  ای را به عنوان حالت رخ داده انتخاب نماید که به ازای آن  $p(s_m|r)$  ماکزیم مقدار را داشته باشد. به این ترتیب به گیرنده *Maximum A Posteriori* (MAP) *Probability* می رسیم که بر اساس ماکزیم کردن احتمال پسین عمل می کند. یعنی سمبل آشکار شده برابر است با:

$$\hat{s}_m = \max_{s_m} p(s_m|r) \quad (4-1-5)$$

احتمال های پیشین و پسین که در ادامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت بصورت زیر نمایش داده می شوند:

احتمال پیشین حالت  $P_m = s_m$  (Prior Probability)

احتمال پسین حالت  $s_m$  (بعد از مشاهده  $r$ )  $p(s_m|r)$  (Posterior Prob.)

اگر احتمال های پیشین مساوی باشند، به گیرنده مشهور ML<sup>1</sup> می رسیم. یعنی:

$$\max_{s_m} p(s_m|r) = \frac{\max_{s_m} p(r|s_m)P_m}{p(r)} \equiv \max_{s_m} p(r|s_m)P_m \quad (5-1-5)$$

$$\text{if } P_m = \frac{1}{M} \equiv \max_{s_m} p(r|s_m) \rightarrow ML \text{ receiver}$$

این روابط را براحتی می توان به حالت برداری (که می تواند یک بردار مختلط نیز باشد) تعمیم داد، یعنی:

$$\begin{aligned} MAP: \max_{s_m} p(s_m|r_1, r_2) \\ \equiv \max_{s_m} p(r_1, r_2 | s_m)P_m \rightarrow MAP \\ \equiv \max_{s_m} p(r_1, r_2 | s_m) \rightarrow ML \end{aligned} \quad (6-1-5)$$

<sup>1</sup> Maximum Likelihood

حال یک تعبیر هندسی از آشکارسازی بهینه ارائه می‌نمائیم. قبلاً یک نمایش برداری برای سیگنال‌ها بدست آوردیم. سیگنال دریافتی را نیز می‌توان در فضای سیگنال‌ها نمایش داد. با این فضا می‌توان یک تعبیر هندسی برای آشکارساز بدست آورد. به این ترتیب که به هر حالت ممکن  $s_m$  یک ناحیه در فضا، که با  $D_m$  نشان می‌دهیم، اختصاص داده می‌شود به نحوی که اگر سیگنال دریافتی در این ناحیه قرار گیرد، حالت  $s_m$  (متناظر با شکل موج ارسالی  $m$ ام) آشکارسازی می‌شود. در حقیقت قاعده تصمیم‌گیری، فضای مقادیری که  $r$  می‌پذیرد را به  $M$  ناحیه تصمیم‌گیری تقسیم می‌نماید (هر ناحیه متناظر با یک و فقط یک حالت است). بر اساس قاعده تصمیم‌گیری بهینه MAP، این نواحی بصورت زیر خواهند بود:

$$D_m = \{r \in \mathbb{R}^N : p(r | s_m)P_m \geq p(r | s_{m'})P_{m'}, \text{ for } 1 \leq m' \leq M\} \quad (7-1-5)$$

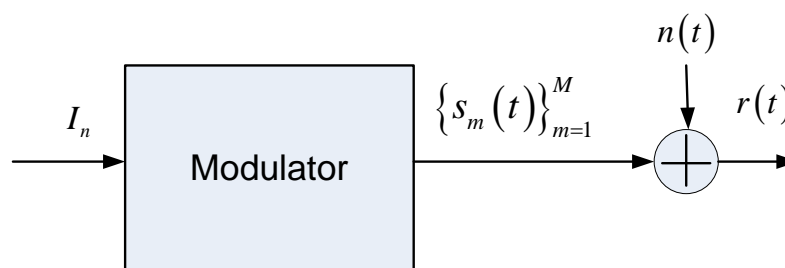
ممکن است نواحی فصل مشترک داشته باشند، یعنی ممکن است  $p(r | s_m)P_m = p(r | s_{m'})P_{m'}$  که در این صورت ناحیه را نصف می‌کنیم و به هر شکل موج یک قسمت را اختصاص می‌دهیم. در نهایت احتمال خطا بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_e = \sum_{m=1}^M P_m P[r \notin D_m | s_m \text{ sent}] = \sum_{m=1}^M P_m P_{e|m} \quad (8-1-5)$$

$$P_{e|m} = P[r \notin D_m | s_m \text{ sent}] = 1 - P[r \in D_m | s_m \text{ sent}] = 1 - \int_{D_m} p(r | s_m) dr$$

### ۵-۲) ساختار گیرنده بهینه برای کانال AWGN:

شکل زیر ساختار یک کانال ایده‌آل را در حضور نویز گوسی نشان می‌دهد:



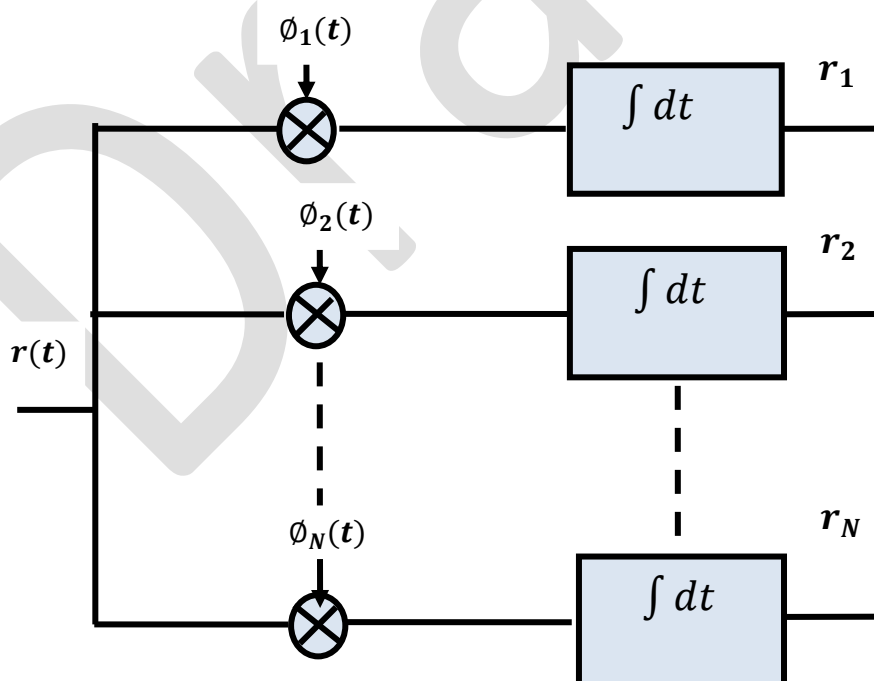
شکل (۱-۵) ساختار کانال با نویز گوسی

برای اینکه ساختار گیرنده بهینه را بدست آوریم، ابتدا شکل موج دریافتی را در فضای مناسب تصویر می‌نمائیم به نحوی که هیچ اطلاعات مفیدی حذف نشود و اطلاعات مفید برای تصمیم‌گیری را بتوان با بردار نمایش داد. در حضور نویز سفید و گوسی نشان خواهیم داد که فضای مناسب، فضای شکل موج‌های خروجی مدولاتور است. فرض کنید  $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^N$  پایه‌های ارتونرمال در توصیف فضای شکل موج‌های خروجی مدولاتور باشند. طبق مباحث قبلی می‌توان نوشت:

$$s_m(t) = \sum_{j=1}^N s_{mj} \phi_j(t) \quad s_{mj} = \langle s_m(t), \phi_j(t) \rangle = \int s_m(t) \phi_j(t) dt \quad (1-2-5)$$

$$\underline{s}_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}]$$

گیرنده‌ای که ابتدا سیگنال دریافتی را روی فضای توصیف‌کننده سیگنال‌های خروجی مدولاتور تصویر می‌نماید، بصورت شکل زیر است:



شکل (۲-۵) - بدست آوردن مولفه‌های سیگنال در راستای پایه‌های ارتونرمال

اگر فرض کنیم که سیگنال  $m$  ام ارسال شده است، داریم:

$$\begin{aligned} r(t) &= s_m(t) + n(t) \\ r_j &= \int r(t) \phi_j(t) dt \\ r_j &= s_{mj} + n_j \quad n_j = \int n(t) \phi_j(t) dt, \quad j=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2-2-5)$$

بنابراین تصویر شکل موج دریافتی در فضای سیگنال‌های ارسالی توسط بردار  $\underline{r}$  بصورت زیر قابل ارائه است:

$$\underline{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N] = \underline{s}_m + \underline{n}, \quad \underline{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N] \quad (3-2-5)$$

همانطور که از روابط بالا مشخص می‌گردد، تمامی اطلاعاتی که توسط  $r(t)$  دریافت می‌شود، داخل  $\underline{r}$  قرار ندارد. داریم:

$$\tilde{r}(t) \triangleq \sum_{i=1}^N r_i \phi_i(t) = s_m(t) + \tilde{n}(t) \quad (4-2-5)$$

$\tilde{r}(t)$  قسمتی از  $r(t)$  است که توسط فضای فوق قابل توصیف است. مولفه مربوط به سیگنال کاملاً ظاهر می‌شود اما مولفه‌هایی از نویز حذف شده است. نشان می‌دهیم اطلاعات حذف شده زائد است. بخشی که حذف شده است را بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$r''(t) \triangleq r(t) - \tilde{r}(t) = n(t) - \tilde{n}(t) \quad (5-2-5)$$

از طرفی برای بردار مولفه‌های نویز می‌توان نوشت:

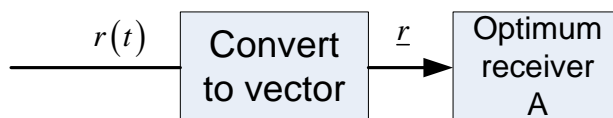
$$\begin{aligned} E[n_i] &= 0 \\ E[n_i n_j^*] &= E \left[ \int n(t) \phi_i(t) dt \int n^*(t') \phi_j^*(t') dt' \right] \\ &= \int \int E[n(t) n^*(t')] \phi_i(t) \phi_j^*(t') dt dt' \\ &= \frac{N_0}{2} \int \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt dt' \\ &= \frac{N_0}{2} \delta_{i,j} \end{aligned} \quad (6-2-5)$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

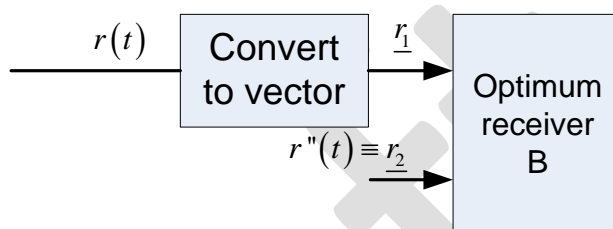
$$\underline{n} \sim N\left(0, \frac{N_0}{2} I_{N \times N}\right)$$

$$\underline{r} = \underline{s}_m + \underline{n}$$

با استفاده کردن و استفاده نکردن از سیگنال  $r''(t)$ ، قسمت حذف شده از سیگنال دریافتی، دو گیرنده زیر را خواهیم داشت:



شکل (۵-۳-الف) گیرنده بهینه A



شکل (۵-۳-ب) گیرنده بهینه B

گیرنده B کل سیگنال  $r(t)$  را برای تصمیم‌گیری در اختیار دارد. در حالی که گیرنده A، از تصویر آن در فضای شکل موج‌های مدولاتور استفاده می‌کند. اگر نشان دهیم قاعده تصمیم‌گیری گیرنده‌های A و B یکسان است، در این صورت  $r''(t)$ ، بخش حذف شده، زاید است و دانستن آن تاثیری روی ساختار گیرنده بهینه ندارد. مسئله را برای حالت برداری حل می‌کنیم.

می‌گوئیم ورودی  $r_2$  در گیرنده غیرمرتبط است اگر دانستن یا ندانستن آن تاثیری روی قاعده تصمیم‌گیری گیرنده نداشته باشد. در قضیه زیر شرط لازم و کافی برای غیرمرتبط بودن یک ورودی را بیان می‌کنیم:

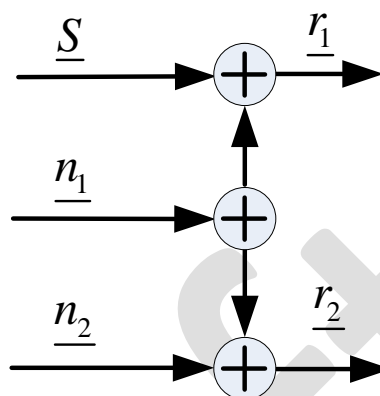
### قضیه ۵-۱:

ورودی  $r_2$  در شکل (۵-۳-ب) غیرمرتبط است اگر و تنها اگر با دانستن  $r_1$ ،  $r_2$  مستقل از بردار ارسالی باشد. به بیان ریاضی داریم:

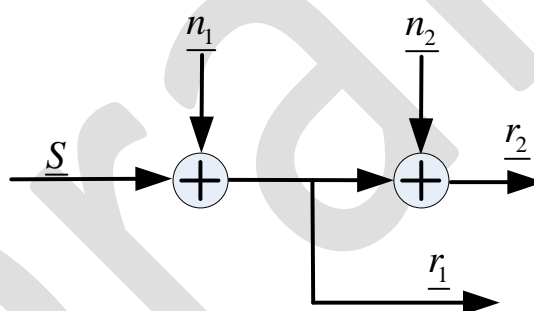
$$p(r_2 | r_1, \underline{S}) = p(r_2 | r_1) \quad (۵-۲-۷)$$

برای فهم بهتر مطلب به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۵-۱: در این مثال دو کانال متفاوت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این کانال‌ها و رابطه ورودی خروجی آن در شکل (۴-۵) نشان داده شده است.



شکل (۴-۵) الف)



شکل (۴-۵) ب)

برای شکل (۴-۵) الف) داریم:

$$p(r_2 | r_1, S) = p_{n_2}(r_2 - (r_1 - S)) = p_{n_2}(r_2 - r_1 + S) \neq p(r_2 | r_1) \quad (۸-۲-۵)$$

در اینجا چون  $r_2$  مولفه نویز است، مستقل از  $S$  است اما به شرط  $r_1$  مستقل از  $S$  نیست. لذا در این مثال  $r_2$  ورودی مرتبط است. برای شکل (۴-۵) ب) داریم:

$$p(r_2 | r_1, S) = p_{n_2}(r_2 - r_1) = p(r_2 | r_1) \quad (۹-۲-۵)$$

$r_2$  ورودی غیرمرتبط است، اما  $r_1$  ورودی مرتبط است. یعنی اگر  $r_2$  را داشته باشیم باز هم نیاز به  $r_1$  داریم:

$$p(r_1 | r_2, S) \neq p(r_1 | r_2) \quad (۱۰-۲-۵)$$

حال به اثبات قضیه (۱-۵) می پردازیم. فرض می کنیم که با دانستن  $r_1$ ،  $r_2$  مستقل از بردار ارسالی باشد. داریم:

$$\begin{aligned} \max_{s_m} p(s_m | r_2, r_1) &\equiv p(r_1, r_2 | s_m) P_m = p(r_1 | s_m) p(r_2 | r_1, s_m) P_m \\ &= p(r_1 | s_m) p(r_2 | r_1) P_m \\ &\equiv \max_{s_m} p(r_1 | s_m) P_m \\ &\equiv \max_{s_m} p(s_m | r_1) \end{aligned} \quad (11-2-5)$$

پس  $r_2$  ورودی غیرمرتبط است. با ادامه (۱۱-۲-۵) داریم:

$$\Rightarrow \max_{s_m} p(s_m | r_2, r_1) \equiv \max p(r_1 | s_m) P_m \quad (12-2-5)$$

یعنی  $r_2$  نقشی در فرایند تصمیم گیری ندارد. (معکوس قضیه نیز بسادگی قابل اثبات است).

با توجه به قضیه، برای اینکه نشان دهیم  $r''(t)$  ورودی غیرمرتبط است، نشان می دهیم به شرط دانستن  $r_1$ ،  $r_2$  مستقل از  $s$  است. داریم:

$$r''(t) = n(t) - \sum_{i=1}^M n_i \phi_i(t) \quad (13-2-5)$$

مطالب زیر را می توان نوشت:

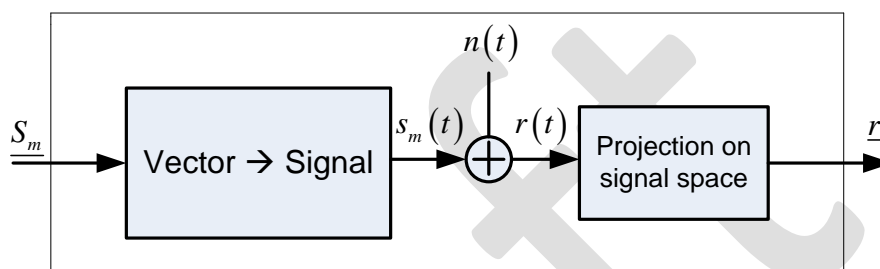
۱-  $r''(t)$  یک فرایند گوسی با متوسط صفر است که بر بردار  $n$  عمود می باشد زیرا:

$$\begin{aligned} E[r''(t) n_j] &= E[n(t) n_j] - \underbrace{\sum_{i=1}^M E[n_i n_j] \phi_i(t)}_{\frac{N_0}{2} \phi_j(t)} \\ E[n(t) n_j] &= E[n(t) \int n(t') \phi_j(t') dt'] = \int E[n(t) n(t')] \phi_j(t') dt' = \frac{N_0}{2} \phi_j(t) \quad (14-2-5) \\ \Rightarrow E[r''(t) n_j] &= 0 \quad j = 0, \dots, N \end{aligned}$$

۲-  $r''(t)$  مستقل از بردار  $n$  است زیرا دارای متوسط صفر است و در ضمن گوسی است. با در نظر گرفتن  $r''$  به عنوان نمایش برداری  $r''(t)$  در فضای بسط یافته بدست می آید:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{r}'' \perp \underline{n} \\ \underline{r}'' \perp \underline{S} \\ \underline{r}_1 = \underline{S} + \underline{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{r}'' \perp \underline{r}_1 \\ \underline{r}'' \perp \underline{S} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p(\underline{r}'' | \underline{r}_1, \underline{S}) = p(\underline{r}'') \\ p(\underline{r}'' | \underline{r}_1) = p(\underline{r}'') \end{array} \right\} \Rightarrow r''(t) \text{ ورودی غیر مرتبط}$$

بدین طریق نشان دادیم که با تصویر کردن  $r(t)$  در فضای شکل موج‌های خروجی مدولاتور هیچ اطلاعات مفیدی جهت آشکارسازی از دست نمی‌رود. به این طریق می‌توان کانال معادل برداری زیر را برای کانال شکل موج مورد بررسی در نظر گرفت:



شکل (۵-۵) - معادل برداری کانال با نویز گوسی

حال که معادل برداری برای کانال و شکل موج‌ها بدست آوردیم، راحت‌تر می‌توانیم گیرنده بهینه را بدست آوریم. برای گیرنده بهینه MAP می‌توان نوشت:

$$MAP: \max_{s_m} p(\underline{r} | s_m) P_m \quad (۱۵-۲-۵)$$

با توجه به اینکه نویز کانال گوسی است و داریم  $\underline{n} \sim N(\underline{0}, \frac{N_0}{2} I_{N \times N})$ ، لذا:

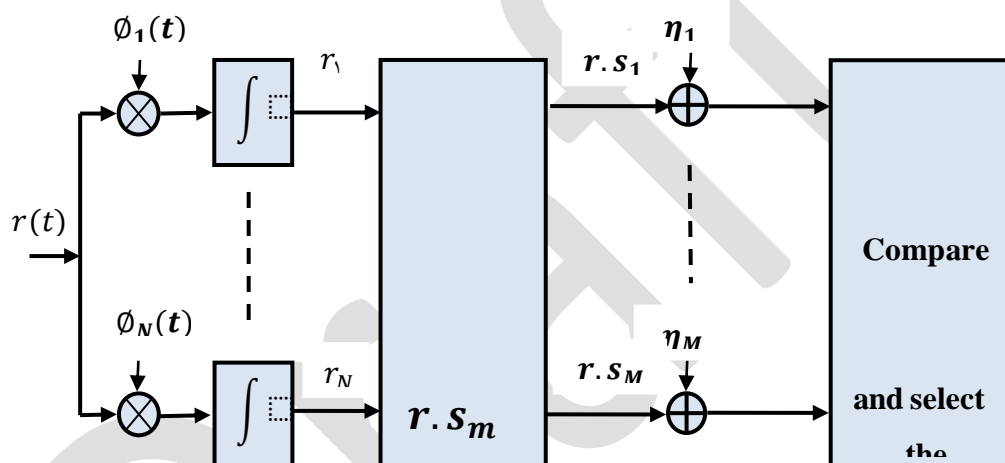
$$\begin{aligned} p(\underline{r} | s_m) &= p_{\underline{n}}(\underline{r} - s_m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^N}} e^{-\frac{\|\underline{r} - s_m\|^2}{N_0}} \end{aligned} \quad (۱۶-۲-۵)$$

چون تابع لگاریتم یک تابع افزایشی نسبت به متغیرش است، به رابطه معادل زیر می‌رسیم:



$$\begin{aligned} \max_{s_m} e^{-\frac{\|r-s_m\|^2}{N_0}} \cdot P_m &\equiv \max_{s_m} -\frac{\|r-s_m\|^2}{N_0} + \ln P_m \\ &\equiv \max_{s_m} -\frac{1}{N_0} \|r\|^2 - \frac{1}{N_0} \|s_m\|^2 + \frac{2}{N_0} r \cdot s_m + \ln P_m \quad (17-2-5) \\ &\equiv \max_{s_m} r \cdot s_m + \underbrace{\frac{N_0}{2} \ln P_m - \frac{1}{2} E_m}_{\eta_m} \end{aligned}$$

می توان  $\eta_m$  را به ازای  $m$  های مختلف از قبل محاسبه نمود، و مقدار آن ربطی به سیگنال دریافتی ندارد. در نهایت با توجه به رابطه فوق شکل کلی گیرنده بصورت زیر خواهد بود:



شکل (5-6) - ساختار گیرنده بهینه نویز گوسی

در این ساختار به  $N$  همبستگی سنج آنالوگ و  $M$  همبستگی سنج دیجیتال نیاز داریم. برای گیرنده ML نیز از همین ساختار استفاده می شود، با این تفاوت که داریم:

$$\eta_{m,ML} = -\frac{1}{2} E_m \quad (18-2-5)$$

قبلاً نشان دادیم که اگر  $s_1(t)$  و  $s_2(t)$  در فضای سیگنالها دارای نمایش برداری  $s_1$  و  $s_2$  باشند، ضرب داخلی این دو شکل موج برابر با ضرب داخلی بردارهای متناظر است. در مورد ضرب  $r \cdot s_m$  می دانیم که  $r(t)$  بطور کامل با  $r$  توصیف نمی گردد. اما ثابت می کنیم که ضرب برداری و ضرب شکل موجها معادلند. داریم:

$$r(t) = \sum_{i=1}^N r_i \phi_i(t) + r''(t) \Rightarrow \int r(t) s_m(t) dt = \sum_{i=1}^N r_i \int \phi_i(t) s_m(t) dt + \int r''(t) s_m(t) dt \quad (19-2-5)$$

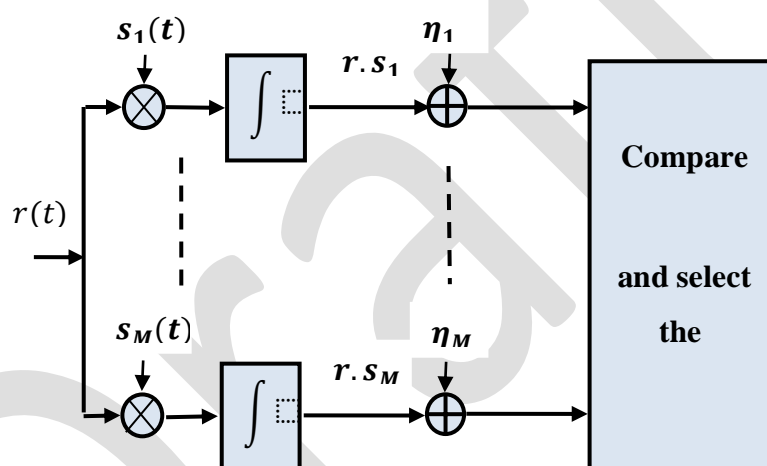
بسادگی می توان نشان داد که  $\int r''(t)s_m(t)dt = 0$ . لذا با استفاده از (۱۹-۲-۵) داریم:

$$\int r(t)s_m(t)dt = \sum_{i=1}^N r_i \int \phi_i(t)s_m(t)dt = \sum_{i=1}^N r_i s_{m_i} = \underline{r} \cdot \underline{s}_m \quad (20-2-5)$$

بنابراین رابطه تصمیم گیری برای گیرنده بهینه، رابطه (۱۷-۲-۵)، را با استفاده از (۲۰-۲-۵) می توان بصورت زیر نیز بیان نمود:

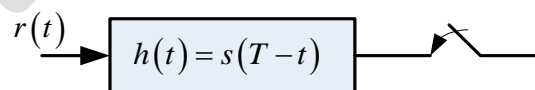
$$\max_{s_m} \int r(t)s_m(t)dt + \eta_m \quad (21-2-5)$$

از این قاعده تصمیم گیری به ساختار دیگری مطابق شکل زیر برای گیرنده بهینه می رسمیم.



شکل (۷-۵) - ساختار معادل دیگر برای گیرنده بهینه

با توجه به شکل (۷-۵)، این ساختار صرفاً به  $M$  همبستگی سنج آنالوگ احتیاج دارد. همبستگی سنج آنالوگ را با استفاده از یک فیلتر منطبق و یک نمونه بردار می توان مطابق شکل زیر پیاده سازی نمود.



شکل (۸-۵) - گیرنده فیلتر منطبق

برای رابطه ورودی-خروجی گیرنده داریم:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int h(t-\tau)r(\tau)d\tau \Rightarrow y(T) = \int h(T-\tau)r(\tau)d\tau \\ &= \int s(T-(T-\tau))r(\tau)d\tau = \int s(\tau)r(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (22-2-5)$$

به سادگی می توان نشان داد که اگر  $r(t) = s(t) + n(t)$  باشد، با استفاده از فیلتر منطبق، نسبت انرژی مولفه سیگنال به توان مولفه نویز، یعنی  $SNR$ ، در خروجی ماکزیمم است. در همه ساختارهای بالا می توان بجای همبستگی سنج های آنالوگ، فیلتر منطبق را جایگزین نمود.

برای سیستم های باند میانی می توان سیستم های معادل پایه را جایگزین کرد و گیرنده را در باند پایه پیاده سازی نمود. در ادامه ساختارهای معادل برای گیرنده بهینه در باند پایه را بررسی می نمائیم.

قبلا نشان دادیم:

$$\int r(t)s_m(t)dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int r_i(t)s_{im}^*(t)dt \right) \quad (23-2-5)$$

که در آن داریم:

$$r(t) = \operatorname{Re}(r_i(t)e^{j2\pi f_c t}) \quad (24-2-5)$$

$$s_m(t) = \operatorname{Re}(s_{im}(t)e^{j2\pi f_c t})$$

تصمیم گیری بهینه معادل بصورت زیر است:

$$\max_{s_m} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int r_i(t)s_{im}^*(t)dt \right) + \eta_m \quad (25-2-5)$$

در رابطه بالا برای محاسبه همبستگی دو سیگنال مختلط به ۴ عدد همبستگی سنج حقیقی نیاز است. اما چون در اینجا به بخش حقیقی نیازمندیم، استفاده از دو همبستگی سنج کافیست.

### ۳-۵ محاسبه احتمال خطا

#### ۱-۳-۵ روشهای محاسبه احتمال خطا

محاسبات احتمال خطا از دو طریق امکان پذیر است:

۱- استفاده از نواحی تصمیم گیری (در مدولاسیون های ۱ بعدی و ۲ بعدی)

۲- استفاده از متغیرهای تصمیم گیری

اگر قاعده تصمیم‌گیری  $\max \underline{r} \cdot \underline{s}_m + \eta_m$  باشد،  $M$  ناحیه تصمیم‌گیری خواهیم داشت که برای یک مدولاسیون  $N$  بعدی بصورت زیر مشخص می‌شوند:

$$D_m = \{ \underline{r} \in \mathbb{R}^N : \underline{r} \cdot \underline{s}_m + \eta_m \geq \underline{r} \cdot \underline{s}_{m'} + \eta_{m'} \quad \forall m' \neq m \} \quad (1-3-5)$$

اگر تعداد شکل موج‌ها بیشتر از ۲ باشد، راحت‌تر است که ابتدا احتمال دریافت صحیح را بدست آوریم:

$$P_c = \sum_{m=1}^M P_{c|m} \cdot P_m \quad (2-3-5)$$

$$P_{c|m} = P[r \in D_m | s_m \text{ sent}] = \int_{D_m} p(r | s_m) dr$$

در بعضی از مدولاسیون‌ها مانند مدولاسیون PSK نواحی تصمیم‌گیری متقارنند. در این حالت داریم:

$$P[\text{correction} | s_m \text{ sent}] = cte \quad \text{for } m=1, \dots, M \quad (3-3-5)$$

$$\Rightarrow P_c = (P[\text{correction} | s_m \text{ sent}]) \cdot \sum P_m = P[\text{correction} | s_m \text{ sent}]$$

و لذا خواهیم داشت:

$$P_e = 1 - P_c = 1 - P[\text{correction} | s_m \text{ sent}] \quad (4-3-5)$$

در ادامه احتمال خطای یک مدولاسیون باینری را با استفاده از نواحی تصمیم‌گیری بدست می‌آوریم. ابتدا نواحی تصمیم‌گیری را برای شکل موج‌های هم احتمال تعیین می‌کنیم. فرض کنید نویز کانال گوسی و شکل موج‌ها هم احتمال باشند. در اینصورت:

$$p(\underline{r} | \underline{s}_m) \sim N\left(\underline{s}_m, \frac{N_0}{2} I_{N \times N}\right) \quad (5-3-5)$$

$$\underline{r} = \underline{s}_m + \underline{n}$$

برای گیرنده بهینه داریم:

$$\max p(\underline{r} | \underline{s}_m) \cdot P_m \Big|_{P_m = cte} \equiv \max p(\underline{r} | \underline{s}_m) \equiv \max e^{-\frac{\|\underline{r} - \underline{s}_m\|^2}{N_0}} \equiv \min \|\underline{r} - \underline{s}_m\|^2 \quad (6-3-5)$$

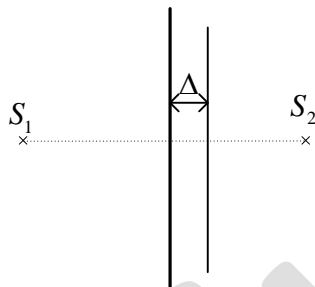
بنابراین، نواحی تصمیم‌گیری را به شکل زیر می‌توان مشخص نمود:

$$D_m = \{ \underline{r} \in \mathbb{R}^N : \|\underline{r} - \underline{s}_m\| \leq \|\underline{r} - \underline{s}_{m'}\| \quad \forall m' \} \quad (7-3-5)$$

مرز بین دو ناحیه  $D_m$  و  $D_k$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\{ \underline{r} \in \mathbb{R}^N : \|\underline{r} - \underline{s}_m\| = \|\underline{r} - \underline{s}_k\| \} \quad (8-3-5)$$

یعنی مرز عمود منصف پاره خطی است که  $s_m$  را به  $s_k$  وصل می نماید. اگر شکل موج ها هم احتمال نباشند، در تکلیف نشان خواهید داد مرز تصمیم گیری مطابق شکل زیر به موازات عمود منصف به اندازه  $\Delta$  جابجا می شود.

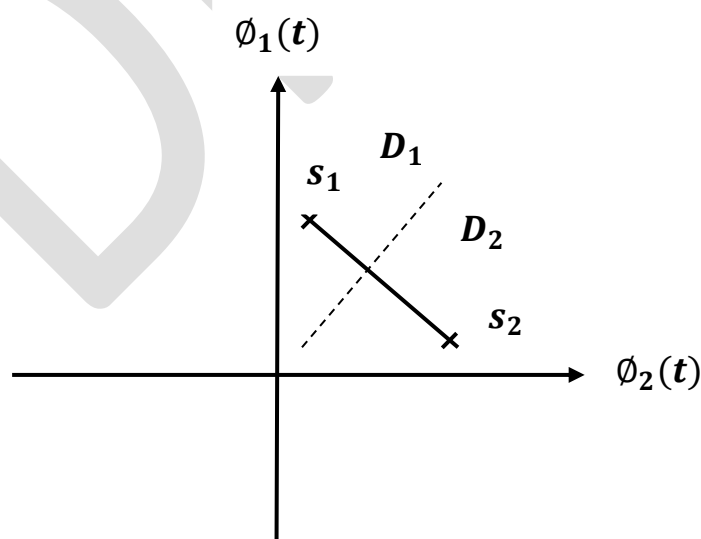


شکل (۹-۵) - نواحی تصمیم گیری

که  $\Delta$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$\Delta = \frac{\sigma^2}{d} \ln \frac{P_1}{P_2}, \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \quad (9-3-5)$$

حال یک مدولاسیون باینری با شکل موج های دلخواه  $s_1(t)$  و  $s_2(t)$  در کانال AWGN با  $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$  را در نظر بگیرید و احتمال خطای گیرنده بهینه را برای این نوع ارسال بدست می آوریم. فرض کنید شکل موج ها هم احتمال باشند. در این صورت با استفاده از نمایش برداری نواحی تصمیم گیری مطابق شکل زیر است.



شکل (۱۰-۵) - ناحیه تصمیم گیری بهینه

با توجه به شکل (۵-۱۰) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} r(t) &= s_i(t) + n(t) \\ P_{e2} &= P[r \in D_1 | s_2 \text{ sent}] \end{aligned} \quad (5-3-10)$$

در تکلیف نشان داده می شود که اگر نویز کانال دارای تابع چگالی با تقارن دایروی باشد (بعنوان مثال برای توزیع گوسی وقتی که واریانس در جهت پایه های اورتونرمال یکسان است)، با چرخاندن محورهای مختصات توزیع نویز تغییر پیدا نمی کند و لذا احتمال خطا تغییر نخواهد کرد. با نمایش برداری سیگنال ها می توان نوشت:

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix}, \underline{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \underline{r} = \underline{s}_i + \underline{n} \quad (5-3-11)$$

محورها را طوری می چرخانیم که  $\phi_2(t)$  در راستای پاره خط  $s_1 - s_2$  در شکل (۵-۱۰) گردد. اگر نمایش برداری شکل موجها در محورهای مختصات جدید را با  $\underline{s}'_i$  و نویز را با  $\underline{n}'$  نشان دهیم، بسادگی ملاحظه می شود که:

$$\begin{aligned} d^2 &= \|\underline{s}_1 - \underline{s}_2\|^2 = \|\underline{s}'_1 - \underline{s}'_2\|^2 \\ P_{e2} &= P[r' \in D'_1 | \underline{s}'_2] = P[n'_1 > d/2 | \underline{s}'_2] \end{aligned} \quad (5-3-12)$$

با توجه به استقلال نویز و سیگنال، و توزیع نویز بصورت زیر:

$$n'_1 \sim N(0, N_0/2) \quad (5-3-13)$$

داریم:

$$P_{e1} = P_{e2} = P[n'_1 > d/2] = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right), \sigma^2 = N_0/2 \quad (5-3-14)$$

به نحوی که:

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \quad (5-3-15)$$

اگر بخواهیم روابط احتمال خطا را بر حسب سیگنال به نویز بیان کنیم، داریم:

$$SNR \text{ per bit} = \gamma_b \triangleq \frac{E_b}{N_0} = \frac{E}{N_0} \quad (5-3-16)$$

$$d^2 = \|\underline{s}'_1\|^2 + \|\underline{s}'_2\|^2 - 2\rho \underline{s}'_1 \cdot \underline{s}'_2 = E_1 + E_2 - 2\rho \sqrt{E_1 E_2} \Big|_{E_1=E_2} = 2E(1-\rho)$$

در نتیجه داریم:

$$P_b = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}(1-\rho)\right) \begin{cases} \nearrow \rho=0 \rightarrow P_b = Q(\sqrt{\gamma_b}) \\ \searrow \rho=-1 \rightarrow P_b = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \end{cases} \quad (17-3-5)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود در بین مدولاتورهای باینری BPSK ( $\rho=-1$ ) از همه بهتر عمل می‌کند، و مدولاتور متعامد BFSK،  $3dB$  بدتر از BPSK عمل می‌نماید.

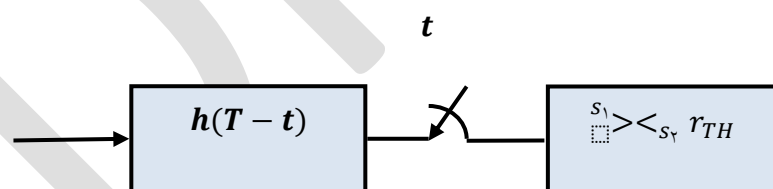
#### ۴-۵) مزیت مدولاتورهای غیرباینری نسبت به مدولاتورهای باینری:

در ادامه دلیل بکارگیری مدولاتورهای غیرباینری را، علی‌رغم سادگی فرستنده و گیرنده برای مدولاتورهای باینری، بررسی می‌کنیم. با توجه به رابطه گیرنده بهینه در (۱۷-۲-۵) داریم:

$$\int r(t) s_1(t) dt + \eta_1 > \int r(t) s_2(t) dt + \eta_2 \quad (1-4-5)$$

$$\Rightarrow \int r(t) (s_1(t) - s_2(t)) dt > \eta_2 - \eta_1$$

تعریف می‌کنیم:  $r_{Th} = \eta_2 - \eta_1$  و  $h(t) = s_1(t) - s_2(t)$ ، آنگاه ساختار گیرنده بهینه با استفاده از یک فیلتر منطبق بصورت زیر قابل پیاده‌سازی است:



شکل (۱۱-۵) - ساختار گیرنده بهینه باینری

برای سیگنالینگ‌های آنتی‌پودال و هم احتمال داریم:

$$s_1(t) = -s_2(t) \Rightarrow r_{Th} = 0 \quad (2-4-5)$$

حال می‌خواهیم دلیل استفاده از سیگنالینگ‌های غیر باینری را بررسی نمائیم. برای سیگنالینگ باینری در بهترین حالت می‌توان نوشت:

$$P_b = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \quad (3-4-5)$$

با توجه به این فرمول داریم:

$$P_b = 10^{-5} \rightarrow \gamma_b \approx 9.5 \text{ dB} \quad (4-4-5)$$

یعنی برای دسترسی به احتمال خطاهای کوچک به سیگنال به نویز بر بیت  $9.5 \text{ dB}$  احتیاج است. از طرفی طبق قضیه شانون برای ظرفیت کانال پیوسته می توان نوشت:

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 W} \right) \quad (5-4-5)$$

طبق قضیه شانون اگر نرخ ارسال کمتر از ظرفیت باشد ( $R_b < C$ )، آنگاه نحوه ارسال و کدینگ وجود دارد که برای آن احتمال خطا به سمت صفر می رود ( $P_e \rightarrow 0$ ).

اگر هیچ محدودیتی روی پهنای باند نداشته باشیم یعنی ( $W \rightarrow \infty$ )، چون  $\ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x$  داریم:

$$C_\infty = W \frac{\ln \left( 1 + \frac{P}{N_0 W} \right)}{\ln 2} = \frac{P}{N_0 \ln 2} \quad (6-4-5)$$

طبق قضیه شانون به ازای  $R < C$  احتمال خطا به اندازه دلخواه می تواند کوچک باشد، پس داریم:

$$R < C_\infty = \frac{P}{N_0 \ln 2} \Rightarrow \frac{P}{RN_0} > \ln 2 \quad (7-4-5)$$

از طرفی می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{P}{R} &= \frac{E/T}{\text{bit}/T} = \frac{E}{\text{bit}} = E_b \\ \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} &> \ln 2 \Rightarrow \gamma_b > -1.6 \text{ dB} \end{aligned} \quad (8-4-5)$$

یعنی به ازای  $-1.6 \text{ dB}$   $\gamma_b > -1.6 \text{ dB}$  احتمال خطا به سمت صفر می رود. ملاحظه می شود حدود  $11 \text{ dB}$  بین آنچه که قضیه شانون پیش بینی می کند و آنچه که توسط شکل موج های باینری قابل دسترسی است فاصله وجود دارد. لذا نیاز به بررسی شکل موج های غیرباینری است.

### 5-5) احتمال خطای مدولاتور متعامد M-ary هم احتمال و هم انرژی

برای این مدولاتور احتمال خطا را با استفاده از متغیر تصمیم گیری بدست می آوریم. چون سیگنال ها هم احتمال و هم انرژی هستند، گیرنده بهینه متغیر تصمیم گیری زیر را ماکزیمم می نماید:



$$R_m = \underline{r} \cdot \underline{s}_m \quad (1-5-5)$$

داریم:

$$P_e = \sum_{m=1}^M P_{e|m} P_m, \quad P_e = 1 - P_c \quad (2-5-5)$$

$$P_c = \sum_{m=1}^M P_{c|m} P_m$$

که  $P_m$  ها احتمال‌های پیشین هستند و  $P_{c|m}$  احتمال دریافت صحیح به شرط ارسال شکل موج  $m$  ام است. ابتدا احتمال دریافت صحیح را بدست می‌آوریم. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم سیگنال  $s_1(t)$  با نمایش برداری  $\underline{s}_1$  ارسال شده است. با این فرض مقادیر ممکن متغیر تصمیم‌گیری را بدست می‌آوریم. داریم:

$$\underline{r} = \underline{s}_1 + \underline{n}$$

$$\underline{s}_1 = [\sqrt{E_s} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (3-5-5)$$

$$\underline{n} = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_M]$$

با استفاده از (3-5-5) می‌توان نوشت:

$$\underline{r} = [\sqrt{E_s} + n_1 \ n_2 \ \dots \ n_M] \quad (4-5-5)$$

با استفاده از رابطه (4-5-5) برای متغیر تصمیم‌گیری داریم:

$$R_m = \underline{r} \cdot \underline{s}_m$$

$$R_1 = \underline{r} \cdot \underline{s}_1 = \sqrt{E_s} (\sqrt{E_s} + n_1) \quad (5-5-5)$$

$$R_m = \sqrt{E_s} n_m \quad m = 2, \dots, M$$

یک ضریب مثبت است و تاثیری در پروسه ماکزیمم کردن ندارد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$R_1 = (\sqrt{E_s} + n_1) \quad (6-5-5)$$

$$R_m = n_m \quad m = 2, \dots, M$$

با تعریف (6-5-5) داریم:

$$R_1 \sim N\left(\sqrt{E_s}, \frac{N_0}{2}\right) \quad (7-5-5)$$

$$R_m \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right) \quad m = 2, \dots, M$$

احتمال دریافت صحیح برابر است با:

$$P_{cl} = P[R_1 > R_2, \dots, R_1 > R_M | s_1 \text{ sent}] \quad (8-5-5)$$

اگر چه  $R_m$  ها مستقل از هم هستند، ولی اتفاق های  $R_1 > R_m, m=2, \dots, M$  به علت عامل مشترک  $n_1$  مستقل از هم نیستند. با استفاده از قضیه احتمال کل، اتفاق ها را مستقل می نماییم.

$$\begin{aligned} P_{cl} &= P[R_1 > R_2, \dots, R_1 > R_M | s_1 \text{ sent}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P[\sqrt{E_s} + n_1 > n_2, \dots, \sqrt{E_s} + n_1 > n_M | s_1 \text{ sent and } n_1 = n] p_{n_1}(n) dn \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod P[n_m < \sqrt{E_s} + n_1 | s_1 \text{ sent and } n_1 = n] p_{n_1}(n) dn \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( P[n_2 < \sqrt{E_s} + n_1 | s_1 \text{ sent and } n_1 = n] \right)^{M-1} p_{n_1}(n) dn \end{aligned} \quad (9-5-5)$$

چون  $R_m$  ها برای  $m=2, \dots, M$  دارای توزیع یکسان هستند، داریم:

$$P_{cl} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( P[n_2 < \sqrt{E_s} + n_1 | s_1 \text{ sent and } n_1 = n] \right)^{M-1} p_{n_1}(n) dn \quad (10-5-5)$$

از طرف دیگر می توان نوشت:

$$P[n_2 < \sqrt{E_s} + n_1 | s_1 \text{ sent and } n_1 = n] = 1 - Q\left(\frac{n + \sqrt{E_s}}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (11-5-5)$$

با جایگذاری (11-5-5) در (10-5-5) داریم:

$$\begin{aligned} P_e = P_{el} = 1 - P_{cl} &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - Q\left(\frac{n + \sqrt{E_s}}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]^{M-1} p_{n_1}(n) dn \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - \left[ 1 - Q\left(\frac{n + \sqrt{E_s}}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]^{M-1} \right) p_{n_1}(n) dn \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - \left[ 1 - Q\left(\frac{n + \sqrt{E_s}}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]^{M-1} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{N_0}} \right) dn \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - \left[ 1 - Q(x) \right]^{M-1} \right) e^{-\frac{1}{2} \left( x - \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \right)^2} dx, \quad x \triangleq \frac{n + \sqrt{E_s}}{\sqrt{N_0/2}} \end{aligned} \quad (12-5-5)$$

در ادامه احتمال خطا را بر حسب سیگنال به نویز بر بیت یعنی  $\gamma_b$  بیان می نماییم. می توان نوشت:

$$SNR \text{ per symbol} \triangleq \frac{E_s}{N_0} = \gamma_s$$

$$E_s = kE_b \quad M = 2^k \quad (13-5-5)$$

$$\Rightarrow \gamma_s = k\gamma_b$$

با استفاده از (13-5-5) و (12-5-5)، رابطه نهائی را بر حسب  $\gamma_b$  بصورت زیر می نویسیم:

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - [1 - Q(x)]^{M-1}) e^{-\frac{1}{2}(x - \sqrt{2k\gamma_b})^2} dx \quad (14-5-5)$$

حال به محاسبه احتمال خطا بر بیت از روی احتمال خطا بر سمبول می پردازیم. برای مدولاتور متعامد چون فواصل کلیه شکل موج ها از یک شکل موج داده شده یکسان است، احتمال اینکه به جای  $s_1$  هر یک از سمبل-

های دیگر به اشتباه آشکارسازی شود با یکدیگر برابر و مساوی  $\frac{P_e}{M-1} = \frac{P_e}{2^k-1}$  است. تعداد سمبل هائی که می-

توانند دقیقاً در  $n$  بیت از  $k$  بیت با  $s_1$  متفاوت باشند برابر است با  $\binom{k}{n}$ . با این تعاریف مقدار متوسط تعداد بیت

خطای آشکارسازی برابر می شود با:

$$\sum_{n=1}^k n \cdot \binom{k}{n} \frac{P_e}{M-1} \quad (15-5-5)$$

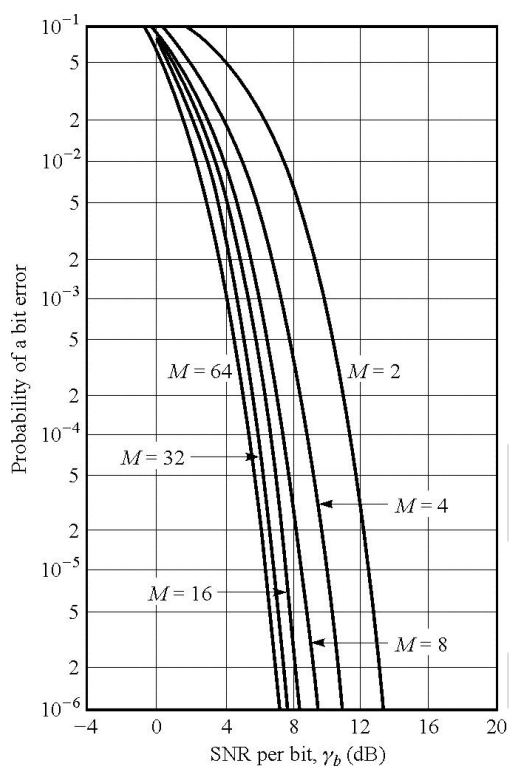
بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k n \cdot \binom{k}{n} \frac{P_e}{M-1} = \frac{1}{k} \frac{P_e}{M-1} \sum_{n=1}^k n \cdot \binom{k}{n} = \frac{1}{k} \frac{P_e}{M-1} (k2^{k-1}) \\ &= \frac{2^{k-1}}{2^k-1} P_e \approx \frac{1}{2} P_e \end{aligned} \quad (16-5-5)$$

در شکل (12-5) احتمال خطا بر بیت بر حسب  $\gamma_b$  ترسیم شده است. همانگونه که ملاحظه می شود با افزایش

$M$ ،  $\gamma_b$  مورد نیاز جهت دسترسی به یک احتمال خطا بر بیت معین کاهش می یابد و در حالت حدی به مقداری

که در قضیه شانون پیش بینی شده نزدیک می شویم.



شکل (۱۲-۵) - نمودار احتمال خطا بر بیت بر حسب  $\gamma_b$  برای سیگنالینگ متعامد

### ۶-۵) احتمال خطای سیگنالینگ M تایی Biorthogonal هم احتمال

این سیگنالینگ از نوع هم انرژی است. فرض کنید که سیگنال‌های  $s_1(t), \dots, s_N(t)$  با نمایش‌های برداری  $s_1, \dots, s_N$  سیگنال‌های متعامد باشند طوری که  $N = M/2$ . حال  $N = M/2$  سیگنال دیگر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_m(t) = -s_{N+m}(t), \quad m = 1, \dots, M/2 \quad (۱۷-۵-۵)$$

حال با توجه به اینکه سیگنال‌ها هم انرژی و هم احتمال هستند لذا تصمیم‌گیری بهینه با معیار هم‌بستگی بیان خواهد شد و داریم:

$$\begin{aligned} C(\underline{r}, \underline{s}_m) &= R_m = \underline{r} \cdot \underline{s}_m, \quad m=1, \dots, M/2 \\ R_{N+m} &= \underline{r} \cdot \underline{s}_{N+m} = \underline{r} \cdot (-\underline{s}_m) = -R_m, \quad m=1, \dots, M/2 \end{aligned} \quad (18-5-5)$$

برای آشکارسازی ابتدا  $R_m$  را برای  $m=1, \dots, N$  بدست آورده و بررسی می‌کنیم که به ازای چه مقدار  $m$ ،  $|R_m|$  ماکزیمم می‌گردد و سپس باید تصمیم‌گیری کرد که  $s_m(t)$  ارسال شده است یا  $-s_m(t)$  و اگر  $R_m > 0$ ،  $s_m(t)$  و در غیر این صورت  $-s_m(t)$  آشکارسازی می‌شود.

همانگونه که قبلا اشاره شد، اگر مجموعه فواصل بقیه سیگنال‌ها نسبت به یک سیگنال خاص مستقل از سیگنال فوق و ثابت باشد و تابع چگالی مشترک مولفه‌های بردار نویز با دوران تغییر نکند، مجموعه شکل موج‌ها متقارن خواهند بود و احتمال خطای شرطی با احتمال خطای غیر شرطی برابر هستند. برای مدولاسیون Bi-orthogonal مانند مدولاسیون متعامد، یک مجموعه شکل موج متقارن خواهیم داشت. لذا برای محاسبه احتمال خطا کافی است احتمال خطای شرطی را بدست آوریم. جهت محاسبه احتمال خطا فرض می‌کنیم  $s_1(t)$  با نمایش برداری  $\underline{s}_1$  ارسال شده است. در اینصورت مقدار متغیر تصمیم‌گیری را به ازای  $\underline{s}_m$  های متفاوت بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} R_m &= \underline{r} \cdot \underline{s}_m \\ \underline{r} &= [\sqrt{E_s} + n_1, \dots, n_N] \\ R_1 &= \sqrt{E_s} (\sqrt{E_s} + n_1) \\ R_m &= \sqrt{E_s} n_m, \quad m=2, \dots, M/2 \end{aligned} \quad (19-5-5)$$

$R_m$  ها به ازای  $2 \leq m \leq M/2$  از هم مستقل هستند. همانند حالت متعامد ضریب  $\sqrt{E_s}$  را حذف می‌کنیم زیرا یک ضریب مثبت است و تاثیری در پروسه ماکزیمم کردن ندارد. بنابراین برای احتمال دریافت صحیح به شرط ارسال  $\underline{s}_1$  داریم:

$$P_c = P_{c1} = P[|R_2| < |R_1|, \dots, |R_{M/2}| < |R_1|, R_1 > 0] \quad (20-5-5)$$

همانند حالت متعامد با شرطی کردن، اتفاق‌های فوق را مستقل می‌نماییم. مجددا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 P_{c|l} &= \int_0^{\infty} P[|R_2| < r_1, \dots, |R_{M/2}| < r_1] p(r_1) dr_1 \\
 &= \int_0^{\infty} P[|R_2| < r_1] \dots P[|R_{M/2}| < r_1] p(r_1) dr_1 \quad (21-5-5) \\
 &= \int_0^{\infty} (P[|R_2| < r_1])^{M/2-1} p(r_1) dr_1
 \end{aligned}$$

با توجه به (19-5-5) (البته با حذف ضریب  $(\sqrt{E_s})$ ،  $R_1$  یک متغیر گوسی با میانگین  $\sqrt{E_s}$  و  $R_m$  ها،  $m=2, \dots, M/2$ ، متغیرهای گوسی با توزیع یکسان و با میانگین صفر هستند. با استفاده از (21-5-5) می توان نوشت:

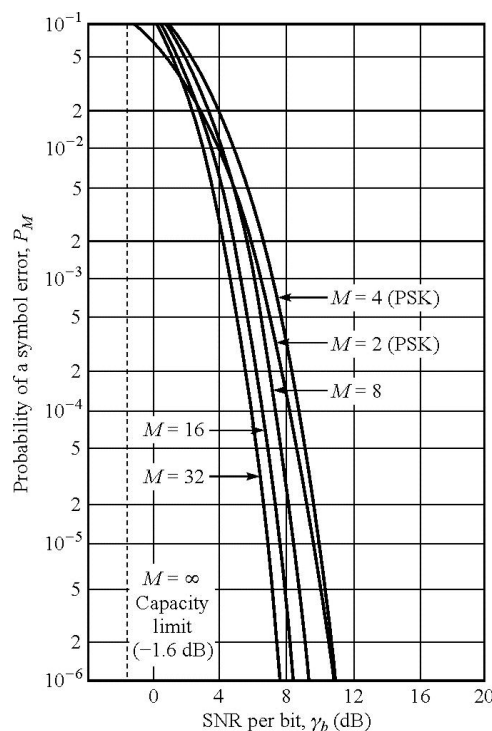
$$P_c = P_{c|l} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - Q\left(\frac{r_1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]^{M/2-1} p(r_1) dr_1 \quad (22-5-5)$$

با تغییر متغیر همانند آنچه در (12-5-5) برای سیگنالینگ متعامد بدست آمد، می توان روابط را ساده کرد، اما در آخر رابطه بسته بدست نمی آید. در شکل (13-5) احتمال خطا بر سمبول،  $P_e = 1 - P_c$ ، بر حسب  $\gamma_b$  ترسیم شده است.

می توان از رابطه احتمال خطای مدولاتورهای متعامد استفاده کرد و احتمال خطای مدولاتور simplex را بدست آورد. در مدولاتور simplex فاصله و وضعیت نسبی شکل موجها نسبت به شکل موجهای متعامد تغییر نمی کند، فقط انرژی آنها متفاوت است و داریم:

$$E_{s,orthogonal} = \frac{M}{M-1} E_{s,simplex} \Rightarrow \gamma_{b,orthogonal} = \frac{M}{M-1} \gamma_{b,simplex} \quad (23-5-5)$$

بنابراین کافی است در رابطه احتمال خطای مدولاتور متعامد که در (14-5-5) بدست آمد، به جای  $\gamma_b$ ،  $\frac{M}{M-1} \gamma_b$  قرار دهیم تا رابطه احتمال خطای مربوط به مدولاتور simplex بدست آید.



شکل (۵-۱۳) - نمودار احتمال خطا بر سمبول بر حسب  $\gamma_b$  برای سیگنالینگ Biorthogonal

در ادامه نشان می‌دهیم که با بکارگیری شکل موج‌های متعامد می‌توان در حالت حدی به آنچه که در قضیه شانون پیش بینی شد رسید. از آنجائی که فرمول احتمال خطا برای شکل موج‌های متعامد به فرم بسته نیست و باید بصورت عددی محاسبه شود، ابتدا باند بالائی احتمال خطا را برای مدولاتور فوق محاسبه می‌کنیم. یکی از باندهای بالا برای محاسبه احتمال خطای هر مدولاتور دلخواه باند اجتماع است.

### Union Bound (۷-۵) باند اجتماع

می‌توان از روی احتمال خطای ارسال باینری، باند بالای احتمال خطا را برای هر مدولاتور دلخواه بدست آورد. احتمال خطای زوجی،  $P_{m \rightarrow m'}$ ، را به این صورت تعریف می‌کنیم که سیگنال  $\underline{s}_m$  ارسال شده و به اشتباه  $\underline{s}_{m'}$  را دریافت کنیم ( $D_{m'} =$  اتفاق خطا در یک سیگنالینگ باینری بین سیگنال‌های  $\underline{s}_m$  و  $\underline{s}_{m'}$ ). آنگاه داریم:

$$P_{e|m} = P[r \in \bigcup_{\substack{m'=1 \\ m' \neq m}}^M D_{m'}, m' \neq m] \leq \sum_{\substack{m'=1 \\ m' \neq m}}^M P[r \in D_{m'}] = \sum_{\substack{m'=1 \\ m' \neq m}}^M P_{m \rightarrow m'} \quad (1-7-5)$$

که برای کانال AWGN رابطه زیر بدست می آید:

$$P_{m \rightarrow m'} = Q\left(\frac{d_{mm'}}{\sqrt{2N_0}}\right), \quad d_{mm'}^2 = \|\underline{s}_m - \underline{s}_{m'}\|^2 \quad (2-7-5)$$

بنابراین با استفاده از (1-7-5) و (2-7-5) داریم:

$$P_e = \sum P_m P_{e|m} \leq \sum P_m \sum_{m \neq m'} Q\left(\frac{d_{mm'}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \sum_{m \neq m'} Q\left(\frac{d_{mm'}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (3-7-5)$$

در SNRهای بالا  $d_{\min}$  (مینیم فاصله بین شکل موجهای مدولاتور) تعیین کننده است و احتمال خطا تقریباً

$$\text{برابر است با } Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right).$$

در ادامه باند بالائی احتمال خطا را برای شکل موجهای متعامد با استفاده از باند اجتماع بدست می آوریم. در ارسال متعامد فاصله شکل موجها با هم برابر است. یعنی:

$$d_{mm'} = \sqrt{2E_s}, \quad m' \neq m \quad (4-7-5)$$

بنابراین باند اجتماع به صورت زیر در می آید:

$$P_e \leq \sum_{m' \neq m} Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{4N_0/2}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q(\sqrt{k\gamma_b}) \quad (5-7-5)$$

اگر از نامساوی زیر برای تابع  $Q$  استفاده کنیم،

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (6-7-5)$$

می توان نوشت:

$$\Rightarrow P_e \leq \frac{M-1}{2} e^{-\frac{E_s}{2N_0}} < 2^k e^{-\frac{k\gamma_b}{2}} = e^{k \ln 2} e^{-\frac{k\gamma_b}{2}} = e^{-\frac{k}{2}(\gamma_b - 2 \ln 2)} \quad (7-7-5)$$

با استفاده از این فرمول می توان ملاحظه کرد که:

$$\left. \begin{array}{l} \text{if } \gamma_b - 2 \ln 2 > 0 \text{ or } \gamma_b > 2 \ln 2 = 1.4 \text{ dB} \\ k \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow P_e \rightarrow 0 \quad (8-7-5)$$



البته همانطور که مشخص است باند اجتماع باند خیلی مناسبی نیست. می‌توان باند محکم‌تری را برای ارسال متعامد بدست آورد. اما همین باند ساده نیز نشان می‌دهد که اگر  $\gamma_b > 1.4dB$  باشد، با استفاده از ارسال متعامد می‌توان به احتمال خطای صفر رسید. در ادامه باند محکم‌تری را برای احتمال خطای ارسال متعامد بدست می‌آوریم. با استفاده از رابطه احتمال خطای سیگنالینگ متعامد در (۵-۵-۱۲) داریم:

$$P_{e,orth} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - (1 - Q(x))^{M-1}\right) e^{-\frac{1}{2}(x - \sqrt{2k\gamma_b})^2} dx \quad (9-7-5)$$

برای ادامه محاسبه، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$1 - (1 - Q(x))^{M-1} = 1 - \left(1 - (M-1)Q(x) + \binom{M-1}{2}Q^2(x) + \dots\right) \quad (10-7-5)$$

$$\leq (M-1)Q(x) \leq (M-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

اگر رابطه (۱۰-۷-۵) را در معادله (۹-۷-۵) قرار دهیم، دوباره به باند اجتماع می‌رسیم. علت محکم نبودن باند اجتماع برای مثال فوق این است که به ازای  $M$  های بزرگ و  $x$  های کوچک سمت راست نامساوی بزرگتر از یک است در حالیکه می‌دانیم سمت چپ نامساوی همواره کوچکتر از یک می‌باشد. لذا می‌توان محدوده انتگرال را به دو بازه تقسیم کرد و در بازه‌ای که سمت راست نامساوی (۱۰-۷-۵) کوچکتر از یک است از آن و در غیر این صورت از باند بالائی ۱ برای  $1 - (1 - Q(x))^{M-1}$  استفاده نمود. در آنصورت می‌توان نشان داد برای مقادیر  $\gamma_b \leq 4 \ln 2$  می‌توان باند بسیار بهتر زیر را بدست آورد:

$$P_e \leq 2e^{-k(\sqrt{\gamma_b} - \sqrt{\ln 2})^2} \quad (11-7-5)$$

با استفاده از این باند می‌توان مشاهده نمود که کافی است  $\gamma_b > \ln 2 = -1.69dB$  باشد تا اگر  $k \rightarrow \infty$ ، احتمال خطا به سمت صفر میل کند که همان حد پائینی شانون است.

سیگنالینگ‌های متعامد از نظر انرژی به صرفه هستند، اما از نظر پهنای باند کارا نیستند. برای نشان دادن این موضوع کارایی طیفی (BE(Bandwidth Efficiency))، طبق تعریف نرخ بیت ارسالی در واحد پهنای باند، را برای این مدولاتور بدست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که فاصله فرکانسی بین فرکانس‌های مجاور در شکل موج‌های

ارسالی  $\frac{1}{2T}$  است، بنابراین کل پهنای باند مورد استفاده برای این سیگنالینگ  $\frac{M}{2T}$  می‌باشد. از اینرو برای BE می‌توان نوشت:

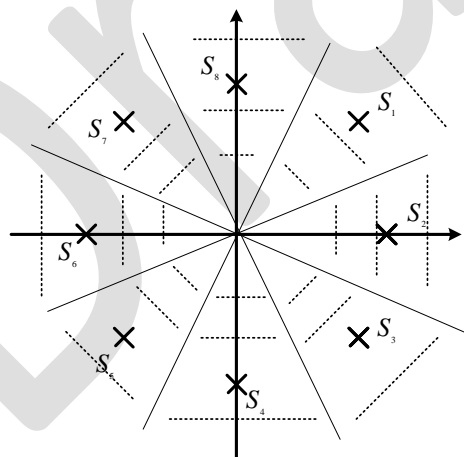
$$BE_{Orth} \triangleq \frac{R}{W} = \frac{\frac{k}{T}}{\frac{M}{2T}} = \frac{2k}{M} = \frac{2 \log_2 M}{M} \quad (۱۲-۷-۵)$$

لذا  $BE_{Orth} < 1$  و  $BE_{Orth} \rightarrow 0$   $\Rightarrow M \rightarrow \infty$ . پس مدولاسیون متعامد از لحاظ پهنای باند کارا نمی‌باشد. در بخش بعد به سراغ مدولاسیون‌هایی می‌رویم که بر عکس مدولاسیون‌های متعامد از نظر پهنای باند کارا هستند.

### ۸-۵) مدولاسیون‌های کارا از لحاظ پهنای باند

#### ۱- M-PSK

در شکل زیر مجموعه نمایش‌های برداری شکل موج‌ها و نواحی تصمیم‌گیری مربوطه به M-PSK برای  $M=8$  ملاحظه می‌شود. فرض شده است که شکل موج‌ها هم احتمال هستند.



شکل (۱۴-۵) - نمایش برداری شکل موج‌های ۸-PSK و نواحی تصمیم‌گیری مربوطه

برای محاسبه احتمال خطا، ابتدا تصمیم‌گیری بهینه را برای این مدولاتور به فرم ساده‌تر بدست می‌آوریم. برای شکل موج‌های هم احتمال و هم انرژی متغییر تصمیم‌گیری بهینه بصورت زیر بیان می‌گردد.

$$R_m = r \cdot s_m = |r| |s_m| \cdot \cos(\theta_m) \quad (۱-۸-۵)$$

چون سیگنال‌ها هم انرژی هستند، داریم:

$$\max_m R_m = \max_m \cos(\theta_m) = \min_m |\theta_m| \quad (2-8-5)$$

که  $\theta_m$  زاویه بین بردار دریافتی و بردار ارسالی است. برای این مدولاتور، گیرنده بهینه به این صورت عمل می-کند که زاویه بردار دریافتی را محاسبه کرده و بررسی می-کند که به کدام یک از  $M$  زاویه ارسالی ممکن نزدیکتر است و سپس آنرا بعنوان زاویه ارسالی آشکارسازی می-نماید. زاویه بردار دریافتی برابر است با:

$$\underline{r} = [r_1 \quad r_2] \quad \Theta = \angle r = \tan^{-1} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (3-8-5)$$

اگر فرض کنیم که سیگنال‌های ارسالی هم احتمال هستند، می‌توان نوشت:

$$P_e = P_{e1} = 1 - P_{c1} \quad (4-8-5)$$

همانگونه که در شکل (5-12) نیز ملاحظه می‌شود فاصله بین زاویه‌های مجاور  $\frac{2\pi}{M}$  است. لذا به شرط ارسال سیگنال  $s_1$  (فاز صفر) احتمال دریافت صحیح برابر است با:

$$P_{c1} = P[|\theta| < \frac{\pi}{M}] = \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} p_{\Theta}(\theta) d\theta, \quad \Theta = \tan^{-1} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (5-8-5)$$

همانگونه که در فصل ۲ نشان داده شد، با انتخاب پایه‌های اورتونرمال بصورت زیر

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (6-8-5)$$

نمایش برداری شکل موج‌ها برابر است با:

$$\underline{s}_m = \left[ \sqrt{E_s} \cos(\theta_m) \quad \sqrt{E_s} \sin(\theta_m) \right] \quad E_s \triangleq \frac{E_g}{2} \quad (7-8-5)$$

$$\theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{M}$$

بنابراین درگیرنده اگر سیگنال‌ها را بصورت برداری نمایش دهیم، با فرض ارسال  $s_1$  می‌توان نوشت:

$$\underline{r} = \underline{s}_1 + \underline{n}, \quad \underline{n} = (n_1, n_2), \quad n_i \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right) \quad (8-8-5)$$

$$\underline{s}_1 = (\sqrt{E_s}, 0), \quad r_1 = \sqrt{E_s} + n_1 \quad r_2 = n_2$$

با توجه به استقلال مولفه‌های نویز در راستای بردارهای پایه، تابع توزیع زیر را می‌توان بدست آورد:

$$p(r_1, r_2) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{(r_1 - \sqrt{E_s})^2}{N_0} - \frac{r_2^2}{N_0}} \quad (9-8-5)$$

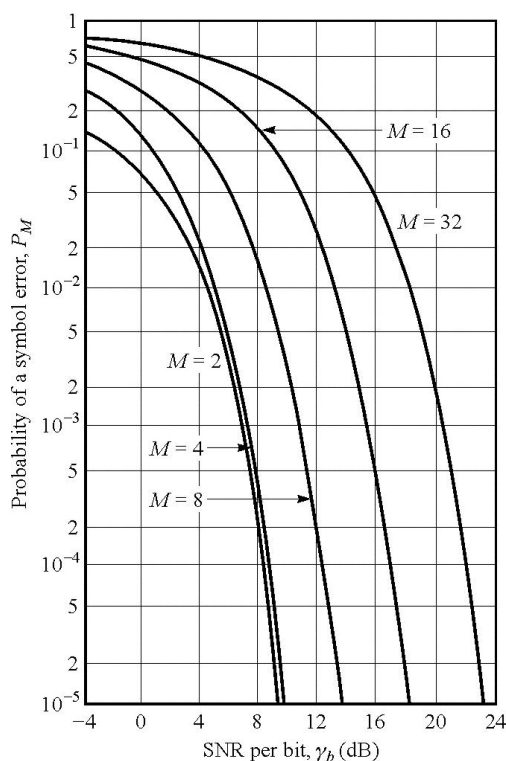
با استفاده از فرمول ژاکوبین و تعریف متغیر کمکی  $V = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ ، تابع چگالی مشترک  $r$  و  $\Theta$  ( فاز بردار دریافتی که در (3-8-5) داده شده است) از (9-8-5) بصورت زیر بدست می آید:

$$p_{V,\Theta}(v, \theta) = \frac{v}{\pi N_0} e^{-\frac{(v^2 + E_s - 2v\sqrt{E_s} \cos \theta)}{N_0}}, \quad v = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (10-8-5)$$

با انتگرال گیری از تابع بالا داریم:

$$p_\Theta(\theta) = \int_0^\infty p_{V,\Theta}(v, \theta) dv = \frac{1}{2\pi} e^{-2\gamma_s \sin^2(\theta)} \int_0^\infty v e^{-\frac{1}{2}(v - \sqrt{2}\gamma_s \cos \theta)^2} dv \quad (11-8-5)$$

با جایگذاری (11-8-5) در (5-8-5)، می توان احتمال دریافت صحیح و از آنجا احتمال خطا را بدست آورد. اگر به جای  $\gamma_s$  آنرا بر حسب  $\gamma_b$ ،  $\gamma_s = k\gamma_b$ ، بیان کنیم، احتمال خطا بر حسب  $\gamma_b$  بدست می آید. رابطه احتمال خطا به فرم بسته نیست و باید آنرا بصورت عددی محاسبه کرد. در شکل (5-15) منحنی احتمال خطا بر سمبول بر حسب  $\gamma_b$  به ازای  $M$  های متفاوت ترسیم شده است. همانگونه که ملاحظه می شود با افزایش  $M$ ، به ازای احتمال خطای معین،  $\gamma_b$  مورد نیاز افزایش می یابد.



شکل (۵-۱۵) - نمودار احتمال خطا برسمبول بر حسب  $\gamma_b$  برای سیگنالینگ PSK

در ادامه نشان می‌دهیم برای  $M$  های بزرگ با دو برابر کردن  $M$ ،  $\gamma_b$  مورد نیاز  $6dB$  افزایش می‌یابد. با توجه به رابطه (۵-۸-۱۱) و با تغییر متغیر  $v \triangleq r - \sqrt{2\gamma_s} \cos(\theta)$  داریم:

$$p_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma_s} \left( 1 + \sqrt{4\pi\gamma_s} \cos(\theta) e^{\gamma_s \cos^2(\theta)} \left( 1 - Q\left(\sqrt{4\gamma_s} \cos(\theta)\right) \right) \right) \quad (۵-۸-۱۲)$$

تابع  $Q$  را در مقادیر بالای متغیر آن می‌توان بصورت زیر تقریب زد:

$$Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \gg 1 \quad (۵-۸-۱۳)$$

با تقریب (۵-۸-۱۳)، رابطه (۵-۸-۱۲) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$p_{\Theta}(\theta) \approx \sqrt{\frac{\gamma_s}{\pi}} \cos(\theta) e^{-\gamma_s \sin^2(\theta)} \quad (۵-۸-۱۴)$$

با جایگذاری  $p_{\Theta}(\theta)$  در رابطه احتمال دریافت صحیح (۵-۸-۵)، و تغییر متغیر  $u \triangleq \sqrt{\gamma_s} \sin \theta$  می‌توان نوشت:

$$P_e \approx 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sqrt{\frac{\gamma_s}{\pi}} \cos(\theta) e^{-\gamma_s \sin^2(\theta)} d\theta \quad (15-8-5)$$

$$\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{2\gamma_s} \sin(\pi/M)}^{\infty} e^{-u^2} du \approx 2Q\left(\sqrt{2\gamma_s} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

برای  $M$  های بزرگ داریم:  $\sin \frac{\pi}{M} \approx \frac{\pi}{M}$ . بنابراین اگر  $M$  دوبرابر شود، برای اینکه متغیر  $Q$  تغییر نکند (لذا احتمال خطا تغییر نکند)، باید  $\gamma_s$  را چهار برابر کرد. به ازای هر دو برابر کردن  $M$ ،  $k$  یک واحد افزایش می‌یابد. از طرفی داریم  $\gamma_s = k\gamma_b$ . برای  $k$ های بزرگ می‌توان نوشت:  $k \approx k+1$ . بنابراین با تقریب اگر  $\gamma_s$  را چهار برابر کنیم،  $\gamma_b$  چهار برابر می‌شود. لذا مدولاسیون فوق از لحاظ انرژی کارا نیست. نشان می‌دهیم که این مدولاسیون از لحاظ پهنای باند کارا است. برای این منظور  $BE$  را برای این مدولاتور بدست می‌آوریم. در صورت بکارگیری ریت ناپکوئیست داریم:  $W \approx \frac{1}{T}$ . بنابراین برای  $BE$  می‌توان نوشت:

$$BE_{PSK} = \frac{R}{W} = \frac{T}{\frac{1}{T}} = k = \log_2 M \quad (16-8-5)$$

لذا  $BE_{PSK} > 1$  و  $BE_{PSK} \rightarrow \infty \Rightarrow M \rightarrow \infty$ . پس از لحاظ پهنای باند مدولاسیون  $M$ -PSK کارا است.

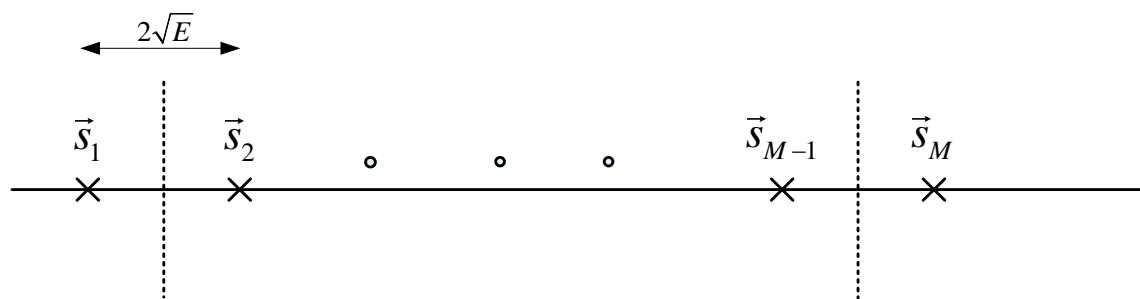
## ۲- مدولاتور PAM:

همانگونه که اشاره شد، شکل موج ارسالی برای این مدولاتور بصورت زیر است:

$$s_m(t) = A_m g(t) \cos(2\pi f_c t) \quad A_m = (2m-1-M)$$

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \frac{E_g}{2} \triangleq E \quad s_m = A_m \sqrt{E} \quad (17-8-5)$$

نمایش برداری شکل موج‌ها در شکل زیر آورده شده است:



شکل (۱۶-۵) - نمایش برداری شکل موج‌ها در مدولاسیون PAM

اگر فرض کنیم  $i$  یک سیگنال داخلی در شکل (۱۶-۵) باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$P_{e/i} = P[|n| > \sqrt{E}] = 2Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (18-8-5)$$

و اگر  $o$  یکی از سیگنال‌های کناری باشد، آنگاه داریم:

$$P_{e/o} = P[n > \sqrt{E}] = Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (19-8-5)$$

بعد از جایگذاری روابط (۱۸-۸-۵) و (۱۹-۸-۵) در رابطه احتمال خطا بدست می‌آوریم که:

$$P_e = 2 \frac{(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) \quad (20-8-5)$$

از طرفی برای انرژی متوسط داریم  $E_{avg} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \|s_m\|^2 = \frac{M^2-1}{3} E$ . پس در نهایت می‌توان نوشت:

$$P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \gamma_{avg}}\right), \quad \gamma_{avg} = \frac{E_{avg}}{N_0} = k\gamma_{bavg} \quad (21-8-5)$$

مشابه حالت  $M-PSK$ ، با دو برابر کردن  $M$ ، برای اینکه احتمال خطا تغییر نکند، لازم است که  $\gamma_{avg}$  یا تقریباً  $\gamma_{bavg}$  چهار برابر گردد. پس این مدولاتور نیز از لحاظ انرژی کارا نیست. حال به محاسبه BE می‌پردازیم. در

صورت بکارگیری ریت نایکوئیست ( $W = \frac{1}{T}$ ) داریم:

$$BE_{PAM} = \frac{R}{W} = \frac{T}{\frac{1}{T}} = k = \log_2 M \quad (22-8-5)$$

که دقیقا برابر است با مقدار مذکور برای PSK و لذا این مدولاسیون هم از لحاظ پهنای باند کاراست. لازم به ذکر است که اگر از ارسال SSB به جای DSB استفاده کنیم کارآیی طیفی برای این مدولاتور دو برابر خواهد شد.

### ۳- مدولاتور QAM:

برای این مدولاتور داشتیم:

$$s_m(t) = A_{mi}g(t)\cos(2\pi f_c t) - A_{mq}g(t)\sin(2\pi f_c t) \quad (۲۳-۸-۵)$$

با توجه به پایه‌های زیر:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\cos(2\pi f_c t) \quad (۲۴-۸-۵)$$

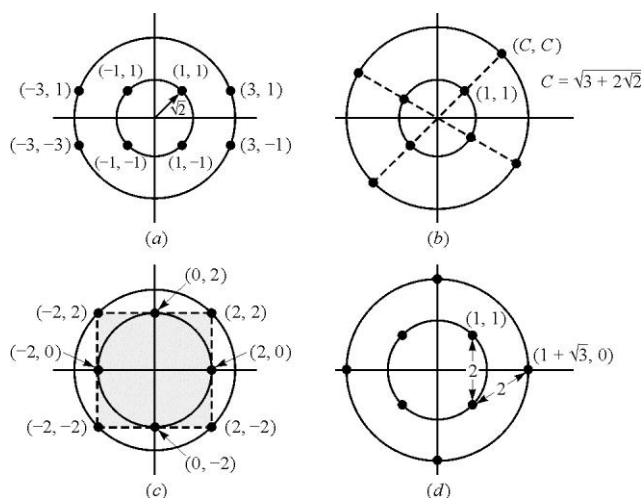
$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\sin(2\pi f_c t)$$

نمایش برداری به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\underline{s}_m = (A_{mi}\sqrt{E}, A_{mq}\sqrt{E}) \quad (۲۵-۸-۵)$$

در شکل (۱۷-۵)، چند مجموعه شکل موج‌های مختلف برای QAM با  $M=8$  ارائه شده است. همانگونه که قبلا اشاره شد در نسبت سیگنال به نویز بر بیت متوسط و بالا، احتمال خطا توسط مینیمم فاصله بین شکل موج‌ها تعیین می‌گردد. لذا مجموعه شکل موجی برای QAM بهینه است که به ازای متوسط انرژی داده شده مینیمم فاصله آن ماکزیمم باشد. در شکل (۱۷-۵)، مینیمم فاصله در تمام مجموعه شکل موج‌ها برابر است. با محاسبه متوسط انرژی این مجموعه‌ها، می‌توان مشاهده کرد که مجموعه شکل موج (d)، نسبت به دو مجموعه a و b،  $1.6dB$  نسبت به (c) انرژی کمتری مصرف می‌کند. پس در این شکل، مجموعه (d) دارای بهترین عملکرد است، زیرا به ازای مینیمم فاصله ثابت دارای کمترین متوسط انرژی است. جهت سادگی مدولاتور و دمدولاتور، معمولا برای QAM از مجموعه شکل موج مستطیلی استفاده می‌شود که در شکل (۱۷-۵) آمده است.





شکل (۵-۱۷) - چندین مجموعه شکل موج برای QAM با  $M=8$

در حالی که  $M = 2^k$  و  $k$  زوج باشد، شکل موجهای QAM با مجموعه مستطیلی را می توان دو سیگنالینگ  $\sqrt{M}$ -PAM در نظر گرفت که بصورت موازی توسط مولفه های متعامد ارسال می شوند. برای احتمال خطا در هر مولفه داریم:

$$P_{e,\sqrt{M}\text{-PAM}} = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left( \sqrt{\frac{6}{M-1}} \gamma_{avg,PAM} \right) \quad (۵-۸-۲۶)$$

که در این رابطه

$$\gamma_{avg,PAM} = \frac{1}{2} \gamma_{avg} \quad (۵-۸-۲۷)$$

بنابراین برای احتمال خطای مدولاتور می توان نوشت:

$$P_{e,M\text{-QAM}} = 1 - P_{c,M\text{-QAM}} = 1 - (P_{e,\sqrt{M}\text{-PAM}})^2 = 1 - \left( 1 - 2 \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} Q \left( \sqrt{\frac{6}{M-1}} \frac{1}{2} \gamma_{avg} \right) \right)^2 \quad (۵-۸-۲۸)$$

$$\leq 4Q \left( \sqrt{\frac{3}{M-1}} \gamma_{avg} \right)$$

برای  $M$  های فرد نیز چنین رابطه ای را می توان ثابت کرد.

همانطور که ملاحظه می شود، برای QAM با سیگنالینگ حتی غیر بهینه مستطیلی، بر خلاف PSK و PAM، با دو برابر کردن  $M$  پهنای پهنای پرده شده  $3dB$  است (برای اینکه احتمال خطا تغییر نکند). برای مقایسه QAM و

PSK، باید متغیرهای تابع Q آنها را با هم مقایسه کرد. اگر  $R_M$  را بهبود عملکرد سیستم QAM بر PSK در نظر بگیریم، از روابط (۱۵-۸-۵) و (۲۱-۸-۵) داریم:

$$R_M = \frac{6}{M-1} \gamma_{avg} = \frac{3}{2(M-1) \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \quad (۲۹-۸-۵)$$

در جدول (۱-۵) این عدد به ازای مقادیر متفاوت M بدست آمده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود PSK در مقایسه با QAM به شدت بدتر عمل می‌نماید. به همین دلیل از مدولاتور PSK با M های بیشتر از ۳۲ یا ۶۴ استفاده نمی‌شود.

جدول (۱-۵) - نسبت بهبود عملکرد سیستم QAM بر PSK

M	$10 \log R_m$
۸	۱.۶۵
۱۶	۴.۲۰
۳۲	۷.۰۲
۶۴	۹.۹۵

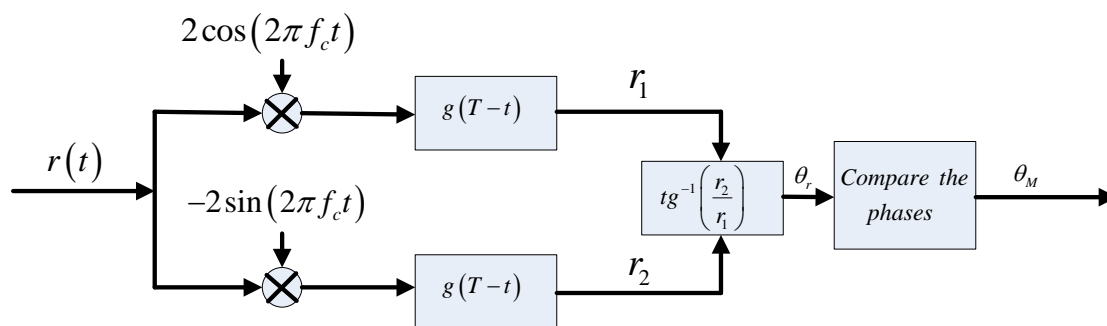
### ۹-۵) تخمین شیفت فازی

سیگنالینگ PSK را با سیگنال‌های پایه زیر در نظر بگیرید:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (۱-۹-۵)$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t)$$

با توجه به رابطه (۳-۸-۵)، آشکارسازی به نحوه زیر صورت می‌گیرد:



شکل (۵-۱۸) - گیرنده مدولاتور PSK

گیرنده شکل (۵-۱۸) با این فرض بدست آمده است که شیفت فازی کانال وجود ندارد یا بدرستی تخمین زده شده و در ورودی گیرنده اثر آن حذف شده است. براحتی می توان دید که در پروسه تخمین تاخیر کانال در گیرنده، خطای در حدود ۱ نانو ثانیه در فرکانس های بالا می تواند خطای فاز بزرگی را ایجاد کند که اگر اطلاعات در فاز باشد و خطای فاز فوق جبران نشود، اطلاعات به طور کامل از بین می رود. در این گیرنده، لازم است که شیفت فازی ایجاد شده در کانال با دقت تخمین زده شود. روشهای تخمین فاز بصورت زیر است:

#### روشهای تخمین فاز:

۱. فرستادن pilot: بهترین روش تخمین فاز است اما باید قسمتی از انرژی ارسالی را به pilot اختصاص داد. در نسل دوم و سوم موبایل از این روش استفاده می شود.
۲. تخمین فاز با استفاده از سیگنال دریافتی مدوله شده: اگر سیگنال ارسالی M-PSK را بصورت زیر در نظر بگیریم، داریم:

$$s_m(t) = g(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_m - \varphi) \quad \theta_m = \frac{2\pi}{M}(m-1) \quad (۵-۹-۲)$$

اگر  $s_m(t)$  را به توان M برسانیم و حامل حول فرکانس  $Mf_c$  را فیلتر کنیم، حاوی داده ارسالی نخواهد بود و فاز آن اطلاعات شیفت فازی کانال را خواهد داشت که با استفاده از PLL می توان فاز این مولفه را تخمین زد. تخمین شیفت فازی کانال با تقسیم خروجی PLL بر M بدست می آید. مشکل این روش این است که در فاز تخمینی، ابهامی به اندازه مضارب  $\frac{2\pi}{M}$  خواهیم داشت. برای مقابله با مشکل ابهام فاز از مدولاسیون های تفاضلی استفاده می شود.

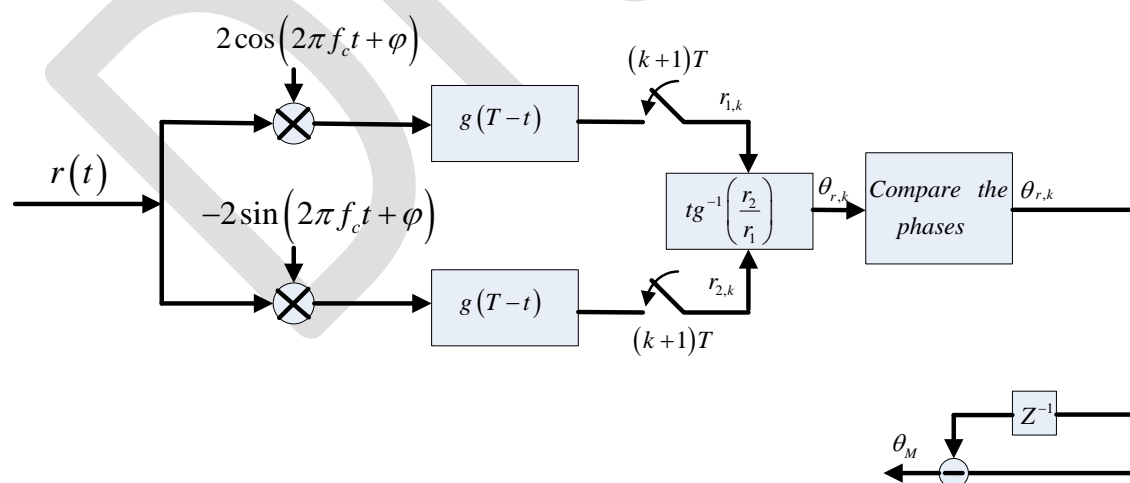
### مدولاسیون تفاضلی PSK      Differentiating-Coded PSK

در این روش به جای اینکه داده، فاز شکل موج ارسالی را مدوله کند، تفاضل فاز ارسالی فعلی و ارسال قبلی را مدوله می‌نماید. بعنوان مثال برای فاصله سیگنالینگ  $k$ ام فاز ارسالی در دو روش QPSK معمولی و QPSK تفاضلی به قرار زیر است:

4 - PSK		4 - Differential coded PSK	
data	$\theta_k$	data	$\theta_k$
00	$\rightarrow 0$	00	$\rightarrow 0 + \theta_{k-1}$
01	$\rightarrow \pi / 2$	00	$\rightarrow \pi / 2 + \theta_{k-1}$
10	$\rightarrow \pi$	00	$\rightarrow \pi + \theta_{k-1}$
11	$\rightarrow 3\pi / 2$	00	$\rightarrow 3\pi / 2 + \theta_{k-1}$

(۳-۹-۵)

که در آن  $\theta_{k-1}$  فاز شکل موج ارسالی در فاصله سیگنالینگ  $k-1$ ام است. برای چنین مدولاتوری می‌توان از گیرنده زیر استفاده نمود. این گیرنده را آشکارساز هم‌دوس برای مدولاتور Differentially-Coded PSK می‌نامند که در آن  $\theta_{r,k}$  تخمین فاز دریافتی در فاصله سیگنالینگ  $k$ ام و  $\hat{\varphi}$  تخمینی از شیفت فازی کانال می‌باشد که می‌تواند دارای ابهام فاز باشد.



شکل (۱۹-۵) - آشکارساز هم‌دوس برای سیستم Differentially-Coded PSK

در مثال زیر تفاوت کدکننده‌های معمولی و تفاضلی را مشاهده می‌کنید.

۱- کد کننده معمولی:

binary sequence  $\rightarrow 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$

BPSK coded seq  $\rightarrow 0 \ \pi \ \pi \ 0 \ \pi \ 0 \ \pi \ 0$

در این سیستم در صورت خطا در تخمین شیفت فاز کانال به اندازه  $\pi$ ، تمام دنباله با خطا دریافت می شود.

۲- کد کننده تفاضلی:

binary sequence  $\rightarrow 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$

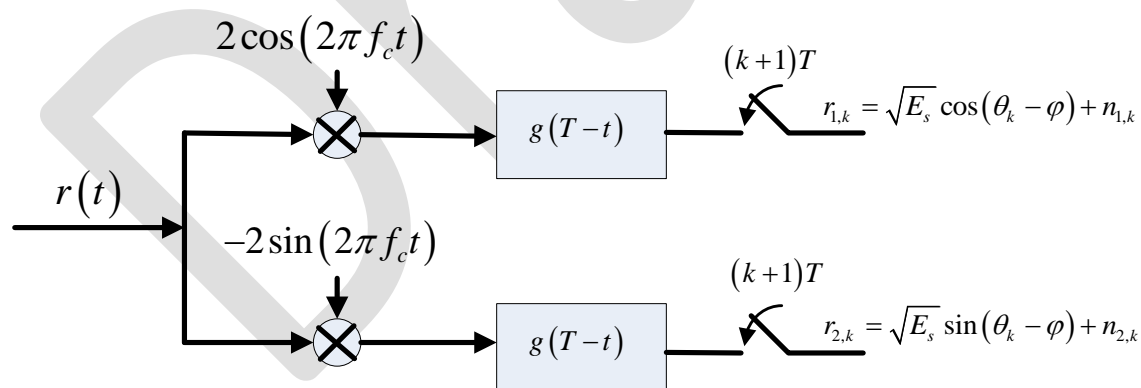
transmitted phases  $\rightarrow \pi \ \pi \ \pi \ 0 \ \pi \ 0 \ \pi \ 0$

differentially coded seq.  $\rightarrow \pi \ 0 \ \pi \ \pi \ 0 \ 0 \ \pi \ \pi$

در این سیستم، اگر بخاطر نویز یک بیت دچار خطا شود، دو بیت با خطا دریافت می شود که احتمال خطا را حداکثر دو برابر می نماید. این ضریب ۲ تاثیر قابل توجهی در احتمال خطا ندارد و با افزایش بسیار ناچیز نسبت سیگنال به نویز قابل جبران است. البته این ضریب دو در بدترین حالت رخ می دهد.

**مدولاسیون PSK کد شده و دکد شده به صورت تفاضلی (Differentially coded and decoded DPSK)**

در این دمدولاتور آشکارسازی بصورتی است که مستقیماً بدون نیاز به تخمین شیفت فازی کانال، اختلاف فاز تخمین زده می شود. بلوک دیاگرام دمدولاتور را در شکل زیر مشاهده می کنیم.



شکل (۵-۲۰) - قسمتی از بلوک دیاگرام گیرنده مدولاتور PSK کد شده و دکد شده بصورت تفاضلی

همانگونه که مشاهده می شود در ورودی گیرنده احتیاج به مدار تخمین زن شیفت فازی کانال نیست. البته از این مدولاتور مواقعی استفاده می شود که تغییرات فاز کانال سریع نباشد. با توجه به شکل می توان نوشت:

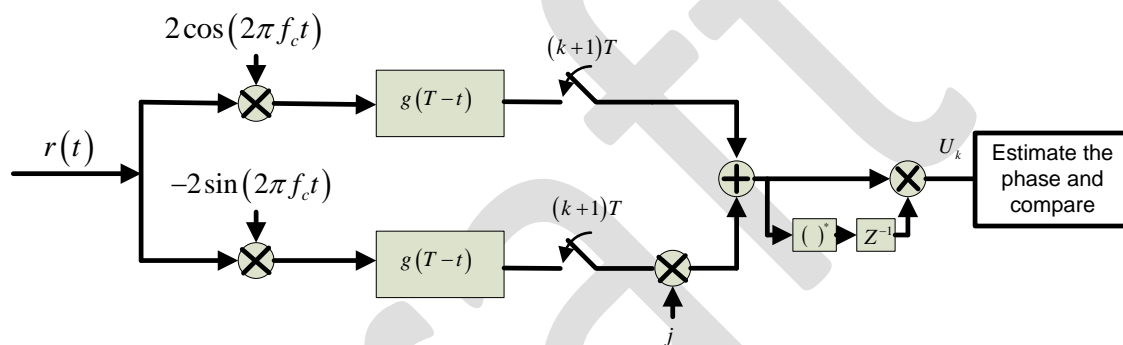
$$r_k \triangleq r_{1,k} + jr_{2,k} = \sqrt{E_s} e^{j(\theta_k - \varphi)} + n_k \quad (4-9-5)$$

$$r_{k-1} = \sqrt{E_s} e^{j(\theta_{k-1} - \varphi)} + n_{k-1}$$

که در آن  $\varphi$  شیفت فازی ایجاد شده در کانال و  $\theta_k$  فاز ارسالی در فاصله سیگنالینگ  $k$ ام است. برای متغیر تصمیم‌گیری داریم:

$$R_k = r_k \cdot r_{k-1}^* = E_s e^{j(\theta_k - \theta_{k-1})} + \sqrt{E_s} n_k e^{-j(\theta_{k-1} - \varphi)} + \sqrt{E_s} n_{k-1}^* e^{j(\theta_{k-1} - \varphi)} + n_k n_{k-1}^* \quad (5-9-5)$$

این سیستم فاز  $R_k$  را تخمین می‌زند و با  $M$  اختلاف فاز ممکن مقایسه می‌کند و به هرکدام که نزدیکتر بود همان را به عنوان اختلاف فاز ارسالی دکد می‌کند. بلوک دیاگرام کامل گیرنده در شکل (5-21) ارائه شده است:



شکل (5-21) - بلوک دیاگرام گیرنده برای مدولاتور PSK کد شده و دکد شده بصورت تفاضلی

البته باید توجه کرد که این گیرنده بهینه نیست. حال عملکرد این دمدولاتور را بررسی می‌کنیم. بدون از دست دادن عمومیت مسئله فرض می‌کنیم که اختلاف فاز صفر ارسال شده است. با این فرض آماره متغیر تصمیم‌گیری و از آنجا احتمال خطا را بدست می‌آوریم.

$$R_k = E_s + \sqrt{E_s} n_k + \sqrt{E_s} n_{k-1}^* + n_k n_{k-1}^* \quad (6-9-5)$$

چون توزیع جمله آخر که حاصلضرب دو مولفه نویز است پیچیده می‌باشد، احتمال خطا با تقریب محاسبه می‌شود که در آن از جمله چهارم در مقایسه با جملات دیگر صرفنظر می‌کنیم. این تقریب در SNRهای نسبتاً بالا تقریب خوبی است. بنابراین داریم:

$$R_{k,r} = \sqrt{E_s} + n_{k,r} + n_{k-1,r} \sim (\sqrt{E_s}, N_0) \quad (7-9-5)$$

$$R_{k,i} = n_{k,i} + n_{k-1,i} \sim (0, N_0)$$

این روابط دقیقا مانند روابطی است که در (۸-۸-۵) برای مدولاسیون PSK معمولی بدست آمده است، با این تفاوت که واریانس نویز دوبرابر شده است. پس این مدولاتور به طور تقریبی حدود 3dB بدتر از PSK معمولی و سیستم Differentially-Coded PSK با آشکارساز همدوس عمل می کند.

برای DPSK باینری می توان احتمال خطا را بطور دقیق بدست آورد. نحوه تصمیم گیری برای این مدولاتور بصورت زیر است.

$$\text{Re}(R_k) \begin{matrix} \Delta\varphi=0 \\ > \\ \Delta\varphi=\pi \end{matrix} 0 \quad (8-9-5)$$

برای محاسبه احتمال خطا فرض می کنیم که اختلاف فاز صفر ارسال شده است. با توجه به اینکه داده صرفا در قسمت حقیقی  $R_k$  حضور دارد و قسمت موهومی که نویز است شامل اطلاعات غیرمرتبط می باشد، از (۸-۹-۵) بدست می آید:

$$P_b = P[\text{Re}(R_k) < 0 | \Delta\varphi = 0] \quad (9-9-5)$$

برای متغیرهای تصمیم گیری داریم:

$$\begin{aligned} R_k &= r_k r_{k-1}^* \\ \text{Re}(R_k) &= \frac{1}{2} (r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1}) \end{aligned} \quad (10-9-5)$$

در ضمیمه B کتاب احتمال  $P(D < 0)$  برای D های به شکل زیر محاسبه شده است.

$$D = \sum_{k=1}^L (A|X_k|^2 + B|Y_k|^2 + CX_k Y_k^* + C^* X_k^* Y_k) \quad (11-9-5)$$

که در این رابطه  $X_k$  ها و  $Y_k$  ها متغیرهای گوسی هستند که ضرورتا مستقل از هم نمی باشند. با استفاده از این روابط و رابطه (۱۰-۹-۵)، احتمال خطای سیستم DPSK بصورت زیر بدست می آید.

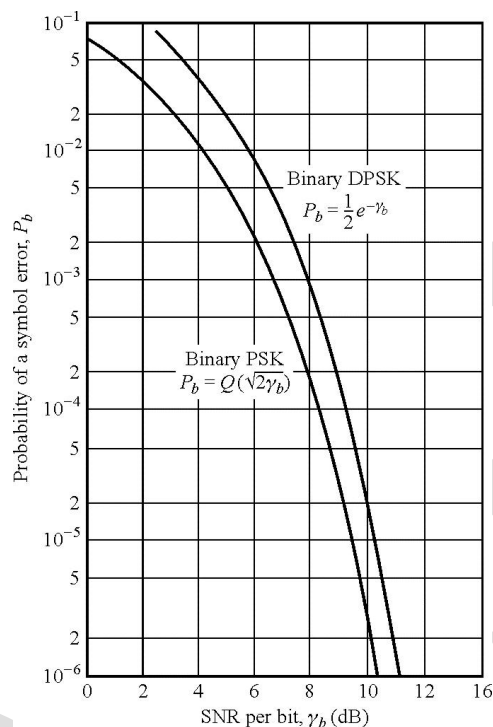
$$P_{b|DPSK} = P[\text{Re}(R_k) < 0] = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{N_0}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{N_0}} = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b} \quad (12-9-5)$$

از طرفی برای سیستم BPSK با تخمین دقیق شیفیت فازی با استفاده از سیگنال Pilot داریم:

$$P_b = Q(\sqrt{2\gamma_b}) < \frac{1}{2} e^{-\gamma_b} \quad (13-9-5)$$

شکل (۲۲-۵) این دو سیستم را با هم مقایسه کرده است. همانطور که ملاحظه می شود، در سیگنال به نویز بر بیت بالا، اختلاف عملکرد آنها کمتر از 1dB است. بنابراین در حالت باینری افت عملکرد سیستم های DPSK در

مقایسه با حالت ایده آل، که در آن فرض می‌شود شیفیت فازی کانال در دسترس است، از  $3dB$  به مراتب کمتر است.



شکل (۵-۲۲) - نمودار احتمال خطا بر بیت بر حسب  $\gamma_b$  برای مدولاسیون‌های DPSK و BPSK

حال به بررسی عملکرد سیستم‌های با شیفیت فازی رندم کانال در حالت کلی می‌پردازیم. اگر کانال بدون شیفیت فازی باشد، سیگنال دریافتی بصورت زیر خواهد بود:

$$r_l(t) = s_{lm}(t) + n_l(t) \quad (۵-۹-۱۴)$$

و اگر شیفیت فازی وجود داشته باشد، داریم:

$$r_l(t) = e^{-j\phi} s_{lm}(t) + n_l(t) \quad (۵-۹-۱۵)$$

در بخش‌های قبل دیدیم که گیرنده بهینه بصورت زیر عمل می‌کند:

$$\max \operatorname{Re} \left( \int r_l(t) s_{lm}^*(t) dt \right) + 2\eta_m \quad (۵-۹-۱۶)$$

حال اگر شیفیت فازی کانال را داشته باشیم این رابطه بصورت زیر اصلاح می‌شود:



$$\max \operatorname{Re} \left( e^{j\varphi} \int r_l(t) s_{lm}^*(t) dt \right) + 2\eta_m \quad (17-9-5)$$

که جمله  $e^{j\varphi}$  شیفت فازی ایجاد شده در کانال را جبران می‌کند. اما این روابط هنگامی صادق است که بتوان فاز را تخمین زد یعنی سرعت تغییرات فاز خیلی زیاد نباشد. این آشکارساز را آشکارساز هم‌دوس می‌نامند. در واقع آشکارسازهای بررسی شده در بخشهای قبلی آشکارسازهای هم‌دوس بوده‌اند که در آنها فرض شده بود که شیفت فازی ایجاد شده در سیگنال ارسالی در گیرنده مشخص است، لذا بدون از دست دادن عمومیت مسئله مقدار آن صفر در نظر گرفته می‌شد.

در ادامه آشکارساز غیرهم‌دوس را معرفی می‌کنیم که در آن احتیاج به تخمین شیفت فازی ایجاد شده در کانال نیست.

### ۵-۱۰) آشکارساز بهینه غیر هم‌دوس

این آشکارساز از اطلاعات فاز استفاده نمی‌کند. با تقریب بسیار خوب فرض می‌کنیم که فاز یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت باشد:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (18-9-5)$$

طبق معیار MAP، نحوه تصمیم‌گیری به قرار زیر است:

$$\max_m P[s_m(t) \text{ has been sent} | r(t)] \quad (19-9-5)$$

از طرفی برای سیگنال دریافتی معادل باند پایه داریم:

$$\begin{aligned} r_l(t) &= e^{-j\varphi} s_{lm}(t) + n_l(t) \\ R_{n_l}(\tau) &= 2N_0\delta(\tau) \end{aligned} \quad (20-9-5)$$

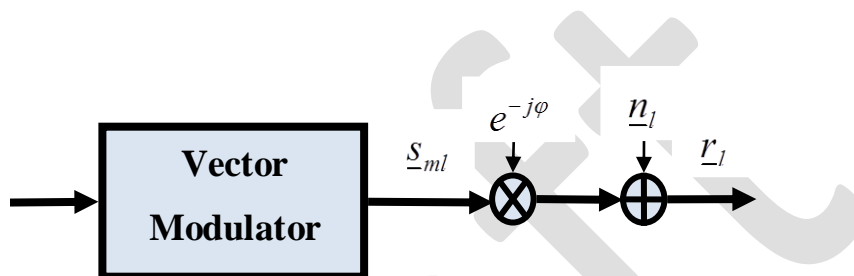
فرض می‌کنیم که  $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$  پایه‌های اورتونرمال برای فضای سیگنالینگ معادل باند پایه  $s_{1l}(t), \dots, s_{Nl}(t)$  باشند. شکل موج دریافتی را در جهت پایه‌های اورتونرمال تصویر می‌کنیم. مولفه‌ها بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} r_i &= \langle r_l(t), \phi_i(t) \rangle = \int r_l(t) \phi_i^*(t) dt \quad i=1, \dots, N \\ &= e^{-j\varphi} s_{ml,i} + n_{li} \end{aligned} \quad (21-9-5)$$

بنابراین شکل برداری سیگنال‌ها بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \underline{r} &= [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_N] \\ \underline{s}_{ml} &= [s_{ml,1} \ s_{ml,2} \ \cdots \ s_{ml,N}] \\ \underline{n}_l &= [n_{l1} \ n_{l2} \ \cdots \ n_{lN}] \\ \underline{r} &= e^{-j\varphi} \underline{s}_{ml} + \underline{n}_l \end{aligned} \quad (22-9-5)$$

بلوک دیاگرام کانال معادل برداری در شکل زیر مشاهده می‌شود:



شکل (23-5) - بلوک دیاگرام معادل برداری کانال با فاز رندم

مجددا می‌توان نشان داد که در این پروسس اطلاعات مفید از بین نخواهد رفت. با ادامه روابط مربوط به گیرنده بهینه داریم:

$$\begin{aligned} MAP: \max_m p(\underline{s}_{ml} | \underline{r}) &\equiv p(\underline{r} | \underline{s}_{ml}) \cdot P_m \\ p(\underline{r} | \underline{s}_{ml}) &= p(r_1, r_2, \dots, r_N | s_{ml,1}, \dots, s_{ml,N}) \\ E(\underline{n}_l) &= \underline{0} \quad C_{\underline{n}_l} = 2N_0 I_{2N \times 2N} \end{aligned} \quad (23-9-5)$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} p(\underline{r} | \underline{s}_{ml}) &= \int p(\underline{r} | \underline{s}_{ml}, \varphi) p(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int p(\underline{r} | \underline{s}_{ml}, \varphi) d\varphi \\ p(\underline{r} | \underline{s}_{ml}, \varphi) &\sim N(e^{-j\varphi} \underline{s}_{ml}, 2N_0 I) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi N_0})^{2N}} e^{-\frac{\|\underline{r} - e^{-j\varphi} \underline{s}_{ml}\|^2}{4N_0}} \end{aligned} \quad (24-9-5)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
& \max_m P_m \frac{1}{2\pi} \int e^{-\frac{\|r_l\|^2}{4N_0}} e^{-\frac{\|e^{-j\varphi} s_{ml}\|^2}{4N_0}} e^{\frac{1}{2N_0} \operatorname{Re}(r_l e^{-j\varphi} \cdot s_{ml}^*)} d\varphi \\
& \equiv \max_m P_m e^{-\frac{\|e^{-j\varphi} s_{ml}\|^2}{4N_0}} \frac{1}{2\pi} \int e^{\frac{1}{2N_0} \operatorname{Re}(e^{-j\varphi} r_l \cdot s_{ml}^*)} d\varphi \\
& \equiv \max_m P_m e^{-\frac{\|s_{ml}\|^2}{4N_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{2N_0} |r_l \cdot s_{ml}^*| \cos(\varphi - \psi_m)} d\varphi \quad (25-9-5) \\
& \equiv \max_m P_m e^{-\frac{E_m}{2N_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{2N_0} |r_l \cdot s_{ml}^*| \cos(\gamma_m)} d\gamma_m \\
& \equiv \max_m P_m e^{-\frac{E_m}{2N_0}} I_0 \left( \frac{1}{2N_0} |r_l \cdot s_{ml}^*| \right) \quad I_0(x) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(\gamma)} d\gamma
\end{aligned}$$

با توجه به تعریف روابط برداری می توان نوشت:

$$r \cdot s_{ml}^* = \int r_l(t) \cdot s_{ml}^*(t) dt \quad (26-9-5)$$

بنابراین روابط آشکارسازهای همدوس و غیر همدوس بصورت زیر در می آید که برای مقایسه آنها را کنار یکدیگر آورده ایم:

$$\equiv \max_m P_m e^{-\frac{E_m}{2N_0}} I_0 \left( \frac{1}{2N_0} \left| \int r_l(t) \cdot s_{ml}^*(t) dt \right| \right) \quad \text{۱- غیرهمدوس:}$$

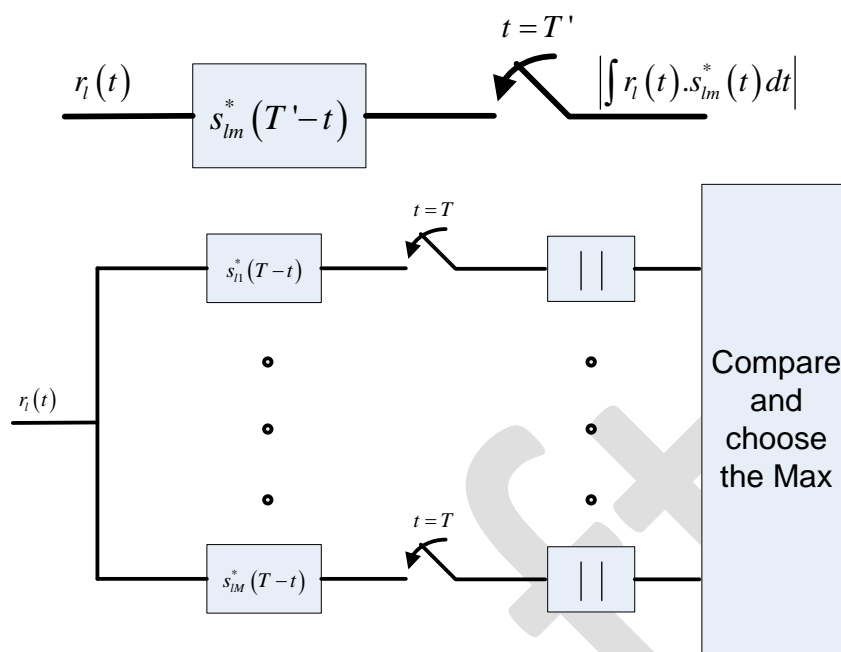
$$\equiv \max_m \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( e^{j\varphi} \int r_l(t) \cdot s_{ml}^*(t) dt \right) + \eta_m \quad \text{۲- همدوس:}$$

تابع  $I_0(x)$  یک تابع صعودی از آرگومان خود است، بنابراین برای سیگنال های هم احتمال و هم انرژی می توان رابطه آشکارساز غیر همدوس را بصورت زیر ساده کرد.

$$\equiv \max_m I_0 \left( \frac{1}{2N_0} \left| \int r_l(t) \cdot s_{ml}^*(t) dt \right| \right) \quad (27-9-5)$$

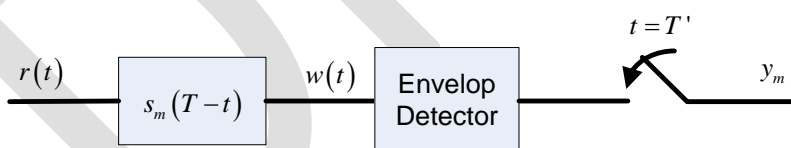
$$\equiv \max_m \left| \int r_l(t) \cdot s_{ml}^*(t) dt \right|$$

و ساختار گیرنده بهینه بصورت زیر در می آید:



شکل (۵-۲۴) - ساختار آشکارساز غیرهمدوس برای سیگنالینگ هم احتمال و هم انرژی

سیستم فوق را می توان با آشکارساز پوش در باند میانی نیز پیاده سازی کرد. بلوک دیاگرام شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۵-۲۵) - بلوک دیاگرام یک شاخه گیرنده با آشکارساز پوش

رابطه زیر را می توان نوشت:

$$w(t) \triangleq r(t) * s_m(T-t) \quad (۵-۹-۲۸)$$

اگر  $v(t)$  سیگنال معادل باند پایه  $w(t)$  باشد، داریم:

$$v(t) \triangleq \frac{1}{2} r_l(t) * s_{ml}^*(T-t)$$

$$s_m(t) = \text{Re}(s_{ml}(t)e^{j2\pi f_c t}) \quad (29-9-5)$$

$$s_m(T-t) = \text{Re}(s_{ml}(T-t)e^{j2\pi f_c(T-t)})$$

با فرض  $f_c = \frac{k}{T}$  و با توجه به اینکه  $\text{Re}(x) = \text{Re}(x^*)$ ، می توان نوشت:

$$s_m(T-t) = \text{Re}(s_{ml}^*(T-t)e^{j2\pi f_c t}) \quad (30-9-5)$$

بنابراین  $s_{ml}^*(T-t)$  سیگنال معادل باند پایه  $s_m(T-t)$  است. بنابراین داریم:

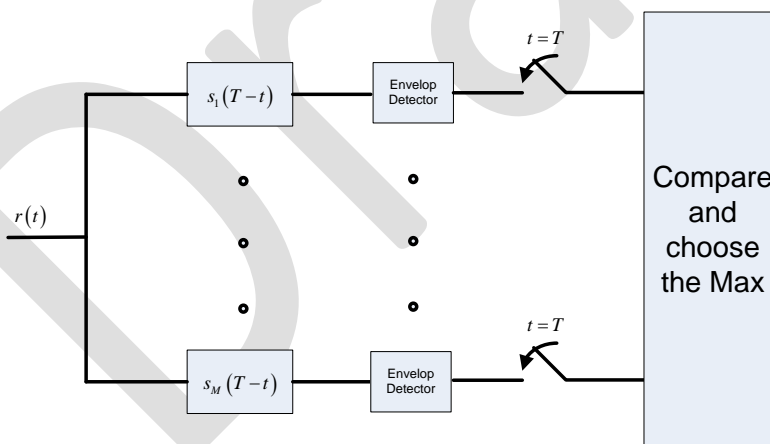
$$w(t) = |v(t)| \cos(2\pi f_c t + \angle v(t)) \quad (31-9-5)$$

که در آن  $|v(t)|$  پوش سیگنال باند میانی است. در نهایت می توان نوشت:

$$y_m = |v(t)|_{t=T} \quad (32-9-5)$$

$$y_m = \frac{1}{2} |r_l(t) * s_{ml}^*(T-t)|_{t=T} = \frac{1}{2} \left| \int r_l(t) s_{ml}^*(t) dt \right|$$

از اینرو بلوک دیاگرام گیرنده با استفاده از آشکارساز پوش بصورت زیر در می آید:



شکل (۵-۲۶) - پیاده سازی آشکارساز ناهمدوس با استفاده از آشکارساز پوش

محاسبه احتمال خطای آشکارساز غیر همدوس برای سیگنالینگ های باینری هم احتمال و هم

انرژی

سیگنال باند میانی  $s_m(t)$  را در نظر بگیرید:

$$s_m(t) = \text{Re} \left[ s_{ml}(t) e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (33-9-5)$$

سیگنال معادل باند پایه دریافتی بصورت زیر است:

$$r_l(t) = e^{-j\varphi} s_{ml}(t) + n_l(t) \quad (34-9-5)$$

فرض کنید که ضریب همبستگی مختلط بین شکل‌های  $s_{1l}(t)$  و  $s_{2l}(t)$  برابر  $\rho$  باشد. آنگاه داریم:

$$\rho = \frac{\frac{1}{2} \int s_{1l}(t) s_{2l}^*(t) dt}{\sqrt{E_1 E_2}} \quad E_1 = E_2 = E = E_b \quad (35-9-5)$$

با توجه به (27-9-5) متغیر تصمیم‌گیری بصورت زیر در می‌آید:

$$R_m = \left| \int r_l(t) s_{ml}^*(t) dt \right| \quad (36-9-5)$$

فرض کنید که  $s_1(t)$  (یا  $s_{1l}(t)$ ) ارسال شده است. با این فرض متغیرهای تصمیم‌گیری را به ازای  $m=1,2$  بدست می‌آوریم. سیگنال زیر را در باند پایه دریافت می‌کنیم:

$$r_l(t) = e^{-j\varphi} s_{1l}(t) + n_l(t), \quad R_{n_l}(\tau) = 2N_0\delta(\tau) \quad (37-9-5)$$

بنابراین متغیرهای تصمیم‌گیری بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} R_1 &= \left| \int (e^{-j\varphi} s_{1l}(t) + n_l(t)) s_{1l}^*(t) dt \right| \\ &= \left| e^{-j\varphi} \int \|s_{1l}(t)\|^2 dt + n_{1l} \right|, \quad n_{1l} = \int n_l(t) s_{1l}^*(t) dt \\ &= \left| 2E e^{-j\varphi} + n_{1l} \right| \end{aligned} \quad (38-9-5)$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \left| e^{-j\varphi} \int s_{1l}(t) s_{2l}^*(t) dt + n_{2l} \right|, \quad n_{2l} = \int n_l(t) s_{2l}^*(t) dt \\ &= \left| 2\rho E e^{-j\varphi} + n_{2l} \right| \end{aligned}$$

که در این روابط داریم:

$$n_{il} \sim N(0, 2EN_0) \quad (39-9-5)$$

چون سیگنال‌های باینری ضرورتاً متعامد نیستند،  $n_{1l}$  و  $n_{2l}$  نیز از هم مستقل نیستند. در نتیجه متغیرهای  $R_1$  و  $R_2$  نیز مستقل از هم نخواهند بود. از طرف دیگر رابطه (38-9-5) را می‌توان بصورت زیر ساده کرد:

$$R_1 = \left| e^{-j\varphi} 2E + n_{1l} \right| = \left| 2E + e^{j\varphi} n_{1l} \right| \equiv \left| 2E + n_{1l} \right| \quad (40-9-5)$$

رابطه آخر از اینجا نتیجه می‌گردد که مشخصه آماری متغیرهای  $n_{1l}$  و  $e^{j\phi} n_{1l}$  یکسان هستند. به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$R_2 \equiv |2\rho E + n_{2l}| \quad (41-9-5)$$

بنابراین احتمال خطا به شرط ارسال سیگنال  $s_1(t)$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P_e = P_{e1} = P(R_1 < R_2) \quad (42-9-5)$$

یک راه برای محاسبه این احتمال اینست که مشخصه آماری  $R_1$  و  $R_2$  را بدست آوریم. برای دو متغیر تصادفی گوسی با واریانس‌های برابر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x_2 &\sim N(m_2, \sigma^2) & x_1 &\sim N(m_1, \sigma^2) \\ x &\triangleq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x_1 + jx_2| & s &\triangleq \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \end{aligned} \quad (43-9-5)$$

آنگاه توزیع  $x$  یک توزیع Ricean به شکل زیر است:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{xs}{\sigma^2}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (44-9-5)$$

بنابراین مشخصه آماری  $R_1$  و  $R_2$  بصورت زیر در می‌آیند.

$$p_{R_m}(r_m) = \begin{cases} \frac{r_m}{2EN_0} e^{-\frac{(r_m^2 + \beta_m^2)}{4EN_0}} I_0\left(\frac{\beta_m r_m}{2EN_0}\right) & r_m > 0 \\ 0 & r_m < 0 \end{cases} \quad (45-9-5)$$

که در این روابط  $\beta_1 = 2E$  و  $\beta_2 = 2E\rho$ . با استفاده از (45-9-5) احتمال خطا بصورت زیر بدست می‌آید.

$$P_b = P(R_1 < R_2) = \iint_{R_1 < R_2} p(u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (46-9-5)$$

ولی راه ساده‌تر استفاده از نتایج ضمیمه B کتاب است. احتمال (46-9-5) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$P(R_1 < R_2) = P(R_1^2 - R_2^2 < 0) \quad (47-9-5)$$

اگر در رابطه (47-9-5) پارامترها را بصورت زیر قرار دهیم، به متغیر بالا می‌رسیم:

$$A = 1, B = -1, C = 0, L = 1, \quad (48-9-5)$$

$$R_1 = X_1, R_2 = Y_1$$

با استفاده از ضمیمه B کتاب، احتمال خطا را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$P_b = Q_1(a, b) - \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2+b^2}{2}} I_0(ab)$$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma_b}{2} (1 - \sqrt{1 - |\rho|^2})} \quad b = \sqrt{\frac{\gamma_b}{2} (1 + \sqrt{1 - |\rho|^2})} \quad (49-9-5)$$

$$\gamma_b = \frac{E_b}{N_0} = \frac{E}{N_0}$$

تابع  $Q_m$  بصورت زیر تعریف می شود:

$$Q_m(a, b) = \int_b^\infty x \left(\frac{x}{b}\right)^{m-1} e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} I_{m-1}(ax) dx \quad (50-9-5)$$

$$Q_1(a, b) = \int_b^\infty x e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} I_0(ax) dx$$

حال حالت های خاص زیر را می توان بررسی کرد:

۱-  $(\rho = 0)$ . با قرار دادن در (49-9-5) داریم:

$$\rho = 0 \rightarrow a = 0, b = \sqrt{\gamma_b}$$

$$Q_1(0, \sqrt{\gamma_b}) = e^{-\frac{\gamma_b}{2}} \quad (51-9-5)$$

$$P_b = e^{-\frac{\gamma_b}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma_b}{2}} I_0(0) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma_b}{2}}$$

برای آشکارساز هم دوس داشتیم  $P_b = Q(\sqrt{\gamma_b}) < \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma_b}{2}}$

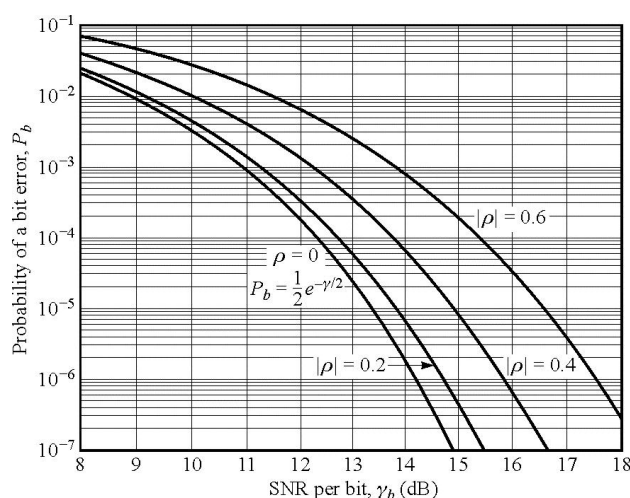
۲-  $(\rho = -1)$  با قرار دادن در (49-9-5) داریم:

$$a = b = \sqrt{\frac{\gamma_b}{2}} \rightarrow P_b = \frac{1}{2} \quad (52-9-5)$$

این نتیجه متاثر از تصادفی بودن فاز سیگنال دریافتی است. شکل (5-27)،  $P_b$  را برای مقادیر متفاوت  $|\rho|$  نشان

می دهد. همانگونه که انتظار می رود با افزایش  $\rho$  احتمال خطا افزایش می یابد.





شکل (۵-۲۷) - احتمال خطای آشکارساز ناهمدوس بر حسب  $\gamma_b$

### ۵-۱۱) تعامد در سیگنالینگها

از دیدگاه یک آشکارساز، سیگنالینگ متعامد است که اگر شکل موج ارسالی هر شکل موجی غیر از  $s_{ml}(t)$  باشد در خروجی متغیر تصمیم‌گیری متناظر با  $s_m(t)$  (یا  $s_{ml}(t)$ )، مولفه مربوط به سیگنال صفر شود و فقط نویز مشاهده گردد.

برای آشکارساز همدوس داریم:

$$\begin{aligned} R_m &= \text{Re} \left( \int s_{ml}(t) s_{ml}^*(t) dt \right) + n_{ml} \\ &= 2E \text{Re}(\rho) + n_{ml} \end{aligned} \quad (۵۳-۹-۵)$$

بنابراین از دید آشکارساز همدوس، سیگنالینگ متعامد است اگر  $\text{Re}(\rho) = 0$

برای آشکارساز غیر همدوس داریم:

$$R_m = |2E\rho + n_{ml}| \quad (۵۴-۹-۵)$$

بنابراین برای سیگنالینگ متعامد داریم  $\rho = 0$  و در نتیجه  $|\rho| = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$

با توجه به روابط فوق می توان ملاحظه کرد که تعامد از دید آشکارساز غیرهمدوس، تعامد از دید آشکارساز همدوس را نتیجه می دهد ولی عکس این حالت لزوما برقرار نیست. بعنوان مثال سیگنال معادل باند پایه مدولاتور FSK را در نظر بگیرید:

$$s_{lm}(t) = g(t)e^{j2\pi(m-1)\Delta f t}, 1 \leq m \leq M$$

$$\Delta f = \frac{k}{2T} \Rightarrow \text{Re}(\rho) = 0 \quad (55-9-5)$$

بنابراین حد فاصل بین فرکانس های مجاور برای آشکارساز همدوس باید حداقل برابر  $\frac{1}{2T}$  باشد تا تعامد برقرار گردد. اما برای آشکارساز غیر همدوس داریم:

$$\rho_{mm'} = e^{j2\pi(m-m')\Delta f t} \frac{\sin \pi T(m-m')\Delta f}{\pi T(m-m')\Delta f} \rightarrow \Delta f = \frac{k}{T} \quad (56-9-5)$$

که در این حالت برای تعامد باید فاصله فرکانسی بین فرکانس های مجاور حداقل برابر  $\frac{1}{T}$  باشد. پهنای باند مورد نیاز برای سیگنالینگ متعامد با آشکارساز غیرهمدوس دو برابر پهنای باند مورد نیاز سیگنالینگ متعامد برای آشکارساز همدوس است.

**۱۲-۵) محاسبه احتمال خطای آشکارساز غیرهمدوس برای سیگنالینگ متعامد M-ary هم احتمال و هم انرژی**

چون ارسال متعامد است داریم:

$$|\rho_{mm'}| = 0$$

$$R_m = \left| \int r_l(t) s_{ml}^*(t) dt \right| \quad (57-9-5)$$

سیگنالینگ متقارن است پس بدون از دست دادن عمومیت مسأله فرض می کنیم که  $s_{ll}(t)$  ارسال شده است. در این صورت معادل باند پایه سیگنال دریافتی بصورت زیر خواهد بود:

$$r_l(t) = e^{-j\varphi} s_{ll}(t) + n_l(t) \quad (58-9-5)$$

با این فرض مقادیر متغیر تصمیم گیری را به ازای  $m=1, \dots, M$  بدست می آوریم.

$$R_1 = \left| \int (e^{-j\phi} s_{1l}(t) + n_l(t)) s_{1l}^*(t) dt \right| = |2E + n_{1l}| \quad (59-9-5)$$

$$R_m = \left| \int (e^{-j\phi} s_{1l}(t) + n_l(t)) s_{ml}^*(t) dt \right| = |n_{ml}| \quad m \neq 1$$

با توجه به اینکه  $R_1$  توزیع رایس و  $R_m$  ها توزیع رایلی با میانگین های بترتیب  $2E$  و صفر دارند، داریم:

$$p_{R_m}(r_m) = \begin{cases} \frac{r_m}{2EN_0} e^{-\frac{r_m^2}{4EN_0}} & r_m \geq 0 \\ 0 & oth. \end{cases} \quad (60-9-5)$$

$$p_{R_1}(r_1) = \begin{cases} \frac{r_1}{2EN_0} e^{-\frac{r_1^2+4E^2}{4EN_0}} I_0\left(\frac{r_1}{N_0}\right) & r_1 \geq 0 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

چون سیگنالینگ متعامد است،  $n_{il}$  ها و در نتیجه  $R_i$  ها از هم مستقل هستند و می توان نوشت:

$$P_e = P_{e1} = P[R_1 < R_2 \text{ or } R_1 < R_3 \text{ or } \dots]$$

$$P_c = \int P[R_2 < R_1, \dots, R_M < R_1 | R_1 = r_1] p_{R_1}(r_1) dr_1 \quad (61-9-5)$$

$$= \int_0^\infty (P[R_2 < r_1])^{M-1} p_{R_1}(r_1) dr_1$$

از طرفی با استفاده از (60-9-5) داریم:

$$P[R_2 < r_1] = \int_0^{r_1} \frac{r}{2EN_0} e^{-\frac{r^2}{4EN_0}} dr = \begin{cases} \left(1 - e^{-\frac{r_1^2}{4EN_0}}\right) & r_1 > 0 \\ 0 & oth. \end{cases} \quad (62-9-5)$$

$$\left(1 - e^{-\frac{r_1^2}{4EN_0}}\right)^{M-1} = \sum_{n=0}^{M-1} \binom{M-1}{n} (-1)^n e^{-\frac{nr_1^2}{4EN_0}}$$

بنابراین در نهایت با جایگذاری (62-9-5) در (61-9-5) به رابطه زیر می رسیم:

$$P_c = \sum_{n=0}^{M-1} \binom{M-1}{n} (-1)^n \int_0^\infty e^{-\frac{nr_1^2}{4EN_0}} p_{R_1}(r_1) dr_1 \quad (63-9-5)$$

$p_{R_1}(r_1)$  یک تابع توزیع رایس با پارامترهای  $s=2E$  و  $\sigma^2=2EN_0$  است که با جایگذاری در (63-9-5) و

مقداری محاسبات ساده داریم:

$$P_c = \sum_{n=0}^{M-1} \binom{M-1}{n} (-1)^n \frac{1}{n+1} e^{-\frac{E_s n}{N_0 n+1}} \int_0^\infty (n+1) e^{-\frac{E_s n}{N_0 n+1}} e^{-\frac{nr_1^2}{4EN_0}} dr_1 \quad (64-9-5)$$

اگر رابطه داخل انتگرال را در نظر بگیریم، دوباره یک توزیع رایس اما با پارامترهای دیگری است، بنابراین انتگرال برابر یک می شود و می توان نوشت:

$$P_c = \sum_{n=0}^{M-1} \binom{M-1}{n} (-1)^n \frac{1}{n+1} e^{-\gamma_s \frac{n}{n+1}}$$

$$P_e = 1 - P_c$$

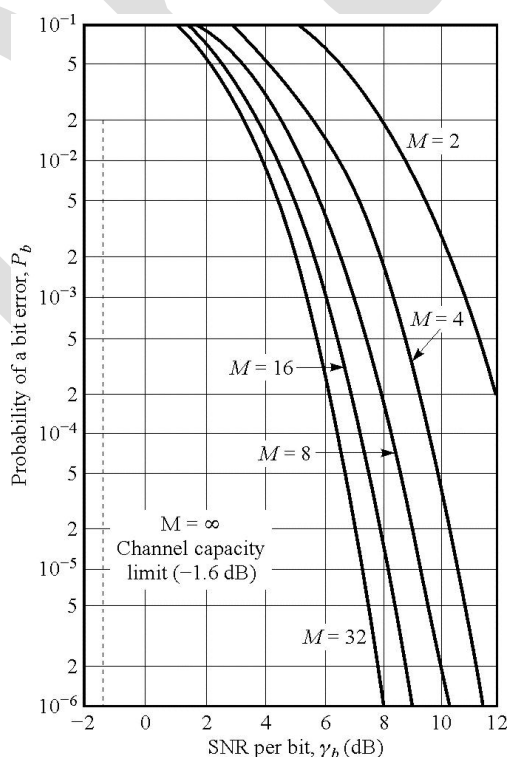
$$= \sum_{n=1}^{M-1} \binom{M-1}{n} (-1)^n \frac{1}{n+1} e^{-\frac{nk\gamma_b}{n+1}} \quad (65-9-5)$$

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_e \approx \frac{1}{2} P_e$$

نمودارهای مربوط به احتمال خطای آشکارساز ناهمدوس بر حسب  $\gamma_b$  به ازای  $M$ های متفاوت در شکل (۵-۲۸) آورده شده است. همانند آشکارساز همدوس در این آشکارساز نیز با افزایش  $M$ ،  $\gamma_b$  مورد نیاز برای رسیدن به یک احتمال خطای مشخص کاهش می یابد. می توان نشان داد که:

$$M \rightarrow \infty, \gamma_b \rightarrow -1.6 \text{ dB}$$

$$BW_{\text{orth-coherent}} = \frac{2 \log_2 M}{M} \quad BW_{\text{orth-noncoherent}} = \frac{\log_2 M}{M} \quad (66-9-5)$$



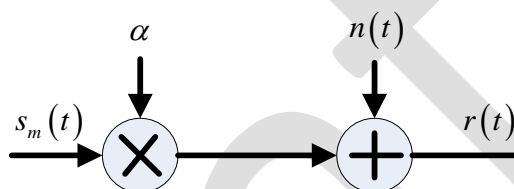
شکل (۵-۲۸) - نمودار احتمال خطا بر بیت آشکارساز ناهمدوس بر حسب  $\gamma_b$  برای مدولاسیون متعامد

Draft

## فصل ۶

## بهره رندم کانال و روشهای مقابله با آن

شکل زیر بلوک دیاگرام یک کانال با نویز گوسی و بهره رندم را نشان می‌دهد. این بهره رندم می‌تواند در گیرنده محاسبه شود و بر اساس آن تصمیم‌گیری صورت گیرد. همانطور که نشان خواهیم داد، بهره رندم می‌تواند تاثیر منفی زیادی روی عملکرد سیستم مخابراتی داشته باشد. در این بخش به روش‌های مقابله با تاثیرات منفی بهره رندوم کانال خواهیم پرداخت.



شکل (۱-۶) - بلوک دیاگرام یک کانال با نویز گوسی و بهره رندم

### ۱-۶ بهره رندم کانال

برای کانال شکل (۱-۶)، سیگنال دریافتی بصورت زیر خواهد بود:

$$r(t) = \alpha s_m(t) + n(t) = s'_m(t) + n(t) \quad (1-1-6)$$

گیرنده بهینه‌ای که بهره کانال را می‌داند، بصورت زیر عمل می‌کند:

$$\max_m : \int r(t) s'_m(t) dt + \eta'_m, \quad \eta'_m = \frac{N_0}{2} \ln P_m - \frac{1}{2} \alpha^2 E_m \quad (2-1-6)$$

برای سیگنال‌های هم احتمال و هم انرژی، رابطه (۲-۱-۶) بصورت زیر در می‌آید:

$$\max_m : \int r(t) \alpha s_m(t) dt = \alpha \int r(t) s_m(t) dt \Rightarrow \max_m : \int r(t) s_m(t) dt \quad (3-1-6)$$

بنابراین اگر سیگنالینگ هم احتمال و هم انرژی باشد، ساختار گیرنده بهینه تغییر نمی‌کند. ولی بهره رندم به هر

حال احتمال خطا را تغییر می‌دهد. بعنوان مثال برای مدولاسیون BPSK داریم:

$$\alpha = 1 \rightarrow P_b = Q\left(2\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \quad (4-1-6)$$

$$\alpha = 0.5 \rightarrow P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

در صورتیکه بهره رندم کانال در محل گیرنده تخمین زده نشود ساختار گیرنده بهینه را به صورت زیر بیان می-گردد. اگر روابط را بصورت برداری بنویسیم، داریم:

$$\underline{r} = \alpha \underline{s}_m + \underline{n}$$

$$MAP \Rightarrow \max_m : P[s_m \text{ sent} | \underline{r}] = P_m \cdot P[\underline{r} | s_m \text{ sent}] \quad (5-1-6)$$

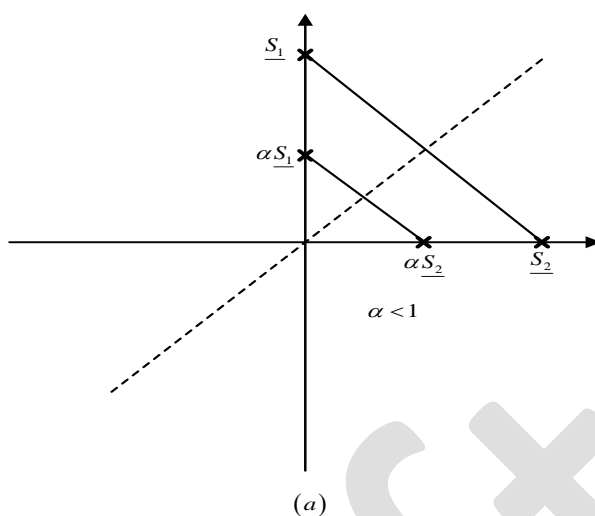
$$P[\underline{r} | s_m \text{ sent}] = \int P[\underline{r} | \underline{s}_m, \alpha] p(\alpha) d\alpha$$

بنابراین با در نظر گرفتن توزیع گوسی نویز داریم:

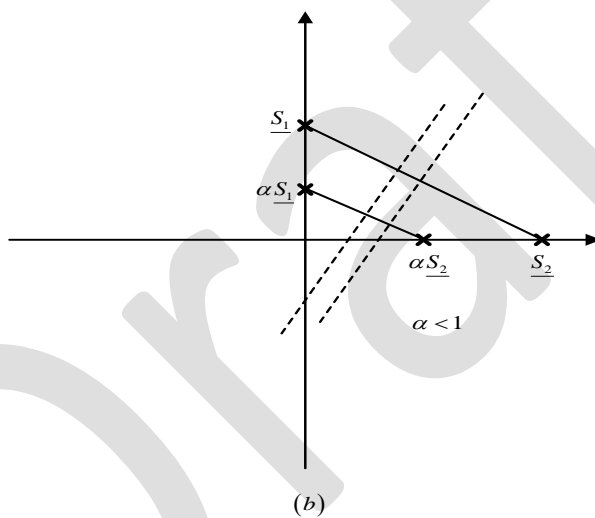
$$MAP \Rightarrow \max_m : P_m \int e^{-\frac{\|\underline{r} - \alpha \underline{s}_m\|^2}{2N_0}} p(\alpha) d\alpha \quad (6-1-6)$$

به عنوان تمرین نشان دهید که برای سیگنال‌های هم احتمال و هم انرژی  $\alpha$  تاثیری در روابط گیرنده بهینه ندارد. عبارتی دیگر در این حالت ساختار گیرنده بهینه مشابه وقتی است که بهره کانال ثابت و مساوی یک است. البته این مطلب را می‌توان از شکل (۲-۶) نیز مشاهده کرد. اگر سیگنالینگ هم احتمال و هم انرژی باشد، گرچه احتمال خطا تغییر می‌کند ولی با تغییر  $\alpha$  ناحیه تصمیم‌گیری تغییر نمی‌کند البته باید در نظر داشت در حالتی که سیگنال‌ها هم احتمال نیستند چنین نتیجه‌گیری حاصل نمی‌گردد.

شکل (۲-۶) بصورت ساده نشان می‌دهد که چگونه تغییر بهره کانال روی نواحی تصمیم‌گیری اثر می‌گذارد. یک سیگنالینگ باینری هم احتمال را در نظر بگیرید. مرز تصمیم‌گیری برای آن عمودمنصف پاره خط متصل کننده سیگنال‌هاست. در شکل (a-۲-۶) که در آن سیگنال‌ها هم انرژی نیز هستند، همانطور که ملاحظه می‌شود بهره کانال تاثیری در مرز نواحی تصمیم‌گیری ندارد. اما در شکل (b-۲-۶) که سیگنال‌ها هم انرژی نیستند، بهره کانال مرز نواحی تصمیم‌گیری را جابجا می‌کند. عبارتی اگر سیگنالینگ هم احتمال و هم انرژی نباشد نواحی تصمیم‌گیری با  $\alpha$  تغییر پیدا می‌کند. لذا انتظار داریم که نواحی تصمیم‌گیری بهینه تلفیقی از نواحی تصمیم‌گیری به ازای  $\alpha$  های متفاوت باشد. این برای سیگنالینگ هم انرژی با احتمالهای متفاوت نیز صادق است.



(a)



(b)

شکل (۶-۲) - تاثیر بهره رندم در نواحی تصمیم گیری.

البته در بسیاری از مواقع امکان تخمین بهره کانال وجود دارد و بهره کانال تخمین زده می‌شود ولی در هر صورت برای محاسبه احتمال خطا باید روی  $\alpha$  متوسط‌گیری کرد (اگر  $\alpha$  در طول ارسال تغییراتی داشته باشد). به عنوان مثال احتمال خطای سیگنالینگ BPAM را در نظر بگیرید. احتمال خطای شرطی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P_b(\gamma_b) = Q(\sqrt{2\gamma_b}), \quad \gamma_b = \alpha^2 E_b / N_0 \quad (7-1-6)$$

از طرفی، با فرض کانال با بهره ریلی،  $\alpha^2$  دارای توزیع chi-square با دو درجه آزادی و توزیع زیر است:



$$p(\gamma_b) = \frac{1}{\gamma_b} e^{-\gamma_b/\bar{\gamma}_b}, \quad \gamma_b \geq 0 \quad (8-1-6)$$

که در آن  $\bar{\gamma}_b$ ، متوسط سیگنال به نویز، برابر است با  $\bar{\gamma}_b = \frac{E_b}{N_0} E(\alpha^2)$ . پس در نهایت برای BPSK احتمال خطای غیر شرطی با استفاده از (6-1-7) بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_b = \int Q(\sqrt{2\gamma_b}) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (9-1-6)$$

بسادگی می‌توان نشان داد که با استفاده از (6-1-8) و محاسبه انتگرال (6-1-9) برای بهره کانال با توزیع رایلی احتمال خطا برابر است با:

$$P_b = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{1 + \bar{\gamma}_b}} \right) \quad (10-1-6)$$

برای سیگنال به نویزهای بالا می‌توان رابطه (6-1-10) را بصورت زیر تخمین زد:

$$P_b = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{\bar{\gamma}_b} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \approx \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2\bar{\gamma}_b} \right) \right] = \frac{1}{4\bar{\gamma}_b} \quad (11-1-6)$$

احتمال خطا در سیستمهای بدون بهره رندم با SNR بصورت نمائی کاهش پیدا می‌کند اما در اینجا می‌بینیم که بصورت معکوس با  $\bar{\gamma}_b$  کاهش پیدا می‌کند که افت شدید عملکرد را نشان می‌دهد. به همین ترتیب برای بقیه مدولاتورها نیز می‌توان رابطه مشابه را برای کانال رایلی (کانال با بهره رایلی) بدست آورد:

۱- برای BFSK

$$P_{b,BFSK} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{2 + \bar{\gamma}_b}} \right) \approx \frac{1}{2\bar{\gamma}_b} \quad (12-1-6)$$

۲- برای DPSK

$$P_{b,DPSK|\alpha} = \frac{1}{2} e^{-\alpha^2 \bar{\gamma}_b}$$

$$P_{b,DPSK} = E_\alpha \left( \frac{1}{2} e^{-\alpha^2 \bar{\gamma}_b} \right) = \frac{1}{2(1 + \bar{\gamma}_b)} \approx \frac{1}{2\bar{\gamma}_b} \quad (13-1-6)$$

۳- برای BFSK غیر هم‌دوس

$$P_{b,noncoh-BFSK|\alpha} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha^2 \gamma_b}{2}} \Rightarrow P_b = \frac{1}{2 + \gamma_b} \approx \frac{1}{\gamma_b} \quad (14-1-6)$$

در این کانال‌ها اگر انرژی را ده برابر کنیم و یک بار سیگنال را ارسال کنیم احتمال خطا از رنج 0.1 به رنج 0.01 تقلیل می‌یابد. جهت کاهش احتمال خطا به صورت نمایی با میزان افزایش انرژی باید از دایورسیتی بهره جست. بعنوان مثال می‌توان بجای اینکه انرژی را ۱۰ برابر کرده و یکبار ارسال نمود، همان پیام را با همان انرژی اولیه به طور مناسب ده بار ارسال نمود. سیگنال در این ۱۰ بار به طریقی ارسال می‌شود که در عبور از کانال تحت تاثیر بهره‌های کاملا مستقل قرار گیرد. در این صورت احتمال خطا از 0.1 تقریبا به  $0.1^{10}$  تقلیل می‌یابد. این تکنیک ارسال را دایورسیتی می‌نامند که متعاقبا بطور مفصل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

باید توجه کرد که فاز رندم باعث افت عملکرد شدید نمی‌شود، ولی بهره رندم مستقل از اینکه در محل گیرنده تخمین زده شود یا نشود موجب افت شدید عملکرد می‌گردد.

### ۶-۲) کانال با بهره و شیفیت فازی رندم و ارسال مکرر پیام

برای کانال با بهره و شیفیت فازی تصادفی سیگنال دریافتی معادل باند پایه بصورت زیر خواهد بود:

$$r_l(t) = \alpha e^{-j\varphi} s_{ml}(t) + z(t) \quad (1-2-6)$$

در این کانال‌ها فرض می‌کنیم که بهره و فاز رندم مستقل از هم باشند. اگر سیگنال‌ها هم احتمال و هم انرژی باشند، چه از گیرنده هم‌دوس و چه از غیر هم‌دوس استفاده کنیم بهره رندم کانال روی ساختار گیرنده بهینه اثر نمی‌گذارد، گرچه برای هر دو گیرنده موجب افت شدید عملکرد می‌شود. برای مثال برای گیرنده غیرهم‌دوس رابطه آشکارساز بهینه با استفاده از (۵-۹-۲۷) بصورت زیر در می‌آید:

$$\max_m : \left| \int r_l(t) \alpha s_{ml}^*(t) dt \right| = \max_m : \alpha \left| \int r_l(t) s_{ml}^*(t) dt \right| \equiv \max_m : \left| \int r_l(t) s_{ml}^*(t) dt \right| \quad (2-2-6)$$

روش مقابله با بهره رندم استفاده از دایورسیتی، ارسال مکرر پیام، است و در انتهای بخش (۶-۱) در مورد آن توضیح مختصری داده شد.

فرض کنیم که هر پیام را  $L$  بار ارسال کنیم. یعنی برای هر یک از  $M$  پیام،  $L$  شکل موج ارسال می‌شود.

$$s_{km}(t), \quad k=1, \dots, L \quad (3-2-6)$$

$$r_{lk}(t) = \alpha_k e^{-j\varphi_k} s_{km}(t) + z_k(t), \quad k=1, \dots, L$$

که  $s_{km}(t)$  معادل باند پایه سیگنال ارسالی  $m$ ام در کانال  $k$ ام و  $r_{lk}(t)$  معادل باند پایه سیگنال دریافتی در این کانال است. فرض می‌کنیم که زوج  $(\varphi_k, \alpha_k)$ ها مستقل از هم هستند و این متغیرها به ازای  $k$ های متفاوت نیز مستقل از هم باشند. بهره مختلط کانال را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_k = \alpha_k e^{-j\varphi_k} \quad (4-2-6)$$

دایورسیتی کامل مرتبه  $L$ ام خواهیم داشت اگر  $L$  شکل موج متناظر با هر پیام طوری ارسال شوند که  $c_k$ ها برای  $k$ های مختلف مستقل از هم باشند. برای نمایش برداری شکل موج‌های دریافتی می‌توان نوشت:

$$r_{lk} = c_k s_{km} + z_k, \quad \begin{matrix} k=1, \dots, L \\ m=1, \dots, M \end{matrix} \quad (5-2-6)$$

در حالت کلی دو نوع گیرنده را می‌توان در نظر گرفت. گیرنده‌ای که  $c_k$ ها را نمی‌داند (غیرهمدوس) و گیرنده-ای که  $c_k$ ها را تخمین می‌زند (همدوس). گیرنده همدوس شکل موج  $c_k s_{km}(t)$  را شکل موج اصلی در نظر می‌گیرد. بنابراین رابطه گیرنده بهینه برای هر دو نوع آشکارساز بصورت زیر در می‌آید:

$$coh \equiv \max_m : p(r_{1l}, \dots, r_{Ll} | \hat{c}_1 s_{1m}, \dots, \hat{c}_L s_{Lm}). P_m \quad (6-2-6)$$

$$non\_coh \equiv \max_m : p(r_{1l}, \dots, r_{Ll} | s_{1m}, \dots, s_{Lm}). P_m$$

که در این روابط  $c_i$  تخمین بهره مختلط کانال است. ساختار گیرنده بهینه همدوس برای سیگنالینگ‌های هم احتمال و هم انرژی بصورت زیر ساده می‌شود (در تمرین نشان خواهید داد):

$$\max_m : \sum_{k=1}^L \text{Re} \left( \hat{c}_k^* \int r_{lk}(t) s_{km}^*(t) dt \right) \quad (7-2-6)$$

این گیرنده را MRC: Maximum Ratio Combining می‌نامند.

برای آشکارساز غیرهمدوس از یکی از دو ساختار زیر استفاده می‌شود که در حالت کلی ساختارهای بهینه نیستند ولی در بعضی از موارد گیرنده بهینه به آنها تبدیل می‌شود.

$$Envelop\ law\ Det. \rightarrow \sum_{k=1}^L \left| \int r_{lk}(t) s_{km}^*(t) dt \right| \quad (8-2-6)$$

$$Square\ law\ Det. \rightarrow \sum_{k=1}^L \left| \int r_{lk}(t) s_{km}^*(t) dt \right|^2$$

در حالت سیگنال‌های هم احتمال و هم انرژی در تمرین نشان خواهید داد که رابطه زیر برای گیرنده بهینه غیر همدوس برای کانال با شیفیت فازی رندم و با توزیع یکنواخت روی بازه  $[0-2\pi]$  بدست می‌آید.

$$\sum_{k=1}^L \ln I_0 \left( \frac{1}{N_0} \left| \int r_{lk}(t) s_{km}^*(t) dt \right| \right) \quad (9-2-6)$$

که با تقریب زیر:

$$\begin{aligned} \ln I_0(x) &\approx \sqrt{4+x^2} - 2 \\ &\approx \frac{x^2}{4} \quad |x| \leq 2 \\ &\approx x \quad |x| > 2 \end{aligned} \quad (10-2-6)$$

به یکی از دو گیرنده که در (8-2-6) معرفی شد می‌رسیم.

در حالتی که  $\alpha_k$  ها مستقل و دارای توزیع ریلی با پارامترهای  $b_k = E(\alpha_k^2)$  باشند، از طرفی  $\varphi_k$  ها مشابه قبل مستقل و دارای توزیع یکنواخت  $[0-2\pi]$  باشند، و شرایط اضافی زیر برقرار باشد:

۲- در ارسال‌های متوالی پیام  $m$  ام از انرژی یکسان  $E_m$  استفاده شود.

۳- پیام  $m$  ام دارای احتمال برابر  $P_m$  باشد.

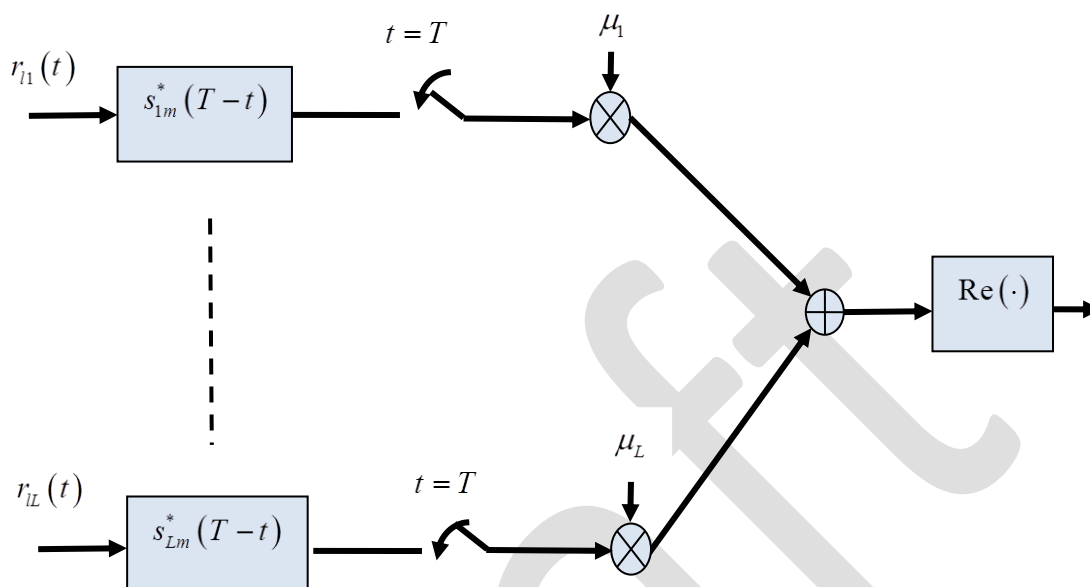
با این شرایط گیرنده بهینه غیرهمدوس بصورت زیر در می‌آید: (تمرین)

$$\begin{aligned} \max_m : C_m + \frac{1}{E_m} \sum_{k=1}^L \omega_m^k \left| \int r_{lk}(t) s_{km}^*(t) dt \right|^2 \\ C_m = N_0 \ln P_m - N_0 \sum_{k=1}^L \ln \left[ 1 + \frac{b_k E_m}{N_0} \right], \quad (11-2-6) \\ \omega_m^k = \frac{\frac{b_k E_m}{N_0}}{1 + \frac{b_k E_m}{N_0}} \end{aligned}$$

اگر سیگنال‌ها هم احتمال و هم انرژی باشند، این آشکارساز باز هم ساده‌تر شده و به Square law detector در رابطه (8-2-6) تقلیل می‌یابد.

می‌توان نشان داد که برای سیگنال‌های هم احتمال و هم انرژی اگر هدف ماکزیمم کردن SNR در خروجی آشکارساز باشد، بهترین ترکیب کننده در L بار ارسال، ترکیب کننده MRC است. این همان آشکارساز بهینه

همدوس است. برای این منظور ساختار زیر را برای یک سیگنالینگ هم احتمال و هم انرژی با دایورسیتی مرتبه  $L$  در نظر بگیرید.



شکل (۳-۶) - ساختار یک گیرنده همدوس برای سیگنالینگ با دایورسیتی مرتبه  $L$

در خروجی گیرنده دو مولفه یکی ناشی از نویز و یکی ناشی از پیام ارسالی  $m$  ام را خواهیم داشت. اگر SNR را بعنوان نسبت انرژی مولفه پیام به واریانس مولفه نویز در خروجی تعریف کنیم می توان نشان داد که برای ماکزیمم شدن SNR خروجی لازم است که  $\mu_i$  ها بصورت زیر انتخاب شوند.

$$\mu_i = c_i^* \quad (۱۲-۲-۶)$$

که به همان آشکارساز MRC می رسیم.

(۳-۶) محاسبه احتمال خطای آشکارساز همدوس برای دایورسیتی مرتبه  $L$  و مدولاسیون باینری BPSK،  $M = 2$  و سیگنالینگ هم احتمال و هم انرژی

برای سیگنالینگ باینری آنتی پودال با  $L$  بار ارسال داریم:

$$s_{k2}(t) = -s_{k1}(t), \quad k = 1, \dots, L \quad (۱-۳-۶)$$

که با توجه به (۷-۲-۶) متغیر تصمیم گیری بصورت زیر بدست می آید:

$$U_m = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^L c_k^* \int r_{lk}(t) s_{km}^*(t) dt \right) \quad (2-3-6)$$

فرض کنیم که پیام ۱ ارسال شده است، بنابراین می توان نوشت:

$$r_{lk}(t) = c_k s_{k1}(t) + z_k(t) \quad (3-3-6)$$

با جایگذاری (۳-۳-۶) در (۲-۳-۶) برای متغیر تصمیم گیری داریم:

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{k=1}^L |c_k|^2 \int |s_{k1}(t)|^2 dt + \sum_{k=1}^L \operatorname{Re} \left( c_k^* \int z_k(t) s_{k1}^*(t) dt \right) \\ &= \sum_{k=1}^L 2E\alpha_k^2 + \sum_{k=1}^L \operatorname{Re} \left( c_k^* z_k \right), \quad c_k = \alpha_k e^{-j\phi_k} \end{aligned} \quad (4-3-6)$$

از طرفی می توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^L \operatorname{Re} \left( c_k^* z_k \right) = \sum_{k=1}^L \alpha_k \operatorname{Re} \left( e^{j\phi_k} z_k \right) \equiv \sum_{k=1}^L \alpha_k \operatorname{Re} \left( z_k \right) \quad (5-3-6)$$

که در آن با توجه به اینکه مشخصه آماری نویز سفید با دوران تغییر نمی کند تساوی آخر نتیجه می گردد. با استفاده از (۵-۳-۶) و (۴-۳-۶) داریم:

$$U_1 = \sum_{k=1}^L 2E\alpha_k^2 + \sum_{k=1}^L \alpha_k z_{k,r}, \quad z_{k,r} = \operatorname{Re} \left( z_k \right) \quad (6-3-6)$$

و همانطور که قبلا محاسبه شده است داریم  $\sigma_{z_{k,r}}^2 = 2EN_0$ . همچنین با استفاده از (۱-۳-۶) می توان نوشت:

$$U_2 = -U_1 \quad (7-3-6)$$

رابطه احتمال خطا بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} P_e &= P[\text{error} | s_1] = P[U_2 > U_1] = P[U_1 < 0] \\ &= E_{\{\alpha_k\}_{k=1}^L} \left( P[U_1 < 0 | \{\alpha_k\}_{k=1}^L] \right) \end{aligned} \quad (8-3-6)$$

$U_1$  به شرط دانستن  $\alpha_i$  ها یک متغیر گوسی است. برای توزیع شرطی متغیر تصمیم گیری  $U_1$  داریم:

$$U_1 |_{\{\alpha_k\}_{k=1}^L} \sim N \left( \sum_{k=1}^L 2E\alpha_k^2, \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 2EN_0 \right) \quad (9-3-6)$$

پس می توان نوشت:

$$P[U_1 < 0 | \{\alpha_k\}_{k=1}^L] = Q \left( \frac{\sqrt{\left( \sum_{k=1}^L 2E\alpha_k^2 \right)^2}}{N_0 \left( \sum_{k=1}^L 2E\alpha_k^2 \right)} \right) = Q \left( \sqrt{\sum_{k=1}^L \frac{2E}{N_0} \alpha_k^2} \right) \quad (10-3-6)$$

که در این رابطه  $E\alpha_k^2$  انرژی دریافتی از طریق کانال  $k$ ام است و لذا کل انرژی دریافتی برابر می‌شود با:

$$E' = \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 E$$

$$P_b = Q \left( \sqrt{2 \frac{E'}{N_0}} \right) \quad (11-3-6)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که اگر بهره کانال رندم نباشد، دایورسیتی باعث بهبود عملکرد نمی‌شود. می‌توان کل انرژی را در یک ارسال در نظر گرفت و همان عملکرد را بدست آورد. حال بهره کانال را رندم با توزیع رابلی در نظر می‌گیریم.  $\bar{\gamma}_c$  را متوسط SNR در هر کانال (هر بار ارسال) تعریف می‌کنیم که برای تمام کانال‌ها (تمام ارسالها) مساوی در نظر گرفته می‌شود. اگر  $E$  انرژی سیگنال و  $N_0/2$  چگالی نویز باشد داریم:

$$\bar{\gamma}_c = \frac{E}{N_0} E(\alpha_k^2) \quad (12-3-6)$$

حال  $\gamma_b$  را SNR بر بیت دریافتی در نظر می‌گیریم که می‌توان نوشت:

$$\gamma_b = \frac{E}{N_0} \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 \quad (13-3-6)$$

با فرض دانستن  $\alpha_i$ ها، احتمال خطای شرطی بصورت زیر در می‌آید:

$$P_b(\gamma_b) = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \quad (14-3-6)$$

برای بدست آوردن احتمال خطای غیر شرطی، باید از معادله بالا روی  $\gamma_b$  متوسط‌گیری شود. با توجه به اینکه ضرایب  $\alpha_k$  متغیرهای رابلی مستقل هستند،  $\gamma_b$  یک متغیر با توزیع chi-square با  $2L$  درجه آزادی است و داریم:

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{(L-1)! \bar{\gamma}_c^L} \gamma_b^{L-1} e^{-\gamma_b/\bar{\gamma}_c} \quad (15-3-6)$$

بنابراین احتمال خطا بصورت زیر در می‌آید:

$$P_e = \int_0^\infty P_b(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (16-3-6)$$

با محاسبه انتگرال فوق داریم:

$$P_e = \left[ \frac{1}{2}(1-\mu) \right]^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left[ \frac{1}{2}(1+\mu) \right]^k \quad (17-3-6)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{1+\bar{\gamma}_c}} \approx 1 - \frac{1}{2\bar{\gamma}_c}, \quad \bar{\gamma}_c \gg 1$$

در سیگنال به نویزهای بالا می‌توانیم از تقریب‌های زیر استفاده کنیم:

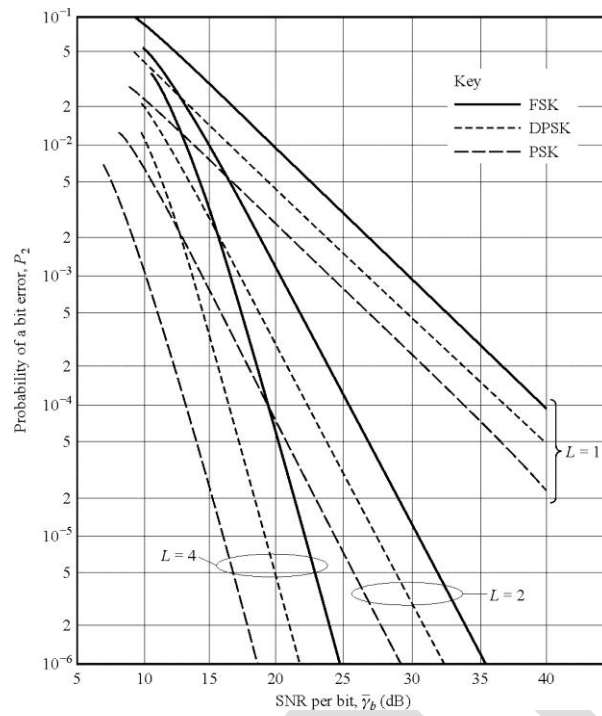
$$\frac{1-\mu}{2} \approx \frac{1}{4\bar{\gamma}_c}, \quad \frac{1+\mu}{2} \approx 1 \quad (18-3-6)$$

با استفاده از تقریب‌های (18-3-6)، احتمال خطا رابطه (17-3-6) بصورت زیر در می‌آید:

$$P_e \approx \left( \frac{1}{4\bar{\gamma}_c} \right)^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \approx \binom{2L-1}{L} \left( \frac{1}{4\bar{\gamma}_c} \right)^L \quad (19-3-6)$$

همانطور که از رابطه (19-3-6) پیداست، استفاده از دایورسیتی باعث شده است که احتمال خطا به صورت نمایی با توان  $L$  با SNR کاهش یابد. لذا با بکارگیری دایورسیتی رابطه معکوس به رابطه نمایی تبدیل می‌شود. روابط مشابهی را می‌توان برای مدولاسیون‌های دیگر با آشکارساز هم‌دوس و همچنین غیرهم‌دوس بدست آورد که در تمرین به آن پرداخته خواهد شد. شکل (4-6) منحنی احتمال خطا را بر حسب متوسط سیگنال به نویز بر بیت، یعنی  $\gamma_b$ ، برای چندین مدولاسیون متفاوت و همچنین برای مقادیر متفاوت  $L$  در صورت بکارگیری آشکارساز هم‌دوس را نشان می‌دهد. به ازای کل انرژی ارسالی ثابت در  $L$  بار ارسال، برای آشکارساز هم‌دوس در صورتیکه پارامترهای کانال را با خطای بسیار ناچیز بدانیم، همواره با افزایش دایورسیتی، یعنی پارامتر  $L$  بهبود عملکرد خواهیم داشت. در حالیکه برای آشکارساز غیر هم‌دوس اینطور نیست و یک  $L$  بهینه وجود دارد که مقدار آن با افزایش کل انرژی ارسالی افزایش می‌یابد.





شکل (۴-۶) - عملکرد مدولاسیون‌های باینری با استفاده از دایورسیتی

## فصل ۷

## کانال‌های با تداخل بین سمبولی (ISI)

در فصل‌های گذشته گیرنده بهینه و آنالیز عملکرد آنرا برای کانال‌های مختلفی که محدودیت پهنای باند نداشتند بدست آوردیم. در این بخش می‌خواهیم کانال‌هایی را بررسی نمائیم که محدودیت پهنای باندی تعیین شده برابر با  $W$  هرتز دارند. نخستین مطلبی که در این زمینه اهمیت دارد پیدا کردن شکل موج‌های مناسب برای این کانال‌ها است. محدودیت پهنای باند باعث ایجاد تداخل بین سمبولی<sup>۱</sup> می‌شود. در ادامه این فصل، ابتدا به حداکثر ریت ارسال در حالی که ISI رخ نداده باشد خواهیم پرداخت. نشان خواهیم داد که برای این منظور (داشتن حداکثر ریت بدون ISI) باید از شکل موج غیر عملی سینک (Sinc) استفاده نمود. برای رفع این مشکل، ISI کنترل شده (سیگنالینگ با پاسخ جزئی<sup>۲</sup>) با بکارگیری شکل موج‌های کسینوسی افزاینده<sup>۳</sup> مطرح شده است که در ادامه مروری سریع بر این نوع ارسال خواهیم داشت. سپس به کانال‌های با ISI در حالت کلی پرداخته و نحوه آشکارسازی در این کانال‌ها را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. آشکارساز در کانال با ISI را اکوالایزر نیز می‌نامند. آشکارسازی در این کانال‌ها در دو دسته زیر قرار می‌گیرند:

آشکارساز (اکوالایزر) سمبل بوسیله سمبل: در این آشکارساز بر اساس شکل موج دریافتی در هر فاصله سیگنالینگ در مورد دیتای ارسالی در آن فاصله سیگنالینگ تصمیم‌گیری می‌شود. این یک آشکارساز زیر بهینه است. خواهیم دید که این گیرنده نسبت به حالت بدون ISI افت عملکرد خواهد داشت.

آشکارساز (اکوالایزر) دنباله بوسیله دنباله: آشکارساز **M.L. (Maximum Likelihood)**، که یک آشکارساز بهینه در کانال با ورودی‌های هم احتمال است، در کانال‌های با پهنای باند محدود، یک آشکارساز دنباله

<sup>۱</sup> ISI (Inter symbol Interference)

<sup>۲</sup> Partial Response Signalling

<sup>۳</sup> Raised Cosine Waveform

بوسیله دنباله است. پیچیدگی این آشکارساز بصورت نمائی با طول دنباله ارسالی افزایش می‌یابد. برای این آشکارساز، الگوریتم ویتربی مطرح شده است که پیچیدگی آن بصورت خطی با طول دنباله اما بصورت نمائی با حافظه کانال افزایش می‌یابد.

اکوالایزرهای زیر بهینه، که آشکارسازهای سمبل بوسیله سمبل هستند، عبارتند از اکوالایزرهای خطی (LE)<sup>۱</sup> و با فیدبک (DFE)<sup>۲</sup>. این اکوالایزرها با دو معیار

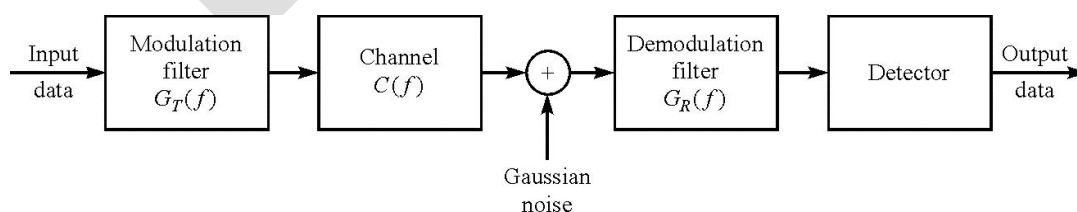
۱- ZF, Zero- Forcing

۲- MMSE, Minimum Mean Square error

طراحی می‌شوند. بعد از معرفی اکوالایزرهای زیر بهینه، الگوریتم ویتربی جهت پیاده‌سازی اکوالایزر ML معرفی می‌شود و از آنجا که پیچیدگی الگوریتم ویتربی بصورت نمائی با حافظه کانال افزایش می‌یابد، آشکارساز دنباله بوسیله دنباله با کاهش پیچیدگی RCSD<sup>۳</sup> معرفی می‌شود که در ساختار ترکیبی آن از DF استفاده شده است. این نکته قابل ذکر است که در بررسی اکوالایزرها خود را محدود به مدولاتورهای خطی می‌کنیم.

### ۱-۷) طراحی سیگنال برای کانال با پهنای باند $W$ :

در شکل (۱-۷) سیستم کلی که در این بخش بررسی می‌شود نشان داده شده است.



<sup>۱</sup> Linear Equalizer

<sup>۲</sup> Decision Feedback Equalizer

<sup>۳</sup> Reduced Complexity Sequence Detector

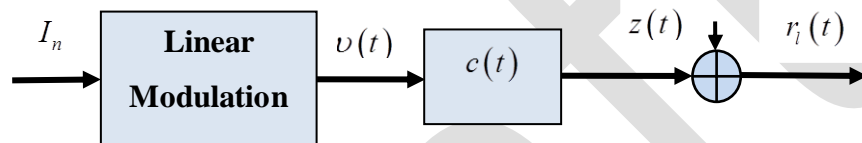
شکل (۱-۷) - مدل سیستم برای طراحی فیلترهای مدولاسیون و دمدولاسیون

در این بخش ابتدا حداکثر ریت ارسال برای اینکه ISI نداشته باشیم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای مدولاتورهای خطی سیگنال معادل باند پایه ارسال برابر است با:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n g_T(t - nT) \quad (1-1-7)$$

شکل (۲-۷) بخش اول دیاگرام شکل (۱-۷) را با سیگنال‌های معادل باند پایه نشان می‌دهد. در این شکل فرض می‌کنیم که  $c(t)$  پاسخ ضربه معادل باند پایه کانال است.

با استفاده از شکل (۲-۷) می‌توان نوشت:



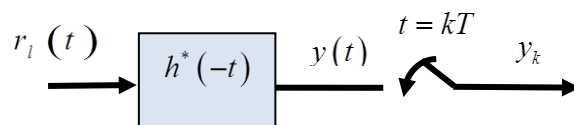
شکل (۲-۷) - بلوک دیاگرام کانال با پهنای باند محدود

$$r_l(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n h(t - nT) + z(t) \quad (2-1-7)$$

$$h(t) = \frac{1}{2} c(t) * g_T(t)$$

که در آن  $z(t)$  نویز معادل باند پایه است. متعاقباً خواهیم دید که فیلتر بهینه در ورودی گیرنده یک فیلتر منطبق بر شکل موج دریافتی، یعنی  $h(t)$  است و در صورتیکه از خروجی فیلتر با پیروی ارسال سمبول نمونه برداری شود هیچ اطلاعات مفیدی از بین نخواهد رفت. ابتدا از علی بودن صرف نظر می‌کنیم. (با استفاده از شیفت زمانی براحتی مشکل علی بودن برطرف می‌شود).

بخش دوم دیاگرام سیستم شکل (۱-۷) به همراه خروجی نمونه بردار در شکل زیر نشان داده شده است:



شکل (۳-۷) - گیرنده با فیلتر منطبق

تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 v(t) &\triangleq (1/2)z(t) * h^*(-t) \\
 y(t) &= (1/2)r_l(t) * h^*(-t) \\
 x(t) &\triangleq (1/4)g_T(t) * c(t) * h^*(-t) = (1/2)h(t) * h^*(-t)
 \end{aligned}
 \tag{۳-۱-۷}$$

با استفاده از (۳-۱-۷) می توان نوشت:

$$y(t) = (1/2)r_l(t) * h^*(-t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x(t-nT) + v(t) \tag{۴-۱-۷}$$

$$y_k = y(t)|_{t=kT} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x(kT-nT) + v_k \Rightarrow y_k = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x_{k-n} + v_k, \quad k=0,1,\dots$$

که در این روابط داریم:

$$x_n = x(t)|_{t=nT} \tag{۵-۱-۷}$$

حال می توان نوشت:

$$y_k = x_0 I_k + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n} + v_k \tag{۶-۱-۷}$$

در رابطه (۶-۱-۷)، عبارت دوم یعنی  $\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n}$ ، مربوط به ISI است. بنابراین نتیجه می گیریم که شرط لازم و کافی برای عدم وجود ISI این است که:

$$x_{k-n} = 0 \quad k \neq n \Rightarrow x(t)|_{t=nT} = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \tag{۷-۱-۷}$$

قضیه (۷-۱) قضیه نایکوئیست: شرط لازم و کافی برای عدم وجود ISI این است که:

$$B(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f+m/T) = T \tag{۸-۱-۷}$$

$B(f)$  را اسپکترم تاشده  $x(t)$  می گویند. اثبات این قضیه در کتاب درسی آمده است. سه حالت زیر را با توجه به رابطه بین پهنای باند کانال و پریرود ارسال سیگنال در نظر می گیریم و برای هر یک از حالتها بررسی می کنیم که آیا می توان با انتخاب مناسب شکل موج مدولاتور از ISI اجتناب نمود. ابتدا توجه می کنیم که روابط زیر را با استفاده از (۳-۱-۷) در حوزه فرکانس می توان نوشت:

$$C(f) = 0 \quad |f| > W$$

$$X(f) = (1/2)H(f)H^*(f) = (1/2)|H(f)|^2 \quad (9-1-7)$$

$$H(f) = (1/2)C(f)G_T(f) \Rightarrow X(f) = 0 \quad |f| > W$$

که در آن  $G_T(f)$  بیانگر فیلتر منطبق در فرستنده است. حالت‌های متفاوت  $B(f)$  در شکل (۴-۷) نشان داده شده‌اند.

۱-  $\frac{1}{T} > 2W$ : این حالت در شکل (a-۴-۷) نمایش داده شده است. همانطور که پیداست رابطه (۸-۱-۷) به هیچ عنوان نمی‌تواند برقرار باشد. یعنی برای نرخ ارسال بزرگتر از  $2W$  حتماً با ISI مواجه خواهیم شد.

۲-  $\frac{1}{T} = 2W$ : این حالت در شکل (b-۴-۷) آمده است. اگر بخواهد رابطه (۸-۱-۷) برقرار باشد باید داشته باشیم:

$$X(f) = (1/2)|H(f)|^2 = T \quad |f| < W \quad (10-1-7)$$

یعنی صرفاً یک شکل موج برای مدولاتور وجود دارد که به ازای آن ISI نخواهیم داشت که این شکل موج بصورت زیر بیان می‌شود:

$$X(f) = \begin{cases} T & |f| < W \\ 0 & o.w. \end{cases} \quad (11-1-7)$$

شکل موج حوزه زمان سیگنال فوق برابر است با:

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} = \text{sinc}(\pi t/T) \quad (12-1-7)$$

لذا حداقل مقدار  $T$  برای اینکه ارسال بدون ISI داشته باشیم برابر است با  $T = 1/2W$ . اولین مشکل این سیگنال این است که غیر علی است. این مشکل براحتی با شیفت زمانی قابل حل است یعنی از سیگنال  $\text{sinc}(\pi(t-t_0)/T)$  استفاده می‌شود و  $t_0$ ، شیفت زمانی، طوری انتخاب می‌گردد که  $\text{sinc}(\pi(t-t_0)/T) \approx 0$ . مشکل اصلی این است که نرخ نزول این سیگنال به صفر کم است. نرخ نزول دنباله سیگنال برابر  $1/t$  است. این باعث می‌شود که حتی یک اشتباه کوچک در زمان نمونه برداری در

خروجی فیلتر منطبق یک دنباله نامتناهی از مولفه‌های ISI را ایجاد کند. این دنباله ISI بصورت مطلق جمع-پذیر نیست، زیرا  $\sum_n \frac{1}{nT}$  همگرا نیست و بنابراین ISI حاصل همگرا نخواهد شد.

۳-  $\frac{1}{T} < 2W$ : این حالت در شکل (۷-۴-۷) نمایش داده شده است. همانطور که مشخص است، در این حالت سیگنال‌های زیادی می‌توان یافت که در صورت بکارگیری آنها با ISI مواجه نخواهیم شد. یک دسته از سیگنال‌های خیلی مشهور و پرکاربرد، شکل موج‌های کسینوسی افزاینده raised cosine بصورت زیر است:

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} T & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi T}{\beta} \left( |f| - \frac{1-\beta}{2T} \right) \right] \right\} & \frac{1+\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & |f| > \frac{1+\beta}{2T} \end{cases} \quad (۷-۱۳)$$

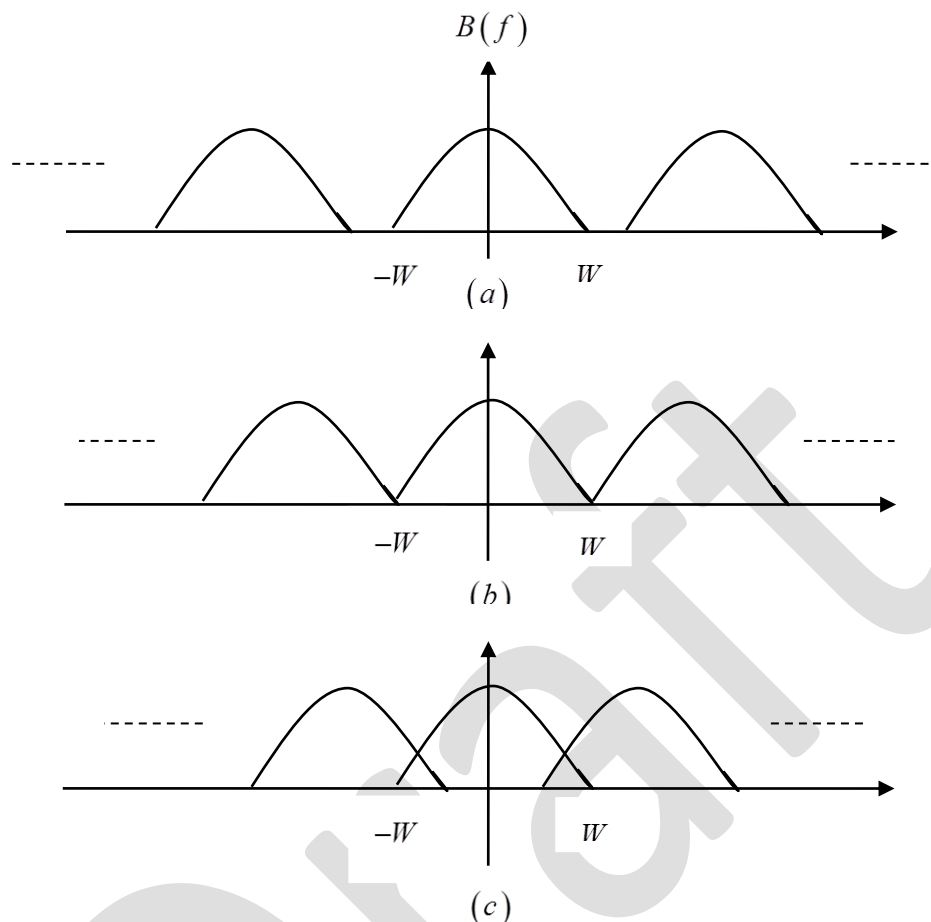
که  $\beta$  پارامتر شکل موج است. با توجه به خاصیت تغییرات نرم طیف تابع raised cosine، می‌توان فیلترهای عملی برای فرستنده و گیرنده طراحی کرد که طیف کلی raised cosine بدست آید. فرض کنیم که کانال ایده‌آل باشد یعنی در شکل (۷-۱) داشته باشیم  $C(f) = 1 \quad |f| \leq W$ . بنابراین با توجه به (۷-۱۳) می‌توان نوشت:

$$X_{rc}(f) = (1/8) \cdot G_T(f) G_R(f) = (1/8) \cdot |G_T(f)|^2 \quad (۷-۱۴)$$

که در تساوی آخر در (۷-۱۴) از این نکته استفاده شده است که در گیرنده از فیلتر منطبق استفاده می‌گردد و  $G_T(f) = G_R^*(f)$ . پس براحتی از (۷-۱۴) نتیجه می‌شود که:

$$G_R(f) = 2\sqrt{2|X_{rc}(f)|} e^{-j2\pi f t_0} \quad (۷-۱۵)$$

که  $t_0$  یک تاخیر برای امکان پیاده‌سازی عملی و علی کردن سیستم است.



شکل (۷-۴) - حالت‌های مختلف در قضیه نایکوئیست

۷-۲) طراحی سیگنال برای کانال با پهنای باند محدود، سیگنالینگ دوباینری و دوباینری اصلاح شده:

همانطور که در بخش قبل ملاحظه شد، برای اینکه یک سیگنالینگ بدون ISI و عملی داشته باشیم باید ریت ارسال را پائینتر از ریت نایکوئیست که  $2W$  سمبل بر ثانیه است انتخاب کنیم. اما می‌توان با استفاده از ISI کنترل شده همچنان به ریت نایکوئیست دست یافت که در ادامه به آن می‌پردازیم.  
 اگر بار دیگر به سراغ مدل کانال که در شکل‌های (۷-۲) و (۷-۳) آمده است برویم، داریم:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x(t-nT) + v(t) \quad (۷-۲-۱)$$



به طور کلی سیگنال‌های به شکل زیر را

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right] \quad (2-2-7)$$

که طیف آنها نیز بصورت زیر است

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) e^{-jn\pi f/W} & |f| \leq W \\ 0 & |f| > W \end{cases} \quad (3-2-7)$$

را سیگنال‌های با پاسخ نسبی گویند. با انتخاب بعضی از مقادیر  $x(n/2W)$  مخالف صفر می‌توان سیگنال-هائی با ISI کنترل شده و مقدار معلوم ایجاد کرد. این انتخاب به ما اجازه می‌دهد که با ریت نایکوئیست ( $1/T=2W$ ) ارسال کنیم. آشکارسازی این سیگنال‌ها برای چند نمونه در ادامه بحث می‌شود.

سیگنالینگ دوباینری<sup>۱</sup>:

رابطه (3-2-7) را در نظر بگیرید. برای سیگنالینگ دوباینری داریم:

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases} \quad (4-2-7)$$

پس داریم:

$$y_n = \sum I_k x_{n-k} + v_k = I_n + I_{n-1} + v_n \quad (5-2-7)$$

رابطه (3-2-7) بصورت زیر ساده می‌شود:

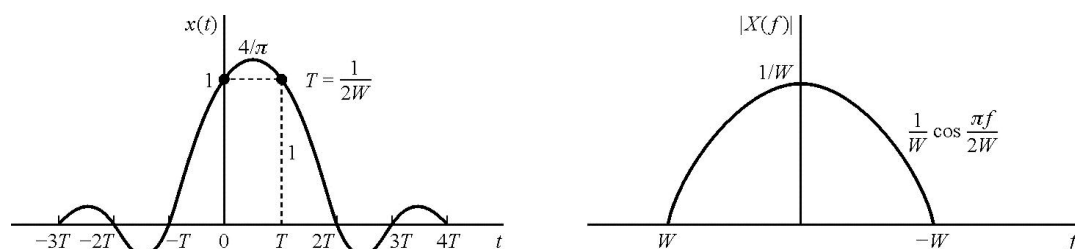
$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} (1 + e^{-j\pi f/W}) & |f| < W \\ 0 & \text{oth} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{W} e^{-j\pi f/2W} \cos\left(\frac{\pi f}{2W}\right) & |f| < W \\ 0 & \text{oth} \end{cases} \quad (6-2-7)$$

لذا در حوزه زمان می‌توان نوشت:

$$x(t) = \text{sinc}(2\pi Wt) + \text{sinc}\left[2\pi\left(Wt - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (7-2-7)$$

<sup>۱</sup> Doubinary

مشخصات حوزه زمان و فرکانس سیگنال دوباینری در شکل (۵-۷) نشان داده شده است. بسادگی می توان مشاهده نمود که شکل تابع sinc را نخواهیم داشت و  $x(t)$  با سرعت  $\frac{1}{f^2}$  به سمت صفر کاهش می یابد، لذا نسبت به خطای زمان نمونه برداری مقاومتر است.



شکل (۵-۷) - مشخصات حوزه زمان و فرکانس سیگنال دوباینری

سیگنالینگ دوباینری اصلاح شده:

یک نمونه دیگر از سیگنال با پاسخ نسبی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_{-1} &= 1 \\ x_n &= 0 \quad n \neq 1, -1 \end{aligned} \quad (۸-۲-۷)$$

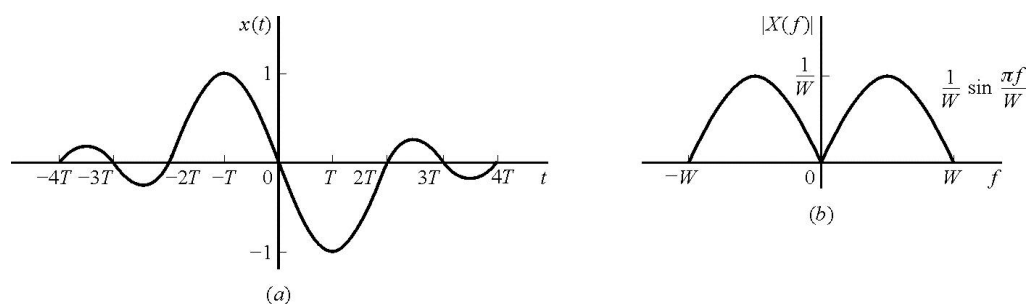
پس می توان نوشت:

$$y_n = I_{n+1} - I_{n-1} + v_n \quad (۹-۲-۷)$$

شکل زمانی این سیگنال بصورت زیر است:

$$x(t) = \text{sinc} \frac{\pi(t+T)}{T} - \text{sinc} \frac{\pi(t-T)}{T} \quad (۱۰-۲-۷)$$

مشخصات حوزه زمان و فرکانس سیگنال دوباینری در شکل (۶-۷) نشان داده شده است.





$$P_m = D_m \oplus P_{m-1} \quad (13-2-7)$$

سپس  $P_m$  وارد مدولاتور باینری می‌گردد. لذا در خروجی مدولاتور داریم:  $I_m = -1$  اگر  $P_m = 0$  و  $I_m = 1$  اگر  $P_m = 1$ . در حقیقت می‌توان نوشت:

$$I_m = 2P_m - 1 \quad (14-2-7)$$

اگر نویز را در نظر نگیریم، از رابطه (5-2-7) و با تعریف  $B_m$  داریم:

$$\begin{aligned} B_m &\triangleq I_m + I_{m-1} \\ &= (2P_m - 1) + (2P_{m-1} - 1) \\ &= 2(P_{m-1} + P_m - 1) \end{aligned} \quad (15-2-7)$$

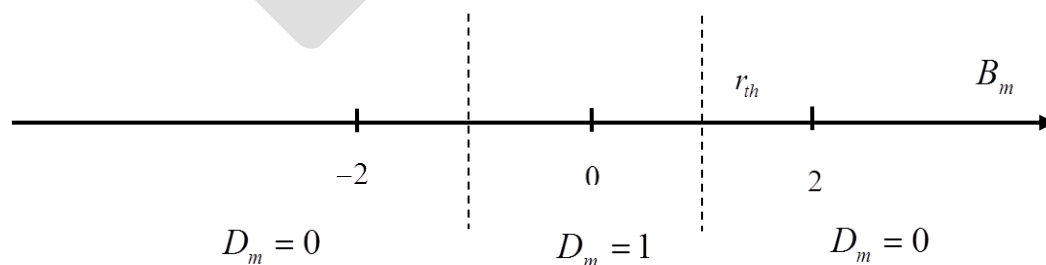
که در آن مقادیر  $B_m$  مقادیر  $-2, 0, +2$  را با احتمال‌های پیشین به ترتیب  $1/4, 1/2, 1/4$  اختیار می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$P_{m-1} + P_m = \frac{1}{2} y_m + 1 \quad (16-2-7)$$

با استفاده از (13-2-7) و (16-2-7) داریم:

$$D_m = \frac{1}{2} B_m + 1 \pmod{2} \quad (17-2-7)$$

بنابراین اگر  $B_m = \pm 2$  باشد،  $D_m$  به صفر و اگر  $B_m = 0$  باشد،  $D_m$  به ۱ آشکارسازی می‌شود. اگر فرض کنیم که محیط نویزی است، می‌توان از نواحی تصمیم‌گیری مطابق شکل زیر استفاده نمود.



شکل (7-7) - نواحی تصمیم‌گیری برای گیرنده دوباینری در حضور نویز

برای محاسبه احتمال خطا می توان نوشت:

$$P_e = \frac{1}{4}P[e | B_m = -2] + \frac{1}{2}P[e | B_m = 0] + \frac{1}{4}P[e | B_m = 2] \quad (18-2-7)$$

$$v_n \sim N(0, \sigma_v^2)$$

پس می توان نوشت:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2}P[v_n > 2 - r_{th} \text{ or } v_n < 2 + r_{th}] \\ &+ \frac{1}{2}P[|v_n| > r_{th}] \quad (19-2-7) \\ &= \frac{1}{2}Q\left(\frac{2 - r_{th}}{\sigma_v}\right) - \frac{1}{2}Q\left(\frac{2 + r_{th}}{\sigma_v}\right) + Q\left(\frac{r_{th}}{\sigma_v}\right) \end{aligned}$$

می توان سطح آستانه بهینه را بصورت زیر بدست آورد:

$$\frac{\partial P_e}{\partial r_{th}} = 0 \Rightarrow r_{th_{opt}} \quad (20-2-7)$$

اما معمولا از سطح آستانه های  $\pm 1$  استفاده می شود. با استفاده از  $r_{th} = 1$  احتمال خطای رابطه (19-2-7) بصورت زیر در می آید:

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1}{\sigma_v}\right) - \frac{1}{2}Q\left(\frac{3}{\sigma_v}\right) + Q\left(\frac{1}{\sigma_v}\right) \approx \frac{3}{2}Q\left(\frac{1}{\sigma_v}\right) \quad (21-2-7)$$

جهت محاسبه احتمال خطا لازم است واریانس نویز  $(\sigma_v^2)$  را بدست آوریم. داریم:

$$X(f) = (1/2)|H(f)|^2 \quad (22-2-7)$$

با استفاده از (22-2-7) و (6-2-7)، و با توجه به اینکه در شکل (2-7) نویز از فیلتر  $h(-t)$  عبور می کند، می توان نوشت:

$$\sigma_v^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)| df = \frac{N_0}{2} \int_{-W}^W \frac{1}{W} \cos\left(\frac{\pi f}{2W}\right) df = \frac{2N_0}{\pi} \quad (23-2-7)$$

بنابراین با استفاده از (21-2-7) و (23-2-7) داریم:

$$P_b = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{\pi}{2N_0}}\right) \quad (24-2-7)$$

برای محاسبه  $E_b$ ، انرژی شکل موج خروجی مدولاتور را بدست می آوریم:

$$E_b = \int |G_T(f)|^2 df = \int |X(f)| df = \frac{4}{\pi} \quad (25-2-7)$$

که در آن از (25-2-7) استفاده شده است و در ضمن فرض شده است که  $|C(f)|=1$  برای حالتی که ISI نداریم از مطالب گذشته براحتی می توان نوشت:

$$P_{b, noISI} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (26-2-7)$$

اگر کانال با ISI را در نظر بگیریم، با استفاده از (21-2-7) و (25-2-7) داریم:

$$P_{b, ISI} = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (27-2-7)$$

با مقایسه (26-2-7) و (27-2-7) و این مطلب که  $10\log\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = -2.1dB$ ، می توان ملاحظه کرد که ارسال با حداکثر ریت  $2W$  سمبل بر ثانیه و بکارگیری آشکارساز ساده سمبل بوسیله سمبل، موجب افت عملکرد به اندازه تقریباً  $2dB$  در مقایسه با کانال بدون ISI می شود.

در پایان این بخش به چند نکته توجه می کنیم. در طراحی سیگنال ها در این بخش مشخصات کانال خیلی مورد توجه قرار نگرفت. در (15-1-7) برای طراحی فیلترهای ورودی و خروجی از کانال ایده آل استفاده شد. در مرجع [1]، بحث کاملی در مورد طراحی فیلتر ورودی و خروجی برای دو حالت کانال ایده آل و غیر ایده آل انجام شده است.

### 3-7) آشکارساز دنباله بوسیله دنباله M.L:

همانطور که قبلاً اشاره شد، آشکارساز بهینه آشکارساز دنباله بوسیله دنباله است. فرض کنید که طول دنباله ارسال  $N$  باشد. می توان برای سیگنال دریافتی در باند پایه نوشت:

$$r_i(t) = \sum_{n=1}^N I_n h(t-nT) + z(t) \quad (1-3-7)$$

اگر مدولاتور  $M$  تائی باشد، در حالت کلی  $M^N$  حالت (مقدار) مختلف برای دنباله ارسالی وجود خواهد داشت. در ادامه هدف این است که با استفاده از نتایج کانال بدون ISI، نحوه تصمیم گیری M.L را برای کانال با ISI بدست آوریم. برای این منظور فضای تصمیم گیری را به این  $M^N$  حالت گسترش می دهیم و برای آن گیرنده بهینه را طراحی می کنیم. این حالت ها (یا سیگنال ها) را با  $s(\{I_n\}, t)$  به ازای هر دنباله ممکن  $\{I_n\}$  نمایش می دهیم. برای گیرنده بهینه در کانال بدون ISI داشتیم:

$$\begin{aligned} MAP: \max_m \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int r_l(t) s_{lm}^*(t) dt \right\} + \eta_m \\ \eta_m = \frac{N_0}{2} \ln P_m - \frac{1}{2} E_m \end{aligned} \quad (2-3-7)$$

اگر سیگنال ها هم احتمال باشند، می توان نوشت:

$$\eta_m = -\frac{1}{2} E_m \quad (3-3-7)$$

اکنون رابطه (2-3-7) را برای سیگنال های گسترش یافته ادامه می دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} \max_{\{I_n\}} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int r_l(t) s^*(\{I_n\}, t) dt \right\} - \frac{1}{4} \int |s(\{I_n\}, t)|^2 dt \\ \equiv \max_{\{I_n\}} \operatorname{Re} \left\{ \int r_l(t) \sum_{n=1}^N I_n^* h^*(t-nT) dt \right\} \\ - \frac{1}{2} \int \sum_{n=1}^N I_n^* h^*(t-nT) \sum_{m=1}^N I_m h(t-mT) dt \quad (4-3-7) \\ \equiv \max_{\{I_n\}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N I_n^* \int h^*(t-nT) r_l(t) dt \right\} \\ - \frac{1}{2} \sum_{n,m} I_n^* I_m \int h^*(t-nT) h(t-mT) dt \end{aligned}$$

با استفاده از تعاریف (3-1-7) داریم:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1/2) h(t) * h^*(-t) = (1/2) \int h^*(\tau) h(t+\tau) d\tau \\ x_n &= x(t) \Big|_{t=nT} = (1/2) \int h^*(\tau) h(\tau+nT) d\tau \\ y_n &= y(t) \Big|_{t=nT} = \int (1/2) * r_l(\tau) h^*(\tau-nT) d\tau \end{aligned} \quad (5-3-7)$$

پس با جایگذاری (5-3-7) در رابطه (4-3-7) می توان نوشت:

$$MAP \equiv \max_{\{I_n\}} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N I_n^* y_n \right\} - \sum_{n,m} I_n^* I_m x_{n-m} \quad (6-3-7)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود  $y_n$  ها، خروجی‌های نمونه برداری شده فیلتر منطبق بر  $h(t)$  جهت تصمیم گیرنده بهینه آماره کافی می‌باشند. یعنی در پروسس تبدیل شکل موج دریافتی به دنباله  $\{y_n\}$  هیچ اطلاعات مفید از بین نمی‌رود، و بکارگیری فیلتر منطبق بر  $h(t)$  در ورودی گیرنده یک پردازش بهینه است، همانگونه که قبلاً هم مطرح شده بود.

با توجه به رابطه (6-3-7)، باید  $M^N$  دنباله را بررسی کنیم تا بتوانیم تصمیم گیری بهینه را انجام دهیم که در عمل غیر ممکن است. در حالت کلی در کانال با ISI پیچیدگی گیرنده بهینه به صورت نمایی با افزایش  $N$  افزایش می‌یابد. البته در عمل فرض می‌شود که تداخل یک سبمل تا بینهایت ادامه ندارد و روی تعداد محدودی از سبمل‌ها اثر می‌کند. یعنی فرض می‌شود که:

$$x_n = 0 \quad |n| > L \quad (7-3-7)$$

بنابراین خروجی دمدولاتور را می‌توان خروجی یک ماشین با تعداد حالت محدود<sup>1</sup> در نظر گرفت. با این فرض می‌توان از الگوریتم ویتربی برای آشکارسازی استفاده کرد که پیچیدگی آن بطور خطی با طول دنباله و بطور نمایی با طول حافظه کانال افزایش می‌یابد که به این مسأله در بخش (7-7) می‌پردازیم.

همانطور که از (6-3-7) پیداست و قبلاً هم مطرح شد، در صورتی ISI نداریم که  $x_{n-m} = 0$  برای  $n \neq m$ . اگر ISI نداشته باشیم رابطه (6-3-7) بصورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} MAP &\equiv \max_{\{I_n\}} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N I_n^* y_n \right\} - \sum_{n=1}^N |I_n|^2 x_0 \\ &\equiv \max_{\{I_n\}} 2 \sum_{n=1}^N \left[ \operatorname{Re} (I_n^* y_n) - \frac{1}{2} |I_n|^2 x_0 \right] \quad (8-3-7) \\ &\Leftrightarrow \equiv \max_{I_n} \operatorname{Re} (I_n^* y_n) - \frac{1}{2} |I_n|^2 x_0 \end{aligned}$$

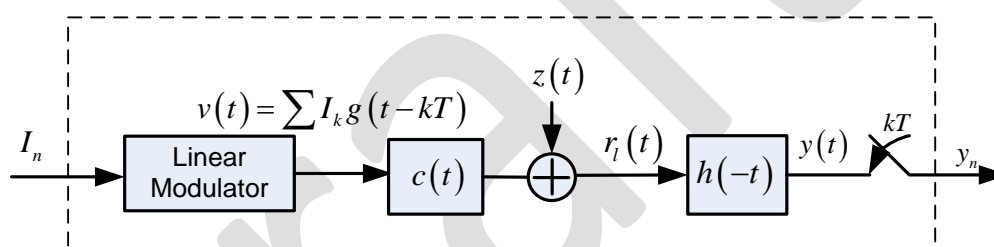
که رابطه آخر از استقلال  $I_n$  ها نتیجه می‌شود. پس می‌توان مشاهده کرد که اگر ISI نداشته باشیم، آشکارساز بهینه دنباله بوسیله دنباله به آشکارساز ساده‌تر سبمل بوسیله سبمل تبدیل می‌شود. این مسأله باعث می‌شود



که بجای یک جستجو در فضای  $N$  بعدی،  $M$  جستجو در فضای یک بعدی را انجام داد. به عنوان تمرین نشان دهید که رابطه (۷-۳-۸) به همان روابط قبلی کانال بدون محدودیت پهنای باند تبدیل می‌شود.

### ۴-۷) مدل‌های گسسته برای کانال با ISI

برای بررسی کانال‌های با ISI، مناسب است که یک مدل گسسته برای کانال بدست آوریم. چون فرستنده با ریت  $1/T$  سمبل بر ثانیه ارسال می‌کند و از طرف دیگر در خروجی نمونه بردار نیز با همین ریت سیگنال‌ها نمونه‌برداری می‌شوند، بنابراین می‌توان کل کانال را بصورت یک کانال گسسته مدل کرد. دیاگرام کلی کانال و سیگنال‌های هر قسمت در شکل زیر نمایش داده شده است.

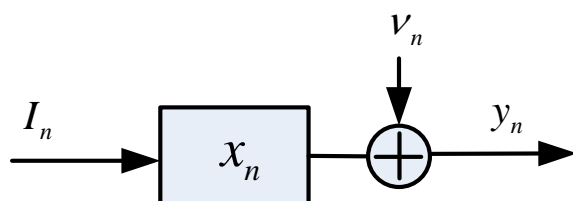


شکل (۷-۸) - مدل کانال گسترش یافته گسسته

با استفاده از شکل (۷-۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (1/2)r_i(t) * h^*(-t) \\
 y_n &= \int (1/2)r_i(t)h^*(t-nT)dt = \sum_k I_k x(nT-kT) + v(nT) \quad (1-4-7) \\
 &= \sum_k I_k x_{n-k} + v_n = I_n * x_n + v_n
 \end{aligned}$$

با استفاده از (۷-۴-۱) می‌توان کانال گسسته معادل را یافت. این کانال در شکل زیر نشان داده شده است. این مدل کانال، مدل گسسته  $X$  نامیده می‌شود.



شکل (۹-۷) - مدل گسسته  $X$

مشکل اصلی این مدل در بررسی عملکرد سیستم‌های مختلف، نویز رنگی آن است که در ادامه به آن می‌پردازیم. برای نویز  $v_n$  که در شکل (۹-۷) نشان داده شده است داریم:

$$v_n = \int (1/2) z(t) h^*(t-nT) dt \quad (۲-۴-۷)$$

$$R_v(n, k) = E(v_n v_k^*)$$

می‌توان نوشت:

$$R_v(n, k) = E(v_n v_k^*) = \int E[z(t) z^*(t')] h^*(t-nT) h(t'-kT) dt dt' \quad (۳-۴-۷)$$

$$= 2N_0 \int (1/4) h^*(t-nT) h(t-kT) dt$$

$$= N_0 x_{n-k}$$

نکته: با استفاده از رابطه (۳-۴-۷) می‌توان ملاحظه کرد که اگر ISI داشته باشیم، یعنی  $x_k \neq 0$   $k \neq 0$ ، چگالی طیف نویز صاف نیست و نویز سفید نخواهد بود.

در عمل ممکن است که تمام جملات  $x_n$  تا بینهایت ادامه نداشته باشد. فرض کنید که داشته باشیم:

$$x_n = x(t)|_{t=nT} \approx 0 \quad |n| > L \quad (۴-۴-۷)$$

در این حالت  $L$  را طول حافظه کانال می‌نامند. با گرفتن تبدیل  $Z$  از  $x_n$ ، می‌توان نوشت:

$$X(z) = \sum_{k=-L}^L x_k z^{-k}, \quad x_k = x_{-k}^* \quad (۵-۴-۷)$$

رابطه  $x_k = x_{-k}^*$  بسادگی از (۳-۱-۷) بدست می‌آید. پس با استفاده از (۳-۴-۷) برای چگالی طیف نویز داریم:

$$S_v(\omega) = N_0 X(e^{j\omega T}) \quad (۶-۴-۷)$$

در بخش‌های گذشته دیدیم که کار کردن با نویز سفید خیلی راحت است. به همین دلیل می‌توان در خروجی کانال از یک فیلتر سفیدکننده استفاده کرد. قبلاً دیدیم که استفاده از یک فیلتر معکوس‌پذیر در خروجی کانال عملکرد سیستم را تغییر نمی‌دهد.

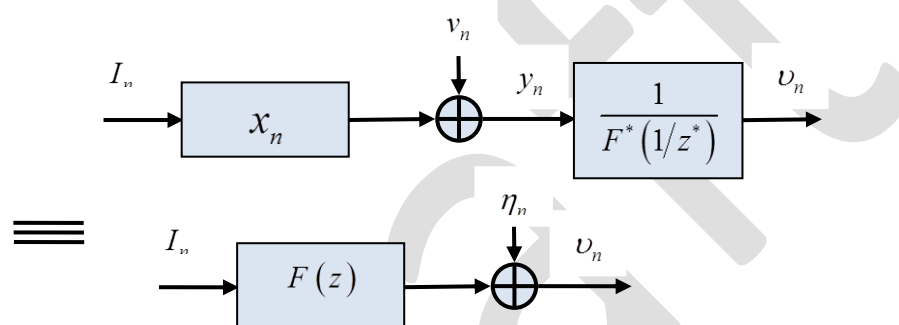
با توجه به اینکه  $x_k = x_{-k}^*$ ، می‌توان نوشت:

$$X(z) = X^*(1/z^*) \quad (۷-۴-۷)$$

بنابراین  $2L$  ریشه  $X(z)$  دارای تقارن هستند یعنی اگر  $\rho$  ریشه آن باشد،  $1/\rho^*$  نیز یک ریشه است. لذا  $X(z)$  را همواره می‌توان بصورت زیر تجزیه کرد:

$$X(z) = F(z)F^*(1/z^*) \quad (۸-۴-۷)$$

که در این رابطه  $F(z)$  یک چندجمله‌ای از درجه  $L$  است که می‌تواند علی و منییم فاز انتخاب گردد. بنابراین می‌توان از معکوس  $F^*(1/z^*)$  بعنوان فیلتر سفید کننده استفاده نمود. به شکل زیر توجه کنید که در آن نتیجه استفاده از یک فیلتر سفید کننده نشان داده شده است:



شکل (۷-۱۰) - کانال مدل  $X$  با فیلتر سفید کننده

با استفاده از این فیلتر سفید کننده به مدل  $F$  برای کانال گسسته می‌رسیم که در شکل (۷-۱۰) نشان داده شده است. برای طیف نویز در مدل  $F$  داریم:

$$S_{\eta}(\omega) = S_v(\omega) \cdot \frac{1}{F(e^{j\omega T})F^*(e^{j\omega T})} = N_0 X(e^{j\omega T}) \frac{1}{X(e^{j\omega T})} = N_0 \quad (۹-۴-۷)$$

بنابراین در مدل  $F$ ، نویز کانال گوسی سفید با چگالی طیفی  $N_0$  است. این مدل را مدل کانال گسسته اصلاح شده با نویز گوسی سفید یا کانال مدل  $F$  گویند. با استفاده از (۷-۴-۸) رابطه زیر را بین ضرایب  $x_k$  و  $f_k$  می‌توان نوشت:

$$x_k = f_k * f_k^* = \sum_{n=0}^{L-k} f_{n+k} f_n^*, \quad k = 0, 1, \dots, L \quad (۱۰-۴-۷)$$

رابطه ورودی-خروجی نیز در مدل کانال  $F$  بصورت زیر خواهد بود:

$$v_k = \sum_{n=0}^L f_n I_{k-n} + \eta_k \quad (11-4-7)$$

برای فهم بهتر مطلب به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۷-۱) فرض کنید که برای  $g(t)$  داریم:

$$\begin{cases} \int |g(t)|^2 dt = 1 \\ g(t) = 0, \quad T < t < 0 \\ c(t) = \delta(t) + a\delta(t-T) \end{cases} \quad (12-4-7)$$

که  $c(t)$  پاسخ ضربه کانال است. با استفاده از (۷-۴-۱۲) و (۷-۱-۳) داریم:

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t) + ag(t-T) \\ x(t) &= \frac{1}{2} \int h^*(\tau) h(\tau+t) d\tau \end{aligned} \quad (13-4-7)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{2} \int [g^*(\tau) + a^* g(\tau-T)] [g(\tau+kT) + ag(\tau+kT-T)] \\ x_0 &= \frac{1}{2} \int |g(\tau)|^2 d\tau + |a|^2 \int |g(\tau-T)|^2 d\tau = \frac{1}{2} (1 + |a|^2) \end{aligned} \quad (14-4-7)$$

پس با ساده سازی رابطه (۷-۴-۱۴) داریم:

$$x_k = \begin{cases} a^*/2 & (k = -1) \\ \frac{1+|a|^2}{2} & (k = 0) \\ a/2 & (k = +1) \end{cases} \quad (15-4-7)$$

$$x_k = 0 \quad |k| > 1$$

تبدیل Z دنباله  $x_k$ ، و  $F(z)$  معادل بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-1}^1 x_k z^{-k} = \frac{1}{2} [a^* z + (1+|a|^2) + az^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} (az^{-1} + 1)(a^* z + 1), \quad \text{if } |a| < 1 \rightarrow F(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (az^{-1} + 1) \quad (16-4-7) \\ &= \frac{1}{2} (z+a)(z^{-1} + a^*), \quad \text{if } |a| > 1 \rightarrow F(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (z^{-1} + a^*) \end{aligned}$$

## (۵-۷) اکوالایزرهای خطی

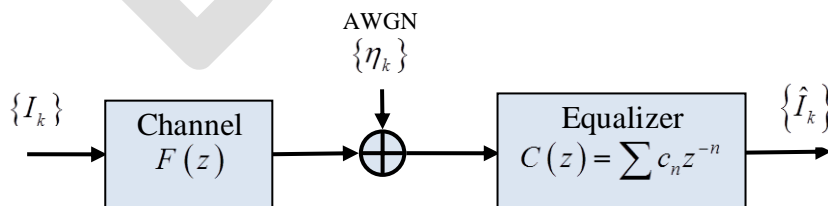
در این بخش و بخش بعد اکوالایزرهای زیر بهینه مطرح می‌شوند. در این بخش به نوع اول یعنی اکوالایزرهای خطی می‌پردازیم. برای طراحی اکوالایزر هدف اصلی بدست آوردن ضرایب  $c_n$  است. بهترین معیار مینیمم کردن احتمال خطا است. ولی احتمال خطا یک تابع غیرخطی از ضرایب  $c_n$  است و عملاً استفاده از آن برای بدست آوردن این ضرایب ممکن نیست. دو معیار عملی برای بدست آوردن ضرایب اکوالایزرها موجود است.

۱- معیار Zero-Forcing (ZF): در این معیار صرفاً اثر ISI در نظر گرفته می‌شود و هدف مینیمم کردن اثر ISI است.

۲- معیار Min. Mean Square Error (MMSE): در این معیار اثر ISI و نویز با هم در نظر گرفته می‌شود. این معیار متوسط مجذور خطا را حداقل می‌کند.

### معیار Zero-Forcing (ZF):

شکل (۷-۱۱) یک اکوالایزر خطی را در خروجی یک کانال با مدل  $F$  نشان می‌دهد که بصورت یک فیلتر خطی است. ورودی این اکوالایزر خروجی کانال است و خروجی آن برای آشکارسازی دنباله ارسالی با فرض عدم وجود ISI مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر مقدار آشکارسازی شده، یعنی  $\hat{I}_n$ ، با مقدار ارسالی متفاوت باشد خطا رخ می‌دهد.



شکل (۷-۱۱) - اکوالایزر خطی در مدل کانال  $F$

با توجه به شکل (۷-۱۱) روابط زیر را می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\hat{I}_k &= v_k * c_k \\ v_k &= I_k * f_k + \eta_k \\ \hat{I}_k &= I_k * f_k * c_k + \eta_k * c_k\end{aligned}\quad (1-5-7)$$

تعریف می‌کنیم که  $q_k = f_k * c_k$ . بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\hat{I}_k &= I_k * q_k + \eta_k * c_k \\ &= q_0 I_k + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} I_{n-k} q_n + \eta_k * c_k\end{aligned}\quad (2-5-7)$$

ترم دوم در (2-5-7) ترم ISI است. مقدار ماکزیمم ترم ISI را حداکثر تداخل<sup>1</sup> می‌نامند و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$D(\{c_k\}) \triangleq \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |q_n| > \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} I_{n-k} q_n \quad (3-5-7)$$

در بهترین حالت می‌خواهیم ترم ISI برابر صفر باشد. برای اینکه ISI برابر صفر باشد، برای  $q_n$  باید داشته باشیم:

$$q_k = \delta_k \Rightarrow Q(z) = 1 \quad (4-5-7)$$

با استفاده از (4-5-7) و (2-5-7) داریم:

$$Q(z) = F(z)C(z) = 1 \Rightarrow C(z) = \frac{1}{F(z)} \quad (5-5-7)$$

بنابراین اگر اکوالایزر بتواند تعداد ضرایب بینهایت داشته باشد، می‌توان ISI را صفر کرد. این اکوالایزر را اکوالایزر با معیار ZF با تعداد ضرایب بینهایت می‌نامند و داریم:

$$C_{ZF,F}(z) = \frac{1}{F(z)} \quad (6-5-7)$$

با استفاده از روابط مربوط به تبدیل مدل F به مدل X، می‌توان روابط مربوط به اکوالایزر در مدل X را نیز بدست آورد. اگر به شکل (7-10) توجه کنید، مدل X و F در یک فیلتر سفیدکننده با هم اختلاف دارند.

<sup>1</sup> Peak Distortion

بنابراین رابطه مربوط به اکوالایزر خطی با معیار ZF با تعداد ضرایب بینهایت برای مدل X بصورت زیر در می آید:

$$C_{ZF,X}(z) = \frac{1}{F(z)} \cdot \frac{1}{F^*(1/z^*)} = \frac{1}{X(z)} \quad (7-5-7)$$

خروجی اکوالایزر خطی با تعداد ضرایب نامحدود در صورت بکارگیری معیار ZF دارای مولفه ISI نخواهد بود و تنها شامل نویز است. مشکل اساسی این روش در این است که چون برای حذف مولفه ISI توان نویز در نظر گرفته نشده، ممکن است که فیلتر اکوالایزر توان نویز را در خروجی خیلی بالا ببرد. می خواهیم در ادامه توان نویز در خروجی را بدست آوریم. برای نویز در خروجی اکوالایزر با استفاده از شکل (7-11) داریم:

$$\eta'_k = c_k * \eta_k \quad (7-5-8)$$

با استفاده از روابط مربوط به رابطه تبدیل Z ورودی و خروجی فیلتر و با استفاده از (7-5-8) برای هر دو مدل F و X می توان نوشت:

$$S_{\eta'}(\omega) = S_{\eta}(\omega) \cdot C(e^{j\omega T}) \cdot C^*(e^{j\omega T}) \quad (7-5-9)$$

با استفاده از (7-5-6) و (7-4-9) داریم:

$$S_{\eta'}(\omega) = N_0 \frac{1}{F(e^{j\omega T})} \cdot \frac{1}{F^*(e^{j\omega T})} = \frac{N_0}{X(e^{j\omega T})}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (7-5-10)$$

پس واریانس نویز در خروجی بصورت زیر در می آید:

$$\sigma_{\eta'}^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{X(e^{j\omega T})} d\omega \quad (7-5-11)$$

که در این رابطه  $X(e^{j\omega T})$  تبدیل فوریه دنباله گسسته  $x_n$  است. اگر  $X(\omega)$  تبدیل فوریه سیگنال پیوسته  $x(t)$  باشد، با استفاده از روابط بین تبدیل فوریه های سیگنال پیوسته و دنباله نمونه برداری شده از آن داریم:

$$\begin{aligned} x_n = x(t)|_{t=nT} &\stackrel{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega T}) \\ X(e^{j\omega T}) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2\pi n/T) \end{aligned} \quad (7-5-12)$$

عملکرد اکوالایزر ZF را با توجه به سیگنال به نویز در خروجی آن بررسی می‌کنیم. برای سادگی فرض می‌کنیم که انرژی دنباله ورودی واحد است. یعنی فرض می‌کنیم که  $q_0 = 1$  و  $E(|I_k|^2) = 1$ . پس سیگنال به نویز براحتی برابر می‌شود با  $\frac{1}{\sigma_\eta^2}$ . با توجه به (۷-۵-۱۱) و (۷-۵-۱۲)، می‌توان نوشت:

$$\gamma_\infty = \frac{1}{\sigma_\eta^2} = \left[ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{X(e^{j\omega T})} d\omega \right]^{-1} = \left[ \frac{TN_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2\pi n/T)} d\omega \right]^{-1} \quad (۷-۵-۱۳)$$

که  $\gamma_\infty$  سیگنال به نویز در خروجی اکوالایزر ZF با تعداد ضرایب بینهایت است. همانطور که مشخص است، اگر طیف تاشده  $X(\omega)$  در بازه‌ای مقدار کوچکی بگیرد، عبارت داخل انتگرال بسیار بزرگ شده و در نتیجه مقدار  $\gamma_\infty$  خیلی کوچک می‌شود. در حقیقت مشکل از اینجا ناشی می‌شود که اکوالایزر برای حذف ISI نویز را تقویت کرده است.

روابط بالا برای اکوالایزر ZF زمانی بدست آمد که فرض کردیم فیلتر اکوالایزر بتواند تعداد بی‌نهایت ضریب داشته باشد. اگر تعداد ضرایب این فیلتر محدود باشد روابط بالا درست نخواهد بود. فرض کنید که داشته باشیم:

$$C(z) = \sum_{n=-K}^K c_n z^{-n} \quad (۷-۵-۱۴)$$

که تعداد ضرایب آن  $2K+1$  است. اگر از تعریف  $q_k = f_k * c_k$  استفاده کنیم، چون  $F(z)$  نیز  $L+1$  ضریب دارد پس داریم:

$$Q(z) = \sum_{n=-K}^{K+L-1} q_n z^{-n} \quad (۷-۵-۱۵)$$

مانند روابط گذشته بیشترین مقدار برای ISI برابر است با:

$$D(\{c_k\}) \triangleq \sum_{\substack{n=-k \\ n \neq 0}}^{K+L-1} |q_n| \quad (۷-۵-۱۶)$$

برای صفر کردن ترم ISI (یعنی  $q_k = \delta_k$ )، در کل  $2K+L$  معادله و  $2K+1$  مجهول (تعداد ضرایب اکوالایزر) داریم. حل این معادلات در حالت کلی مقدور نیست. یعنی ISI را تحت هیچ شرایطی نمی‌توان



صفر کرد. بنابراین حتی در بهترین حالت هم مقداری مولفه ISI باقی می ماند. پس برای کم کردن ISI تابع هزینه (۷-۵-۱۶) را باید حداقل نمود که در حالت کلی ضرایبی که تابع هزینه را حداقل می نماید به صورت عددی بدست می آید.

اما به ازای یک حالت خاص و مهم یک جواب تحلیلی بدست می آید. این حالتی است که:

$$|f_0| > \sum_{n=1}^L |f_n| \quad (7-5-17)$$

تحت این شرط، بدون حضور نویز،  $I_n$  ها هر مقداری که بگیرند نمی توانند خطا ایجاد کنند. اکثر کانالها عملی در شرط فوق صدق می کنند. در این حالت می توان نشان داد که با حل  $2K+1$  معادله زیر جواب بهینه بدست می آید:

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 \\ q_n &= 0 \quad |n| \leq K \end{aligned} \quad (7-5-18)$$

البته مقادیر  $q_i$  برای  $K+1 \leq i \leq K+L-1$  می تواند غیر صفر باشد و ISI ایجاد کند.  $c_k$  هائی که از (۷-۵-۱۸) بدست می آیند، تابع هزینه  $D(\{c_k\})$  را حداقل می کنند.

#### معیار Min. Mean Square Error (MMSE):

در زیربخش قبل ملاحظه شد که معیار ZF با وجود حذف ISI، ممکن است توان نویز را خیلی افزایش دهد. در ادامه معیار MMSE را معرفی می کنیم که نویز را نیز در نظر می گیرد ولی الزاما ISI را حداقل نمی کند. ابتدا برای سادگی مدل F را در نظر می گیریم. در روش MMSE ضرایب اکوالایزر طوری تعیین می شوند که میانگین مجذور خطا که بصورت زیر تعریف می شود حداقل شود:

$$\varepsilon_k = \hat{I}_k - I_k \quad (7-5-19)$$

در حقیقت داریم:

$$\min_{\{c_n\}} E |\hat{I}_k - I_k|^2 \quad (7-5-20)$$

پارامتر  $J$  را ضریب عملکرد روش MSE می نامیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$J = E |\hat{I}_k - I_k|^2 \quad (7-5-21)$$

مانند قسمت قبل برای اکوالایزر ZF ابتدا فرض می‌کنیم که فیلتر اکوالایزر بینهایت ضریب دارد. پس می‌توان نوشت:

$$\hat{I}_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_j v_{k-j} \quad (22-5-7)$$

که در این رابطه  $v_j$  ها خروجی کانال هستند. با توجه به اصل تعامد، برای اینکه میانگین توان ۲ خطا حداقل شود باید خطا بر داده عمود باشد. پس می‌توان نوشت:

$$E\left\{\left(\hat{I}_k - I_k\right)v_{k-l}^*\right\} = 0, \quad l = -\infty, \dots, \infty \quad (23-5-7)$$

با جایگذاری رابطه (22-5-7) در (23-5-7) داریم:

$$E\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j v_{k-j} v_{k-l}^*\right\} = E\left\{I_k v_{k-l}^*\right\} \quad (24-5-7)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j E\left(v_{k-j} v_{k-l}^*\right) = E\left(I_k v_{k-l}^*\right) \quad l = -\infty, \dots, \infty$$

حال دو طرف رابطه (24-5-7) را بصورت جداگانه بدست می‌آوریم. برای طرف اول داریم:

$$v_k = \sum_{n=0}^L f_n I_{k-n} + \eta_k \quad (25-5-7)$$

$$E\left(v_{k-j} v_{k-l}^*\right) = E\left\{\left(\sum_{n=0}^L f_n I_{k-j-n} + \eta_{k-j}\right)\left(\sum_{m=0}^L f_m^* I_{k-l-m} + \eta_{k-l}^*\right)\right\}$$

نویز و سیگنال مستقل از هم هستند و میانگین نویز صفر است. پس جملاتی که از ضرب سیگنال و نویز حاصل می‌شود را حذف می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$$E\left(v_{k-j} v_{k-l}^*\right) = \sum_{m=0}^L \sum_{n=0}^L f_n f_m^* E\left(I_{k-j-n} I_{k-l-m}^*\right) + E\left(\eta_{k-j} \eta_{k-l}^*\right) \quad (26-5-7)$$

نمونه‌های متفاوت نویز مستقل هستند. پس می‌توان نوشت:

$$E\left(\eta_{k-j} \eta_{k-l}^*\right) = N_0 \delta_{lj} \quad (27-5-7)$$

از طرفی دنباله  $I_k$  دنباله iid با متوسط صفر و  $E|I_k|^2 = 1$  می‌باشد. بنابراین با استفاده از (26-5-7) و (27-5-7) داریم:

$$E(v_{k-j} v_{k-l}^*) = \begin{cases} \sum_{n=0}^L f_n^* f_{n+l-j} + N_0 \delta_{lj} & |n-l| \leq L \\ 0 & o.w. \end{cases} \quad (28-5-7)$$

حال به سراغ طرف دوم معادله (24-5-7) می‌رویم. داریم:

$$\begin{aligned} E(I_k v_{k-l}^*) &= E \left\{ I_k \sum_{m=0}^L (f_m^* I_{k-l-m}^* + \eta_{k-l}^*) \right\} \\ &= \sum_{m=0}^L f_m^* E(I_k I_{k-l-m}^*) \\ &= \sum_{m=0}^L f_m^* \delta_{m,-l} = f_{-l}^* \end{aligned} \quad (29-5-7)$$

با جایگذاری روابط (28-5-7) و (29-5-7) در (24-5-7) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \left( \sum_{n=0}^L f_n f_{n+j-l}^* + N_0 \delta_{lj} \right) = f_{-l}^* \quad l = -L, \dots, 0 \quad (30-5-7)$$

از طرف دیگر با استفاده از (10-4-7) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x_k &= f_k * f_{-k} = \sum_{n=0}^{L-k} f_n^* f_{n+k} = \sum_{m=k}^L f_{m-k}^* f_m \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^L f_n^* f_{n+j-l} &= x_{l-j} \end{aligned} \quad (31-5-7)$$

با جایگذاری (31-5-7) در (30-5-7) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (x_{j-l} + N_0 \delta_{lj}) &= f_{-l}^* \\ \Rightarrow c_l * x_l + N_0 c_l &= f_{-l}^* \quad l = -\infty, \dots, \infty \end{aligned} \quad (32-5-7)$$

اگر از دو طرف (32-5-7) تبدیل Z بگیریم رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} C(z) X(z) + N_0 C(z) &= F^*(1/z^*) \\ \Rightarrow C_{F,MMSE}(z) &= \frac{F^*(1/z^*)}{X(z) + N_0} \end{aligned} \quad (33-5-7)$$

همچنین رابطه اکوالایزر برای مدل X نیز براحتی، با قرار دادن یک فیلتر سفید کننده نویز قبل از اکوالایزر برای مدل F، بصورت زیر قابل محاسبه است.

$$C_{X,MMSE}(z) = \frac{F^*(1/z^*)}{X(z) + N_0} \cdot \frac{1}{F^*(1/z^*)} = \frac{1}{X(z) + N_0} \quad (34-5-7)$$

واضح است که تنها تفاوت (34-5-7) و (7-5-7) در ضریب  $N_0$  است. اگر  $N_0 = 0$  و یا خیلی کوچک باشد، به همان رابطه اکوالایزر ZF می‌رسیم. نکته‌ای که یکبار دیگر به آن اشاره می‌کنیم این است که در معیار MMSE نمی‌توان ISI را حذف کرد و در خروجی اکوالایزر هم ISI و هم نویز موجود است. حال ضریب عملکرد که در (21-5-7) تعریف شده است را بررسی می‌نماییم. داریم:

$$J_{\min} = E|I_k - \hat{I}_k|^2 = E(\varepsilon_k I_k^*) - E(\varepsilon_k \hat{I}_k^*) = E(\varepsilon_k I_k^*) \quad (35-5-7)$$

رابطه آخر از اینجا ناشی می‌شود که خطا بر  $v_k$  ها و در نتیجه بر  $\hat{I}_k$  ها که ترکیب خطی آنها هستند عمود می‌باشد. پس بصورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= E\left((I_k - \hat{I}_k)I_k^*\right) = E|I_k|^2 - E(I_k^* \hat{I}_k) \\ &= 1 - E(I_k^* \hat{I}_k) \\ &= 1 - E\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j v_{k-j} I_k^*\right) \end{aligned} \quad (36-5-7)$$

با استفاده از (29-5-7) و (36-5-7) داریم:

$$J_{\min} = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j E(v_{k-j} I_k^*) = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{-j} = 1 - b_0 \quad (37-5-7)$$

$$b_k \triangleq c_k * f_k$$

با استفاده از تعریف  $b_k$  می‌توان نوشت:

$$B(z) = C(z)F(z) = \frac{F^*(1/z^*)}{X(z) + N_0} F(z) = \frac{X(z)}{X(z) + N_0} \quad (38-5-7)$$

پس  $b_0$  را می‌توانیم از (38-5-7) بدست آوریم:

$$b_0 = \frac{T}{2\pi} \int_{2\pi/T} \frac{X(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \quad (39-5-7)$$

در نهایت با ترکیب (37-5-7) و (39-5-7) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$J_{\min} = 1 - b_0 = \frac{T}{2\pi} \int 1 - \frac{X(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int \frac{N_0}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \quad (40-5-7)$$

در غیاب ISI، داریم  $X(e^{j\omega}) = 1$  و  $(40-5-7)$  بصورت زیر در می آید:

$$J_{\min} = \frac{N_0}{1 + N_0} \quad (41-5-7)$$

بد نیست که رابطه بین  $J_{\min}$  و سیگنال به نویز نرمالیزه را بدست آوریم. ابتدا توجه کنید که در لحظه  $k$ ام،  $I_k$  با ضریب  $b_0$  در خروجی ظاهر می شود. بنابراین برای سیگنال به نویز می توان نوشت:

$$\gamma_{\infty, MMSE} = \frac{E|b_0 I_k|^2}{E|b_0 I_k - \hat{I}_k|^2} = \frac{b_0^2}{E|b_0 I_k - \hat{I}_k|^2} \quad (42-5-7)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= E|\varepsilon_k|^2 = E|I_k - \hat{I}_k|^2 = E\left|I_k - b_0 I_k - (\hat{I}_k - b_0 I_k)\right|^2 \\ &= E\left|(1 - b_0)I_k - (\hat{I}_k - b_0 I_k)\right|^2 = (1 - b_0)^2 + E|b_0 I_k - \hat{I}_k|^2 \end{aligned} \quad (43-5-7)$$

تساوی آخر از استقلال دنباله  $I_k$ ، یعنی  $E(I_k(\hat{I}_k - b_0 I_k)) = 0$ ، حاصل می شود. البته این رابطه را می توان با استفاده از  $(37-5-7)$  و  $(22-5-7)$  نیز بدست آورد. با استفاده از  $(43-5-7)$ ،  $(42-5-7)$ ، و  $(37-5-7)$  می توان نوشت:

$$\gamma_{\infty, MMSE} = \frac{(1 - J_{\min})^2}{J_{\min} - J_{\min}^2} = \frac{1}{J_{\min}} - 1 \quad (44-5-7)$$

در تمام روابط بالا برای معیار MMSE فرض کردیم که ضرایب اکوالایزر نامحدود است. در ادامه می خواهیم حالت ضرایب محدود را بررسی کنیم. در این حالت نیز می توان از اصل تعامد مانند روابط قبل براحتی استفاده کرد. داریم:

$$\hat{I}_k = \sum_{n=-K}^K c_n v_{k-n} \quad (45-5-7)$$

در حقیقت اکوالایزر  $2K+1$  ضریب دارد. در این قسمت هدف حداقل کردن رابطه  $J(K)$  است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$J(K) = E \left| I_k - \hat{I}_k \right|^2 = E \left| I_k - \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \right|^2 \quad (46-5-7)$$

اصل تعامد (23-5-7) بصورت زیر در می آید:

$$E \left\{ \left( \hat{I}_k - I_k \right) v_{k-l}^* \right\} = 0 \quad l = -K, \dots, K \quad (47-5-7)$$

و همچنان روابط (29-5-7) و (28-5-7) برقرار است. رابطه (32-5-7) را بصورت زیر می توان اصلاح کرد:

$$\sum_{j=-K}^K c_j \Gamma_{lj} = \xi_l, \quad l = -K, \dots, K \quad (48-5-7)$$

که در این رابطه داریم:

$$\Gamma_{lj} = \begin{cases} x_{l-j} + N_0 \delta_{lj} & |l-j| \leq L \\ 0 & oth. \end{cases} \quad (49-5-7)$$

$$\xi_l = \begin{cases} f_{-l}^* & -L \leq l \leq 0 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

با استفاده از این روابط می توان معادلات (48-5-7) را بصورت ماتریسی نوشت:

$$\Gamma C = \xi \quad (50-5-7)$$

که در آنها داریم:

$$\Gamma_{(2K+1) \times (2K+1)} = [\Gamma_{lj}]$$

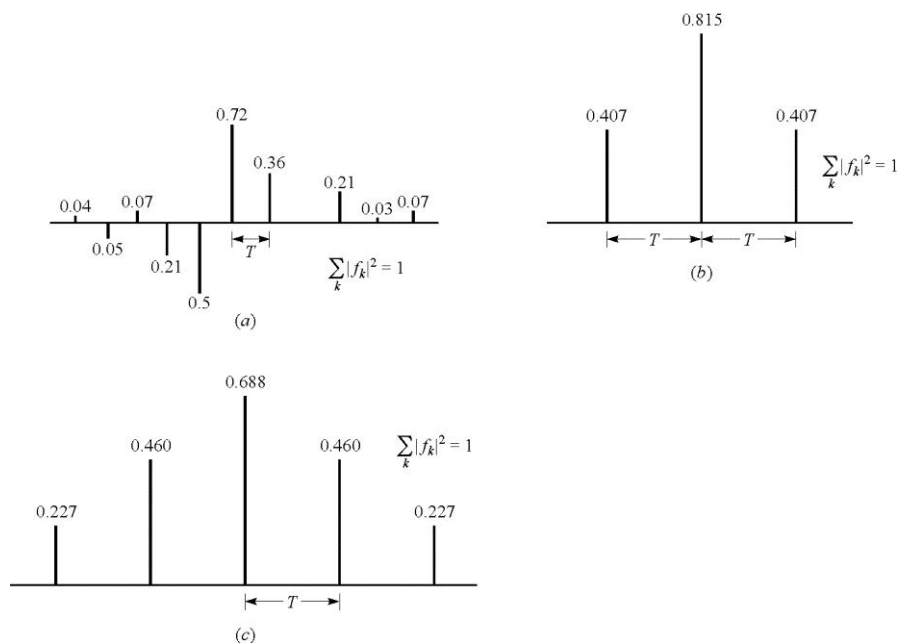
$$\xi_{(2K+1) \times 1} = [\xi_l] \quad (51-5-7)$$

$$C_{(2K+1) \times 1} = [c_k]$$

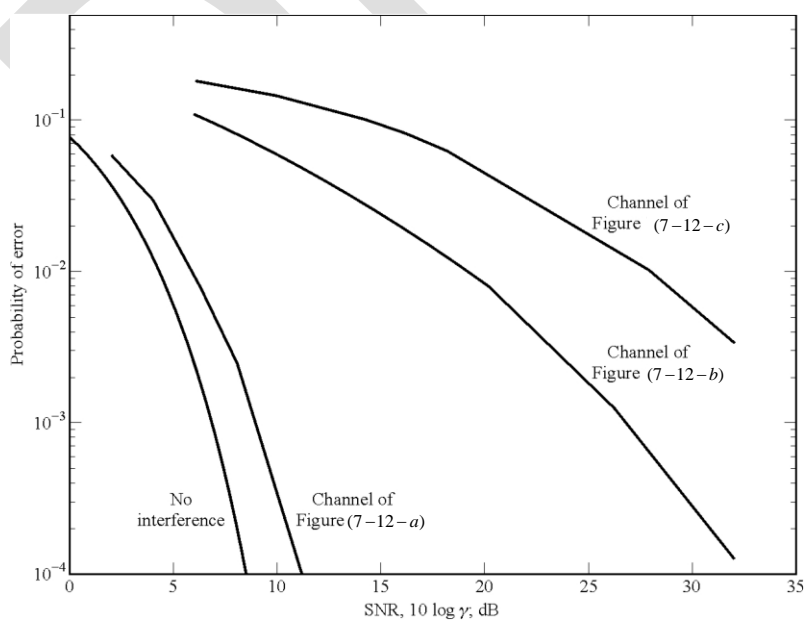
از حل (50-5-7) ضرایب اکوالایزر بهینه بدست می آید که  $J(K)$  را حداقل می کند. نکته قابل توجه در این است که اگر  $K < L$  انتخاب شود عملکرد اکوالایزر خیلی بد خواهد بود.

نکته دیگر در مورد اکوالایزر با معیار MMSE این است که رابطه ساده ای بین احتمال خطا و پارامترهائی مانند  $J$  و سیگنال به نویز وجود ندارد. دلیل این خاصیت این است که در خروجی آن مقداری از ISI همچنان وجود دارد. این ترم ISI را می توان بر اساس قضیه حد مرکزی با توزیع گوسی تقریب زد و بر اساس این تقریب احتمال خطا را با تقریب خوب بدست آورد.

در شکل (۷-۱۳) احتمال خطای اکوالایزر خطی با معیار MMSE برای سه مشخصه کانال شکل (۷-۱۲) با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو نشان داده شده است. برای مقایسه نمودار احتمال خطای کانال بدون ISI هم آورده شده است. در این شبیه‌سازی‌ها مدولاسیون BPSK فرض شده است.

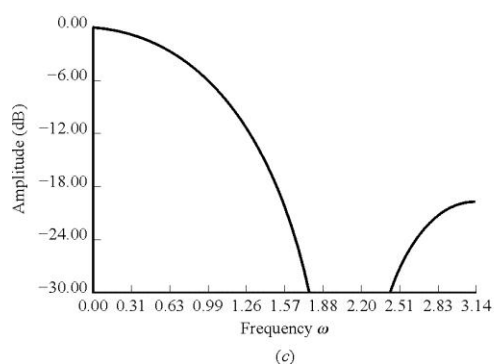
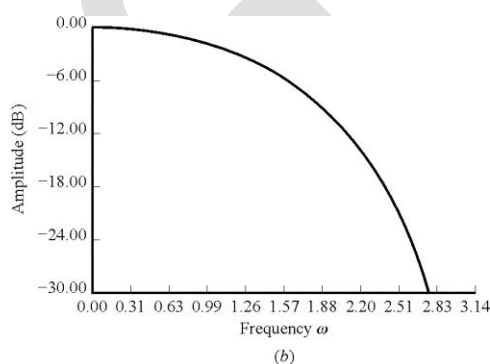
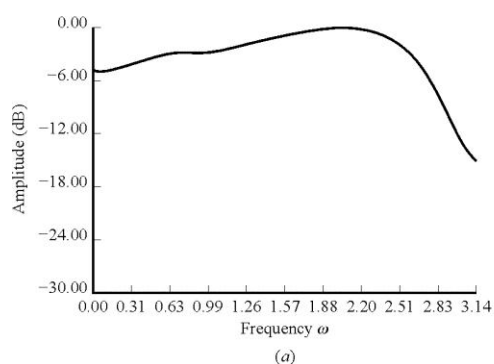


شکل (۷-۱۲) - سه مشخصه کانال گسسته



شکل (۷-۱۳) - احتمال خطای اکوالایزر خطی با معیار MMSE

اندازه طیف کانال‌های شکل (۷-۱۲) در شکل (۷-۱۴) آمده است. شکل (۷-۱۳) نشان می‌دهد که اکوالایزرهای خطی روی کانالهائی خوب عمل می‌کند که مشخصه کانال خیلی بد نیست و تضعیف قوی در طیف کانال وجود ندارد. از طرف دیگر این اکوالایزرها در کانالهائی که تضعیف قوی در مشخصه طیف کانال وجود دارد، مانند کانال‌های رادیویی، عملکرد خوبی ندارند. برای این کانال‌ها باید به سراغ اکوالایزرهای غیر خطی مانند Decision-Feedback رفت.



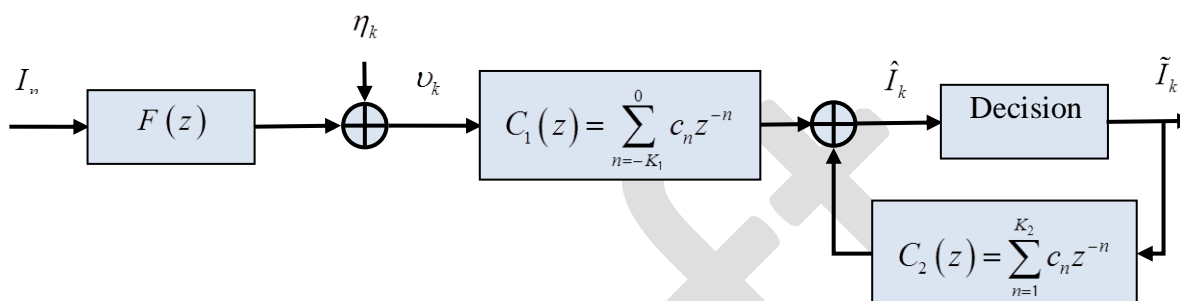
شکل (۷-۱۴) - اندازه طیف کانالهای شکل (۷-۱۲)

### ۶-۷) اکوالایزرهای تصمیم‌گیری و فیدبک Decision - Feed back

در این اکوالایزرها که دیاگرام آن در شکل (۷-۱۴) نشان داده شده است از دو فیلتر استفاده می‌شود: فیلتر مستقیم و فیلتر فیدبک. ورودی فیلتر فیدبک نتیجه تصمیم‌گیری روی سمبول‌های ارسالی قبلی است. در



حقیقت فیلتر فیدبک اثر ISI ناشی از سمبول‌های قبلی که قبلاً آشکارسازی شده‌اند را در سیگنال کنونی از بین می‌برد. نقش فیلتر مستقیم مینیمم کردن اثر تداخل ناشی از سمبول‌های بعدی و نویز است. واضح است که این اکوالایزر غیرخطی است زیرا از نتیجه تصمیم‌گیری در مورد داده‌های قبلی استفاده می‌کند.



شکل (۷-۱۵) - دیاگرام اکوالایزر Decision - Feed back

با توجه به شکل (۷-۱۵) می‌توان نوشت:

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K_1}^0 c_j u_{k-j} + \sum_{j=1}^{K_2} c_j \tilde{I}_j \quad (7-6-1)$$

بدست آوردن فیلترهای مستقیم و فیدبک برای معیار ZF ساده است. اگر از مدل F استفاده کنیم، چون فیلتر کانال علی است و در نتیجه تداخل ناشی از سمبول‌های ارسالی قبلی است و ما نویز را نیز در نظر نمی‌گیریم، انتظار داریم که فیلتر مستقیم یک فیلتر تمام گذر باشد. بنابراین براحتی برای معیار ZF داریم:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{f_0} \\ c_j &= \frac{f_j}{f_0} \quad j=1, \dots, K_2 \\ c_j &= 0 \quad \text{oth.} \end{aligned} \quad (7-6-2)$$

طریقه عملکرد واضح است. فیلتر فیدبک فرض می‌کند که سمبل‌ها بدرستی در خروجی محاسبه شده‌اند و با فیدبک آنها اثرات سمبل‌های قبلی را حذف می‌کند. بررسی عملکرد این اکوالایزرها به طور دقیق سخت است. ولی برای SNR های در حد معمول می‌توان برای آنالیز عملکرد این فرض را انجام داد که سمبل‌های

آشکارسازی و فیدبک شده همگی درست هستند و ISI ناشی از آنها در تصمیم‌گیری سمبول فعلی کاملاً حذف می‌شود. به این ترتیب کانال به یک کانال گوسی ساده تبدیل می‌شود و بدین طریق می‌توان باند پایینی احتمال خطا را بدست آورد.

حال به سراغ معیار MMSE می‌رویم. با توجه به معیار MMSE، باید ضرایب فیلترها به نحوی انتخاب شوند که پارامتر هزینه  $J$  که بصورت زیر تعریف شده است حداقل شود.

$$J(K_1, K_2) = E \left| I_k - \hat{I}_k \right|^2 \quad (3-6-7)$$

با توجه به اصل تعامد باید خطا بر داده عمود باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} E \left\{ \left( I_k - \hat{I}_k \right) v_{k-l}^* \right\} &= 0 \quad l = -K_1, \dots, 0 \\ E \left\{ \left( I_k - \hat{I}_k \right) \tilde{I}_{k-l}^* \right\} &= 0 \quad l = 1, \dots, K_2 \end{aligned} \quad (4-6-7)$$

توزیع  $\tilde{I}_{k-l}^*$  بسادگی قابل محاسبه نیست. برای احتمال خطاهای حتی در مرتبه  $10^{-2}$  می‌توان فرض کرد که این پارامتر بدرستی در خروجی محاسبه شده و در رابطه (4-6-7) از  $I_{k-l}^*$  به جای آن استفاده کرد. پس داریم:

$$\begin{aligned} E \left\{ \left( I_k - \hat{I}_k \right) v_{k-l}^* \right\} &= 0 \quad l = -K_1, \dots, 0 \\ E \left\{ \left( I_k - \hat{I}_k \right) I_{k-l}^* \right\} &= 0 \quad l = 1, \dots, K_2 \end{aligned} \quad (5-6-7)$$

برای حل این معادلات دقیقاً می‌توان از همان روش‌های بخش قبل برای اکوالایزر خطی با معیار MMSE استفاده کرد. براحتی می‌توان نشان داد که برای ضرایب فیلتر مستقیم داریم:

$$\sum_{j=-K_1}^0 \psi_{l,j} c_j = f_{-l}^* \quad l = -K_1, \dots, 0 \quad (6-6-7)$$

$$\psi_{l,j} = \sum_{m=0}^{-l} f_m^* f_{m+l-j} + N_0 \delta_{l,j} \quad l, j = -K_1, \dots, 0$$

ضرایب فیلتر فیدبک با استفاده از ضرایب فیلتر مستقیم با رابطه زیر بدست می‌آید:

$$c_k = - \sum_{j=-K_1}^0 c_j f_{k-j} \quad k = 1, \dots, K_2 \quad (7-6-7)$$

می‌توان نشان داد که اگر سمبل‌های قبلی بدرستی آشکارسازی شده باشند و  $K_2 \geq L$ ، فیلتر فیدبک بطور کامل اثر ISI ناشی از سمبل‌های قبلی را از بین می‌برد.

تمرین: نشان دهید که اگر اثر نویز را در نظر نگیریم، یعنی آنرا صفر در نظر بگیریم، داریم:

$$c_0 = \frac{1}{f_0} \quad (8-6-7)$$

$$c_j = 0 \quad j = -K_1, \dots, -1$$

که همان نتیجه‌ای است که برای اکوالایزر خطی مطرح شده بود. در ادامه می‌خواهیم عملکرد این اکوالایزر را بدست آوریم.

محاسبه دقیق احتمال خطا با توجه به اینکه در بعضی از حالت‌ها تصمیم‌گیری‌های قبلی دچار خطا می‌شود سخت است. اگر فرض کنیم که سمبول‌های قبلی بدرستی آشکارسازی شده باشند، می‌توان بسادگی نشان داد که حداقل مقدار  $J$ ، که در (7-6-3) تعریف شده است، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$J_{\min}(K_1) = 1 - \sum_{j=K_1}^0 c_j f_{-j} \quad (9-6-7)$$

با افزایش مقدار  $K_1$ ، مقدار  $J_{\min}(K_1)$  نیز کاهش می‌یابد. اگر  $K_1$  به سمت بینهایت میل کند، این مقدار به حداقل خود می‌رسد که با  $J_{\min}$  نشان می‌دهیم. با کمی تلاش و محاسبات ریاضی ساده، این رابطه را می‌توان بصورت زیر نوشت (متعاقباً نشان داده خواهد شد):

$$J_{\min} = \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \ln \left( \frac{N_0}{N_0 + X(e^{j\omega T})} \right) d\omega \right\} \quad (10-6-7)$$

سیگنال به نویز معادل برابر می‌شود با:

$$\gamma_{\infty} = \frac{1 - J_{\min}}{J_{\min}} \quad (11-6-7)$$

در غیاب ISI می‌توان دید که (7-6-11) به رابطه (7-5-41) تبدیل می‌شود. برای مقایسه دو اکوالایزر معرفی شده، به مثال زیر توجه کنید:

مثال (7-5-1) فرض کنید که برای کانال داریم:

$$F(z) = 1 + z^{-1} \quad F(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} \quad (12-6-7)$$

$$X(z) = (1 + z^{-1})(1 + z) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 2 + e^{-j\omega} + e^{j\omega}$$

در این صورت می‌خواهیم SNR را برای اکوالایزرهای فوق با هم مقایسه می‌کنیم: با استفاده از (7-5-40) برای اکوالایزر خطی با معیار MMSE داریم:

$$J_{\min} = \frac{T}{2\pi} \int \frac{N_0}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega = \sqrt{\frac{N_0}{2 + N_0}} \quad (13-6-7)$$

بنابراین با استفاده از (7-6-13) می‌توان نوشت:

$$\gamma_{MMSE,LE} = \frac{1 - J_{\min}}{J_{\min}} = \sqrt{1 + \frac{2}{N_0}} - 1 \approx \sqrt{\frac{2}{N_0}} - 1 \approx \sqrt{\frac{2}{N_0}} \quad N_0 \ll 1 \quad (14-6-7)$$

برای حالت بدون ISI داریم:

$$\gamma_{no\ ISI} = \frac{1}{N_0} \quad (15-6-7)$$

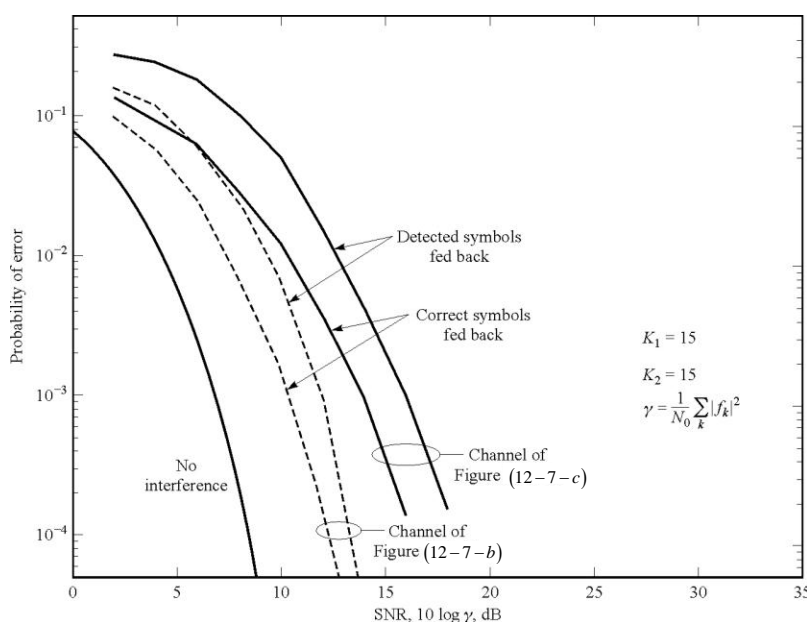
برای حالت DF با استفاده از رابطه (7-6-10) داریم:

$$J_{\min} = \frac{2N_0}{1 + N_0 + \sqrt{(1 + N_0)^2 - 1}} \quad N_0 \ll 1 \quad J_{\min} \approx 2N_0 \quad (16-6-7)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\gamma_{MMSE,DF} = \frac{1}{2N_0} - 1 \approx \frac{1}{2N_0} \quad N_0 \ll 1 \quad (17-6-7)$$

ملاحظه می‌شود که برای اکوالایزر غیرخطی نسبت به حالت بدون ISI حدود 3dB افت عملکرد داریم. با مقایسه (7-6-14) و (7-6-17) می‌توان دید که این افت عملکرد برای اکوالایزرهای خطی خیلی بیشتر است. این نتایج نشان می‌دهد که اگر از خطا در آشکارسازی صرف‌نظر کنیم، اکوالایزر DF عملکرد خیلی بهتری نسبت به اکوالایزر خطی دارد. یک روش برای بررسی اثر خطای آشکارسازی در عملکرد سیستم استفاده از شبیه‌سازی به روش مونت‌کارلو است. نتایج این شبیه‌سازی برای کانال‌های معرفی شده در شکل (7-12)، در شکل (7-16) آمده است.



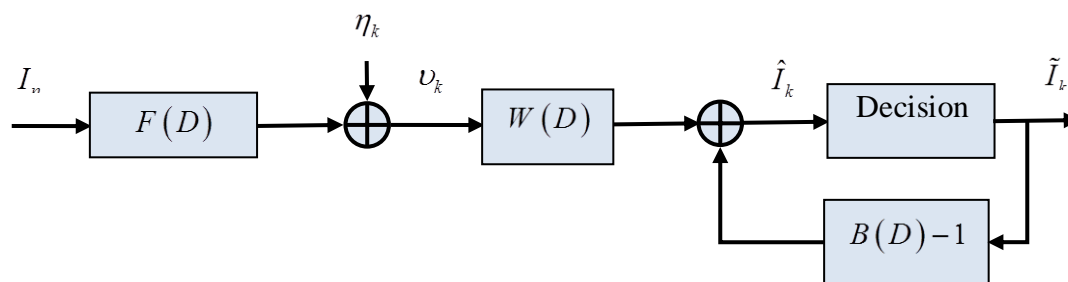
شکل (۷-۱۶) - احتمال خطای اکوالایزر DF با و بدون انتشار خطا

همانطور که از شکل پیداست بهبود عملکرد در اکوالایزرهای DF خیلی بیشتر از اکوالایزرهای خطی با همان تعداد ضرایب فیلتر است. نکته دیگر اینکه افت عملکرد اکوالایزرهای DF نیز برای کانالی مانند (۷-۱۲-۷) زیاد است.

در روابط (۷-۶-۶) و (۷-۶-۷) رابطه بسته مشخصی برای فیلترهای مستقیم و فیدبک بدست نیامد. حال می‌خواهیم به طریق دیگری فیلترهای مستقیم و فیدبک را با معیار MMSE در اکوالایزر DF وقتی محدودیتی در تعداد ضرایب فیلترها نداریم بررسی کنیم. برای ساده‌تر کردن روابط از تبدیل D استفاده می‌کنیم که  $D = z^{-1}$ . بنابراین داریم:

$$F(z) = \sum_{m=0}^L f_m z^{-m} \quad F(D) = \sum_{m=0}^L f_m D^m \quad (۷-۶-۱۸)$$

در تبدیل D، اگر  $F(z)$  مینیمم فاز باشد،  $F(D)$  ماکزیمم فاز است. شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۱۷-۷) - مدل تبدیل D برای اکوالایزر DF

که در این رابطه داریم  $b_0 = 1$ . تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \phi_{ee}(k) &= E\{\varepsilon_{k+m}\varepsilon_m^*\} \\ \Phi_{ee}(D) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_{ee}(k)D^k \end{aligned} \quad (19-6-7)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$E|\varepsilon|^2 = \phi_{ee}(0) \quad (20-6-7)$$

از طرف دیگر خاصیت زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(m) &= \sum x_{k+m}y_m^* \\ \Rightarrow \Phi_{xy}(D) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(m)D^m \triangleq E\{X(D)Y^*(1/D^*)\} \end{aligned} \quad (21-6-7)$$

از روی شکل (۱۷-۷) می‌توان نوشت:

$$\hat{I}(D) = V(D)W(D) - I(D)[B(D) - 1] \quad (22-6-7)$$

از طرف دیگر داریم که:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= I_k - \hat{I}_k \\ \varepsilon(D) &= I(D) - \hat{I}(D) = I(D)B(D) - V(D)W(D) \end{aligned} \quad (23-6-7)$$

با نوشتن اصل تعامد داریم:

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_k v_{k-l}^*) &= 0 \quad l = -\infty, \dots, \infty \\
\Rightarrow E\{\varepsilon(D).V^*(1/D^*)\} &= 0 \\
\Rightarrow E\{I(D)B(D).V^*(1/D^*)\} &= E\{V(D)W(D).V^*(1/D^*)\} \\
\Rightarrow B(D)E\{I(D).V^*(1/D^*)\} &= W(D)E\{V(D).V^*(1/D^*)\}
\end{aligned} \tag{۲۴-۶-۷}$$

با استفاده از تبدیل D روابط (۲۸-۵-۷) و (۲۹-۵-۷) داریم:

$$\begin{aligned}
E(I_k v_{k-l}^*) = f_{-l}^* &\rightarrow E\{I(D)V^*(1/D^*)\} = F^*(1/D^*) \\
&\Rightarrow E\{V(D)I^*(1/D^*)\} = F(D)
\end{aligned} \tag{۲۵-۶-۷}$$

$$E(v_k v_{k-l}^*) = x_l + N_0 \delta_{n,l} \rightarrow E\{V(D)V^*(1/D^*)\} = X(D) + N_0$$

با استفاده از (۲۴-۶-۷) و (۲۵-۶-۷) داریم:

$$\frac{W(D)}{B(D)} = \frac{E\{I(D).V^*(1/D^*)\}}{E\{V(D).V^*(1/D^*)\}} = \frac{F^*(1/D^*)}{X(D) + N_0} \tag{۲۶-۶-۷}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$W(D) = \frac{F^*(1/D^*)}{X(D) + N_0} . B(D) \tag{۲۷-۶-۷}$$

یعنی فیلتر مستقیم، سری اکوالایزر خطی و فیلتر با تابع تبدیل  $B(D)$  است که  $B(D)-1$  تابع تبدیل فیلتر فیدبک است. برای بدست آوردن فیلتر فیدبک باید مستقیماً خطاً را مینیمم نمایم. به سادگی داریم:

$$\begin{aligned}
\Phi_{ee}(D) &= E\{\varepsilon(D)\varepsilon^*(1/D^*)\} \\
&= E\{\varepsilon(D)[I^*(1/D^*)B^*(1/D^*) - V^*(1/D^*)W^*(1/D^*)]\} \\
&= E\{[I(D)B(D) - V(D)W(D)][I^*(1/D^*)B^*(1/D^*)]\} \\
&= B(D)B^*(1/D^*)E\{I(D)I^*(1/D^*)\} - W(D)B^*(1/D^*)E\{V(D)I^*(1/D^*)\}
\end{aligned} \tag{۲۸-۶-۷}$$

با توجه به اصل تعامد می دانیم که خطا  $\varepsilon(D)$  بر داده  $V^*(1/D^*)$  عمود است جمله دوم در تساوی دوم رابطه (۲۸-۶-۷) حذف شده است. از طرف دیگر داریم:

$$E\left\{I(D)I^*\left(\frac{1}{D^*}\right)\right\} = 1 \tag{۲۹-۶-۷}$$

پس از رابطه (۲۸-۶-۷) می توان نوشت:

$$\Phi_{ee}(D) = B(D)B^*(1/D^*) \left\{ 1 - W(D) \frac{E\{V(D)I^*(1/D^*)\}}{B(D)} \right\} \quad (۳۰-۶-۷)$$

حال با جایگذاری روابط (۲۶-۶-۷) و (۲۵-۶-۷) در (۳۰-۶-۷) به رابطه زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} \Phi_{ee}(D) &= B(D)B^*(1/D^*) \left\{ 1 - \frac{F^*(1/D^*)F(D)}{X(D) + N_0} \right\} \\ &= B(D)B^*(1/D^*) \left\{ 1 - \frac{X(D)}{X(D) + N_0} \right\} \quad (۳۱-۶-۷) \\ &= \frac{N_0 B(D)B^*(1/D^*)}{X(D) + N_0} \end{aligned}$$

برای ساده کردن بیشتر روابط،  $X(D) + N_0$  را بصورت زیر تجزیه می کنیم:

$$X(D) + N_0 = \gamma_0 G(D)G^*(1/D^*) \quad (۳۲-۶-۷)$$

که  $G(D)$  علی و ماکزیمم فاز با  $g_0 = 1$  است. چون عبارت فوق از نوع چگالی طیفی توان است و در ضمن چند جمله ای است همواره تجزیه فوق وجود دارد. می توان نشان داد که شرط وجود چنین تجزیه ای در حالت کلی بصورت زیر است:

$$\frac{T}{2\pi} \int_{2\pi/T} (X(e^{j\omega}) + N_0) d\omega < \infty \quad (۳۳-۶-۷)$$

$$\frac{T}{2\pi} \int_{2\pi/T} |\ln(X(e^{j\omega}) + N_0)| d\omega < \infty$$

حال با گرفتن لگاریتم از طرفین معادله (۳۲-۶-۷) و با توجه به  $g_0 = 1$  رابطه زیر را برای  $\gamma_0$  داریم:

$$\log(\gamma_0) = \frac{T}{2\pi} \int_{2\pi/T} \ln(X(e^{j\omega}) + N_0) d\omega \quad (۳۴-۶-۷)$$

با جایگذاری (۳۲-۶-۷) در (۳۱-۶-۷) داریم:

$$\Phi_{ee}(D) = \frac{N_0}{\gamma_0} \frac{B(D)B^*(1/D^*)}{G(D)G^*(1/D^*)} = \frac{N_0}{\gamma_0} U(D)U^*(1/D^*) \quad (۳۵-۶-۷)$$

$$U(D) \triangleq \frac{B(D)}{G(D)}$$



که  $U(D)$  نیز علی و ماکزیمم فاز با  $u_0 = 1$  است. بنابراین با استفاده از (۳۵-۶-۷) و تبدیل معکوس  $D$  می-توان نوشت:

$$\begin{aligned} \phi_{ee}(i) &= \frac{N_0}{\gamma_0} u_i * u_{-i}^* \Rightarrow E|\varepsilon_k|^2 = \phi_{ee}(0) = \frac{N_0}{\gamma_0} \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \\ &= \frac{N_0}{\gamma_0} + \frac{N_0}{\gamma_0} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \geq \frac{N_0}{\gamma_0} \end{aligned} \quad (36-6-7)$$

اگر  $U(D) = 1$  باشد، مقدار متوسط مجذور خطا مینیمم می‌شود. در این حالت داریم:

$$U(D) = 1 \Rightarrow \Phi_{ee}(D) = \frac{N_0}{\gamma_0} \Rightarrow B(D) = G(D) \quad (37-6-7)$$

که رابطه فیلتر فیدبک بدست می‌آید. (۳۷-۶-۷) در حالتی بدست می‌آید که دنباله خطا یک دنباله iid باشد. حال با استفاده از (۲۶-۶-۷) و (۳۷-۶-۷) داریم:

$$W(D) = \frac{F^*(1/D^*)}{X(D) + N_0} B(D) = \frac{F^*(1/D^*) G(D)}{\gamma_0 G(D) G^*(1/D^*)} = \frac{F^*(1/D^*)}{\gamma_0 G^*(1/D^*)} \quad (38-6-7)$$

که رابطه فیلتر مستقیم را بدست می‌دهد. پس با استفاده از (۳۸-۶-۷) می‌توان ملاحظه کرد که در مدل  $F$  فیلتر مستقیم ضدعلی است.

با توجه به (۳۴-۶-۷) و (۳۶-۶-۷) به سادگی رابطه زیر را برای  $J_{\min}$  بدست می‌آوریم:

$$J_{\min} = \phi_{ee}(0) = \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left( \frac{N_0}{N_0 + X(e^{j\omega T})} \right) d\omega \right\} \quad (39-6-7)$$

که همان رابطه‌ای است که در (۱۰-۶-۷) به آن اشاره شد. قبلاً دیده بودیم که اگر در نتایج بدست آمده برای روش MMSE نویز را صفر در نظر بگیریم به نتایج روش ZF می‌رسیم، حال با استفاده از رابطه (۳۲-۶-۷) برای حالت نویز صفر داریم:

$$\begin{aligned} N_0 = 0, \quad X(D) &= F(D) F^*(1/D^*) \\ \Rightarrow G(D) &= \frac{F(D)}{f_0}, \quad \gamma_0 = |f_0|^2 \end{aligned} \quad (40-6-7)$$

بنابراین با استفاده از (۳۸-۶-۷) داریم:

$$W_{F,ZF}(D) = \frac{1}{|f_0|^2} \frac{F^*(1/D^*)}{f_0^* F^*(1/D^*)} = \frac{1}{f_0} \quad (41-6-7)$$

که همان فیلتر تمام گذر است و همچنین داریم:

$$B(D) = \frac{F(D)}{f_0} \quad (42-6-7)$$

### ۷-۷) الگوریتم ویتربی در آشکارسازی دنباله بوسیله دنباله

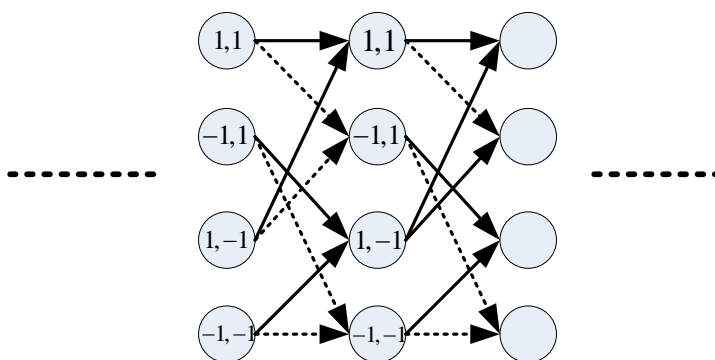
دیاگرام شکل (۷-۱۱) را برای کانال با مدل  $F$  در نظر بگیرید. برای این کانال داریم:

$$v_k = m_k + \eta_k, \quad m_k = \sum_{n=0}^L f_n I_{k-n} = f_0 I_k + \sum_{n=1}^L f_n I_{k-n} \quad (1-7-7)$$

بردار حالت را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_k = [I_{k-1}, I_{k-2}, \dots, I_{k-L}] \quad (2-7-7)$$

که در کانال با طول حافظه  $L$ ، وضعیت بیهیای تاثیرگذار در  $m_k$  خروجی بدون نویز کانال را نشان می‌دهد. با استفاده از بردار حالت، می‌توان دیاگرام حالت را ترسیم نمود. دیاگرام حالت به ازای هر مقدار حالت یک گره در نظر می‌گیرد و حرکت از یک حالت به حالت دیگر به ازای یک ورودی خاص با یال‌ها نمایش داده می‌شود. دیاگرام ترلیس توسعه زمانی دیاگرام حالت است. در حقیقت بیانگر تغییرات حالت در طول زمان با تغییرات ورودی است. تعداد مسیرها در دیاگرام ترلیس برابر است با تعداد مقادیر ممکن دنباله ورودی. شکل زیر یک دیاگرام ترلیس نمونه را نشان می‌دهد:



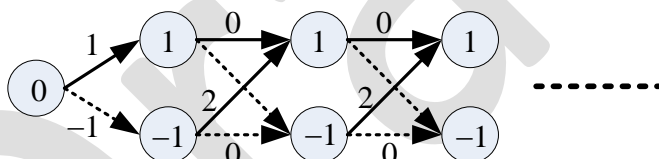
شکل (۷-۱۸) - دیاگرام ترلیس نمونه

با توجه به شکل، حالت در هر لحظه از زمان و ورودی، حالت در لحظه بعد را مشخص می‌کند.

مثال (۷-۶-۱) فرض کنید که  $L=2$  و برای کانال داریم:

$$F(z) = 1 - z^{-1}, \quad S_k = [I_{k-1}], \quad m_k = I_k - I_{k-1} \quad (۷-۷-۳)$$

دیاگرام ترلیس (۷-۷-۳) بصورت شکل (۷-۱۹) در می‌آید که در آن یال با خط پُر بیان‌گر ورودی مثبت یک و یال خط‌چین بیان‌گر ورودی منفی یک است. مقدار روی هر یال بیانگر، مقدار  $m_k$  متناظر است.



شکل (۷-۱۹) - دیاگرام ترلیس مثال (۷-۶-۱)

یک رابطه یک به یک بین دنباله ورودی، دنباله حالت، مسیر و دنباله خروجی‌های متناظر یعنی  $\{m_k\}$  وجود دارد، بطوریکه دانستن یکی بقیه را بطور یکتا مشخص می‌کند. برای گیرنده M.L، که یک گیرنده بهینه در صورت هم احتمال بودن دنباله‌های ممکن ورودی است، داریم:

$$\begin{aligned} MAP: \max_{\{I_k\}} P\left(\{I_k\}_{k=0}^N \mid \{v_k\}_{k=0}^N\right) \\ \equiv \max_{\{I_k\}} P\left(\{v_k\}_{k=0}^N \mid \{I_k\}_{k=0}^N\right) \cdot P\left(\{I_k\}_{k=0}^N\right) \\ \equiv \max_{\{I_k\}} P\left(\{v_k\}_{k=0}^N \mid \{I_k\}_{k=0}^N\right) \\ \equiv \max_{\{m_k\}} P\left(\{v_k\}_{k=0}^N \mid \{m_k\}_{k=0}^N\right) \end{aligned} \quad (۷-۷-۴)$$

رابطه دوم از فرض هم‌احتمال بودن دنباله‌ها در آشکارساز M.L حاصل می‌شود و رابطه آخر نیز از اینجا ناشی می‌شود که یک رابطه یک به یک بین دنباله  $\{I_k\}$  و دنباله  $\{m_k\}$  در صورت ارسال از حالت تمام صفر وجود دارد. با استفاده از (۷-۷-۱) می‌توان ملاحظه کرد که به شرط  $\{m_k\}$  ها،  $\{v_k\}$  ها مستقل هستند. پس رابطه (۷-۷-۴) را بصورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} MAP &\equiv \max_{\{m_k\}} \prod_{k=0}^N P(v_k | m_k) \\ &\equiv \max_{\{m_k\}} \prod_{k=0}^N e^{-\frac{|v_k - m_k|^2}{2N_0}} \\ &\equiv \max_{\{m_k\}} e^{-\sum_{k=0}^N \frac{|v_k - m_k|^2}{2N_0}} \\ &\equiv \min_{\{m_k\}} \sum_{k=0}^N |v_k - m_k|^2 \end{aligned} \quad (۷-۷-۵)$$

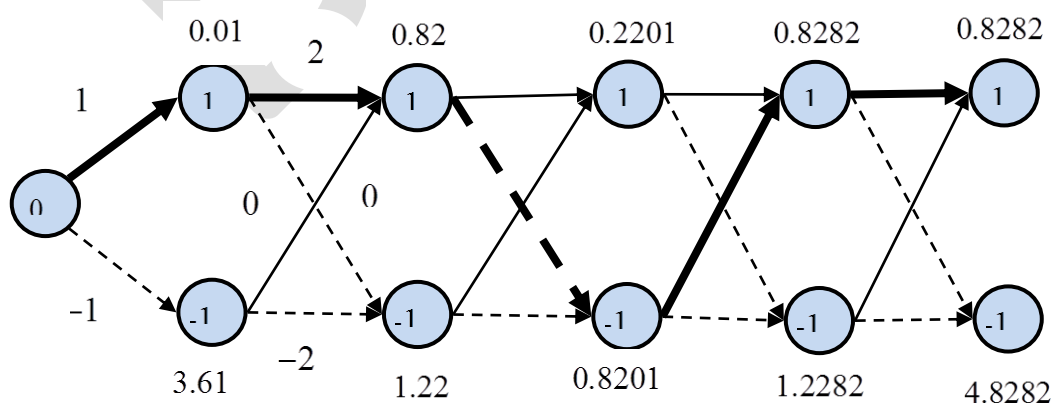
در رابطه (۷-۷-۵) متریک ML برای مدل F است. در حقیقت دنباله‌ای که حداقل  $M = \sum_{k=0}^N |v_k - m_k|^2$  را دارد باید به عنوان دنباله ارسال آشکارسازی شود. پس می‌توان مقدار  $|v_k - m_k|^2$  را برای متریک هر شاخه در لحظه  $k$ ام متناظر با خروجی بدون نویز متناظر  $m_k$  در نظر گرفت. همانگونه که ملاحظه می‌شود، پیچیدگی مجدداً به صورت نمایی با طول دنباله افزایش می‌یابد. خواهیم دید که چگونه می‌توان پیچیدگی را با الگوریتم ویتربی کم کرد به نحویکه به صورت خطی با طول دنباله کاهش یابد. برای این منظور متریک فوق را به صورت بازگشتی محاسبه می‌نماییم. به رابطه زیر، که در آن متریک پاره‌ای هر مسیر براساس  $j+1$  شاخه اول را با استفاده از متریک پاره‌ای همان مسیر بر اساس  $j$  شاخه اول محاسبه می‌نماید، توجه کنید:

$$\sum_{k=0}^j |v_k - m_k|^2 = \sum_{k=0}^{j-1} |v_k - m_k|^2 + |v_j - m_j|^2 \quad (۷-۷-۶)$$

با توجه به (۷-۷-۶) ملاحظه می‌شود که می‌توان متریک را بصورت پاره‌ای به ازای هر نمونه جدید بروز کرد. در الگوریتم ویتربی برای کاهش اساسی پیچیدگی صرفاً متریک مسیرهایی محاسبه می‌شوند که شانس مسیر بهینه بودن را دارند. برای این منظور، بین کلیه مسیرهای منتهی به هر حالت در هر واحد پردازش، مسیری که بهترین متریک را تا آن لحظه (کوچکترین فاصله اقلیدسی) دارد به عنوان مسیر برنده نگه داشته و بقیه

مسیرها دور ریخته می‌شود و در فواصل بعدی مورد توجه قرار نمی‌گیرد. به این مسیر نگهداری شده مسیر برنده Survivor Path می‌گویند. رویهم به اندازه تعداد حالت‌ها مسیر برنده خواهیم داشت. در انتها اگر با ارسال تعدادی صفر حالت کانال به حالت تمام صفر منتقل گردد یک حالت و در نتیجه یک مسیر برنده خواهیم داشت که همان مسیر بهینه ML است. به طور خلاصه الگوریتم ویتربی به صورت مراحل زیر قابل بیان است:

- **مرحله اول:** تا  $n = L$  به هر حالت یک مسیر منتهی می‌شود، متریک پاره‌ای آن مسیر را محاسبه کن و به آن حالت اختصاص بده.
  - **مرحله دوم:**  $n$  را یک واحد افزایش بده، برای هر حالت متریک پاره‌ای کلیه مسیرهای منتهی به این متریک را محاسبه کن، سپس مسیر با کوچکترین متریک را نگهدار (مسیر برنده) و متریک آن حالت در لحظه  $n$  ام را برابر متریک مسیر برنده آن حالت قرار بده و بقیه مسیرها را دور بریز.
  - **مرحله سوم:** اگر  $n < N - 1$  به مرحله دوم برو.
  - **مرحله چهارم:** برای  $n = N - 1$  مسیر با کوچکترین متریک از میان  $2^L$  مسیر، مسیر برنده خواهد بود.
- مثال ۷-۶-۲) کانال با مشخصات  $F(z) = 1 + z^{-1}$  و مدولاسیون BPSK را در نظر بگیرید در اینصورت خواهیم داشت  $m_k = I_k + I_{k-1}$ . حال فرض کنید دنباله دریافتی به صورت  $u_k = \{0.9, 1.1, -0.01, 0.09, 2\}$  باشد. نمودار ترلیس، مسیر برنده و دنباله ورودی با استفاده از الگوریتم ویتربی بصورت شکل (۷-۲۰) بدست می‌آید:

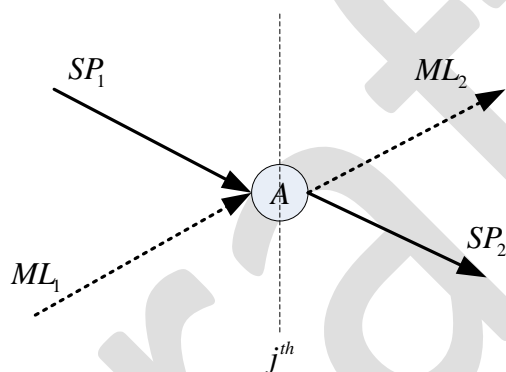


شکل (۷-۲۰)، نمودار ترلیس مثال ۷-۶-۲

اکنون به قضیه زیر توجه کنید که نشان می‌دهد با الگوریتم ویتربی مسیر ML هیچگاه حذف نمی‌گردد. قضیه ۷-۶-۱): در الگوریتم ویتربی مسیر ML همیشه جز مسیرهای برنده است و هرگز حذف نمی‌شود. دنباله خروجی بدون نویز متناظر با مسیر ML را با  $\{m_{ML,k}\}$  نشان می‌دهیم. چون مسیر ML بهترین متریک کلی را دارد می‌توان نوشت (فرض کنید طول دنباله ارسالی  $N+1$  باشد):

$$\sum_{k=0}^N |v_k - m_{ML,k}|^2 \leq \sum_{k=0}^N |v_k - m_k|^2 \quad (7-7-7)$$

حال فرض کنید که یک مسیر دیگر برنده شده و مسیر ML در زمان  $j$  ام در حالت A حذف شده است. به شکل زیر توجه کنید:



شکل (۷-۲۰) - مسیر برنده شده و ML

که در آن زیرنویس ۱ و ۲ قسمت‌های قبل و بعد از لحظه  $j$  ام هر مسیر را نشان می‌دهد. چون مسیر ML در زمان  $j$  ام حذف شده است، پس متریک پاره‌ای مسیر  $SP_1$  کمتر از مسیر  $ML_1$  است. از طرف دیگر با توجه به (۷-۷-۷) داریم:

$$\begin{aligned} M_{ML_1} + M_{ML_2} &\leq M_{SP_1} + M_{SP_2} \\ M_{ML_1} &> M_{SP_1} \end{aligned} \quad (8-7-7)$$

که در آن  $M_{ML_1}$  و  $M_{ML_2}$  متریک‌های متناظر با قسمت‌های اول و دوم مسیر ML، و همچنین  $M_{SP_1}$  و  $M_{SP_2}$  متریک‌های متناظر با قسمت‌های اول و دوم مسیر برنده SP می‌باشند پس از نتایج (۸-۷-۷) می‌توان ملاحظه کرد که:

$$M_{SP_1} + M_{ML_2} < M_{ML_1} + M_{ML_2} \quad (9-7-7)$$

پس یک مسیر دیگر پیدا شده است ( $M_{SP} + M_{ML_2}$ ) که متریک کل مسیر از متریک مسیر ML کمتر است که خلاف فرض مسیر ML است. بنابراین در هیچ زمانی مسیر ML نمی‌تواند حذف شود و در نهایت که فقط یک مسیر برنده باقی می‌ماند، آن مسیر ML خواهد بود. با توجه به مطالب فوق برای میزان محاسبات و حافظه مورد نیاز داریم:

$$\text{میزان محاسبات برای الگوریتم ویتربی} = N \times 2^L \times 2$$

$$\text{میزان حافظه مورد نیاز} = 2^L \times N$$

که هر دو کمیت بطور خطی با طول دنباله افزایش می‌یابد. مشکل اساسی در رابطه الگوریتم ویتربی توصیف شده این است که باید کل دنباله ارسالی دریافت شود تا در مورد کل بیت‌های ارسالی بصورت همزمان تصمیم‌گیری شود: هم به حافظه زیادی جهت نگهداشتن مسیرهای برنده کلیه حالت‌ها احتیاج است و هم تاخیر بزرگی جهت تصمیم‌گیری نیاز است. جهت رفع مشکلات فوق، یک تاخیر تصمیم‌گیری  $\delta$  حداقل چهار الی پنج برابر طول حافظه کانال، مستقل از طول دنباله، در نظر گرفته می‌شود. این تاخیر بطوری است که در لحظه  $\delta + z$  ام با احتمال زیاد سمبل لحظه  $z$  ام کلیه مسیرهای برنده یکی است و لذا می‌توان در مورد این سمبول تصمیم‌گیری نمود. تصمیم‌گیری به یکی از طرق‌های زیر می‌تواند صورت گیرد:

در لحظه  $\delta + z$  ام بررسی می‌کنیم که کدام SP دارای بهترین متریک است و سمبل زمان  $z$  ام این مسیر را بعنوان سمبل ارسالی دزد می‌کنیم.

یکی از SPها را بصورت تصادفی انتخاب کرده و سمبل  $z$  ام آنرا بعنوان سمبل ارسالی دزد می‌کنیم. با استفاده از هر دو روش، حافظه مورد نیاز برابر می‌شود با  $2^L \times \delta$ . همانگونه که در بالا اشاره شد در این روش  $\delta$  باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود تا در لحظه  $\delta + z$ ، با احتمال زیادی کلیه مسیرهای برنده دارای سمبول  $z$  ام یکسان باشند و انتخاب یکی از آنها تفاوتی در عملکرد نداشته باشد. نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی نشان می‌دهد که انتخاب  $\delta$  به اندازه ۴ تا ۵ برابر طول حافظه کانال مناسب است.

حال به سراغ آشکارسازی بهینه M.L برای مدل  $X$ ، که در بخش (۷-۳) بدست آمد، می‌رویم. بررسی می‌کنیم که چگونه با استفاده از الگوریتم ویتربی می‌توان گیرنده فوق را پیاده سازی نمود. ابتدا باید متریک مدل  $X$  را به صورت برگشتی نوشت. از رابطه (۷-۳-۶) برای گیرنده M.L داریم:

$$MAP \equiv \max_{\{I_n\}} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N I_n^* y_n \right\} - \sum_{n,m} I_n^* I_m x_{n-m} \quad (10-7-7)$$

متریک پاره‌ای به ازای  $n$  نمونه دریافتی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_n = J(\{I_l\}_{l \leq n}) \triangleq 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l \leq n} I_l^* y_l \right\} - \sum_{l,m \leq n} I_l^* I_m x_{l-m} \quad (11-7-7)$$

با استفاده از (۷-۱۱) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} J_n &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l \leq n} I_l^* y_l \right\} - \sum_{l,m \leq n} I_l^* I_m x_{l-m} \\ J_{n+1} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l \leq n+1} I_l^* y_l \right\} - \sum_{l,m \leq n+1} I_l^* I_m x_{l-m} \\ &= J_n + 2 \operatorname{Re} \left\{ I_{n+1}^* y_{n+1} \right\} - \sum_{m \leq n} I_{n+1}^* I_m x_{n+1-m} - \sum_{l \leq n} I_{n+1}^* I_l x_{l-(n+1)} - |I_{n+1}|^2 x_0 \quad (12-7-7) \\ &= J_n + 2 \operatorname{Re} \left\{ I_{n+1}^* \left( y_{n+1} - \sum_{m \leq n} I_m x_{n+1-m} - \frac{1}{2} I_{n+1} x_0 \right) \right\} \\ &= J_n + 2 \operatorname{Re} \left\{ I_{n+1}^* \left( y_{n+1} - \sum_{t \geq 1} I_{n+1-t} x_t - \frac{1}{2} I_{n+1} x_0 \right) \right\} \quad t \triangleq n+1-m \end{aligned}$$

که البته اگر حافظه کانال را برای این مدل  $L$  بگیریم داریم  $x_t = 0$  برای  $t > L$ . بنابراین با استفاده از (۷-۱۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + M_{n+1}(I_{n+1}) \\ M_{n+1}(I_{n+1}) &\triangleq 2 \operatorname{Re} \left\{ I_{n+1}^* \left( y_{n+1} - \sum_{t=1}^L I_{n+1-t} x_t - \frac{1}{2} I_{n+1} x_0 \right) \right\} \quad (13-7-7) \end{aligned}$$

پس با استفاده از (۷-۱۳) می‌توان نتیجه‌گیری کرد که  $M_{n+1}(I_{n+1})$  را می‌توان به عنوان متریک شاخه  $n+1$ ام تعریف کرد. حالت کانال را در این لحظه، مشابه آنچه برای مدل  $F$  داشتیم، بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$S_{n+1} = [I_n \ I_{n+1} \ \dots \ I_{n-L+1}] \quad (14-7-7)$$



نکته قابل توجه در مدل معرفی شده در فرمول (۷-۷-۱۳) این است که، مسیری برنده می‌شود که بیشترین متریک را داشته باشد. یعنی نحوه پیاده سازی الگوریتم ویتربی دقیقاً مشابه کانال مدل F است با این تفاوت که اکنون متریک شاخه‌ها تغییر کرده و این متریک طبق (۷-۷-۱۳) بدست می‌آید و همچنین مسیر برنده برای هر حالت در هر طبقه دیاگرام ترلیس، از میان مسیرهای منتهی شده به آن حالت مسیر با بیشترین متریک است.

#### آنالیز عملکرد الگوریتم ویتربی برای کانال مدل F:

کانال مدل F را در نظر بگیرید که سمبول‌های  $I_k \in \{A_m, m=1, \dots, M\}$  از طریق این کانال ارسال می‌گردند و در گیرنده آشکارسازی سمبل به سمبل انجام می‌گیرد. در چنین کانالی با فرض عدم وجود ISI، برای سیگنال به نویزهای بالا احتمال خطا به طور تقریبی از رابطه:

$$P_e \approx Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) \quad (7-15)$$

بدست می‌آید که در آن  $d_{\min} = \min_{m \neq j} |A_m - A_j|^2$ ، مینیمم فاصله بین سمبل‌های ارسالی است. برای احتمال خطای اکوالایزرهای M.L، فرض کنیم که  $d_{\text{free}}$  مینیمم فاصله اقلیدسی بین دو دنباله معتبر متناظر با دو مسیر در دیاگرام ترلیس باشد و به بیان دیگر  $d_{\text{free}} = \min_{\{m_k\} \neq \{m'_k\}} |\{m_k\} - \{m'_k\}|^2$ . اگر چگالی طیف نویز سفید را  $\sigma^2$  فرض کنیم، می‌توان عملکرد این الگوریتم را بدست آورد. با وجود ISI، تصمیم‌گیری بصورت دنباله به دنباله انجام می‌گیرد و مشابه حالت آشکارسازی سمبل به سمبل می‌توان نشان داد (بعنوان تمرین نشان دهید) که:

$$P_b \approx Q\left(\frac{d_{\text{free}}}{2\sigma}\right) \quad (7-16)$$

**مثال ۷-۶-۳)** کانال مثال ۷-۶-۲ را در نظر بگیرید. در شکل زیر دو مسیری که فاصله آنها برابر مینیمم

فاصله است نمایش داده شده است:



که در آن  $d_m$  مینیمم فاصله بین سمبول‌های ورودی کانال ( خروجی مدولاتور) است. در ادامه دو باند (۱۶-۷-۷) و (۱۹-۷-۷) را برای سیستم ساده شکل (۷-۲۱) با هم مقایسه می‌کنیم. به دیاگرام ترلیس شکل (۷-۲۱) توجه کنید. با توجه به شکل براحتی می‌توان دید که:

$$d_{free}^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow P_b \approx Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) \quad (۷-۲۰)$$

از طرف دیگر برای باند فیلتر منطبق داریم:

$$\sum_{m=0}^L f_m^2 = 2, \quad d_m^2 = 4 \Rightarrow P_{b, MF} = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) \quad (۷-۲۱)$$

همانطور که مشاهده می‌شود در این مثال ساده الگوریتم ویتربی افت عملکردی نسبت به سیستم بدون ISI ندارد که مزیت بزرگی است. البته این مطلب برای این مثال درست است و در حالت کلی با توجه به باند فیلتر منطبق می‌توان نوشت:

$$P_e \geq P_{b, MF} \Rightarrow d_{free}^2 \leq \sum_{k=0}^L f_k^2 d_m^2 \quad (۷-۲۲)$$

که همانگونه که قبلا اشاره شد، در آن  $d_m^2$  مینیمم مجذورفاصله بین سمبول‌های خروجی مدولاتور(ویا ورودی کانال) است.

### آشکارساز دنباله بوسیله دنباله با کاهش پیچیدگی RCSD :

در الگوریتم ویتربی پیچیدگی به صورت نمایی با  $L$ ، طول حافظه کانال افزایش می‌یابد که در بعضی از کاربردها برای  $L$  بزرگ قابل قبول نیست. جهت کاهش پیچیدگی بدون افت عملکرد زیاد در ادامه یک الگوریتم ویتربی تغییر یافته را معرفی می‌کنیم که از ایده تصمیم‌گیری و فیدبک استفاده می‌کند.

همانطور که در قسمت‌های قبل اشاره شد، تصمیم‌گیری در اکوالایزر DF بصورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\hat{I}_k = v_k - \sum_{n=1}^L f_n \hat{I}_{k-n} \quad (۷-۲۳)$$

از طرفی

$$v_k = f_0 I_k + \sum_{n=1}^L f_n I_{k-n} + \eta_k \quad (۷-۲۴)$$

که در آن  $\eta_k$ ، مولفه نویز سفید گوسی با واریانس  $\sigma$  است. با فرض آشکارسازی صحیح سمبل‌های قبلی، تصمیم‌گیری بر اساس متغیر زیر انجام می‌گیرد:

$$\hat{I}_k = f_0 I_k + \eta_k \quad (25-7-7)$$

در نهایت احتمال خطای اکوالایزر DF بدون در نظر گرفتن انتشار خطا از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P_{e,DF} = Q\left(\frac{f_0 d_m}{2\sigma}\right) \quad (26-7-7)$$

با مقایسه این رابطه با باند بالایی فیلتر منطبق در رابطه (19-7-7) مشاهده می‌کنیم که اکوالایزر ML در بهترین شرایط، همه انرژی مربوط به یک سمبول که در نمونه‌های بعدی پخش شده است را جمع می‌کند و از همه انرژی آن سمبول استفاده می‌کند ولی اکوالایزر DF بقیه نمونه‌ها را حذف می‌کند. این مورد در رابطه زیر نمایش داده شده است:

$$\begin{array}{ccccccc} I_n & \rightarrow & f_0 I_n & f_0 I_{n-1} & \cdots & f_0 I_{n-L} & \rightarrow y_n \\ I_{n+1} & \rightarrow & f_0 I_{n+1} & f_0 I_n & \cdots & f_0 I_{n-L+1} & \rightarrow y_{n+1} \\ \vdots & & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ I_{n+L} & \rightarrow & f_0 I_{n+L} & f_0 I_{n+L-1} & \cdots & f_0 I_n & \rightarrow y_{n+L} \end{array} \quad (27-7-7)$$

همانطور که از رابطه بالا بر می‌آید انرژی سمبل  $I_n$  در  $y_n$  تا  $y_{n+L}$  ظاهر می‌شود و گیرنده ML تمام این انرژی را جمع می‌کند این در حالی است که گیرنده DF از روی نمونه‌های قطری در رابطه بالا تصمیم‌گیری می‌نماید و اثر  $I_n$  در خروجی‌های  $y_{n+1}$  تا  $y_{n+L}$  را توسط فیدبک حذف می‌گردد.

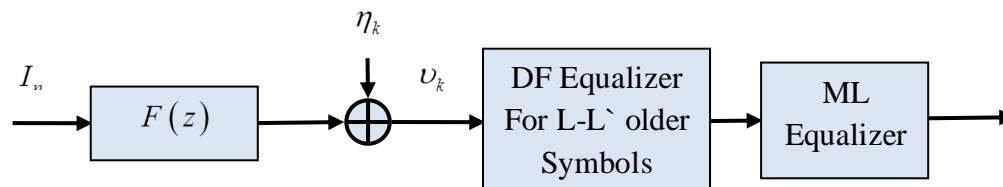
مشکل اکوالایزر ML پیچیدگی آن است که بطور نمایی با  $L$  افزایش می‌یابد و باید سعی کنیم پیچیدگی اکوالایزر ML را به نحوی کم کنیم که افت عملکرد نداشته باشیم از اینرو تمام انرژی را جمع نمی‌کنیم بلکه بعنوان مثال ۹۰ درصد انرژی کل را جمع می‌کنیم. عدد  $L' < L$  را در نظر بگیرید بطوریکه  $\sum_{m=0}^{L'} |f_m|^2$  خیلی

نزدیک  $\sum_{m=0}^L |f_m|^2$ ، بعنوان مثال ۹۰٪ آن است:

$$\sum_{m=0}^{L'} |f_m|^2 = 0.9 \sum_{m=0}^L |f_m|^2 \quad (28-7-7)$$

در این الگوریتم بهبود یافته، اثر سمبل‌های  $I_{n-L}, \dots, I_{n-L-1}$  توسط DF از بین می‌رود و انرژی بقیه سمبل‌ها توسط الگوریتم ویتربی جهت آشکارسازی مورد استفاده قرار می‌گیرد.  $L'$  به نحوی انتخاب می‌شود که

عمده انرژی هر سمبول ارسالی، پخش شده در نمونه های بعدی، جمع گردد و بدین طریق افت قابل ملاحظه عملکرد در مقایسه با اکوالایزر ML نداشته باشیم. دیاگرام این آشکارساز در شکل زیر نشان داده شده است:



شکل (۷-۱)

(۲۲) - ترکیب اکوالایزهای DF و ML

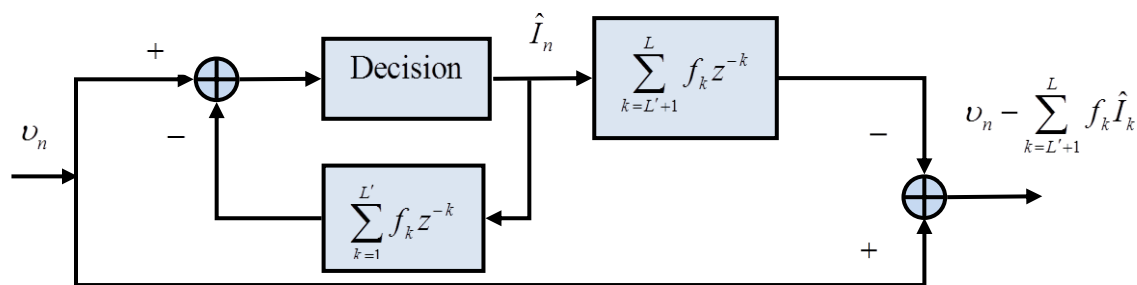
استفاده از این روش باعث می شود که طول حافظه کانال به  $L'$  کاهش یابد. مشکل این روش همان انتشار خطا است که برای اکوالایزهای DF وجود داشت. برای رفع این مشکل می توان از روش دیگری استفاده کرد. با استفاده از فرمول (۷-۱-۷) داریم:

$$\begin{aligned}
 S_n' &\triangleq [I_{n-1} \dots I_{n-L'}] \\
 m_k &= f_0 I_k + \sum_{j=1}^L f_m I_{k-m} \\
 &= f_0 I_k + \underbrace{\sum_{j=1}^{L'} f_m I_{k-m}}_B + \underbrace{\sum_{j=L'+1}^L f_m I_{k-m}}_A
 \end{aligned} \tag{۲۹-۷-۷}$$

در روش قبل ابتدا اثر پارامتر A توسط DF حذف می شد و بعد مقدار پارامتر B توسط حالت در دیاگرام ترلیس الگوریتم ویتربی مشخص می شد. در روش جدید برای هر حالت یک اکوالایزر DF در نظر می گیریم و پارامتر A را از روی مسیر برنده آن حالت بدست می آوریم. بنابراین می توان نوشت:

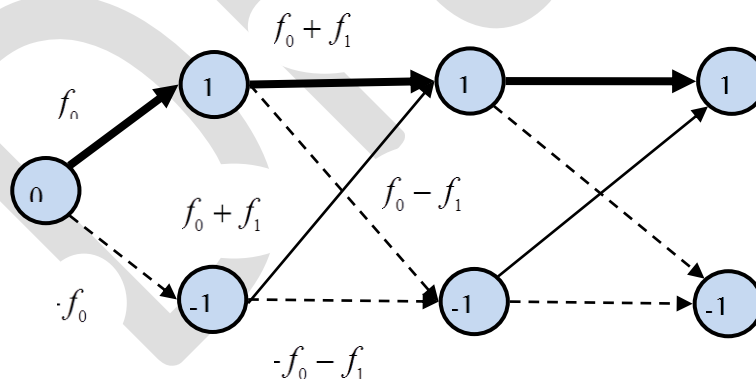
$$v_k - m_k = v_k - \sum_{j=0}^{L'} f_j I_{k-j} - \sum_{j=L'+1}^L f_j \hat{I}_{k-j} \tag{۳۰-۷-۷}$$

که (۳۰-۷-۷) برای هر مسیر برنده جداگانه بدست می آید. در روش جدید در حقیقت برای اجتناب از انتشار خطا در ترکیب سری اکوالایزر DF و ML، از تلفیق اکوالایزر DF در ساختار اکوالایزر ML استفاده می کنیم. پیاده سازی درست آشکارساز ML با کاهش پیچیدگی بر مبنای روش جدید در شکل زیر آمده است.



شکل (۷-۲۳)، ساختار صحیح آشکارساز ML با کاهش پیچیدگی

مثال ۷-۶-۴) کانالی با طول  $L=3$  و مدولاسیون BPSK را در نظر بگیرید. قصد داریم با کاهش پیچیدگی،  $L'=1$ ، نمودار ترلیس و متریک یک شاخه را رسم و بدست آوریم. اگر مشخصه کانال برابر  $F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3}$  باشد در اینصورت متریک هر شاخه برابر خواهد بود با  $|v_k - f_0 I_k - f_1 \hat{I}_{k-1} - f_2 \hat{I}_{k-2} - f_3 \hat{I}_{k-3}|^2$  که بردار  $(\hat{I}_{k-1}, \hat{I}_{k-2}, \hat{I}_{k-3})$  از روی مسیر برنده منتهی به آن شاخه بدست می آید. نمودار ترلیس با کاهش پیچیدگی برای این کانال در شکل زیر رسم شده است:

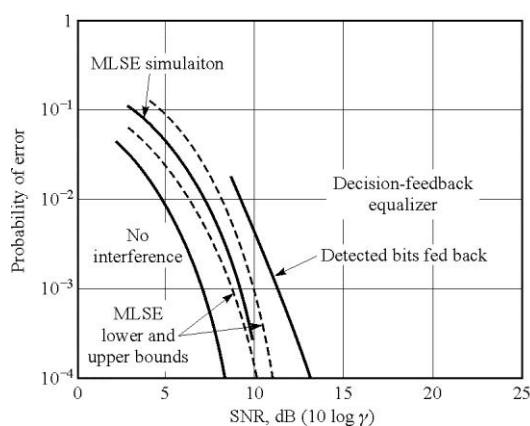


مطابق این شکل، برای شاخه منتهی به مسیر برنده ای که با خطوط پررنگ مشخص شده است با توجه به

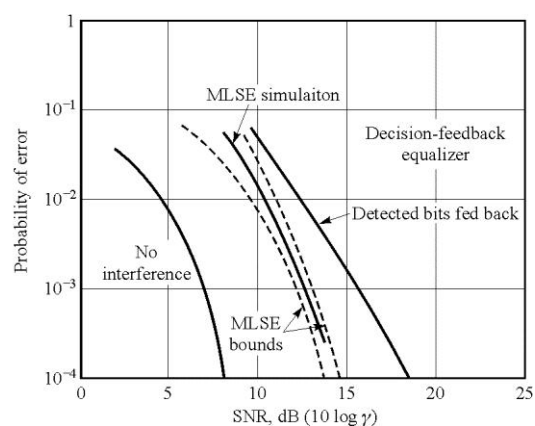
اینکه در این مسیر برنده  $I_{k-1} = I_{k-2} = 1, I_{k-3} = 0$  است بنابراین متریک این شاخه برابر

$$|v_2 - f_0 - f_1 - f_2|^2 \text{ خواهد بود.}$$

در ادامه به شکل زیر توجه کنید که عملکرد آشکارساز بهینه M.L را با اکوالایزر DF برای کانال‌های شکل (۷-۱۲) نشان می‌دهد. همانطور که از شکل پیداست، با افزایش سیگنال به نویز اختلاف بین نمودارها افزایش می‌یابد.



(a) Channel of Figure 10.2-5b



(b) Channel of Figure 10.2-5c

شکل (۷-۲۳) - مقایسه عملکرد آشکارساز بهینه دنباله بوسیله دنباله با اکوالایزر DF برای کانال با مشخصه شکل (۷-۱۲) -

(b) و (b) شکل (۷-۱۲) (c)

## فصل ۸

## کانال‌های چندمسیره تغییرپذیر با زمان

در فصل‌های گذشته ساختار گیرنده بهینه و آنالیز عملکرد آنرا برای کانال‌های مختلف، بدون محدودیت پهنای باند و با محدودیت پهنای باند (کانال با ISI) بدست آوردیم. در این بررسی‌ها، مشخصات کانال در دست بوده و با زمان تغییر نمی‌کرد. در این فصل می‌خواهیم به کانال‌هایی بپردازیم که مشخصات آنها با زمان به صورت آماری تغییر می‌کند. یعنی با هر بار ارسال سیگنال پالسی، باید انتظار متفاوتی از وضعیت کانال داشت. حتی تعداد پالس‌های دریافتی و زمان دریافت آنها نیز متفاوت خواهد بود. این تغییرات معین نیستند و بصورت تصادفی می‌باشند. در حقیقت در این کانال‌ها پاسخ ضربه یک فرایند تصادفی متغیر با زمان است. این مشخصه برای بسیاری از کانال‌های رادیویی مانند کانال‌های مخابرات بی‌سیم مشاهده می‌شود و نتیجه تغییرات فیزیکی در محیط است. به عنوان مثال دیگر حرکات پیوسته یونها توسط جریان‌های هوایی در فرکانس‌های بالا موجب تغییر پاسخ ضربه کانال می‌شود.

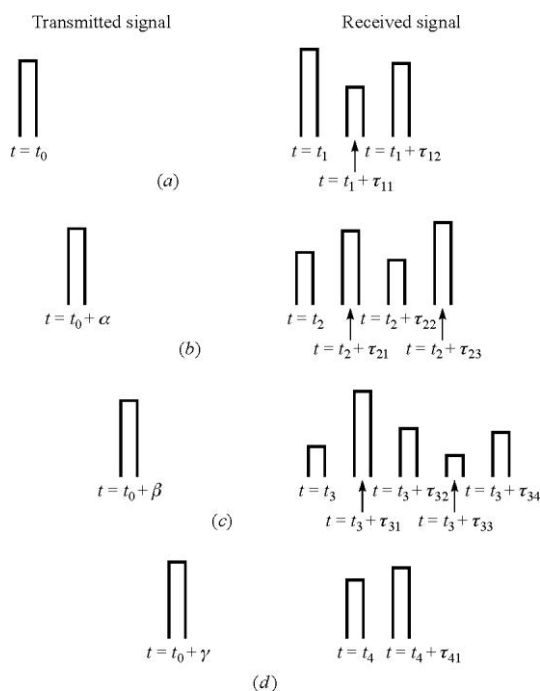
## ۸-۱) پاسخ ضربه کانال‌های چند مسیره متغیر با زمان

در کانال‌های متغیر با زمان، با ارسال یک پالس باریک، همانطور که در شکل (۸-۱) نمایش داده می‌شود، سیگنال دریافتی بصورت قطاری از پالس‌های باریک خواهد بود. تعداد این پالس‌ها، دامنه آنها، و حتی فاصله بین آنها در زمان‌های ارسال متفاوت با هم فرق می‌کند. لذا اولین مشخصه این کانال‌ها گسترش زمانی پاسخ کانال بدلیل چند مسیره بودن کانال است. میزان گسترش زمانی یک متغیر تصادفی است که مقدار متوسط آن، گسترش زمانی کانال<sup>۱</sup> نامیده می‌شود که متعاقباً نحوه محاسبه آن مطرح خواهد شد. فرض کنید که  $s_i(t)$  سیگنال معادل باند پایه ارسال باشد. برای سیگنال ارسال باند میانی داریم:

$$s(t) = \text{Re}\{s_i(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (1-8)$$

<sup>۱</sup> Time Multipath spread





شکل (۱-۸) - نمونه هایی از پاسخ یک کانال متغیر با زمان به یک پالس باریک

فرض می‌کنیم که چندین مسیر انتشار وجود دارد و برای هر مسیر یک تاخیر و ضریب تضعیف متفاوت در نظر می‌گیریم. این تاخیرها و ضریب‌های تضعیف متغیر با زمان است. بنابراین سیگنال دریافتی بصورت زیر خواهد بود:

$$r(t) = \sum_n \alpha_n(t) s(t - \tau_n(t)) \quad (2-1-8)$$

که  $\alpha_n(t)$  و  $\tau_n(t)$  به ترتیب ضریب تضعیف و تاخیر مسیر  $n$ ام هستند که مستقل از هم می‌باشند. با قرار دادن  $s(t)$  از رابطه (۱-۱-۸) در (۲-۱-۸)، به معادله زیر می‌رسیم:

$$r(t) = \text{Re} \left\{ \left[ \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} s_l(t - \tau_n(t)) \right] e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (3-1-8)$$

بنابراین سیگنال معادل دریافتی در باند پایه بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} r_l(t) &= \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} s_l(t - \tau_n(t)) \\ &= \sum_n \alpha_n(t) e^{j\theta_n(t)} s_l(t - \tau_n(t)) \end{aligned} \quad (4-1-8)$$

که در آن  $\theta_n(t) = -2\pi f_c \tau_n(t)$  است. با توجه به اینکه  $r_i(t)$  پاسخ کانال معادل باند پایه به سیگنال  $s_i(t)$  است، پاسخ ضربه متغیر با زمان کانال معادل باند پایه را می‌توان با توجه به (۸-۱-۴) بصورت زیر نوشت:

$$c(\tau; t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{j\theta_n(t)} \delta(t - \tau_n(t)) \quad (۵-۱-۸)$$

$$\Rightarrow r_i(t) = \int c(\tau; t) s_i(t - \tau) d\tau$$

برای بعضی از کانال‌ها مناسب است که سیگنال دریافتی را در مجموعه پیوسته‌ای از مسیرها در نظر بگیریم. در این حالت سیگنال دریافتی با انتگرال زیر نمایش داده می‌شود:

$$r(t) = \int \alpha(\tau; t) s(t - \tau) d\tau \quad (۶-۱-۸)$$

که در این معادله  $\alpha(\tau; t)$  تضعیف مسیر با تاخیر  $\tau$  در لحظه  $t$  است. در این حالت نیز پاسخ ضربه متغیر با زمان معادل باند پایه کانال بصورت زیر در می‌آید:

$$c(\tau; t) = \alpha(\tau; t) e^{-j2\pi f_c \tau} \quad (۷-۱-۸)$$

که در حقیقت  $c(\tau; t)$  پاسخ کانال در لحظه  $t$  به ضربه‌ای است که در لحظه  $t - \tau$  اعمال شده است. با استفاده از مطالب بالا، پاسخ سیستم در لحظه  $t$  به ایمپالسی که  $\tau$  ثانیه قبل ارسال شده است در روابط (۵-۱-۸) و (۷-۱-۸) آمده است.

مشخصه دیگر این کانال‌ها پخش شدگی پاسخ در حوزه فرکانس است. برای نشان دادن این مشخصه، فرض کنید که یک سیگنال tone در فرکانس حامل ارسال شده است. در این حالت اگر از پاسخ ضربه (۵-۱-۸) استفاده کنیم، داریم:

$$s_i(t) = 1 \Rightarrow r_i(t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{j\theta_n(t)} \quad (۸-۱-۸)$$

پس همانطور که از (۸-۱-۸) پیداست، ارسال یک tone به تنهایی مولفه‌های فرکانسی بیشماری تولید می‌کند. به عبارتی پهنای باند سیگنال دریافتی صفر نیست. لذا از مشخصه دیگر این کانال‌ها، گسترش در حوزه فرکانس بدلیل تغییر پذیر بودن کانال است. میزان گسترش در حوزه فرکانس یک متغیر تصادفی است که مقدار متوسط آن را شیفت دوپلر کانال می‌گویند که متعاقباً نحوه محاسبه آن مطرح خواهد شد. در ارتباط با شکل موج دریافتی در (۸-۱-۸) ابتدا توجه می‌کنیم که فاز  $\theta_n(t)$  با تغییر  $\tau_n$  به اندازه  $\frac{1}{f_c}$ ، که عدد

کوچکی است، به اندازه  $2\pi$  تغییر می‌کند. بنابراین در حالت کلی سیگنال (۸-۱-۸) کاملاً تصادفی است. هنگامی که تعداد مسیرهای دریافتی زیاد باشد، می‌توان از قضیه حد مرکزی استفاده کرد. یعنی  $r_i(t)$  را می‌توان یک فرایند تصادفی گوسی مختلط در نظر گرفت. این به این معنی است که  $c(\tau; t)$  یک فرایند تصادفی گوسی مختلط در متغیر  $t$  است.

خواصی که برای سیگنال (۸-۱-۸) در بالا شرح داده شد، باعث پدیده فیدینگ می‌شود که ناشی از تغییرات در فاز  $\theta_n(t)$  است.  $\theta_n(t)$  را با تقریب بسیار خوبی می‌توان یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و  $2\pi$  در نظر گرفت. این فاز باعث می‌شود که سیگنال‌های مسیرهای متفاوت گاهی بصورت سازنده و گاهی تضعیف کننده با هم جمع شوند و دامنه‌های متفاوتی ایجاد کنند. بدلیل توزیع یکنواخت برای  $\theta_n(t)$  و تغییر بسیار آرام و مستقل  $\alpha_n(t)$ ، دارای متوسط صفر خواهد بود. هنگامی که  $c(\tau, t)$  یک فرایند تصادفی گوسی مختلط در نظر گرفته شود، دامنه آن  $|c(\tau, t)|$  یک فرایند رایلی است. در این حالت کانال را دارای فیدینگ رایلی گویند. در حالتی که یک مسیر مستقیم و غیر تصادفی از سیگنال ارسال وجود داشته باشد که متوسط سیگنال دریافتی را نتوان صفر در نظر گرفت،  $|c(\tau, t)|$  را با یک فرایند رایس مدل می‌کنند و کانال را دارای فیدینگ رایس گویند.

تعریف پاسخ فرکانسی:

در کانال‌های LTI پاسخ فرکانسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Input: } e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow \text{Output: } H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} \quad (9-1-8)$$

که در این رابطه  $H(f)$  تابع مشخصه کانال است. در این نوع کانال، خروجی در فرکانس  $f_0$  تنها به ورودی در فرکانس  $f_0$  بستگی دارد ولی در کانال‌های فیدینگ برای ورودی تک فرکانس خروجی بصورت زیر است:

$$\text{Input: } e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow \text{Output: } C(f_0, t) e^{j2\pi f_0 t} \quad (10-1-8)$$

همانطور که دیده می‌شود خروجی در یک فرکانس خاص تنها به ورودی در آن فرکانس خاص بستگی ندارد. برای کانال‌های فیدینگ پاسخ فرکانسی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(f, t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau, t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (11-1-8)$$

### ۲-۸) تابع همبستگی و چگالی طیف کانال

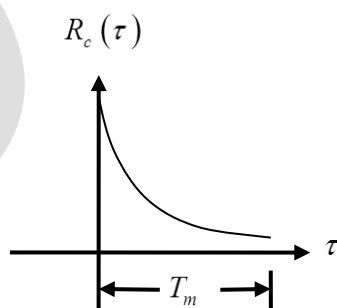
اکنون می‌خواهیم تعدادی از توابع همبستگی و چگالی طیف توان مربوط به کانال را تعریف کنیم که برای بررسی و دسته بندی این کانال‌ها لازم و مفید است. با پاسخ ضربه معادل باند پایه  $c(\tau; t)$  شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم که  $c(\tau; t)$  فرآیند ایستاد به مفهوم باز است. تابع همبستگی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_c(\tau_1, \tau_2; \Delta t) = E[c(\tau_2; t + \Delta t) c^*(\tau_1; t)] \quad (12-1-8)$$

در بیشتر کانال‌های رادیویی، دامنه و شیفت فاز کانال مربوط به تاخیر  $\tau_1$  با دامنه و شیفت فاز کانال مربوط به تاخیر  $\tau_2$  ناهمبسته است. با استفاده از این فرض می‌توان نوشت:

$$R_c(\tau_1, \tau_2; \Delta t) = R_c(\tau_1; \Delta t) \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (13-1-8)$$

اگر  $\Delta t = 0$  را قرار دهیم،  $R_c(\tau; 0) \equiv R_c(\tau)$  را می‌توان متوسط توان خروجی کانال متناظر با تاخیر  $\tau$  در نظر گرفت. به همین دلیل  $R_c(\tau)$  را چگالی طیف تاخیر می‌نامند. در عمل برای محاسبه  $R_c(\tau; \Delta t)$  پالس‌های بسیار باریکی را در کانال ارسال می‌کنند و تابع همبستگی پالس دریافتی را با شیفت یافته اش بدست می‌آورند. شکل زیر یک حالت معمول برای  $R_c(\tau)$  را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۸) - یک تابع چگالی طیف تاخیر نمونه

همانطور که در شکل (۲-۸) نیز نشان داده شده است، بازه زمانی را که در آن  $R_c(\tau)$  مقدار تقریباً غیر صفر دارد را با  $T_m$  نشان داده و گسترش زمانی کانال می‌نامند.

اگر بخواهیم روابط را در حوزه فرکانس دنبال کنیم از تبدیل فوریه  $c(\tau; t)$  استفاده می‌کنیم:

$$C(f;t) = F\{c(\tau;t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau;t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (14-1-8)$$

متعاقباً نشان خواهیم داد که  $C(f;t)$  پاسخ فرکانسی تغییرپذیر با زمان کانال می‌باشد. رابطه (14-1-8) را در نظر بگیرید. توابع همبستگی مشابه (12-1-8) را می‌توان برای حوزه فرکانس نیز تعریف کرد. داریم:

$$R_C(f_1, f_2; \Delta t) = E[C^*(f_1; t) C(f_2; t + \Delta t)] \quad (15-1-8)$$

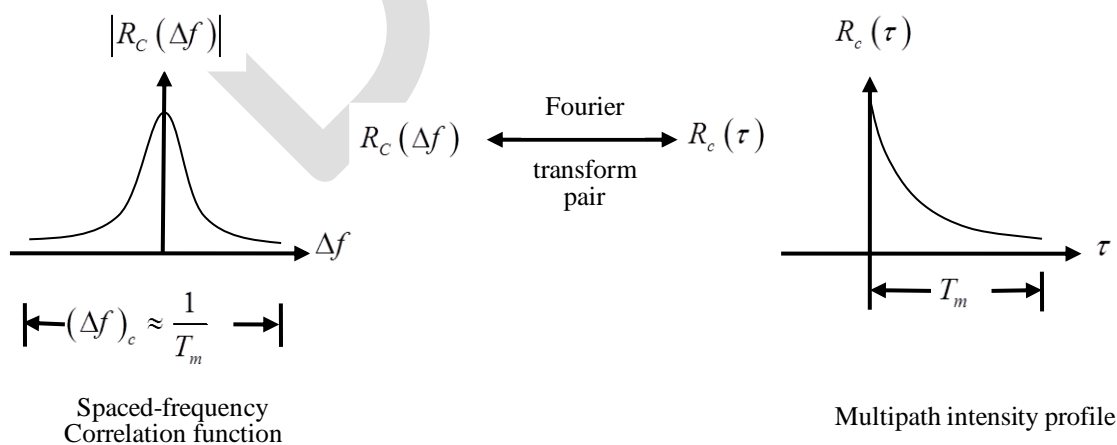
با توجه به اینکه  $C(f;t)$  تبدیل فوریه  $c(\tau;t)$  است، می‌خواهیم رابطه بین (15-1-8) و (12-1-8) را بدست آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} R_C(f_1, f_2; \Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[c^*(\tau_1; t) c(\tau_2; t + \Delta t)] e^{j2\pi(f_1\tau_1 - f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_C(\tau_1; \Delta t) \delta(\tau_1 - \tau_2) e^{j2\pi(f_1\tau_1 - f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_C(\tau_1; \Delta t) e^{j2\pi\tau_1(f_1 - f_2)} d\tau_1 \\ &= R_C(\Delta f; \Delta t) \end{aligned} \quad (16-1-8)$$

همانطور که از (16-1-8) پیداست،  $R_C(\Delta f; \Delta t)$  تبدیل فوریه  $R_C(\tau; \Delta t)$  است. تابش‌های غیرهمبسته باعث شده است که تابع همبستگی  $C(f;t)$ ، فقط تابعی از اختلاف فرکانسی باشد. فرض کنید که داشته باشیم  $\Delta t = 0$ . در این صورت براحتی رابطه زیر را از (16-1-8) داریم:

$$R_C(\Delta f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_C(\tau) e^{-j2\pi\Delta f\tau} d\tau \quad (17-1-8)$$

در شکل زیر رابطه بین  $R_C(\tau)$  و  $R_C(\Delta f)$  نمایش داده شده است.



شکل (۸-۳) - رابطه بین  $R_c(\tau)$  و  $R_c(\Delta f)$

با توجه به اینکه  $R_c(\Delta f)$  تابع همبستگی در حوزه فرکانس است، می‌تواند معیاری برای ما از همبستگی فرکانسی کانال بدست دهد.  $(\Delta f)_c$  را بصورت مینیمم فاصله بین دو فرکانس تعریف می‌کنیم برای اینکه پاسخ کانال به این دو فرکانس ناهمبسته باشد. این فاصله فرکانسی را پهنای باند همبستگی کانال<sup>۱</sup> می‌نامند. با توجه به رابطه (۸-۱۷) داریم:

$$(\Delta f)_c \approx \frac{1}{T_m} \quad (۸-۱۸)$$

اگر دو سینوسی با اختلاف فرکانس بیشتر از  $(\Delta f)_c$  به کانال اعمال شوند، رفتارهای متفاوت و مستقلی می‌بینند. اگر پهنای باند سیگنالی که به کانال اعمال می‌شود بیشتر از  $(\Delta f)_c$  باشد کانال را انتخابگر فرکانس Frequency selective می‌گویند. از طرف دیگر اگر  $(\Delta f)_c$  نسبت به پهنای باند سیگنال خیلی بزرگ باشد، کانال را Frequency nonselective می‌نامند.

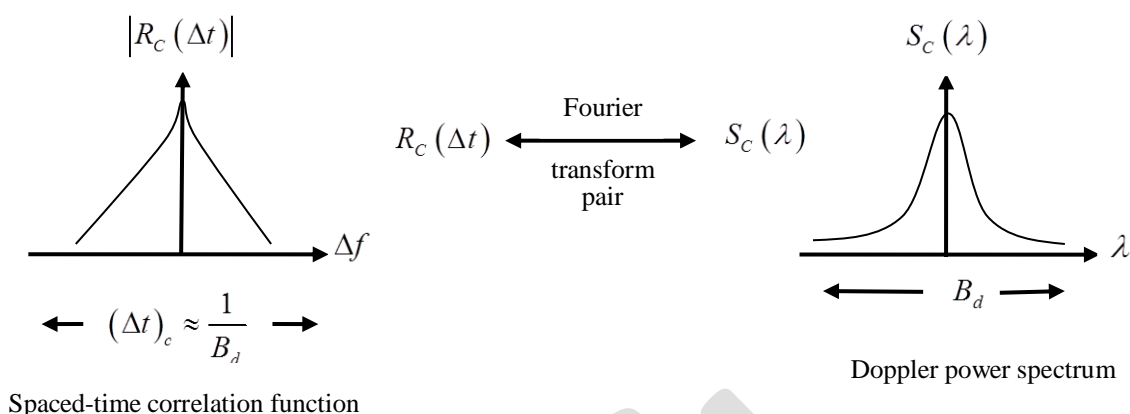
اکنون می‌خواهیم توجه خود را به تغییرات زمانی کانال معطوف کنیم. تغییرات زمانی کانال بصورت اثرات دوپلر ظاهر می‌شود. برای ارتباط تغییرات زمانی با شیفت دوپلر تبدیل فوریه  $R_c(\Delta f; \Delta t)$  را نسبت به  $\Delta t$  در نظر می‌گیریم. می‌توان نوشت:

$$S_c(\Delta f; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} R_c(\Delta f; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (۸-۱۹)$$

اگر  $\Delta f = 0$  قرار دهیم با استفاده از (۸-۱۹) داریم:

$$S_c(\lambda) \triangleq S_c(0; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} R_c(0; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (۸-۲۰)$$

$S_c(\lambda)$  تابع چگالی توانی است که شدت سیگنال را بر اساس فرکانس دوپلر  $\lambda$  نشان می‌دهد. به همین دلیل  $S_c(\lambda)$  را طیف توان دوپلر کانال گویند. پهنای باند  $S_c(\lambda)$  را شیفت دوپلر می‌نامند و با  $B_d$  نشان می‌دهند. شکل (۸-۴) رابطه بین  $S_c(\lambda)$  و  $R_c(\Delta t) \triangleq R_c(0; \Delta t)$  را نشان می‌دهد.



شکل (۸-۴) - رابطه بین  $S_c(\lambda)$  و  $R_c(\Delta t)$

چون  $S_c(\lambda)$  به وسیله تبدیل فوریه به  $R_c(\Delta t)$  مربوط است، معکوس  $B_d$  می‌تواند معیاری برای زمان همبستگی کانال باشد، یعنی داریم:

$$(\Delta t)_c \approx \frac{1}{B_d} \quad (۸-۱-۲۱)$$

$(\Delta t)_c$  را زمان همبستگی کانال<sup>۱</sup> می‌نامند. به طور وضوح، کانالی که به آرامی تغییر می‌کند، زمان همبستگی بزرگی دارد و در نتیجه شیفت دوپلر آن کوچک است. در واقع  $(\Delta t)_c$  حداقل فاصله بین زمان‌های ارسال متوالی برای اینکه تحت تاثیر فیدینگ مستقل قرار گیرند، می‌باشد.

در عمل می‌توان پارامتر شیفت دوپلر  $B_d$  را با ارسال tone‌های زیاد و محاسبه جذر متوسط مجذور پهنای باند سیگنال دریافتی متناظر با هر یک از آنها بدست آورد.

تا اینجا ما یک رابطه تبدیل فوریه بین  $R_c(\Delta f; \Delta t)$  و  $R_c(\tau; \Delta t)$  بدست آوردیم که متغیرهای  $(\tau; \Delta f)$  درگیر بودند. یک رابطه تبدیل فوریه هم بین  $R_c(\Delta f; \Delta t)$  و  $S_c(\Delta f; \lambda)$  بدست آوردیم که  $(\Delta t; \lambda)$  درگیر بودند. حال می‌خواهیم این حلقه را کامل کنیم. یعنی می‌خواهیم  $R_c(\tau; \Delta t)$  و  $S_c(\Delta f; \lambda)$  را به هم مربوط کنیم. تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

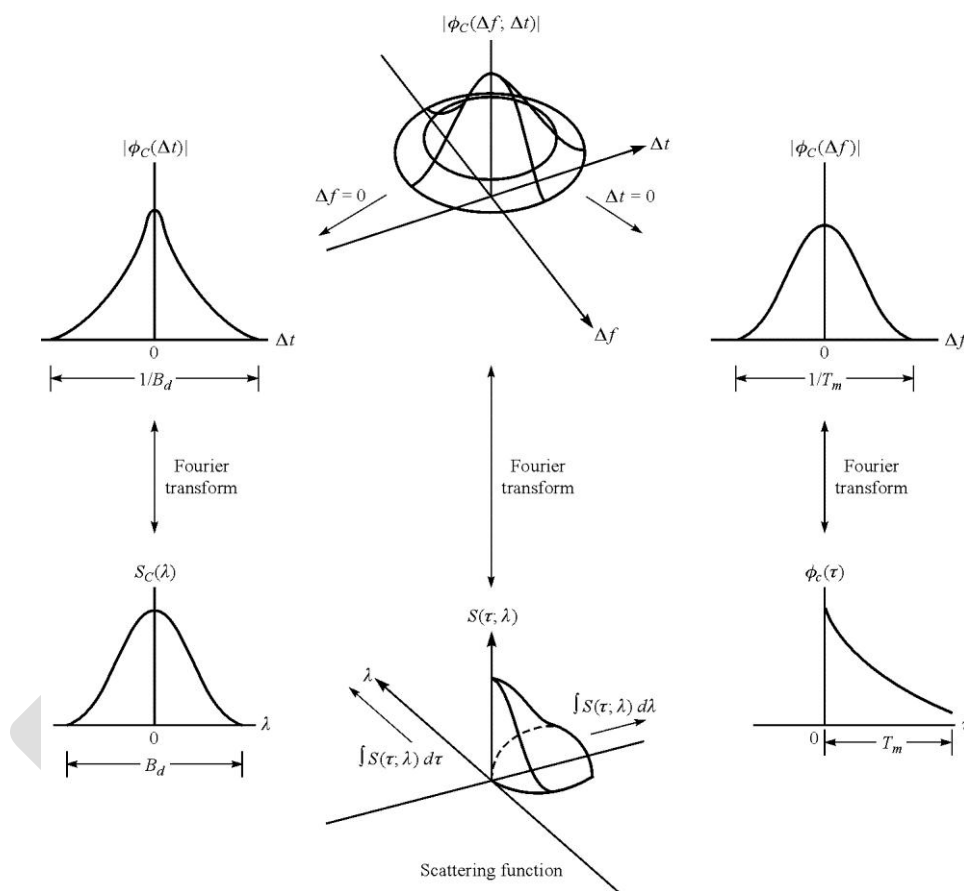
$$S(\tau; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} R_c(\tau; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (۸-۱-۲۲)$$

براحتی می‌توان دید که رابطه زیر برقرار است:

<sup>۱</sup> Coherence Time

$$S(\tau; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S_C(\Delta f; \lambda) e^{j2\pi\tau\Delta f} d\Delta f \quad (23-1-8)$$

$S(\tau; \lambda)$  را تابع اسکتر کانال<sup>۱</sup> می‌نامند. این تابع معیاری از توان متوسط را بر حسب متغیرهای  $\tau$  و فرکانس دوپلر  $\lambda$  بدست می‌دهد. شکل (۵-۸) رابطه بین چهار تابع همبستگی کانال و چگالی طیف که در این بخش تعریف شدند را نشان می‌دهد.



شکل (۵-۸) - روابط بین توابع همبستگی کانال و چگالی طیف

### ۳-۸) مدل‌سازی مختلف کانال بر اساس مشخصات سیگنال ورودی

در بخش‌های قبلی مشخصات آماری کانال‌های تصادفی متغیر با زمان را با استفاده از توابع همبستگی متفاوتی بررسی کردیم. حال می‌خواهیم بررسی کنیم که این مشخصات چگونه روی مدل کانال اثر می‌گذارد.

<sup>۱</sup> Scattering function



فرض کنید که سیگنال معادل باند پایه ارسالی و تبدیل فوریه آنرا بترتیب با  $s_i(t)$  و  $S_i(f)$  نشان دهیم. آنگاه سیگنال دریافتی در خروجی کانال با صرفنظر کردن از نویز گوسی، بر حسب توابع زمانی برابر است با:

$$r_i(t) = \int c(\tau; t) s_i(t - \tau) d\tau \quad (24-1-8)$$

و بر حسب توابع فرکانسی، با استفاده از تساوی پارسوال از (۸-۳-۱)، برابر است با:

$$r_i(t) = \int C(f; t) S_i(f) e^{j2\pi ft} df \quad (25-1-8)$$

فرض کنیم که نرخ ارسال سیگنال  $1/T$  است. از فرمول (۸-۱-۲۵) واضح است که تابع تبدیل  $C(f; t)$  روی سیگنال اثر می‌گذارد. اگر  $S_i(f)$  پهنای باند برابر  $W$  بزرگتر از پهنای باند همبستگی کانال  $(\Delta f)_c$  داشته باشد،  $S_i(f)$  در طول پهنای باند خود تحت تاثیر ضرایب و شیفت‌های فاز متفاوتی قرار می‌گیرد. در این حالت کانال را frequency-selective گویند.

یک تاثیر کاملاً مستقل دیگر روی سیگنال می‌تواند بر اثر تغییرات زمانی  $C(f; t)$  باشد که به صورت تغییرات روی شدت سیگنال دریافتی ظاهر می‌شود. این تغییرات را فیدینگ می‌گویند. بنابراین توجه کنید که frequency-selectivity و فیدینگ دو پدیده کاملاً مستقل هستند. اولی از پدیده چندمسیری یا معادلاً اندازه نسبی پهنای باند همبستگی کانال در مقایسه با پهنای باند سیگنال ناشی می‌شود. دومی به تغییرات زمانی کانال مربوط است که با  $(\Delta t)_c$  یا معادلاً شیفت دوپلر  $B_d$  مشخص می‌شود.

تاثیرات کانال روی سیگنال ارسالی  $s_i(t)$ ، تابعی از پهنای باند و دوره زمانی سیگنال ارسالی است. برای مثال اگر دوره زمانی سیگنال  $T$  طوری انتخاب شود که  $T \gg T_m$  باشد، کانال ISI خیلی کمی ایجاد می‌کند.

اگر پهنای باند سیگنال  $s_i(t)$  برابر  $W \approx \frac{1}{T}$  باشد، شرط  $T \gg T_m$  نتیجه می‌دهد که:

$$W \ll \frac{1}{T_m} \approx (\Delta f)_c \quad (26-1-8)$$

در حقیقت پهنای باند سیگنال خیلی کمتر از پهنای باند همبستگی کانال است. بنابراین کانال frequency-nonselective است. در حقیقت کل طیف سیگنال  $S_i(f)$  یک تضعیف و فاز را می‌بیند. در حقیقت در دوره فرکانسی  $S_i(f)$ ، تابع همبستگی کانال  $C(f; t)$  یک عدد مختلط ثابت البته از دید متغیر فرکانس

است. با توجه به اینکه  $S_i(f)$  سیگنال باند پایه است و بیشتر توان خود را در حول فرکانس صفر دارد، در این محدوده فرکانسی داریم  $C(f;t) \approx C(0;t)$ . بنابراین با توجه به (۸-۱-۲۵) داریم:

$$r_i(t) = C(0;t) \int S_i(f) e^{j2\pi ft} df = C(0;t) s_i(t) \quad (۸-۱-۲۷)$$

لذا در حالتی که کانال frequency-nonselective است، سیگنال دریافتی همان سیگنال ارسالی است که در یک ضریب مستقل از فرکانس ضرب شده است. در این حالت می‌گوئیم که مسیرهای متفاوت قابل تفکیک نیستند زیرا  $W \ll (\Delta f)_c$ . این کانال را کانال مسطح<sup>۱</sup> نیز می‌نامند. برای کانال فوق ضریب  $C(0;t)$  را بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$C(0;t) = \alpha(t) e^{j\varphi(t)} \quad (۸-۱-۲۸)$$

که  $\alpha(t)$  و  $\varphi(t)$  بترتیب دامنه و فاز کانال معادل باند پایه هستند. اگر فرض کنیم که  $C(0;t)$  یک فرایند گوسی مختلط با میانگین صفر است، در هر لحظه از زمان،  $\alpha(t)$  یک متغیر تصادفی رایلی است و  $\varphi(t)$  توزیع یکنواخت روی بازه  $(-\pi, \pi)$  دارد.

سرعت فیدینگ در کانال بالا توسط تابع همبستگی  $R_C(\Delta t)$  و یا چگالی طیف دوپلر  $S_C(\lambda)$  مشخص می‌شود. به طور معادل می‌توان از  $(\Delta t)_c$  و یا  $B_d$  نیز استفاده کرد. برای مثال فرض کنید که پهنای باند سیگنال طوری است که  $W \ll (\Delta f)_c$  و دوره زمانی آن به شکلی است  $T \ll (\Delta t)_c$ . چون دوره زمانی سیگنال از زمان همبستگی کانال بسیار کمتر است، حداقل برای یک دوره زمانی سیگنال تضعیف کانال و شیفت فازی ثابت است. در این حالت می‌گوئیم که کانال فیدینگ آرام<sup>۲</sup> دارد. اگر پهنای باند سیگنال  $s_i(t)$  برابر  $W \approx \frac{1}{T}$  باشد، برای کانال frequency-nonselective با فیدینگ آرام رابطه  $T_m B_d < 1$  را می‌توان نوشت.

حاصلضرب  $T_m B_d$  را ضریب پخشی کانال می‌نامند. اگر  $T_m B_d < 1$  باشد کانال را کم‌پخش شده<sup>۳</sup> و در غیر این صورت زیادپخش شده<sup>۱</sup> می‌نامند.

Flat<sup>۱</sup>Slow Fading<sup>۲</sup>Underspread<sup>۳</sup>

در کانالهائی که پهنای باند سیگنال  $W$  کوچکتر از  $(\Delta f)_c$  باشد، مسیرهای مختلف دریافت سیگنال قابل جداکردن نیستند و سیگنال دریافتی فقط از یک مسیر فیدینگ به گیرنده می‌رسد. اگر کانال frequency-selective باشد، می‌توان مسیرهای متفاوتی برای سیگنال دریافتی در نظر گرفت. در این حالت می‌توان کانال را با یک فیلتر tapped-delay line مدل کرد و عملکرد سیستم را بدست آورد.

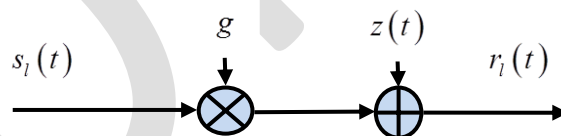
کانال frequency-nonselective با فیدینگ آرام را می‌توان با کانال با بهره رندم مختلط مدلسازی کرد که در فصل ۶ به طور مفصل مورد بررسی قرار گرفت و روش‌های دایورسیتی برای مقابله با ضریب تصادفی آن معرفی شدند.

#### ۴-۸) دایورسیتی

کانالی را در نظر بگیرید که Frequency non-selective و همچنین Flat fading باشد. در اینصورت خروجی بدون نویز کانال بدین شکل قابل بیان است:

$$r_i(t) = c(0,t)s_i(t) \quad (۲۹-۱-۸)$$

با تعریف  $g \triangleq c(0,t) = ae^{-j\theta}$  مدل زیر را برای این کانال در نظر می‌گیریم:



شکل (۶-۸)

همانطور که در فصل ششم به تفصیل بحث شد، در این نوع کانال رابطه احتمال خطا با سیگنال به نویز بر خلاف کانال گوسی یک رابطه نمایی نیست بلکه یک رابطه معکوس می‌باشد. یک راه غلبه بر این مشکل استفاده از دایورسیتی است. در زیر به بررسی انواع دایورسیتی می‌پردازیم.

دایورسیتی زمانی:

سیگنال‌های ارسالی در بازه‌های زمانی بزرگتر از زمان همبستگی کانال ارسال می‌گردند تا کانال‌های مستقلی را تجربه نمایند به عبارت دیگر سیگنال‌های ارسالی به فرم زیر خواهند بود:

$$s_{lm,n}(t) = s_{lm,1}(t - (n-1)\Delta t_c) \quad (30-1-8)$$

دایورسیتی فرکانسی:

در این نوع دایورسیتی سیگنالینگ به شکل زیر است:

$$s_{lm,n}(t) = s_{lm,1}(t) e^{-j(n-1)\Delta f_c t} \quad (31-1-8)$$

دایورسیتی فضایی:

برای ایجاد دایورسیتی فضایی یک شکل موج توسط آنتن‌هایی با فاصله مناسب ارسال می‌شود که فیدینگ مستقل ببینند. در گیرنده هم می‌توان از آنتن‌های با فاصله‌های مختلف استفاده کرد و همچنین از گیرنده MGC و یا Square-Law استفاده نمود. متغیر تصمیم‌گیری برای گیرنده‌های MGC و Square-Law در زیر آورده شده است:

$$\text{MGC:} \quad \text{Re} \left\{ \sum_n g_n^* \int r_{l,n}(t) s_{lm,n}^*(t) dt \right\} \quad (32-1-8)$$

$$\text{Square-Law:} \quad \sum_n \left| \int r_{l,n}(t) s_{lm,n}^*(t) dt \right|^2$$

روش دیگر آشکارسازی در این نوع از دایورسیتی استفاده از Selective Detection است. در این روش فقط از خروجی آنتنی استفاده می‌شود که بزرگترین SNR را داشته باشد. متغیر تصمیم‌گیری در این روش نیز بشکل زیر است:

$$\text{Re} \left\{ \int r_{l,n}(t) s_{lm,n}^*(t) dt \right\} \quad (33-1-8)$$

در این روش نیازی به تخمین مشخصه کانال نیست ولی پیدا کردن SNR در هر بار ممکن است منجر به این شود که مجبور شویم در هر بازه از آنتنی به آنتن دیگر شیفیت کنیم. یک راه غلبه بر این مشکل اینست که در ابتدا با آنتنی که بیشترین SNR را دارد دریافت انجام شود و زمانیکه مقدار SNR سیگنال دریافتی این آنتن از یک حد مشخص کمتر شد بدنبال آنتنی با بیشترین SNR بگردیم. با استفاده از این نوع دایورسیتی برای هر نوع از گیرنده‌هایی که در بالا ذکر شد مرتبه دایورسیتی برابر است.

استفاده از دایورسیتی معمولی:

استفاده از دایورسیتی معمولی شامل استفاده از کدینگ تکراری است و در واقع دایورسیتی زمانی و فرکانسی را نیز می‌توان معادل کدینگ تکراری دانست. فرض کنید برای ارسال هر سمبول از کدینگ تکراری مرتبه  $L$  استفاده شود در این صورت نرخ کدینگ برابر  $\frac{1}{L}$  خواهد بود که مستلزم افزایش پهنای باند است. در کدینگ تکراری جهت دستیابی به احتمال خطا پایین لازم است نرخ کدینگ به سمت صفر میل کند که این امر به نوبه خود سبب افزایش پهنای باند می‌شود. برای غلبه بر این مشکل می‌توان از کدینگ با نرخ  $\frac{1}{2}$  در کنار Interleave استفاده کرد. با بکارگیری Interleave می‌توان با اتلاف کمتری در پهنای باند به دایورسیتی با مرتبه مطلوب دست یافت. در ارسال بردار اطلاعات  $(u_0, u_1, \dots, u_k)$  به منظور تجربه کانال Slow-Fading لازم است تا قید  $T(k+1) \geq \Delta t_c$  برقرار باشد که در آن  $T$  بازه ارسال یک سمبول است. از طرفی جهت دستیابی به دایورسیتی می‌توان  $k$  را طوری انتخاب کرد تا  $T \leq (\Delta t)_c$  که در نتیجه سمبول‌ها فیدینگ‌های مستقلی را تجربه می‌کنند. به همین ترتیب فرض کنید قصد ارسال کلمات کد  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(N)}$  را داشته باشیم ماتریس زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} v_1^{(1)} & \dots & v_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(N)} & \dots & v_n^{(N)} \end{bmatrix} \quad (۳۴-۱-۸)$$

در تشکیل این ماتریس سمبول‌های کلمات کد بصورت سطری در ماتریس نوشته می‌شوند و برای ارسال بصورت ستونی از ماتریس خوانده می‌شوند و ارسال می‌گردند. در نتیجه این عمل، اگر  $TN \geq (\Delta t)_c$  باشد

سمبول‌های یک کلمه کد فیدینگ‌های مستقلی را می‌بینند. این نوع از Interleave, Interleave بلوکی نامیده می‌شود و  $N$  را عمق Interleave می‌نامند. دایورسیتی زمانی به علت تأخیر زیاد در ریت‌های بالا در دسترس نیست لذا در اینجا کدینگ تکراری هم میسر نیست و از روش‌های Space-Time کدینگ استفاده می‌شود.

### ۵-۸) سیگنالینگ در کانال Frequency-Selective و گیرنده RAKE

هنگامی که ضریب پخش یک کانال در قید  $T_m B_d \ll 1$  صدق کند می‌توان از سیگنالینگ با پهنای باند  $W \ll (\Delta f)_c$  و دوره زمانی  $T \ll (\Delta t)_c$  استفاده نمود که در اینصورت کانال Frequency-nonselective و Slowly fading خواهد بود. در چنین کانالی می‌توان از تکنیک دایورسیتی برای غلبه بر فیدینگ بهره جست. اگر پهنای باند سیگنال‌ها  $W \gg (\Delta f)_c$  باشد بطور ذاتی سبب ایجاد اعوجاج می‌شود ولی اگر سیگنالینگ خوب انتخاب شود می‌تواند دایورسیتی ذاتی ایجاد نماید. در این حالت یک راه ساده برای استفاده از دایورسیتی فرکانسی اینست که کانال به زیرکانال‌های Frequency-division (FDM) (multiplexing) تقسیم گردند. در این بخش به راه حل دیگری می‌پردازیم. بدون در نظر گرفتن قیدی فرض کنید  $s_i(t)$  سیگنال باند پایه ارسالی و  $S_i(f)$  تبدیل حوزه فرکانس این سیگنال باشد در اینصورت طبق قضیه نایکوئیست:

$$s_i(t) = \sum_n s_i(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (35-1-8)$$

حال اگر نمونه برداری با نرخ نایکوئیست  $\frac{1}{T} = W$  انجام شود رابطه بالا بصورت زیر قابل بیان است:

$$s_i(t) = \sum_n s_i\left(\frac{n}{W}\right) \operatorname{sinc}\left(W\left(t - \frac{n}{W}\right)\right) \quad (36-1-8)$$

و متناظراً برای تبدیل فوریه سیگنال باند پایه داریم:

$$S_i(f) = \begin{cases} \sum_n \frac{1}{W} s_i\left(\frac{n}{W}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{W} f} & |f| \leq \frac{W}{2} \\ 0 & o.w \end{cases} \quad (37-1-8)$$

از طرفی در حالت کلی برای خروجی بدون نویز کانال می توان نوشت:

$$r_i(t) = \int c(\tau; t) s_i(t - \tau) d\tau \quad (38-1-8)$$

که با استفاده از رابطه پارسوال بصورت زیر نیز قابل بیان است:

$$r_i(t) = \int C(f; t) S_i(f) e^{j2\pi ft} df \quad (39-1-8)$$

حال با جایگذاری رابطه (38-1-8) در رابطه بالا داریم:

$$r_i(t) = \frac{1}{W} \sum_n s_i\left(\frac{n}{W}\right) \int C(f; t) e^{-j2\pi f(t - n/W)} df \quad (40-1-8)$$

با استفاده از عکس رابطه تبدیل فوریه برای عبارت انتگرال در رابطه بالا آنرا بصورت زیر خلاصه می کنیم:

$$r_i(t) = \frac{1}{W} \sum_n s_i\left(\frac{n}{W}\right) c\left(t - \frac{n}{W}; t\right) \quad (41-1-8)$$

همانطور که ملاحظه می شود عبارت سمت راست تساوی بالا حاصل جمع کانولوشن است که با استفاده از

خواص کانولوشن بصورت رابطه زیر قابل بیان است:

$$r_i(t) = \frac{1}{W} \sum_n s_i\left(t - \frac{n}{W}\right) c\left(\frac{n}{W}; t\right) \quad (42-1-8)$$

در این رابطه  $c\left(\frac{n}{W}; t\right)$  بیانگر پاسخ ضربه کانال به مسیری با تأخیر  $\frac{n}{W}$  است. حال ضرائب متغیر با

زمان کانال را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$c_n(t) \triangleq \frac{1}{W} c\left(\frac{n}{W}; t\right) \quad (43-1-8)$$

با توجه به این تعریف رابطه (42-1-8) را بصورت زیر باز نویسی می کنیم:

$$r_i(t) = \sum_n c_n(t) s_i\left(t - \frac{n}{W}\right) \quad (44-1-8)$$

با توجه به رابطه بالا، سیگنال دریافتی ناشی از رسیدن سیگنال با تأخیرهای مختلف (تأخیرهای با فاصله  $\frac{1}{W}$ ) با بهره  $c_n(t)$  است. در واقع سیگنال‌های با تأخیر کمتر از  $\frac{1}{W}$  روی هم می‌افتند و مجموع ضرائب آنها ضریب  $c_n(t)$  را ایجاد می‌نمایند. در حقیقت از رابطه (۸-۱-۴۴) اینگونه استنتاج می‌شود که پاسخ ضربه باند پایه کانال بصورت زیر قابل بیان است:

$$c(\tau; t) = \sum_n c_n(t) \delta\left(t - \frac{n}{W}\right) \quad (۸-۱-۴۵)$$

بنابراین با قرار دادن یک فیلتر باند پایین با پهنای باند  $\frac{1}{2}W$  و در حالیکه  $(\Delta f)_c \gg W$  است می‌توان به رزولوشن با دقت  $\frac{1}{W}$  در طیف توان تأخیر چند مسیره رسید. حال با توجه به اینکه خروجی تا تأخیر کمتر از  $T_m$  مقدار قابل توجه دارد بنابراین تنها  $c_n(t)$  هایی که در این فاصله قرار دارند از اهمیت برخوردارند. اگر تعداد  $c_n(t)$  هایی که قابل توجه هستند را با  $L$  نمایش دهیم داریم:

$$L \approx \left\lfloor \frac{T_m}{1/W} \right\rfloor + 1 = \lfloor T_m W \rfloor + 1 \quad (۸-۱-۴۶)$$

در اینصورت سیگنال دریافتی بدون نویز برابر است با:

$$r_l(t) = \sum_{n=0}^{L-1} c_n(t) s_l\left(t - \frac{n}{W}\right) \quad (۸-۱-۴۷)$$

حال تصور کنید کانال Frequency nonselective باشد در اینصورت  $(\Delta f)_c = \frac{1}{T_m} < W$  و در نتیجه

$$\lfloor T_m W \rfloor = 0$$

خواهد بود و بنابراین:

$$r_l(t) = c_0(t) s_l(t) \quad (۸-۱-۴۸)$$

که همان نتیجه قبلی در مورد این نوع کانال است.  $c_n(t)$  ها متغیرهای تصادفی گوسی هستند که با فرض uncorrelated scattering با توجه به اینکه از تأخیرهای متفاوتی ناشی می‌شوند لذا مستقل نیز هستند. در حالت کلی و در حضور نویز سیگنال دریافتی بصورت زیر قابل بیان است:

$$r_l(t) = \sum_{n=0}^{L-1} c_n(t) s_l\left(t - \frac{n}{W}\right) + z(t) \quad (۸-۱-۴۹)$$



در رابطه بالا اگر بتوانیم به طریقی  $L$  ترم درون حاصلجمع را از هم جدا کنیم در واقع قادر خواهیم بود که دایورسیتی مرتبه  $L$  ایجاد کنیم. یک روش در جداسازی این ترمها استفاده از سیگنال‌هایی است که بر شیفیت یافته‌های خود عمودند که در این صورت می‌توان به دایورسیتی مرتبه  $L$  دست یافت. فرض کنید چنین سیگنال‌هایی دارای طول  $T_c$  باشند در این صورت شرط تعامد بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\int s_l(t) s_l(t - nT_c) dt \approx \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (50-1-8)$$

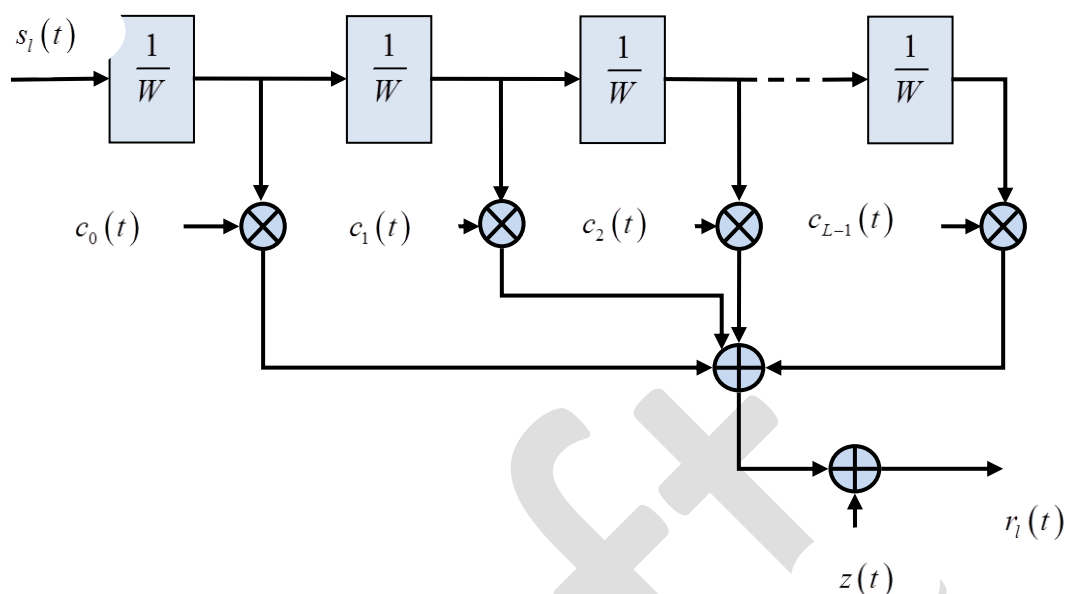
لازم به ذکر است که برای سیگنال‌های معمولی که  $T_c \approx T$  است شرط بالا زمانی برقرار می‌گردد که ISI نداشته باشیم و در هر بار ارسال فقط یک شکل موج ارسال شود. در مورد سیگنال‌های طیف گسترده این شرط زمانی برقرار است که  $T_c \ll T$  باشد. در شکل (۷-۸) مدل کانال Frequency-selective بر اساس رابطه (۴۹-۱-۸) آورده شده است.

#### گیرنده بهینه (گیرنده RAKE):

در این قسمت گیرنده بهینه کانال Frequency-selective را که توسط مدل خط تأخیر بیان می‌شود بررسی می‌کنیم. بدیهی است گیرنده‌ای که بصورت بهینه عمل کند دارای عملکرد معادل با سیستمی با دایورسیتی مرتبه  $L$  خواهد بود. معمولاً در گیرنده ضرائب  $c_n(t)$  تخمین زده می‌شود و می‌توان گیرنده را یک گیرنده همدوس در نظر گرفت. بنابراین می‌توان تصور کرد که به ازای پیام  $m$  ام سیگنال

$$v_m(t) = \sum_{n=0}^{L-1} c_n(t) s_{lm} \left( t - \frac{n}{W} \right)$$

در نظر گرفت. در اینصورت معیار تصمیم‌گیری بصورت زیر خواهد بود:



شکل (۷-۸)، مدل خط تأخیر کانال Frequency-selective

$$U_m = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int r_l(t) v_m^*(t) dt \right) + \beta_m \quad (۵۱-۱-۸)$$

که این رابطه برای سیگنالینگ هم‌احتمال و هم‌انرژی بصورت زیر خواهد بود:

$$U_m = \operatorname{Re} \left( \int r_l(t) v_m^*(t) dt \right) \quad (۵۲-۱-۸)$$

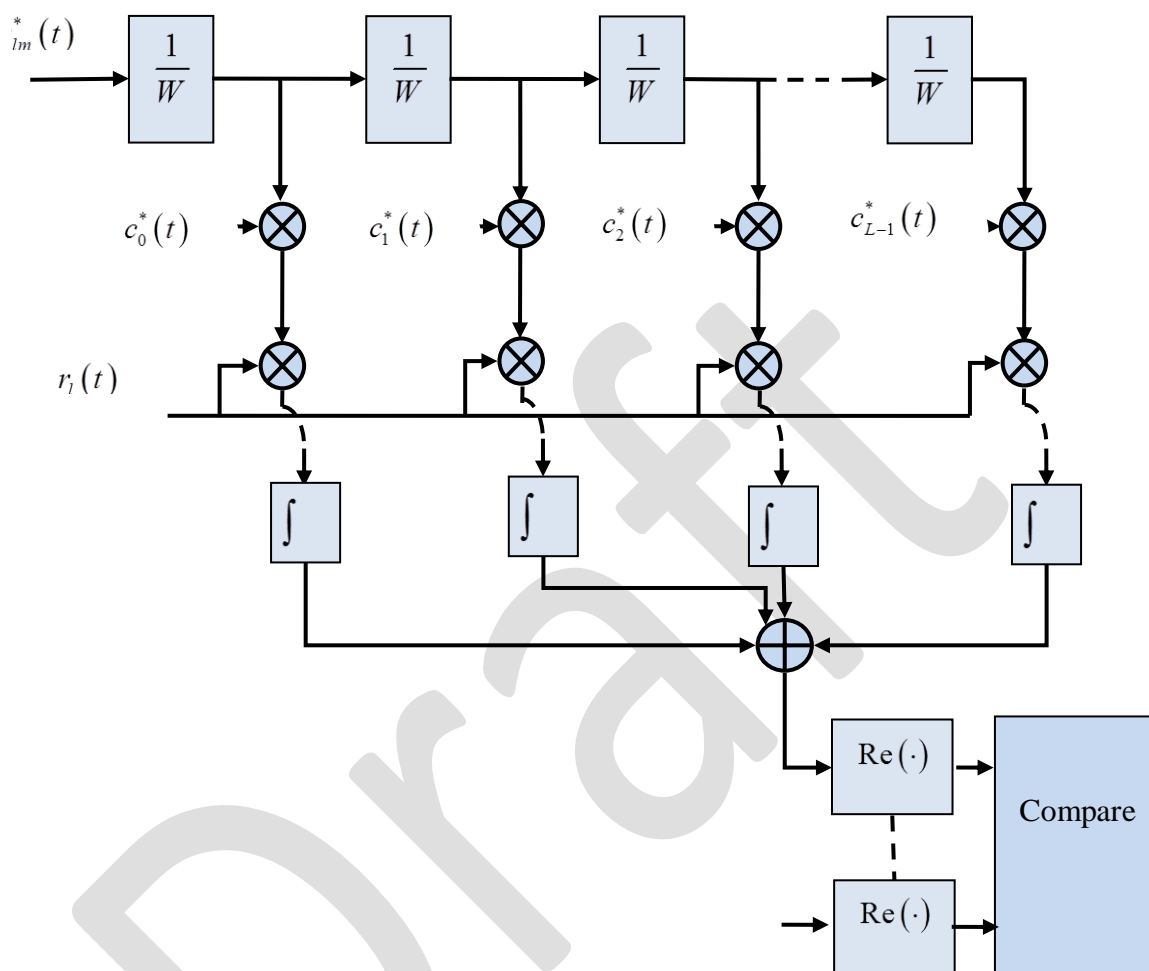
با جایگذاری مقدار  $v_m(t)$  در رابطه بالا داریم:

$$U_m = \operatorname{Re} \left( \int r_l(t) \sum_{n=0}^{L-1} c_n^*(t) s_{lm}^* \left( t - \frac{n}{W} \right) dt \right) \quad (۵۳-۱-۸)$$

و در نهایت:

$$U_m = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{L-1} \int_0^T r_l(t) c_n^*(t) s_{lm}^* \left( t - \frac{n}{W} \right) dt \right) \quad (۵۴-۱-۸)$$

ساختار گیرنده بهینه برای متغیر تصمیم‌گیری منطبق بر رابطه (۸-۱-۵۴) در شکل زیر آورده شده است.

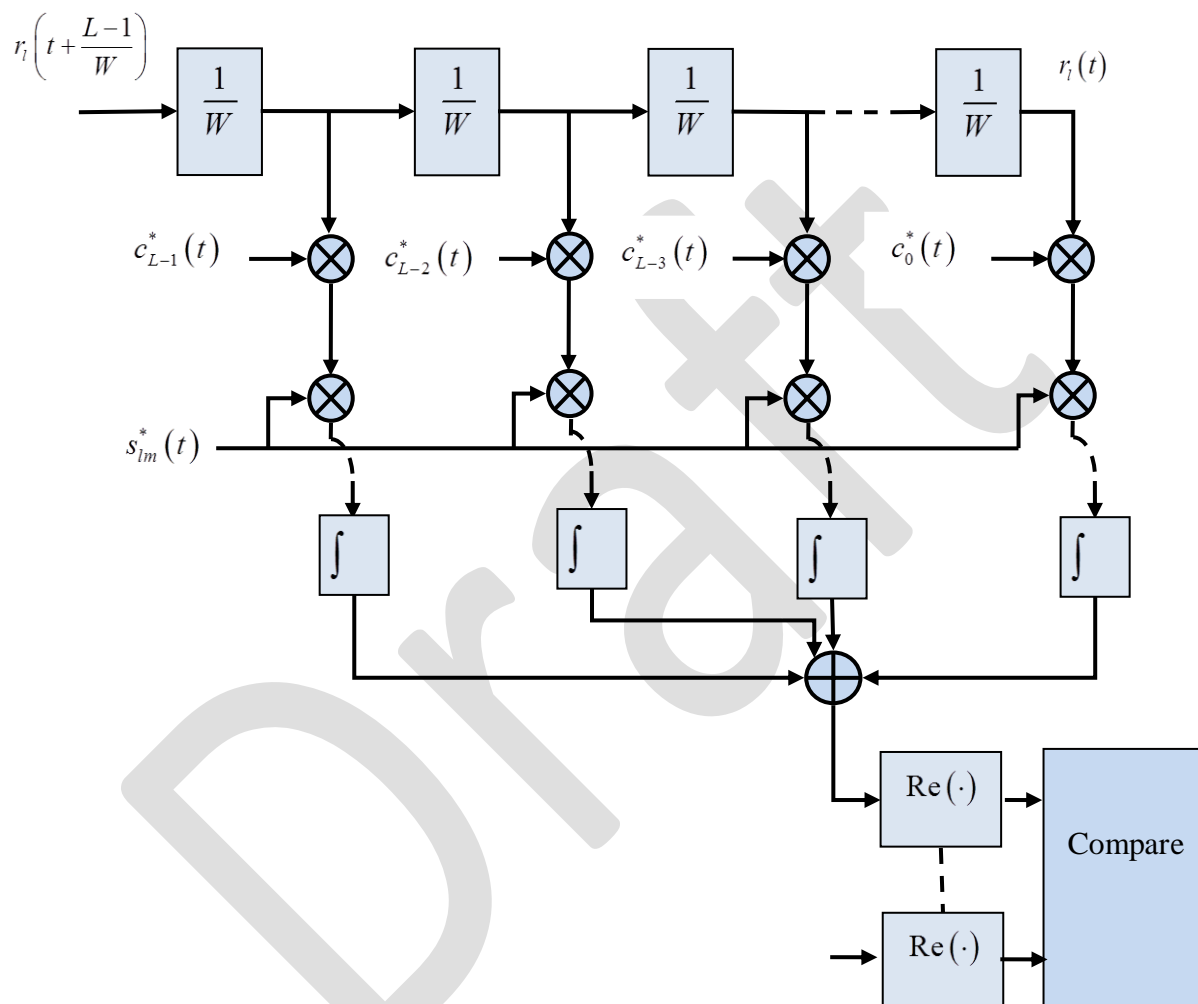


شکل (۸-۱)، گیرنده بهینه کانال Frequency-selective

گیرنده نمایش داده شده در شکل (۸-۱) به لحاظ تعداد خط تأخیر استفاده شده در آن گیرنده مطلوبی نیست و دارای پیچیدگی بالایی است. در این گیرنده به تعداد شکل موج‌های موجود به خط تأخیر نیاز است. برای غلبه بر این مشکل با تغییر متغیر  $t \rightarrow t - \frac{n}{W}$ ، متغیر تصمیم‌گیری جدید برابر خواهد است با:

$$U_m = \text{Re} \left( \sum_{n=0}^{L-1} \int_0^T r_l \left( t + \frac{n}{W} \right) c_{L-n-1}^*(t) s_{lm}^*(t) dt \right) \quad (۸-۱-۵۵)$$

همانطور که از این رابطه برمی آید تنها به یک خط تأخیر در گیرنده نیاز است. گیرنده بهینه بر این مبنا در شکل (۹-۸) آورده شده است.



شکل (۹-۸)، پیاده سازی گیرنده بهینه کانال Frequency-selective فقط با یک خط تأخیر، گیرنده RAKE

فرض کنید شکل موج  $s_{im}(t)$  ارسال شده است. با فرض تغییرات اندک در ضرایب کانال (کانال Slowly fading) می توان آنها را ثابت در نظر گرفت در اینصورت خروجی بدون نویز کانال برابر است با:

$$r_i(t) = \sum_{n=0}^{L-1} c_n s_{im}\left(t - \frac{n}{W}\right) \quad (۵۶-۱-۸)$$

حال شاخه  $i$  ام از سمت راست در گیرنده شکل (۸-۹) را در نظر بگیرید. ورودی این شاخه  $r_i\left(t + \frac{i}{W}\right)$  است که سپس در ضریب  $c_i^*$  ضرب می‌شود. از طرفی داریم:

$$r_i\left(t + \frac{i}{W}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} c_n s_{lm}\left(t - \frac{n-i}{W}\right) = c_i s_{lm}(t) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^{L-1} c_n s_{lm}\left(t - \frac{n-i}{W}\right) \quad (57-1-8)$$

وقتی این مقدار در  $c_i^*$  ضرب می‌شود حاصل را می‌توان بصورت  $|c_i|^2 s_{lm}(t) + X$  در نظر گرفت که اگر شکل موج‌ها طوری انتخاب شوند که بر شیفتهای خود متعامد باشند مقدار  $X$  پس از عبور از فیلتر منطبق برابری صفر خواهد بود. در واقع در این حالت ساختار گیرنده بهینه انرژی را که در تأخیرهای مختلف پخش شده است را بصورت هم‌دوس جمع می‌کند و مثل RAKE (شن کش باغبانی) عمل می‌کند. به همین علت به این نوع گیرنده، گیرنده RAKE گفته می‌شود.

در شرایطی که نتوانیم ضرائب  $\text{tap}$ ها را تخمین بزنیم آشکارساز غیرهمدوس مورد استفاده قرار می‌گیرد و معیار تصمیم‌گیری معیار  $\text{Square-law}$  است:

$$U_m = \sum_{n=0}^{L-1} \left| \int_0^T r_i(t) s_{lm}^*\left(t - \frac{n}{W}\right) dt \right|^2 \quad (58-1-8)$$

در شرایطی که Delay profile یکنواخت باشد گیرنده غیرهمدوس Square-law detection بهینه است اما چون معمولاً Delay profile کاهشی است لذا بخش قابل توجهی از انرژی در tapهای اولیه قرار دارد لذا تخصیص وزنهای برابر در این نوع آشکارساز سبب کاهش قابل توجه SNR و در نتیجه دچار افت عملکرد می‌شود. بنابراین برای  $L$ های بزرگ به منظور اجتناب از کاهش SNR ناشی از tapهای با انرژی پایین لازم است ضرائب  $c_n$  تخمین زده شود. در مورد مدولاسیونهای متعامد عملاً می‌توان از روی خود شکل موج-های دریافتی بدون نیاز به دنباله آموزشی ضرائب را تخمین زد. ساختار گیرنده Square-law detection برای آشکارسازی غیرهمدوس همانند ساختار شکل (۸-۹) است با این تفاوت که مقدار ضرائب  $c_n$  برابر واحد است.

### آنالیز عملکرد BPSK هم احتمال در کانال Frequency-selective

در اینجا قصد داریم عملکرد گیرنده RAKE را مورد قرار دهیم و فرض می‌کنیم فیدینگ کانال به اندازه کافی آرام است تا بتوان با دقت زیادی ضرائب  $c_n(t)$  را تخمین زد لذا می‌توان این ضرائب را ثابت در نظر گرفت. عموماً سیگنالهای  $s_{11}(t)$  و  $s_{12}(t)$  از یک دنباله تصادفی تشکیل می‌شوند طوریکه بر شیفیت داده-های خود متعامدند. با چنین فرضی برای متغیر تصمیم‌گیری داریم:

$$U_m = \text{Re} \left( \sum_{n=0}^{L-1} c_n^* \int_0^T r_l(t) s_{lm}^* \left( t - \frac{n}{W} \right) dt \right) \quad (59-1-8)$$

با فرض ارسال  $s_{11}(t)$  احتمال خطا برابر است با:

$$P_b = P_{e1} = P[U_1 < U_2 | s_{11} \text{ sent}] \quad (60-1-8)$$

حال با توجه به اینکه  $s_{12}(t) = -s_{11}(t)$  بنابراین  $U_2 = -U_1$  و در نتیجه:

$$P_b = P[U_1 < 0 | s_{11} \text{ sent}] \quad (61-1-8)$$

از طرفی خروجی کانال برابر است با:

$$r_l(t) = \sum_{m=0}^{L-1} c_m s_{11} \left( t - \frac{m}{W} \right) + z(t) \quad (62-1-8)$$

با جایگذاری رابطه بالا در رابطه (۸-۵۹) داریم:

$$U_1 = \text{Re} \left( \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} c_n^* c_m \int_0^T s_{l1} \left( t - \frac{m}{W} \right) s_{l1}^* \left( t - \frac{n}{W} \right) dt \right) \quad (63-1-8)$$

$$+ \text{Re} \left( \sum_{n=0}^{L-1} c_n^* \int_0^T z(t) s_{l1}^* \left( t - \frac{n}{W} \right) dt \right)$$

و در نهایت با توجه به متعامد بودن هر سگینال بر شیفت یافته‌های خود:

$$U_1 = \text{Re} \left( 2 \sum_{n=0}^{L-1} |c_n|^2 E \right) + \text{Re} \left( \sum_{n=0}^{L-1} c_n^* N_n \right), \quad N_n \sim N(0, 4EN_0) \quad (64-1-8)$$

با فرض نبود دید مستقیم ضرائب  $c_n = \alpha e^{-j\theta}$  دارای توزیع گوسی با میانگین صفر هستند که در آن

$\alpha$  و  $\theta$  به ترتیب دارای توزیع رایی و توزیع یکنواخت هستند. بنابراین معیار تصمیم‌گیری بصورت زیر قابل بیان است:

$$U_1 = 2E \sum_{n=0}^{L-1} |c_n|^2 + \sum_{n=0}^{L-1} \alpha_n N_{nr}, \quad N_{nr} \sim N(0, 2EN_0) \quad (65-1-8)$$

و برای احتمال خطا داریم:

$$P_b = P \left[ 2E \sum_{n=0}^{L-1} |c_n|^2 + \sum_{n=0}^{L-1} \alpha_n N_{nr} < 0 \right] = Q \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0} \sum_{n=0}^{L-1} \alpha_n^2} \right) \quad (66-1-8)$$

رابطه احتمال خطا در معادله بالا به علت وجود  $\alpha_k$  یک متغیر تصادفی است و برای محاسبه احتمال خطای نهایی بایستی امید ریاضی این احتمال را محاسبه نمود. در ظاهر به نظر می‌رسد نتیجه‌ای مشابه محاسبه احتمال خطا در کانال با دیورسیتی مرتبه  $L$  و گیرنده MRC که در فصل ۶ مورد بررسی قرار گرفت نیز در اینجا حاصل شود ولی باید به نکته توجه داشت. در گیرنده MRC فرض بر این بود که مشخصه آماری کانال و به تبع  $E(\alpha_k^2)$  مقداری ثابت است که این امر مستلزم اینست که power delay profile تابع یکنواخت و ثابتی باشد که در اینصورت رابطه احتمال خطا برابر است با:

Uniform power delay profile:

$$P_b = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L-1} \pi_k \left[ 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_k}{1 + \bar{\gamma}_k}} \right], \quad \pi_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{L-1} \frac{\bar{\gamma}_k}{\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_i}, \quad \bar{\gamma}_k = \frac{E}{N_0} E(\alpha_k^2) \quad (67-1-8)$$

در کانال Frequency-selective فرض ثابت بودن  $E(\alpha_k^2)$  فرض سنگینی است چرا که داریم:

$$c_k = \frac{1}{W} c\left(\frac{k}{W}; t\right) \quad (68-1-8)$$

و بنابراین:

$$E(\alpha_k^2) = E\left(|c_k|^2\right) = R_c(\tau; \Delta t) \Big|_{\Delta t=0}^{\tau=\frac{k}{W}} = R_c\left(\frac{k}{W}\right) \quad (69-1-8)$$

از اینرو برای ثابت بودن  $E(\alpha_k^2)$  لازم است تا  $R_c(\tau)$  ثابت باشد که این فرض عموماً در عمل رخ نمی‌دهد. البته در نهایت در چنین حالتی که ضرائب مشخصه آماری ضرائب کانال تغییر می‌کنند نیز احتمال خطا بصورت نمایی و از مرتبه  $L$  با عکس مقدار سیگنال به نویز رابطه دارد و با انتخاب مناسب شکل موج‌ها می‌توانیم دایورسیتی مرتبه  $L$  در کانال Frequency-selective ایجاد کنیم.

در اینجا ذکر نکته‌ای در مورد ISI ضروری است. در سیستم‌های معمولی ریت ارسال برابر پهنای باند انتخاب می‌شود به بیانی  $\frac{1}{T} = W$  است و به پهنای باندی معادل ریت ارسال نیاز داریم. اگر قصد استفاده از

این شکل موج‌ها را بصورت selective داشته باشیم لازم است:

$$\frac{1}{T} = W \gg (\Delta f)_c = \frac{1}{T_m} \Rightarrow T \ll T_m \quad (70-1-8)$$



لذا با توجه به این نتیجه حتماً در خروجی کانال ISI خواهیم داشت به عبارتی اگر پهنای باند بالای کانال به علت ریت ارسال بالا نباشد و ناشی از عواملی چون پخش شدگی فرکانسی باشد در اینصورت حتماً ISI ایجاد می‌شود. در طیف‌های گسترده  $W \approx \frac{1}{T_c}$  است که  $T_c$  بازه ارسال یک chip است و بازه ارسال کلی برابر  $T = NT_c$  است. حال با انتخاب مناسب  $N$  طوری که  $T_m \ll T = NT_c$  می‌توان از بروز ISI در ارسال طیف گسترده جلوگیری کرد هر چند که در این حالت پهنای باند کانال متناظراً بصورت  $W = \frac{1}{T} = N \frac{1}{T_c}$  افزایش خواهد یافت اما این پهنای باند به کاربران مختلفی اختصاص داده می‌شود.

### ۸-۶) آشکارسازی چندکاربره در سیستم CDMA

سیستم‌های TDMA و FDMA سیستم‌های چندکاربره‌ای هستند که کانال را بطور مستقل بین کاربرها تقسیم می‌کنند طوری که این تقسیم در سیستم TDMA در حوزه زمان و در FDMA در حوزه فرکانس انجام می‌شود و کانال‌های مستقل هیچ نوع هم‌پوشانی ندارند. در سیستم CDMA به هر کاربر یک دنباله امضاء متمایز اختصاص داده می‌شود و کاربر سیگنال حاوی اطلاعات خود را توسط این دنباله امضاء مدوله و گسترده می‌نماید. در این بخش فرآیند آشکارسازی و دیمدولاسیون سیگنال کدشده و چندکاربره CDMA را بررسی می‌کنیم. در ادامه خواهیم دید که آشکارساز بهینه ML دارای پیچیدگی‌ی نمایی از مرتبه تعداد کاربران است. لذا با توجه به پیچیدگی بالای گیرنده بهینه گیرنده‌های زیر بهینه با کاهش پیچیدگی را نیز بررسی خواهیم نمود.

کانال CDMA را در نظر بگیرید که توسط  $K$  کاربر به اشتراک گذاشته شده است. به هر کاربر یک شکل موج امضاء  $g_k(t)$  با طول  $T$ ، بازه زمانی یک سمبول، اختصاص داده می‌شود که بصورت زیر قابل بیان است:

$$g_k(t) = \sum_{n=0}^{L-1} a_k(n) p(t - nT_c), \quad 0 \leq t \leq T \quad (7-1-8)$$

که در آن  $0 \leq n \leq L-1$ ،  $a_k(n)$  یک شبهه کد تصادفی شامل  $L$  چیپ است که با احتمال برابر مقادیر  $\pm 1$  به خود می‌گیرند و  $p(t)$  یک پالس با دوره زمانی برابر بازه زمانی یک چیپ،  $T_c$  است. بنابراین به ازای هر سمبول  $L$  چیپ ارسال می‌شود و  $T = LT_c$ ، از اینرو پهنای باند ارسالی برابر  $\frac{1}{T_c} = N \frac{1}{T}$  خواهد بود. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم تمام شکل موج‌های امضاء دارای انرژی واحدی هستند لذا:

$$\int_0^T g_k^2(t) dt = 1 \quad (72-1-8)$$

جهت سادگی فرض می‌کنیم اطلاعات هر کاربر بوسیله سیگنال‌های آنتی پودال باینری ارسال می‌شود و بردار اطلاعات کاربر  $k$ ام را با  $\{b_k(m)\}$  نمایش می‌دهیم و مقدار هر بیت اطلاعاتی توسط مقادیر  $\pm 1$  مشخص می‌شود. فرض کنید هر کاربر قصد ارسال بلوکی از بیت‌ها به طول  $N$  را داشته باشد که این بلوک برای کاربر  $k$ ام بصورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{b}_k = [b_k(1) \ b_k(2) \ \dots \ b_k(N)]^T \quad (73-1-8)$$

اگر انرژی بر بیت سیگنال ارسالی تمام کاربرها یکسان و برابر  $E$  باشد در اینصورت سیگنال معادل باند پایه ارسال شده از کاربر  $k$ ام برابر است با:

$$s_k(t) = \sum_{i=0}^N \sqrt{E} b_k(i) g_k(t - iT) \quad (74-1-8)$$

بدیهی است که سیگنال‌های ارسالی از کاربرهای مختلف با تأخیرهای متفاوت به گیرنده می‌رسد ولی در این بخش فرض می‌کنیم گیرنده یک گیرنده سنکرون است و این تأخیرها در گیرنده جبران شده است. بنابراین با فرض سنکرون بودن سیگنال‌ها و کانال AWGN، سیگنال دریافتی در گیرنده برابر است با:

$$r(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t) + n(t), \quad n(t) \sim N(0, \frac{1}{2} N_0) \quad (75-1-8)$$

**گیرنده بهینه سیستم CDMA:**

گیرنده بهینه گیرنده‌ای است که محتمل‌ترین دنباله بیتی  $\{b_k(n), 1 \leq n \leq N, 1 \leq k \leq K\}$  را از روی سیگنال دریافتی  $r(t)$  را در بازه‌های زمانی  $0 \leq t \leq NT + 2T$  استخراج نماید. در حالت سنکرون تنها

یک سمبول از هر کاربر با سمبول مطلوب تداخل خواهد داشت. برای گیرنده کانال AWGN کفایت سیگنال دریافتی را در یک بازه سیگنال مورد بررسی قرار دهیم. در حالتی که فیدینگ چند مسیره را در نظر بگیریم گیرنده بهینه سنتی آشکارساز بهینه RAKE خواهد بود. برای یک بازه سیگنال خروجی کانال برابر است با:

$$r(t) = \sum_{k=1}^K \sqrt{E} b_k(1) g_k(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (76-1-8)$$

اگر هدف آشکارسازی سمبول نخستین کاربر در سیگنال دریافتی بالا باشد (آشکارسازی تک کاربره)، می-توانیم سمبول‌های ناشی از سایر کاربرها را بعنوان نویز در نظر گرفت. چنین آشکارسازی که حضور بقیه کاربران را نادیده می‌گیرد conventional receiver می‌نامند. در اینصورت احتمال خطا برابر است با:

$$P_b = P[e | b_1(1) = 1] = P[U_1 < 0 | b_1(1) = 1] \quad (77-1-8)$$

که در این رابطه  $U_1$  تعریف می‌شود:

$$U_1 = \int_0^T r(t) g_1(t) dt = \sum_{i=0}^{L-1} a_1(i) \int_0^T r(t) p(t - iT_c) dt \quad (78-1-8)$$

حال با تعریف  $r_i = \int_0^T r(t) p(t - iT_c) dt$  رابطه بالا بصورت زیر خلاصه می‌شود:

$$U_1 = \sum_{i=0}^{L-1} a_1(i) r_i = \underline{a}_1 \cdot \underline{r} \quad (79-1-8)$$

از طرفی برای  $r_i$  داریم:

$$r_i = \int_0^{T_c} r(t) p(t - iT_c) dt = \sum_{k=1}^K \sqrt{E} b_k(1) \int_0^{T_c} g_k(t) p(t - iT_c) dt + \underbrace{\int_0^{T_c} n(t) p(t - iT_c) dt}_{n_i} \quad (80-1-8)$$

و همچنین:

$$\int_0^{T_c} g_k(t) p(t - iT_c) dt = \sum_{j=0}^{L-1} a_k(j) \int_0^{T_c} p(t - jT_c) p(t - iT_c) dt = a_k(i) \quad (81-1-8)$$

با جایگذاری (۸۱-۱-۸) در (۸۰-۱-۸)،

$$r_i = \sum_{k=1}^K \sqrt{E} b_k(1) a_k(i) + n_i \quad (82-1-8)$$

و در نهایت با جایگذاری رابطه بالا در رابطه (۷۹-۱-۸)،

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{i=0}^{L-1} a_1(i) \left( \sum_{k=1}^K \sqrt{E} b_k(1) a_k(i) + n_i \right) \\ &= \sum_{k=1}^K b_k(1) \sum_{i=1}^{L-1} \sqrt{E} a_1(i) a_k(i) + \underbrace{\sum_{i=0}^{L-1} a_1(i) n_i}_{n'} \end{aligned} \quad (83-1-8)$$

و در بیان برداری:

$$U_1 = \sqrt{E} b_1(1) \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1 + \underbrace{\sum_{k=2}^K \sqrt{E} b_k(1) \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_k}_I + n' \quad (84-1-8)$$

در محاسبه احتمال خطا، ترم دوم از سمت راست تساوی بالا را می توان با یک متغیر گوسی معادل دانست. لذا به بررسی مشخصه های آماری آن، میانگین و واریانس، می پردازیم. ابتدا با توجه به اینکه:

$$E(I) = \sqrt{E} \sum_{k=2}^K E(b_k \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_k) = \sqrt{E} \sum_{k=2}^K E(b_k) E(\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_k) = 0 \quad (85-1-8)$$

و همچنین:

$$E(I^2) = E \sum_{k=2}^K E(b_k^2) \underbrace{E([\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_k]^2)}_{=1/L} = E \frac{K-1}{L} \quad (86-1-8)$$

و نهایتاً احتمال خطا بصورت رابطه زیر بدست می آید:

$$P_e = P[E + I + n' < 0] = Q \left( \sqrt{\frac{E}{\frac{K-1}{L} + \frac{N_0}{2}}} \right) \quad (87-1-8)$$

در حقیقت هرچقدر که کدهای امضاء همبستگی کمتری داشته باشند احتمال خطا کمتر خواهد شد. برای مثال در سیستم سنکرون می توان از کد Walsh استفاده کرد اما در صورتیکه سیستم سنکرون نباشد تعامد کدها تحت الشعاع قرار می گیرد، بعلاوه برای فراهم آوردن داپورسیتی چندمسیره لازم است هر کد بر شیف

یافته‌اش هم عمود باشد. در عمل برای فراهم آوردن شرایط بالا از کدهای شبیه تصادفی استفاده می‌شود. مطابق آنچه برای کاربر نخست بیان شد معیار تصمیم‌گیری برای سیگنال کاربر  $k$  ام برابر است با:

$$U_k = \underline{r} \cdot \underline{a}_k \begin{matrix} \hat{b}_k = +1 \\ > \\ \hat{b}_k = -1 \\ < \end{matrix} 0 \quad (88-1-8)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود در آشکارسازی تک کاربره هر گیرنده صرفاً به کد امضای فرستنده مخاطب احتیاج دارد.

### آشکارساز چند کاربره، **Multi-user detection**:

می‌توان نشان داد که با در اختیار داشتن  $r_i$  ها مولفه‌ای از سیگنال  $r(t)$  که در فضای شکل موج‌های خروجی قرار دارد قابل دستیابی است لذا آمارگان  $\{r_i\}_{i=0}^{L-1}$  برای تصمیم‌گیری در مورد بردار اطلاعات کافی است. از اینرو:

$$\text{MAP: } \max_{\{b_k\}_{k=1}^K} P[b_1, b_2, \dots, b_K | r(t)] = \max_{\{b_k\}_{k=1}^K} P[b_1, b_2, \dots, b_K | \underline{r}] \quad (89-1-8)$$

از طرفی در شکل برداری:

$$r_i = \sum_{k=1}^K \sqrt{E} b_k a_k(i) + n_i \Rightarrow \underline{r} = \sum_{k=1}^K \sqrt{E} b_k \underline{a}_k + \underline{n} \quad (90-1-8)$$

حال با تعریف بردار  $\underline{b} \triangleq \sqrt{E} [b_1, b_2, \dots, b_K]$  و ماتریس کد کاربران  $R_N = [\underline{a}_1; \underline{a}_2; \dots; \underline{a}_K]$  رابطه بالا بصورت زیر قابل بیان است:

$$\underline{r} = R_N \underline{b} + \underline{n} \quad (91-1-8)$$

در این رابطه بردار  $\underline{n}$ ، متغیر گوسی با ماتریس کواریانس  $\frac{N_0}{2} I_{L \times L}$  است. بنابراین رابطه (89-1-8) را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{MAP: } \max_{\underline{b}} P[\underline{b} | \underline{r}] &= \max_{\underline{b}} P[\underline{r} | \underline{b}] \\ &= \max_{\underline{b}} e^{-\frac{1}{N_0} |\underline{r} - R_N \underline{b}|^2} = \min_{\underline{b}} |\underline{r} - R_N \underline{b}|^2 \end{aligned} \quad (92-1-8)$$

پس از ساده سازی رابطه بالا:

$$\hat{\underline{b}} = \max_{\underline{b}} 2r\underline{b}^T R_N^T - R_N \underline{b} \underline{b}^T R_N^T \quad (۹۳-۱-۸)$$

حال با تعریف  $U \triangleq rR_N^T$  و  $R_s = R_N R_N^T$ ، ماتریس همبستگی کدهای فضای کاربران، رابطه بالا را بازنویسی می‌کنیم:

$$\hat{\underline{b}} = \max_{\underline{b}} 2U\underline{b}^T - \underline{b} R_s \underline{b}^T \quad (۹۴-۱-۸)$$

با توجه به اینکه تعداد کاربرها برابر  $K$  است بنابراین بردار  $\underline{b}$  می‌تواند  $2^K$  حالت متفاوت به خود بگیرد بنابراین پیچیدگی این گیرنده بصورت نمایی با تعداد کاربران افزایش می‌یابد.