دوجین مساله ی حدس کلاه

حسین نادری
علوم کامپیوتر صنعتی شریف

امروزه در مورد مساله های حدس رنگ کلاه بسیار بحث می شود و در کتاب های مجموعه معماهای ریاضی و مسابقات ریاضی از آن ها سوال طرح می شود. در همه ی این مساله ها کلاه هایی به رنگ های مشخص روی سر بازیکن ها قرار داده می شود، هر کس ممکن است رنگ کلاه دیگران راببیند ولی رنگ کلاه خودش را نمی داند و باید آن را حدس بزند. هدف بازی این است که بازیکن ها قبل از بازی با هم قرار بگذارند و تعداد بیشتری از بازیکن ها رنگ کلاهش را به درستی حدس بزند. بازیکن ها در طول بازی حق ارتباط با یکدیگر ندارند به جز معدود حرف هایی که قوانین بازی تعیین می کند که چگونه باید با یکدیگر بزنند. بعضی از سوالات با دید روانشناختی و فلسفی هم بررسی می شوند ولی بیشتر آن ها عموما ریاضی اند. فارغ از کاربرد، این دسته مسائل حداقل برای فکر کردن جالب اند. از حل آن ها لذت ببرید!

۱ پرسش ها

۱. دست گرمی: دو بازیکن یک بازی مشارکتی دو نفره با کلاه ها این گونه است که هر کس یک کلاه به رنگ قرمز یا آبی روی سرش دارد. بازیکن ها می توانند کلاه نفر دیگر را ببینند ولی کلاه خودشان را نمی توانند ببینند. هر دو باید با شنیدن صدای سوت همزمان رنگ کلاه خود را بگویند. اگر دست کم یکی از آن دو به درستی رنگ کلاهش را حدس زده بود، بازی را می برند.
این دو نفر قبل از بازی چه راهکاری را با یک دیگر هماهنگ کنند تا برنده شوند؟

۲. صد بازیکن و صد رنگ شرایط این سوال مانند سوال یک است با این تفاوت که به جای دو نفر با دو رنگ کلاه، صد نفر با صد رنگ کلاه وجود دارند. آن ها بازی را می برند در صورتی که دست کم یکی از آن ها رنگ کلاهش را به درستی حدس بزند. یک استراتژی برد برای این بازی نیز ارائه دهید.

۳. چشم بندی در یک بازی سه نفره بر سر هر بازیکن یک کلاه گذاشته شده. به همه ی آن ها گفته می شود، اگر کلاه حداقل یکی از دو بازیکن دیگر قرمز رنگ بود، دستش را بالا ببرد. آیا تنها با داشتن همین اطلاعات یکی از آن ها می تواند رنگ کلاه خودش را حدس بزند؟ آیا حالتی وجود دارد که هیچ کس نتواند رنگ کلاه خودس را حدس بزند؟

۴. چقدر باید منتظر ماند؟ یک صد نفر کلاه دار دور یک دایره نشسته اند.هر کس کلاه همه به جز خودش را می بیند. کلاه ها می توانند به رنگ آبی یا قرمز باشند، اما حتما حداقل یک کلاه به رنگ قرمز در میان کلاه ها وجود دارد. یک ساعت دقیقه شمار نیز موجود است.
در هر دقیقه هر کس رنگ کلاهش را حدس زده می تواند آن را اعلام کند. پس از صد دقیقه چنان چه هیچ کس هیچ حدسی نزده باشد، همه بازیکن ها می بازند. اگر قبل از صد دقیقه یک نفر حدس غلط بزند باز هم همه می

بازند. فقط اگر قبل از دقیقه صد یک یا چند نفر به درستی رنگ کلاهشان را حدس بزنند، گروه برنده می شود. آیا استراتژی بردی وجود دارد که بازیکن ها قبل از بازی با یک دیگر آن را هماهنگ کنند؟

۵. پاس دادن صد نفر که رنگ کلاه هایشان یا قرمز یا آبی است، در یک خط پشت سر هم ایستاده اند. حداقل یک کلاه قرمز میان کلاه ها وجود دارد و بازیکن ها از این مطلع اند. هر کس فقط رنگ کلاه افراد جلوترش را می بیند. به ترتیب از نفر آخر صف که ۹۹ کلاه دیگر را می بیند، به جلو پرسیده می شود که «رنگ کلاه تو چیست؟». هر کس می تواند به سوال یا جواب ندهد و از نفر بعدی پرسیده شود یا بگوید «کلاه من قرمز رنگ است». اگر یک نفر پاسخ اشتباه دهد یا همه سوال را پاس دهند، همه می بازند، در غیر این صورت می برند. مانند پرسش های قبل راهکاری برای برد آن ها ارائه دهید.

۶. فداکاری ده زندانی به ترتیب صف شده اند. هرکس یا کلاه قرمز یا آبی بر سر دارد و تنها کلاه افراد جلویی اش را می تواند ببیند. به ترتیب از نفر آخر خواسته می شود رنگ کلاهشان را حدس بزنند. همه صدای یک دیگر را می شنوند. چنان چه کسی اشتباه حدس بزند اعدام می شود. بیشینه ی تعداد افرادی که می توانند نجات یابند چقدر است؟

۷. خشن و گیج کننده همان سوال ۶ با این تفاوت که صد رنگ کلاه موجود است.

۸. بازگشت به حق پاس دادن بازی این پرسش مانند ۵ است با این تفاوت که ۱۰ نفر که رنگ قرمز یا آبی کلاه هایشان با سکه انداختن مشخص شده در یک صف قرار دارند. از نفر آخر به سمت جلو سوال پرسیده می شود و هرکس می تواند رنگ کلاه خودش را حدس بزند یا سوال را به نفر بعدی پاس دهد. شرایط برد نیز مانند همان سوال است. چه راهکاری در پیش بگیرند که احتمال بردشان بیشینه شود؟

۹. سه قربانی سه کوتوله در حال بازی سر مرگ یا زندگی شان هستند. آن ها دور یک دایره نشسته اند و یک تبهکار شیطانی بر سر هر کدام یک کلاه قرمز یا آبی می گذارد. رنگ هر کلاه تصادفی است. مانند قبل هر کس تنها رنگ کلاه دو نفر دیگر را می بیند.

با اشاره ی تبهکار، سه کوتوله هم زمان رنگ کلاه خودشان را حدس می زنند یا از اختیار جواب ندادن استفاده می کنند. اگر حداقل یک نفر درست حدس زده باشد و هیچ کس دیگر حدس اشتباه نزده باشد، آن ها زنده می مانند. اگر یک حدس اشتباه بین جواب ها باشد یا همه پاس داده باشند، همگی می میرند. بین آن ها در طول بازی هیچ ارتباطی نیست.

طرحی برای کوتوله ها بچینید که به احتمال ۷۵% زنده بمانند.

۱۰. $۲^{n-۱}$ کوتوله هفت کوتوله دارند بازی ای مشابه بازی سوال ۹ میکنند و هم چنین ۱۵ یا ۳۱ کوتوله. یک روش کلی برای همه ی گروه های $۲^{n-۱}$ کوتوله بیابید که بیشترین احتمال زنده ماندن را به آن ها بدهد.

۱۱. $۲^{n-۱}$ کوتوله با کمی اطلاعات بیشتر سوالات ۹ و ۱۰ را تکرار کنید، با این تفاوت که کوتوله ها حدس هایشان را یکی یکی اعلام می کنند و بقیه حدس هایشان را می شنوند. سعی کنید امید به زندگی کوتوله ها را بیشتر کنید!

۱۲. بدون راه گریز یک صد پری در یک اتاق با کلاه های به رنگ قرمز یا آبی قرار دارند. هرکس کلاه بقیه را فقط می بیند. با صدای زنگ همه باید همزمان رنگ کلاه خودشان را حدس بزنند. هر کس درست حدس بزند زنده می ماند، در غیر این صورت می میرد.

استراتژی ای برای پری ها بیابید که بیشترین تعداد پری زنده بمانند. تعداد بیشینه چقدر است؟

۲ پاسخ ها

۱. یک نفر، رنگ فرد دیگر و دیگری متضاد رنگ نفر دیگر را اعلام بکند.

۲. رنگ ها و افراد را با ۰ تا ۹۹ برچسب گذاری می کنیم. هر کس باقی مانده بر ۱۰۰ رنگ متناظر با جمع برچسب های افرادی که می بیند را اعلام می کند. اگر باقی مانده جمع کل اعداد بر ۱۰۰ برابر s بشود، نفر شماره s مطمئنا درست حدس می زند.

کمی فراتر: ثابت کنید اگر با n رنگ مختلف بازی کنند. آن گاه این استراتژی با قطعیت حداقل $\lfloor n/c \rfloor$ درست حدس می زنند. هم چنین ثابت کنید هیچ استراتژی دیگری این مقدار را افزایش نمی دهد.

۳. اگر هر سه کلاه قرمز باشند، هیچ بازیکنی دستش را بالا نمی برد و همه بلافاصله متوجه می شوند که کلاه هایشان آبی اند.

اگر تنها یک کلاه قرمز در گروه باشد، فقط دو نفر دستانشان را بالا می برند و در نتیجه هر بازیکن رنگ کلاه خودش را می فهمد.

اگر دو کلاه به رنگ قرمز باشند، همه ی بازیکن ها دستانشان را بالا می برند. کلاه قرمز ها بلافاصله رنگ کلاهشان را می فهمند («اگر کلاه من آبی بود، پس چرا کلاه قرمز دیگر دستش را بالا برده؟»). کسی که کلاهش آبی باشد از رنگ کلاهش با خبر نمی شود.

حدس زدن وقتی مشکل می شود که همه ی کلاه ها قرمز رنگ باشند. هیچ بازیکنی نمی تواند بلافاصله رنگ کلاهش را استنتاج کند و گروه ساکت می ماند. اما هر فرد با خودش این طور استنتاج می کند که اگر کلاه من آبی بود، یک نفر حتما تا به حال حدسش را می زد. پس کلاه من باید قرمز باشد. در این صورت هر سه نفر هم زمان حدس می زنند.

کمی فراتر: همین بازی را در مورد چهار نفر با کلاه های قرمز یا آبی بررسی کنید. ۵ نفر چطور؟

۴. اگر یک بازیکن k کلاه آبی ببیند، باید در دقیقه $100 - k$ام رنگ کلاه خودش را قرمز اعلام کند.

کمی فراتر: اگر به بازیکن ها گفته نشده بود که حداقل یک کلاه قرمز رنگ میان آن ها وجود دارد، چه؟

۵. اگر یک بازیکن تنها در صورتی بگوید «کلاه من قرمز است» که هیچ کلاه قرمزی جلویش نباشد؛ اولین بازیکنی که این جمله را بگوید درست حدس زده است.

کمی فراتر: آیا بازیکن ها می توانستند بردشان را تضمین کنند اگر از وجود داشتن کلاه قرمز آگاه نبودند؟

۶. زندانی ای که در آخر صف ایستاده، اگر تعداد کلاه های قرمزی که می بیند فرد باشند می گوید «قرمز» واگر زوج باشند می گوید «آبی». بقیه زندانی ها با توجه به کلاه هایی که در جلویشان می بینند و حرف هایی که از زندانی های پشتی شان شنیده اند می توانند به درستی رنگ کلاهشان را نتیجه بگیرند. زنده ماندن نه نفر از ده نفر با این روش تضمین می شود.

۷. رنگ ها را با ۰ تا ۹۹ شماره گذاری می کنیم. نفر آخر، رنگ متناظر باقی مانده بر ۱۰۰ جمع عدد های رنگ هایی را که می بیند اعلام می کند. بقیه نیز با روشی مشابه سوال ۶ به رنگ کلاهشان پی می برند.

۸. اگر فرض کنیم حداقل یک کلاه قرمز وجود داشته باشد مساله تبدیل به سوال ۵ می شود. واحتمال برد ۱۰۲۳/۱۰۲۴ می شود.

کمی فراتر: اگر رنگ کلاه ها به وسیله ی انداختن سکه معلوم نشود و یک بد خواه رنگ کلاه ها را معلوم کند چه می شود؟

۹. چنان چه هر کوتوله تنها در صورتی که رنگ کلاه های دو کوتوله ی دیگری که می بیند یکسان باشند، رنگ

متضاد آن را حدس بزنند؛ از ۸ حالت رنگ کلاه ها ۶ حالت منجر به زنده ماندن کوتوله ها می شود.

۱۰. برای $N = ۲^n - ۱$ کوتوله، بیشترین شانس زنده ماندن $N/N + ۱ = ۲^n - ۱/۲^n$ است. راهبرد زیر که نزدیک به ریاضیات تصحیح خطای کد است این شانس را می دهد.

به هر کوتوله یک عدد از ۱ تا $۲^n - ۱$ که در مبنای دو نوشته شده است نسبت می دهیم. از این پس منظورمان از جمع دو عدد، $\oplus$ است، یعنی جمع کردن در مبنای دو بدون مانده بر دو گرفتن. برای مثال:

$$۰۱۰۱۱ \oplus ۱۱۰۰۱ = ۱۰۰۱۰$$

همچنین لازم به ذکر است، به پیمانه ۲، $۱ = -۱$ و هم چنین داریم $k = -k$.

برای هر کوتوله جمع آبی پیدا (VRS) تعریف می کنیم که برابر جمع عدد های کلاه آبی هایی است که او می بیند. در این راهبرد اگر VRS یک کوتوله صفر بود، آبی حدس می زند واگر VRS او برابر شماره ی خودش بود، قرمز حدس می زند. در غیر این صورت پاس می دهد. این راهبرد احتمال بالا را برآورده می کند. به این دلیل:

- ابتدا فرض کنید جمع عدد های همه ی کلاه آبی ها صفر باشد. VRS یک کلاه قرمز صفر است (شماره ی خود او در مجموع تاثیری ندارد). طبق راهبرد، او به اشتباه آبی حدس می زند. VRS یک کلاه آبی با شماره k هم برابر $k = -k$ است. او نیز به اشتباه کلاهش را قرمز حدس می زند. به این ترتیب همه ی کوتوله ها اشتباه حدس می زنند. این حالت یک موقعیت باخت است.
- از طرف دیگر فرض کنید جمع عدد های کلاه آبی ها برابر $j \neq ۰$ باشد. اگر کوتوله j کلاه قرمز بر سر داشته باشد، VRS او j است و او رنگ کلاهش را قرمز حدس می زند؛ اگر او کلاه آبی بر سر داشته باشد، VRS او صفر می شود و او آبی حدس می زند. در هر دو حالت کوتوله j درست حدس می زند. برای $j \neq k$، VRS کوتوله k می شود $j \oplus k$، که نه صفر است و نه k؛ طبق راهبرد او حدسی نمی زند. در نهایت تنها یک کوتوله درست حدس می زند و بقیه پاس می دهند، بنابراین این وضعیت یک موقعیت برد است.

۲^n امکان برای مجموع کلاه های آبی وجود دارد. $۲^n - ۱$ مجموع ناصفر منجر به برد و تنها مجموع صفر منجر به باخت می شود. امکان های مجموع کلاه های آبی هم شانس اند(چرا؟). در نتیجه شانس برد دقیقا برابر $N/N + ۱$ است.

برای اثبات این که چرا هیچ راهبرد بهتری وجود ندارد، یک جدول در نظر بگیرید که که همه ی ۲^n چینش ممکن کلاه ها را شامل می شود. در هر سناریو یک کوتوله یا حدس می زند یا پاس می دهد. واکنش هر کوتوله تنها با توجه به کلاه هایی است که او می بیند. برای یک حدس درست یک کوتوله در یک سناریو، سناریوی دیگری وجود دارد که او اشتباه حدس می زند(سناریویی که رنگ کلاه او متفاوت با رنگ سناریوی قبلی است). پس اگر در کل جدول c حدس درست موجود باشد، c حدس نادرست نیز وجود دارد.

راهبردی بهینه است که حدس های نادرست را در تعداد کمی از سناریو ها و حدس های درست را در بقیه سناریو ها پخش کند. در حقیقت c سناریو باشند که یک نفر در آن ها حدس درست بزند و بقیه کوتوله ها همگی پاس دهند. هیچ سناریویی نباشد که هم در آن پاس بدهند و تا حد ممکن تعداد سناریو هایی که حدس نادرست در آن ها زده می شود کم باشند (بهترین تعداد برای سناریوهای فوق c/N است). شرایط ذکر شده کران

بالا برای احتمال زنده ماندن گروه ارائه می دهد. به زبان نماد ها:

$$\frac{c}{c + \cdot + \frac{c}{N}} = \frac{N}{N + ۱}$$

همانطور که دیدیم، کران بالا برای $N = ۲^n - ۱$ کوتوله قابل دستیابی است.

اگر c سناریو منجر به برد شوند، احتمال زنده ماندن $c/۲^N$ است. به کمک این مقدار و رابطه بالا به

$$(N + ۱)c = N \cdot ۲^N$$

می رسیم. که برای برقرار بودن آن باید $N \cdot ۲^N$ مضربی از $N + ۱$ باشد. اما چون N و $N + ۱$ نسبت به هم اول اند، باید $N + ۱$ مقسوم علیه ۲^N باشد که توانی از دو است. پس $N + ۱ = ۲^n$ به ازای یک n . در نتیجه N باید به فرم $۲^n - ۱$ باشد.

کمی فراتر: اگر N به فرم $۲^n - ۱$ نباشد، چه؟ (این مساله هنوز به عنوان یک حوزه فعال برای تحقیق باقی مانده است)

خیلی فراتر: اگر بازیکن ها حق داشتند دو حدس یا حتی سه حدس بزنند، چه می شد؟

۱۱. کوتوله ها می توانند فرض کنند در یک خط ایستاده اند و استراتژی سوال ۸ را در پیش بگیرند. n کوتوله به احتمال $۲^n - ۱/۲^n$ زنده می مانند.

کمی فراتر: آیا این مقدار بهترین شانس زنده ماندن کوتوله هاست؟

۱۲. پری ها باید به دسته های دوتایی افراز شوند و در هر دسته راهبرد سوال یک را اجرا کنند. این راهبرد زنده ماندن دقیقا ۵۰ پری را تضمین می کند.

هر راهبردی رنگ کلاه یک پری را تنها از روی چینش رنگ کلاه دیگران و نه کلاه خود پری ارائه می دهد پس اگر به ازی یک چینش رنگ کلاه ها یک پری رنگ کلاه خودش را درست حدس بزند یک چینش دیگر وجود دارد که بقیه پری ها رنگ کلاهشان ثابت است و فقط همین پری رنگ کلاهش تغییر کرده است و پری حدس نادرست می زند. در نتیجه هر پری حداکثر در نیمی از حالت ها به درستی رنگ کلاه خود را حدس می زند. حال اگر راهبردی باشد که به ازای همه ی چینش ها بیش از نیمی از پری ها حدس درست بزنند، با دو گونه شمردن تعداد حدس های درست با کمک نتیجه ی قبل به تناقض می رسیم. پس هیچ راهبردی وجود ندارد که بیشتر از ۵۰ جواب درست راتضمین کند.

A Dozen Hat Problems
Ezra Brown and James Tanton

برگردان حسین نادری
دانشجوی علوم کامپیوتر شریف

hnaderi268.blog.ir
hnaderi268@gmail.com