به نام خدا

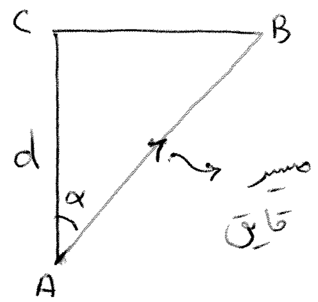
پاسخنامه تشریحی مرحله دوم

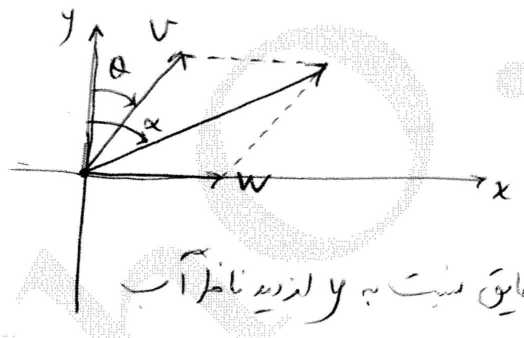
دوره ۲۵ المپیاد فیزیک ایران

(مؤلف: امیر پرتوی)

۱-

آ)





θ : زاویه حرکت قایق نسبت به y از دید ناظر آب

α : زاویه حرکت قایق نسبت به y از دید ناظر ساکن

با توجه به بردارهای سرعت:

$$\tan\alpha = \frac{V\sin\theta + W}{V\cos\theta} \longrightarrow V\left[\cos\theta \cdot \tan\alpha - \sin\theta\right] = W$$

$$\Rightarrow V\left[\frac{\sin\alpha \cdot \cos\theta - \sin\theta\cos\alpha}{\cos\alpha}\right] = W \rightarrow V\sin(\alpha-\theta) = W\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \sin(\alpha-\theta) = \frac{W}{V}\cos\alpha \Rightarrow \theta = \alpha - \sin^{-1}\left(\frac{W}{V}\cos\alpha\right)$$

$$\Rightarrow T_{AB} = \frac{d}{V\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \cos\left[\alpha - \sin^{-1}\left(\frac{W}{V}\cos\alpha\right)\right] = \cos\alpha \cdot \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{W}{V}\cos\alpha\right)\right] + \sin\alpha \cdot \sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{W}{V}\cos\alpha\right)\right]$$

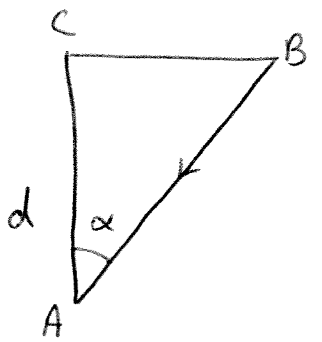
$$= \cos\alpha \cdot \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{W}{V}\cos\alpha\right)\right] + \sin\alpha \cdot \frac{W}{V} \cdot \cos\alpha$$

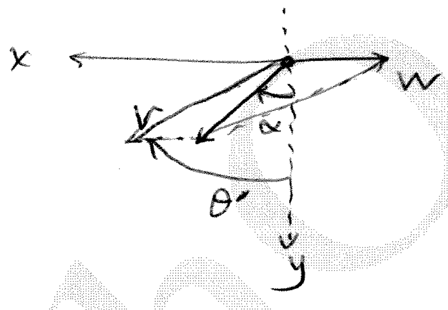
نکته: $\beta = \sin^{-1}x \longrightarrow \sin\beta = x \longrightarrow \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-x^2}$

نکته $\Longrightarrow \cos\theta = \cos\alpha \cdot \sqrt{1-\frac{w^2}{v^2}\cos^2\alpha} + \frac{w}{v}\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$$\Longrightarrow T_{AB} = \frac{d}{v\cos\theta} = \boxed{\frac{d}{\cos\alpha\left[\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}+w\sin\alpha\right]}}$$

ب)





θ' : زاویه حرکت قایق نسبت به y از دید ناظر آب.

α : زاویه حرکت قایق نسبت به y از دید ناظر ساکن

$$\tan\alpha = \frac{v\sin\theta' - w}{v\cos\theta'} \longrightarrow w = v\left[\sin\theta' - \tan\alpha \cdot \cos\theta'\right]$$

$$\longrightarrow w\cos\alpha = v\sin(\theta'-\alpha) \longrightarrow \theta' = \alpha + \sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)$$

$$T_{BA} = \frac{d}{v\cos\theta'}$$

$$\cos\theta' = \cos\left[\alpha + \sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right] = \cos\alpha \cdot \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right] - \sin\alpha \cdot \sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right]$$

$$= \cos\alpha \cdot \sqrt{1-\frac{w^2}{v^2}\cos^2\alpha} - \sin\alpha \cdot \frac{w}{v}\cos\alpha$$

$$T_{BA} = \frac{d}{v\cos\theta'} = \boxed{\frac{d}{\cos\alpha\left[\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}-w\sin\alpha\right]}}$$

ب)

$$T_1 = T_{ABC} + T_{CBA} = \frac{2d\tan\alpha}{u} + T_{AB} + T_{BA}$$

$$T_{AB} + T_{BA} = \frac{d}{\cos\alpha}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}+w\sin\alpha} + \frac{1}{\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}-w\sin\alpha}\right]$$

$$= \frac{d}{\cos\alpha}\cdot\frac{2\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}}{v^2-w^2\cos^2\alpha-w^2\sin^2\alpha} = \frac{2d}{v^2-w^2}\cdot\sqrt{\frac{v^2}{\cos^2\alpha}-w^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = T_{ABC} + T_{CBA} = \frac{2d}{u}\tan\alpha + \frac{2d}{v^2-w^2}\sqrt{(v^2-w^2)+v^2\tan^2\alpha}}$$

ت) فرض کنیم $X=\tan\alpha$ درنتیجه مقدار T_1 برابراست با:

$$T_1 = Ax + B\sqrt{C+Dx^2}$$

که A ، B ، C و D مقادیرثابت مثبت هستند که مشخص می‌باشند.

$$\frac{dT_1}{dx} = A + B\frac{1}{2}\frac{2Dx}{\sqrt{C+Dx^2}} = A + BD\frac{x}{\sqrt{C+Dx^2}}$$

مقدار α بین صفر تا $\frac{\pi}{2}$ است. (چرا؟) پس مقدار $X=\tan\alpha$ همواره مثبت است.

$$\rightarrow \frac{dT_1}{dx} > 0 \Rightarrow$$ تابع T_1 نسبت به $\tan\alpha$ همواره صعودی است.

پس حداقل آن درکمترین مقدار $\tan\alpha$ بدست می‌آید. $\tan\alpha=0$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=0} \xrightarrow{\tan\alpha=0} \boxed{T_{1\,min} = \frac{2d}{\sqrt{v^2-w^2}}}$$

۳

ت) با توجه به تقارن مسیرهای ABC , $CB'A$ که مانند هم و یکسان هستند پس :

$$T_2 = T_{ABC} + T_{CB'A}$$

$$T_{ABC} = T_{CB'A} \rightarrow T_2 = 2T_{ABC}$$

$$\boxed{\Rightarrow T_2 = 2\left[\frac{d\tan\alpha}{u} + \frac{d}{\cos\alpha\left[\sqrt{v^2 - w^2\cos^2\alpha} + w\sin\alpha\right]}\right]}$$

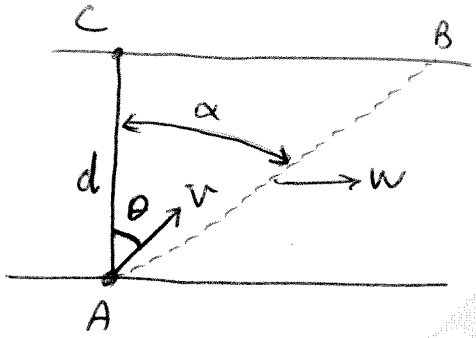
$$T_2 = 2d\left[\frac{\tan\alpha}{u} + \frac{1}{\cos\alpha\left[\cos\alpha\sqrt{\frac{v^2}{\cos^2\alpha} - w^2} + w\sin\alpha\right]}\right]$$

$$= 2d\left[\frac{\tan\alpha}{u} + \frac{1+\tan^2\alpha}{\sqrt{v^2 - w^2 + v^2\tan^2\alpha} + w\tan\alpha}\right]$$

پاسخ ساده شده قسمت ت برحسب $\tan\alpha$

ج) برای حل این قسمت ، اگر بخواهیم از رابطه بدست آمده از قسمت «ث» استفاده کنیم و مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم و ... احتمالاً وقت آزمون به پایان رسیده است !!!

زمان طی مسیر از A به B و از B به C را برحسب زاویه θ (زاویه سرعت قایق نسبت به خط عمود بر جریان رودخانه) محاسبه می‌کنیم.



$$T_{AB} = \frac{d}{v\cos\theta} \qquad T_{BC} = \frac{(v\sin\theta + w)\frac{d}{v\cos\theta}}{u}$$

توجه کنید که مقدار BC ، برابر است با سرعت افقی حرکت قایق ضربدر زمان لازم برای عبور از رودخانه.

$$\longrightarrow T_{ABC} = \frac{d}{v\cos\theta} + \frac{(v\sin\theta + w)}{u}\frac{d}{v\cos\theta} = \frac{d}{v\cos\theta}\left(1 + \frac{w}{u} + \frac{v\sin\theta}{u}\right)$$

$$\longrightarrow T_2 = T_{ABC} + T_{CB'A} = \frac{2d}{v}\left(1 + \frac{w}{u}\right)\cdot\frac{1}{\cos\theta} + \frac{2d}{u}\tan\theta$$

$$\frac{dT_2}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{2d}{v}\left(1 + \frac{w}{u}\right)\frac{(-1)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} + \frac{2d}{u}\frac{1}{\cos^2\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2d}{\cos^2\theta}\left[\frac{1}{u} + \frac{\sin\theta}{v\left(1 + \frac{w}{u}\right)}\right] = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{-v\left(1 + \frac{w}{u}\right)}{u}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -1 \leq \sin\theta \leq 1$$: شرط وجود جواب

$$-1 \leq \frac{-v\left(1+\frac{w}{u}\right)}{u} \Rightarrow \boxed{1 \geq \frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right)}$$

برای بدست آوردن مقدار α مربوط به کمینه زمان، از قسمت آ کمک می‌گیریم:

$$\sin(\alpha-\theta) = \frac{w}{v}\cos\alpha \quad , \begin{cases} \sin\theta = -\frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right) \\ \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\left[\frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right)\right]^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\theta - \cos\alpha \cdot \sin\theta = \frac{w}{v}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\theta = \cos\alpha\left(\frac{w}{v}+\sin\theta\right) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{w}{v}+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\boxed{\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{w}{v}-\frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right)}{\left[1-\left(\frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right)\right)^2\right]^{1/2}}}$$

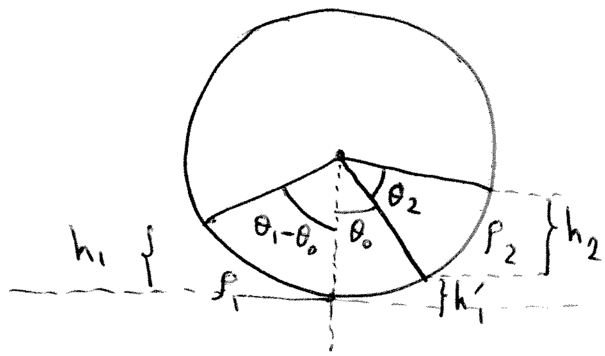
ج) مقدار T_2 مینیموم را با استفاده از زاویه θ محاسبه می‌کنیم:

$$T_{2\,min} = \frac{2d}{v\cos\theta}\left(1+\frac{w}{u}+\frac{v}{u}\sin\theta\right) = \frac{2d}{v}\cdot\frac{1+\frac{w}{u}-\frac{v^2}{u^2}\left(1+\frac{w}{u}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}\left(1+\frac{w}{u}\right)^2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow T_{2\,min} = \frac{2d}{v}\cdot\frac{1+\frac{w}{u}-\frac{v^2}{u^2}\left(1+\frac{w}{u}\right)}{\left[1-\frac{v^2}{u^2}\left(1+\frac{w}{u}\right)^2\right]^{1/2}}}$$

۲-

آ) با توجه به اینکه فشار در سطح آزاد هر دو طرف برابر با P_0 است، پس:



$$\rho_1 h_1 = \rho_1 h_1' + \rho_2 h_2$$

با توجه به هندسه شکل و دایره:

$$h_1 = R\left[1-\cos(\theta_1-\theta_0)\right]$$

$$h_1' = R\left[1-\cos\theta_0\right]$$

$$h_2 = R\left[\cos\theta_0-\cos(\theta_2+\theta_0)\right]$$

$$\Rightarrow \cancel{\rho_1} - \rho_1\cos(\theta_1-\theta_0) = \cancel{\rho_1} - \rho_1\cos\theta_0 + \rho_2\cos\theta_0 - \rho_2\cos(\theta_2+\theta_0)$$

بعد از بسط دادن $\cos(\theta_1-\theta_0)$ و $\cos(\theta_2+\theta_0)$ و ساده کردن رابطه بالا:

$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta_0 = 2\cdot\frac{\rho_1\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)-\rho_2\sin^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{\rho_1\sin\theta_1+\rho_2\sin\theta_2}}$$

یا

$$\tan\theta_0 = \frac{\rho_1(1-\cos\theta_1)-\rho_2(1-\cos\theta_2)}{\rho_1\sin\theta_1+\rho_2\sin\theta_2}$$

ب)

$$P = P_0 + \rho_2 g h_2 = P_0 + \rho_1 g (h_1 - h_1')$$

$$= P_0 + \rho_2 g R\left[\cos\theta_0 - \cos(\theta_2+\theta_0)\right]$$

با توجه به اینکه مقدار $\tan\theta_0$ در قسمت آ معلوم است، مقدار P در نقطه تماس بدست می‌آید.

پ) فرض کنید به اندازه $\Delta\theta$ طرف ۱ را به سمت پایین فشار می‌دهیم :

$$\Delta P = \left[\rho_2 H_2 + \rho_1 H'_1 - \rho_1 H_1\right] g$$

$$H_2 = R\left[\cos(\theta_0+\Delta\theta) - \cos(\theta_2+\theta_0+\Delta\theta)\right]$$

$$H_1 = R\left[1-\cos(\theta_1-\theta_0-\Delta\theta)\right]$$

$$H'_1 = R\left[1-\cos(\theta_0+\Delta\theta)\right]$$

با بسط دادن روابط بالا و فرض اینکه $\cos(\Delta\theta)\simeq 1$ ، $\sin(\Delta\theta)\simeq\Delta\theta$:

$$H_2 = R\left[\cos\theta_0 - \sin\theta_0\cdot\Delta\theta - \cos(\theta_2+\theta_0) + \sin(\theta_2+\theta_0)\cdot\Delta\theta\right]$$

$$= R\left(\cos\theta_0 - \cos(\theta_2+\theta_0)\right) + R\left[\sin(\theta_2+\theta_0) - \sin\theta_0\right]\Delta\theta$$

$$H_1 = R\left[1-\cos(\theta_1-\theta_0) - \sin(\theta_1-\theta_0)\Delta\theta\right] = R\left(1-\cos(\theta_1-\theta_0)\right) - R\sin(\theta_1-\theta_0)\Delta\theta$$

$$H'_1 = R\left(1-\cos\theta_0 + \sin\theta_0\,\Delta\theta\right) = R\left(1-\cos\theta_0\right) + R\sin\theta_0\,\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_2 = h_2 + R\left[\sin(\theta_2+\theta_0) - \sin\theta_0\right]\cdot\Delta\theta \\ H_1 = h_1 - R\sin(\theta_1-\theta_0)\cdot\Delta\theta \\ H'_1 = h'_1 + R\sin\theta_0\cdot\Delta\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta P = R\Delta\theta\cdot\left[\rho_2\sin(\theta_2+\theta_0) - \rho_2\sin\theta_0 + \rho_1\sin(\theta_1-\theta_0) + \rho_1\sin\theta_0\right]$$

$$= R\Delta\theta\cdot\left[\rho_2\sin\theta_2\cos\theta_0 + \rho_2\cos\theta_2\cdot\sin\theta_0 - \rho_2\sin\theta_0 \right.$$
$$\left. \rho_1\sin\theta_1\cos\theta_0 - \rho_1\cos\theta_1\sin\theta_0 + \rho_1\sin\theta_0\right]$$

$$= R\Delta\theta\cdot\left[\rho_1\sin\theta_0\left[1-\cos\theta_1\right] - \rho_2\sin\theta_0\left[1-\cos\theta_2\right] + \cos\theta_0\left(\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2\right)\right]$$

$$= R\Delta\theta\cdot\left(\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2\right)\cos\theta_0\left[1 + \tan\theta_0\cdot\frac{\rho_1(1-\cos\theta_1) - \rho_2(1-\cos\theta_2)}{\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2}\right]$$

$$\Delta P = R.\Delta\theta.(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)\cos\theta_0 \left[1 + \tan^2\theta_0\right]$$

$$= R\Delta\theta\,(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)\,\frac{1}{\cos\theta_0}$$

با نوشتن معادله نیرو :

$$\Rightarrow \text{اندازه نیروی بازگرداننده} = \Delta P\, a = \boxed{\frac{R(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)}{\cos\theta_0}\, a\, \Delta\theta}$$

ت)

$$-\Delta P\, a = \underbrace{(\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2)Ra}_{\text{جرم کل}}\,(\ddot{\Delta\theta})$$

$$\Rightarrow -R\frac{(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)}{\cos\theta_0}\, a\,\Delta\theta = (\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2)Ra(\ddot{\Delta\theta})$$

$$\Rightarrow (\ddot{\Delta\theta}) + \left(\frac{\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2}{\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2}\right)\frac{1}{\cos\theta_0}\cdot\Delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2}{\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2}\cdot\frac{1}{\cos\theta_0} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

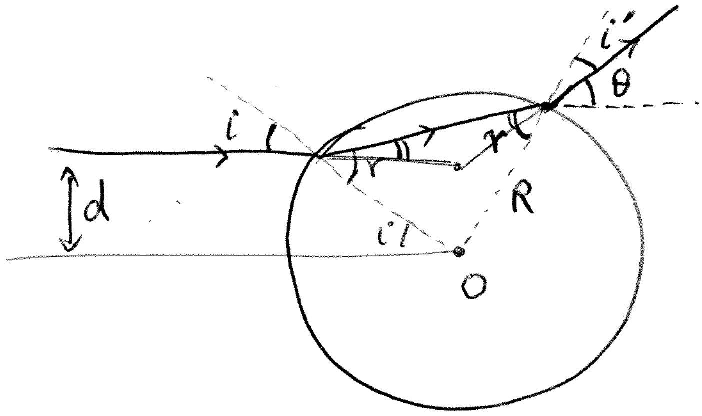
با جایگذاری مقدار $\cos\theta_0$ از رابطه: $\sqrt{1+\tan^2\theta_0} = \frac{1}{\cos\theta_0}$ و روابط $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ، مقدار

دوره تناوب بدست می آید:

$$\boxed{T = 2\pi\left[\frac{\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2}{\left[(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)^2 + \left(\rho_1(1-\cos\theta_1) + \rho_2(1-\cos\theta_2)\right)^2\right]^{1/2}}\right]^{1/2}}$$

۳-

آ)



$$\sin i = \frac{d}{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} n\sin i = \sin r \\ \sin r = n \sin i' \end{array}\right\} i' = i$$

$$\theta = 2(r-i) \longrightarrow \sin\theta = \sin[2(r-i)] = \sin(2r-2i)$$

$$\sin\theta = \sin 2r . \cos 2i - \cos 2r . \sin 2i$$

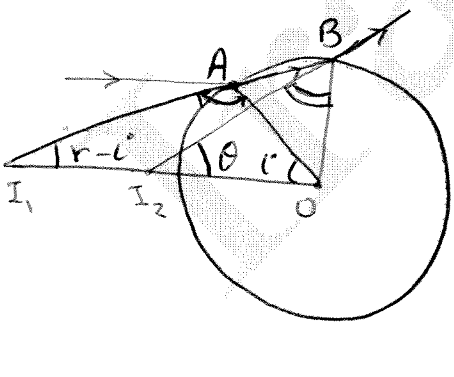
$$= 2\sin r . \cos r . (1-2\sin^2 i) - 2\sin i . \cos i . (1-2\sin^2 r)$$

$$= 2n\sin i\sqrt{1-n^2\sin^2 i}\,.(1-2\sin^2 i) - 2\sin i\sqrt{1-\sin^2 i}\,(1-2n^2\sin^2 i)$$

$$= 2\sin i\left[n\sqrt{1-n^2\sin^2 i}\,(1-2\sin^2 i) - \sqrt{1-\sin^2 i}\,(1-2n^2\sin^2 i)\right]$$

$$\boxed{\sin\theta = 2\frac{d}{R}\left[n\sqrt{1-\frac{n^2d^2}{R^2}}\left(1-\frac{2d^2}{R^2}\right) - \sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}}\cdot\left(1-\frac{2n^2d^2}{R^2}\right)\right]}$$

ب)



$$A = \pi - r \quad , \quad B = i$$

با استفاده از قانون سینوس ها:

$$\frac{R}{\sin(r-i)} = \frac{OI_1}{\sin(\pi-r)} \Rightarrow OI_1 = R.\frac{\sin r}{\sin(r-i)}$$

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{OI_2}{\sin i} \Rightarrow OI_2 = R.\frac{\sin i}{\sin\theta}$$

$$OI_1 = R\,\frac{n\sin i}{\sin r.\cos i - \cos r.\sin i} = \frac{n\frac{d}{R}R}{n\frac{d}{R}\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}} - \frac{d}{R}\sqrt{1-n^2\frac{d^2}{R^2}}}$$

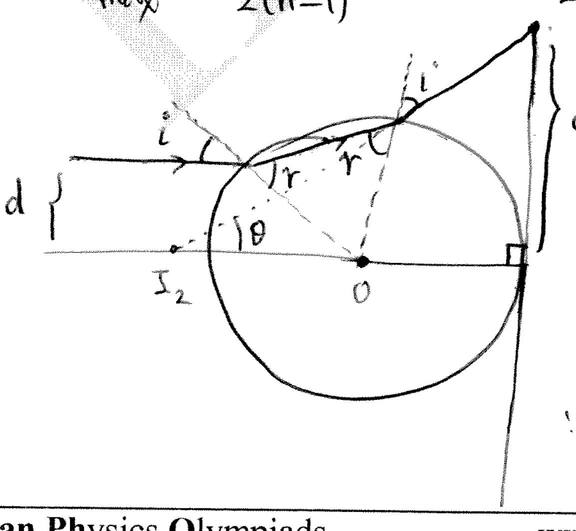
$$\boxed{OI_1 = \frac{nR}{\sqrt{n^2-\left(\frac{nd}{R}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{nd}{R}\right)^2}}}$$

$$OI_2 = \frac{R\,\cancel{\frac{d}{R}}}{2\cancel{\frac{d}{R}}\left[\left(1-\frac{2d^2}{R^2}\right)\sqrt{1-\frac{n^2d^2}{R^2}}\cdot n - \left(1-\frac{2n^2d^2}{R^2}\right)\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}}\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{OI_2 = \frac{R}{2}\cdot\frac{1}{n\left(1-\frac{2d^2}{R^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{nd}{R}\right)^2} - \left(1-2\frac{n^2d^2}{R^2}\right)\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}}}}$$

ب)
$$OI_{1_{max}} = \frac{nR}{n-1}, \quad OI_{1_{min}} = \frac{nR}{\sqrt{n^2-\left(\frac{nD}{R}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{nD}{R}\right)^2}}$$

$$OI_{2_{max}} = \frac{R}{2(n-1)}, \quad OI_{2_{min}} = \frac{R}{2}\cdot\frac{1}{n\left(1-\frac{2D^2}{R^2}\right)\sqrt{1-\frac{n^2D^2}{R^2}} - \left(1-\frac{2n^2D^2}{R^2}\right)\sqrt{1-\frac{D^2}{R^2}}}$$



ت)
$$I\pi D^2 = \bar{I}\,\pi . {d'_{max}}^2$$

$$\Rightarrow \bar{I} = I\left(\frac{D}{d'_{max}}\right)^2$$

مقدار d' با استفاده از هندسه شکل بدست می‌آید!

$$d' = \tan\theta \left[R + OI_2 \right] = \tan\theta \left[R + R\frac{\sin i}{\sin\theta} \right]$$

$$\Rightarrow d' = R\tan\theta \left[1 + \frac{\sin i}{\sin\theta} \right] = R\tan\theta \left[1 + \frac{d}{R\sin\theta} \right]$$

$$= R\tan\theta + \frac{d}{\cos\theta}$$

با توجه به هندسه شکل و همچنین رابطه بدست آمده برای d'، مشخص است که

به ازای $d = D$ (θ_{max})، مقدار d' نیز حداکثر می‌شود.

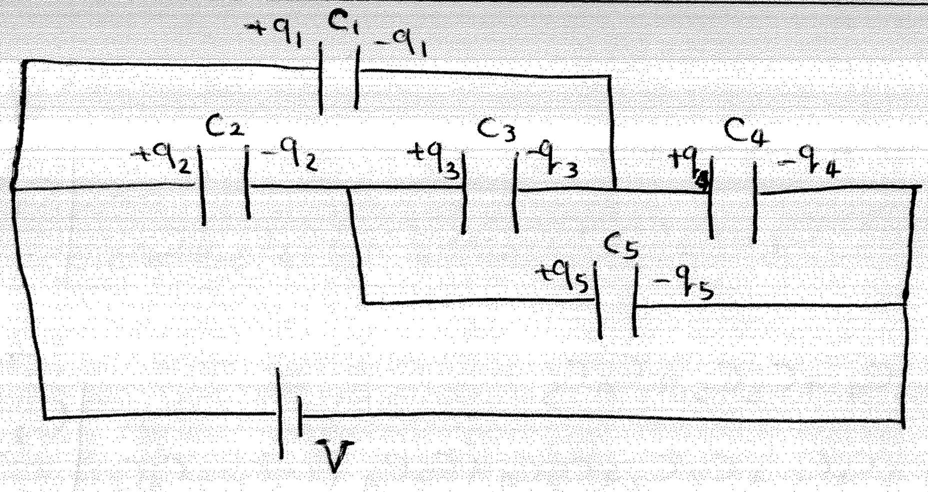
$$d'_{max} = R\tan\theta_{max} + \frac{D}{\cos\theta_{max}} = \frac{D}{\cos\theta_{max}} \left[1 + \frac{R}{D}\sin\theta_{max} \right]$$

$$\Rightarrow d'_{max} = D\,\frac{1 + \frac{R}{D}\sin\theta_{max}}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_{max}}} \quad (1)$$

$$\sin\theta_{max} = 2\frac{D}{R}\left[n\sqrt{1 - \frac{n^2D^2}{R^2}}\left(1 - \frac{2D^2}{R^2}\right) - \sqrt{1 - \frac{D^2}{R^2}}\left(1 - \frac{2n^2D^2}{R^2}\right) \right] \quad (2)$$

(1)
(2) : $$\boxed{\bar{I} = I\left(\frac{D}{d_{max}}\right)^2}$$

۴-



آ) باید 5 معادله و 5 مجهول زیر حل شود!

$$q = CV \Rightarrow V = q/C$$

قانون حلقه: (جمع ولتاژها)

$$① \quad \frac{q_1}{c_1} = \frac{q_2}{c_2} + \frac{q_3}{c_3}$$

$$② \quad \frac{q_5}{c_5} = \frac{q_3}{c_3} + \frac{q_4}{c_4}$$

$$③ \quad V = \frac{q_2}{c_2} + \frac{q_5}{c_5}$$

پایستگی بار:

$$④ \quad -q_1 + q_4 - q_3 = 0$$

$$⑤ \quad -q_2 + q_5 + q_3 = 0$$

$$④ \Rightarrow q_4 = q_1 + q_3 \quad , \quad ⑤ \Rightarrow q_5 = q_2 - q_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q_1}{c_1} = \dfrac{q_2}{c_2} + \dfrac{q_3}{c_3} \\ \dfrac{q_2 - q_3}{c_5} = \dfrac{q_3}{c_3} + \dfrac{q_1 + q_3}{c_4} \\ V = \dfrac{q_2}{c_2} + \dfrac{q_2 - q_3}{c_5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q_1}{c_1} - \dfrac{q_2}{c_2} - \dfrac{q_3}{c_3} = 0 \\ \dfrac{q_1}{c_4} - \dfrac{q_2}{c_5} + \left(\dfrac{1}{c_3} + \dfrac{1}{c_5} + \dfrac{1}{c_4}\right) q_3 = 0 \\ \left(\dfrac{1}{c_2} + \dfrac{1}{c_5}\right) q_2 - \dfrac{q_3}{c_5} = V \end{cases}$$

با حل 3 معادله و 3 مجهول بدست آمده، مقدار q_1 ، q_2 ، q_3 بدست می‌آید:

$$q_1 = \left[\frac{C_2C_4 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_1C_5 + C_2C_3 + C_2C_4 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}\right] \cdot C_1V$$

$$q_2 = \left[\frac{C_1C_5 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_1C_5 + C_2C_3 + C_2C_4 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}\right] \cdot C_2V$$

$$q_3 = \left[\frac{C_2C_4 - C_1C_5}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_1C_5 + C_2C_3 + C_2C_4 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}\right] \cdot C_3V$$

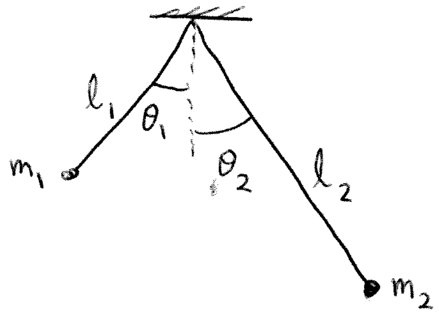
ب) $(q_1 + q_2) = C_eV$ (چرا؟)

$$\Longrightarrow \qquad C_e = \frac{q_1 + q_2}{V}$$

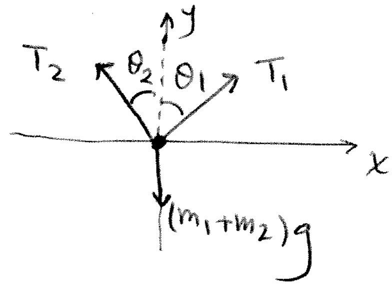
ج) $q_3 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1C_5 = C_2C_4}$

-۵

آ)



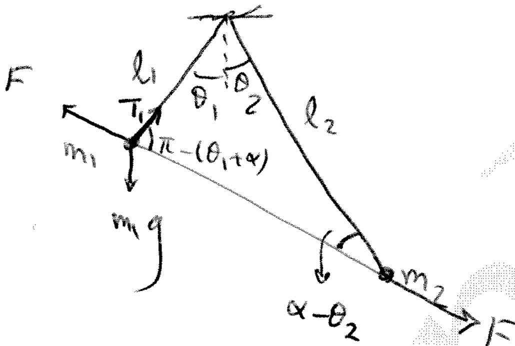
روش اول : نیروهای خارجی وارد شده به مجموع دو بار را در نظر می گیریم :

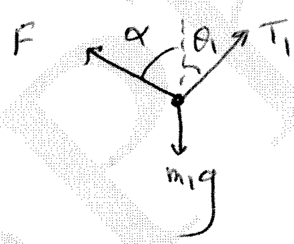


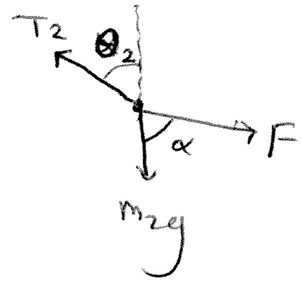
$$\hat{i}: \quad T_1 \sin\theta_1 - T_2 \sin\theta_2 = 0$$

$$\hat{j}: \quad T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 - (m_1+m_2)g = 0$$

روش دوم: نیروی کولن بین بارها را در نظر گرفته و برای هر یک از بارها معادله تعادل نیرو را می نویسیم







$$\hat{i}: \quad T_1 \sin\theta_1 - F\sin\alpha = 0 \quad , \quad F\sin\alpha - T_2\sin\theta_2 = 0$$

$$\hat{j}: \quad T_1\cos\theta_1 + F\cos\alpha - m_1 g = 0 \quad , \quad T_2\cos\theta_2 - F\cos\alpha - m_2 g = 0$$

ب)

① $$T_1 \sin\theta_1 - T_2 \sin\theta_2 = 0 \Longrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

② $$\frac{m_1 g}{\sin(\alpha+\theta_1)} = \frac{T_1}{\sin(\pi-\alpha)} \quad , \quad \frac{m_2 g}{\sin(\pi-\alpha+\theta_2)} = \frac{T_2}{\sin\alpha} \Longrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{\sin(\alpha-\theta_2)}{\sin(\alpha+\theta_1)}$$

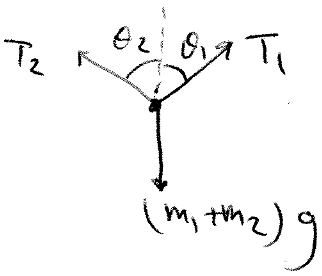
③ $$\frac{l_1}{\sin(\alpha-\theta_2)} = \frac{l_2}{\sin(\pi-\alpha-\theta_1)} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(\alpha-\theta_2)}{\sin(\alpha+\theta_1)}$$

با ترکیب سه معادله بدست آمده از قانون سینوس ها :

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{\sin(\alpha-\theta_2)}{\sin(\alpha+\theta_1)}=\frac{m_1}{m_2}\,\frac{l_1}{l_2}\Rightarrow\boxed{\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}}$$

ب)

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}$$

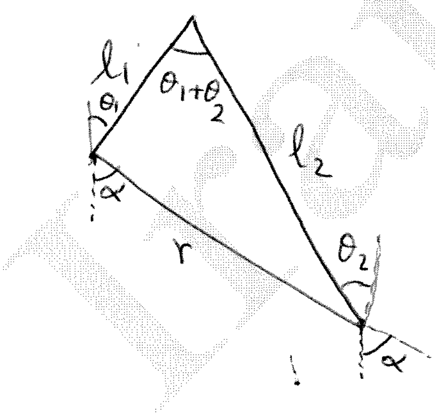


قانون سینوس ها :

$$\frac{(m_1+m_2)g}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=\frac{T_1}{\sin(\pi-\theta_2)}=\frac{T_2}{\sin(\pi-\theta_1)}$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}T_1=\dfrac{(m_1+m_2)g}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\cdot\sin\theta_2\\[2ex]T_2=\dfrac{(m_1+m_2)g}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\cdot\sin\theta_1\end{cases}}$$

ت) با استفاده از هندسه شکل و تعادل نیروها و قانون سینوس ها :



$$\frac{r}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=\frac{l_1}{\sin(\alpha-\theta_2)}=\frac{l_2}{\sin(\alpha+\theta_1)}$$

$$\frac{F}{\sin\theta_1}=\frac{m_1 g}{\sin(\alpha+\theta_1)}$$

$$\frac{F}{\sin\theta_2}=\frac{m_2 g}{\sin(\alpha-\theta_2)}$$

$$\Rightarrow\frac{r}{F}\,\frac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=\frac{l_2}{m_1 g}\quad,\quad\frac{r}{F}\,\frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=\frac{l_1}{m_2 g}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{F}\right)^2 \frac{\sin\theta_1 . \sin\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} = \frac{l_1 l_2}{m_1 m_2 g^2} \quad , \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}$$

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \quad , \quad r^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \quad , \quad x = \cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r^3}{k q_1 q_2}\right)^2 = \frac{l_1 l_2}{m_1 m_2 g^2} \cdot \frac{1-x^2}{\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} \cdot \sin^2\theta_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r^2)^3 = \left(\frac{k q_1 q_2 . l_2}{m_1 g}\right)^2 \cdot \frac{1-x^2}{\sin^2\theta_1}$$

$$\Rightarrow \left(l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 x\right)^3 = \left(\frac{k q_1 q_2 l_2}{m_1 g}\right)^2 \cdot \frac{1-x^2}{\sin^2\theta_1}$$

حال کافی است $\sin^2\theta_1$ را برحسب x محاسبه کنیم:

$$x = \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{1-\sin^2\theta_1} \cdot \sqrt{1-\sin^2\theta_2} - \sin\theta_1 . \sin\theta_2 \quad , \quad \sin\theta_2 = \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} \sin\theta_1$$

$$\Rightarrow \left[x + \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} \sin^2\theta_1\right]^2 = (1-\sin^2\theta_1)\left(1 - \left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2 \sin^2\theta_1\right)$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{\left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2 \sin^4\theta_1} + 2\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} x . \sin^2\theta_1 = 1 - \sin^2\theta_1 - \left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 + \cancel{\left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2 \sin^4\theta_1}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta_1 \left[1 + 2\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} x + \left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2\right] = 1 - x^2$$

با جایگذاری رابطهٔ بدست آمده در رابطهٔ قبلی، رابطه ای برحسب x و پارامترهای معلوم مسئله بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \left(l_1^2+l_2^2-2l_1l_2x\right)^3=\left(\frac{kq_1q_2l_2}{m_1g}\right)^2\cdot\left[1+2\frac{m_1l_1}{m_2l_2}x+\left(\frac{m_1l_1}{m_2l_2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow 8l_1^3l_2^3\left[\frac{l_1^2+l_2^2}{2l_1l_2}-x\right]^3=\left(\frac{kq_1q_2}{g}\right)^2\cdot\frac{l_2^2}{m_1^2}\cdot\left[1+2\frac{m_1l_1}{m_2l_2}x+\left(\frac{m_1l_1}{m_2l_2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{l_1^2+l_2^2}{2l_1l_2}\right)^3-x^3-3\left(\frac{l_1^2+l_2^2}{2l_1l_2}\right)^2x+3\left(\frac{l_1^2+l_2^2}{2l_1l_2}\right)x^2$$

$$=\left(\frac{kq_1q_2}{2l_1l_2g}\right)^2\left[\frac{l_1}{2l_2m_2^2}+\frac{l_2}{2l_1m_1^2}+\frac{x}{m_1m_2}\right]$$

با مرتب کردن عبارت بالا برحسب جملات x ، مقادیر a ، b ، c به ترتیب زیر بدست می‌آید:

$\Rightarrow$

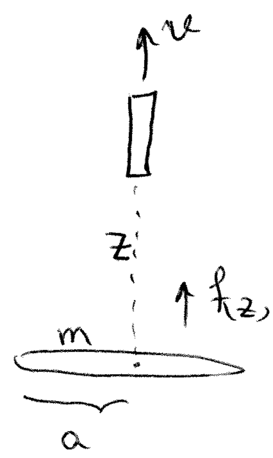
$$a=\frac{-3(l_1^2+l_2^2)}{2l_1l_2}$$

$$b=3\left(\frac{l_1^2+l_2^2}{2l_1l_2}\right)^2+\frac{1}{m_1m_2}\left(\frac{kq_1q_2}{2l_1l_2g}\right)^2$$

$$c=\left(\frac{kq_1q_2}{2l_1l_2g}\right)^2\cdot\left(\frac{l_1}{2l_2m_2^2}+\frac{l_2}{2l_1m_1^2}\right)-\left(\frac{l_1^2+l_2^2}{2l_1l_2}\right)^3$$

-۶

آ)



$$\phi = \pi a^2 f_{(z)}$$

$$\mathcal{E} = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \pi a^2 \cdot \frac{df_{(z)}}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{df}{dz} = v\,\frac{df}{dz}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\mathcal{E} &= \pi a^2 v\,\frac{df}{dz}\\ \mathcal{E} &= RI\end{aligned}\right\} \quad \boxed{I = \left(\frac{\pi a^2 v}{R}\right)\cdot\frac{df}{dz}}$$

جریان مثبت ☆ (چرا؟)

ب)

$$RI^2 = Fv \Rightarrow F = \frac{RI^2}{v} \Rightarrow \boxed{F = \frac{\pi^2 a^4 v}{R}\cdot\left(\frac{df}{dz}\right)^2} \; ☆$$

نیروی وارد شده به حلقه

جهت نیرو رو به بالا است (چرا؟)

پ)

$$mg \leq F \Rightarrow mg \leq \frac{\pi^2 a^4}{R}\, v \left(\frac{df}{dz}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v \geq \frac{mgR}{\left(\pi a^2 \cdot \frac{df}{dz}\right)^2} = v_{min}} \; ☆$$

جهت سرعت آهنربا باید به سمت بالا باشد. (چرا؟)

۷-

آ)

N_B : تعداد مول

V : حجم

$$P_B V = N_B RT$$

$$\Rightarrow P_B = \frac{N_B}{V} RT$$

$$\Rightarrow \boxed{P_B = n_B RT} \; \star$$

ب)

$$W = P_B \Delta V \longrightarrow \boxed{W = n_B RT.\Delta V} \; \star$$

پ)

$$NaCl \longrightarrow Na^+ + Cl^-$$

غلظت نمک محلول در آب $= 40 \ gr/lit = 40 \times 10^3 \ gr/m^3$

جرم مولی نمک $= 58 \ gr/mol$

تعداد مول نمک موجود در یک متر مکعب آب $= \frac{40 \times 10^3}{58} = 689.7 \ mol/m^3$

با توجه به واکنش تجزیه نمک، از یک مول نمک، دو مول یون گازی بدست می‌آید

$$\Rightarrow n_B = 1379.4 \ mol/m^3 \; \star \qquad \Delta V = 1 m^3$$

$$\Rightarrow W = 1379.4 \times 8.3 \times (27+273) \times 1 = 3.43 \times 10^6 \ J$$

$$1 \ Kwhr = 1000 \times 3600 = 3.6 \times 10^6 \ J$$

$$\Rightarrow W = \frac{3.43}{3.6} \simeq 0.95 \ Kwh \xrightarrow{\text{بازده} = 70\%} W_{\text{لازم}} = \frac{0.95}{0.7} = \boxed{1.36 \ Kwhr} \; \star$$