

به نام خدا

پاسخ تشریحی سوالات ریاضی رشته ی تجربی کنکور 93

1- به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 + 4$ ، $2x$ ، $x^2 - 2$ ، به ترتیب سه جمله ی اول از دنباله ی هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله ی اول این دنباله کدام است؟

(4) $\frac{127}{8}$

(3) $\frac{63}{4}$

(2) $\frac{125}{16}$

(1) $\frac{117}{16}$

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از خاصیت میانگین هندسی برای دنباله های هندسی داریم :

$$a, b, c : b^2 = ac \rightarrow 4x^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 4) \rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$(x^2 - 1)^2 = 9 \rightarrow x^2 - 1 = \pm 3 \rightarrow x^2 = 4 \text{ ق ق } : x = \pm 2$$

$$x = 2 \quad : \quad x^2 + 4, 2x, x^2 - 2 \quad : \quad 8, 4, 2 \text{ نزولی}$$

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^7)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8(1 - \frac{1}{128})}{\frac{1}{2}} = 16 \left(\frac{127}{128} \right) = \frac{127}{8}$$

2- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را 4 واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

-2 (4)

-2.5 (3)

-3 (2)

-3.5 (1)

گزینه ی 2 صحیح است.

نمودار تابع داده شده در صورت انتقال به صورت $y = \frac{1}{2}|x + 4| - 2$ - 1 در خواهد آمد که فقط به ازای $x = -3$ می باشد که مقدار دو تابع یکسان و برابر $-\frac{1}{2}$ می شود. پس می توان گفت گزینه ی 2 پاسخ صحیح تست می باشد.

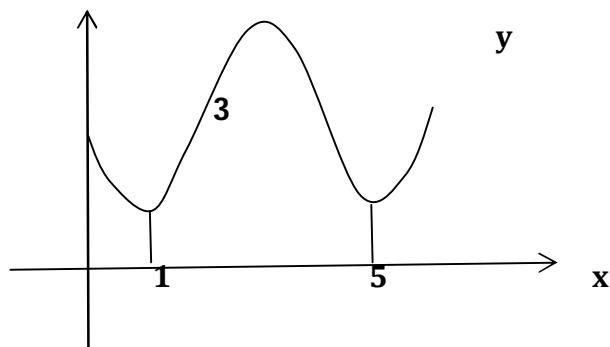
3- شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار $f\left(\frac{25}{3}\right)$ کدام است؟

3,5 (4)

3 (3)

2,5 (2)

2 (1)



گزینه ی 2 صحیح است.

$$f(0) = 3 \rightarrow 3 = a$$

$$f'(x) = b\pi \cdot \cos b\pi x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 : b\pi \cdot \cos b\pi = 0 \\ x = 5 : b\pi \cdot \cos 5b\pi = 0 \end{cases} \rightarrow b\pi \neq 0, \quad \cos b\pi = 0 \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$$

$$f\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(\frac{25b\pi}{3}\right) \xrightarrow{b=\frac{1}{2}} 3 + \sin\frac{25\pi}{6} = 3 + \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 + \sin\frac{\pi}{6} = 3 + 0.5 = 3.5$$

$$f\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(\frac{25b\pi}{3}\right) \xrightarrow{b=-\frac{1}{2}} 3 - \sin\frac{25\pi}{6} = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - 0.5 = 2.5$$

و ...

4- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A \times B$ ماتریس واحد باشد، مجموع درایه های سطر اول ماتریس B کدام است؟

2,5 (4)

2 (3)

1,5 (2)

1 (1)

گزینه ی 3 صحیح است.

$$A \times B = I \xrightarrow{A^{-1}} B = A^{-1}, \quad A^{-1} = \frac{1}{14 - 12} \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه های سطر اول}} \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$$

5- در یک شرکت دارویی جدول توزیع کارکنان را با نمودار دایره ای نشان می دهیم. زاویه ی مربوط به کارکنان ارشد چند درجه است؟

105 (4) 96 (3) 92 (2) 84 (1)

نوع مدرک	دیپلم	کاردانی	کارشناسی	ارشد	دکتر
تعداد	30	90	180	120	30

گزینه ی 3 صحیح است.

$$\theta = \frac{120}{450} \times 360 = \frac{4}{15} \times 360 = 4 \times 24 = 96$$

6- در 25 داده ی آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب 30 و 8 می باشد. اگر داده های ناجور 10 و 15 و 45 و 50 از بین آنها حذف شوند، واریانس داده های باقی مانده کدام است؟

16,66 (4) 15,33 (3) 14,81 (2) 14,72 (1)

گزینه ی 4 صحیح است.

واریانس چهار داده ی ناجور را محاسبه می کنیم :

$$\bar{x} = \frac{50 + 45 + 15 + 10}{4} = 30 \quad \text{میانگین ثابت}$$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - 30)^2}{25} = 64$$

حال برای محاسبه ی واریانس 21 داده خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{21} (x_i - 15)^2}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - 30)^2 - ((20)^2 - (15)^2 - (-15)^2 - (-20)^2)}{10} = \frac{64(25) - 800 - 450}{21} \\ &= \frac{1600 - 1250 = 350}{21} = \frac{210 + 126 + 14}{21} = 10 + 6 + \frac{2}{3} = 16.66 \end{aligned}$$

7- ظرف A دارای 4 مهره ی سفید و 5 مهره ی سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان C , B دارای 6 مهره ی سفید و 3 مهره ی سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و 4 مهره از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده سفید است؟

(1) $\frac{25}{63}$ (2) $\frac{26}{63}$ (3) $\frac{10}{21}$ (4) $\frac{11}{21}$

گزینه ی 1 صحیح است.

احتمال انتخاب هر کدام از ظرف ها برابر $\frac{1}{3}$ است. و برای محاسبه ی احتمال مورد نظر خواهیم داشت :

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{6 \times 10}{126} + \frac{15 \times 3}{126} + \frac{15 \times 3}{126} \right) = \frac{20 + 15 + 15}{126} = \frac{50}{63}$$

8- اگر $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$ مقدار $\cos(2x)$ کدام است؟

(1) $-\frac{2}{9}$ (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{2}{9}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) + \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = \cos x = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{4}{9}\right) - 1 = -\frac{1}{9}$$

9- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4}\right)$ کدام است؟

(1) $-\frac{7}{12}$ (2) $-\frac{5}{12}$ (3) $\frac{5}{12}$ (4) $\frac{7}{12}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4}\right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{0} - \frac{4}{0}\right) = \infty - \infty \text{ مبهم}$$

رفع ابهام با مخرج مشترک گرفتن :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2(x^2 + \frac{5}{2}x + 1)} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\frac{3}{2}}{(x+2)(x+\frac{1}{2})} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\frac{3}{2}(x-2) - 4(x+\frac{1}{2})}{(x+2)(x-2)(x+\frac{1}{2})} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-\frac{5}{2}}{(x-2)(x+\frac{1}{2})} \right) = \frac{-\frac{5}{2}}{(-4)(-\frac{3}{2})} = \frac{-\frac{5}{2}}{6} = -\frac{5}{12}$$

10- تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} & : 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{acos} 3x & : \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ به ازای کدام مقادیر a در نقطه ی $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

- (1) $-2\sqrt{2}$ (2) -1 (3) $\sqrt{2}$ (4) 2

گزینه ی 1 صحیح است.

پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم:

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} \stackrel{0 \text{ HOP}}{=} \frac{-2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{-2 \sin 2x} = \frac{-2(2)}{-2} = 2 \\ \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \operatorname{acos} 3x = \operatorname{acos} \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a \\ \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \rightarrow a \\ = -2\sqrt{2} \end{array} \right)$$

11- در تابع با ضابطه ی $f(x) = (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه ی $x = 12$ تا $x = 4$ از آهنگ لحظه ای آن در نقطه ی $x = 4$ چقدر بیشتر است؟

- (1) $\frac{7}{540}$ (2) $\frac{11}{540}$ (3) $\frac{7}{270}$ (4) $\frac{11}{270}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{-\frac{2}{15}}{8} = -\frac{1}{60}$$

$$\text{آهنگ لحظه ای} = f'(4) = -\frac{1}{2}(2)(2x + 1)^{-\frac{3}{2}} = -(9)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{27}$$

$$-\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{60} = \frac{33}{27 \times 60} = \frac{11}{540}$$

12- مشتق تابع $y = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

(1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{4}$ (4) $-\frac{1}{8}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$y' = 2(2) \left(-\frac{1}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$$

13- احتمال انتقال بیماری مسری به افراد مستعد برابر 0,2 است. اگر 5 نفر مستعد با فردی بیمار ملاقات کنند , با کدام احتمال 3 نفر آنان مبتلا می شوند؟

(1) 0,0256 (2) 0,0512 (3) 0,1024 (4) 0,2048

گزینه ی 2 صحیح است.

با توزیع دوجمله ای سروکار داریم. حتما دیگه دستتون اومده که چطور تست هایی رو با توزیع دوجمله ای حل می کنند!

$$n = 5, k = 3, p = 0.2, q = 0.8$$

$$P(k = 3) = \binom{5}{3} (0.2)^3 (0.8)^2 = \frac{5 \times 4}{2} (0.008)(0.64) = 10(0.00512) = 0.0512$$

14- به ازای کدام مقدار m , مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ برابر 6 می باشد؟

(1) $-\frac{9}{5}$ (2) 1 (3) $-\frac{9}{5}$ و 1 (4) $\frac{9}{5}$ و -1

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\alpha^2 + \beta^2 = 6 \rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} = \frac{m^2 + 6m - 1}{m} = 6 \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1$$

با توجه به اینکه مقدار عددی منفی یک در گزینه ها اصلا وجود ندارد , پس نیازی به بررسی صحیح بودن نقطه نیست و گزینه ی 2 پاسخ مطلوب تست است.

15- اگر نمودار تابع $f(x) = a(b^x) - 1$ از دو نقطه ی $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ، $B(1, 11)$ بگذرد ، آن گاه $f(-1)$ کدام است؟

- (1) $-\frac{3}{4}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{4}$ (4) $\frac{3}{4}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$f(1) = 11 \rightarrow 11 = ab - 1 \rightarrow ab = 12 \quad (1)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{\sqrt{b}} - 1 \rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2} \rightarrow 9b = 4a^2 \rightarrow b = \frac{4a^2}{9} \quad (2)$$

با جاگذاری نتیجه ی به دست آمده ی 2 در 1 خواهیم داشت :

$$ab = 12 \rightarrow a\left(\frac{4a^2}{9}\right) = 12 \rightarrow a^3 = 27 \rightarrow a = 3, b = 4$$

$$f(-1) = \frac{a}{b} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

16- از تساوی $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ی 2 کدام است؟

- (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5 \rightarrow \log_x(x^2 + 4) = \log_x x + \log_x 5 \rightarrow \log_x(x^2 + 4) = \log_x 5x \rightarrow x^2 + 4 = 5x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x - 4)(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1, 4$$

لگاریتم در مبنای 1 تعریف نشده است و تنها مقدار عددی 4 مورد قبول خواهد بود. حال خواهیم داشت :

$$\log_2 4 = 2$$

17- در معادله ی مثلثاتی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ مجموع تمام جواب ها در بازه ی $[0, \pi]$ کدام است؟

- (1) $\frac{3\pi}{4}$ (2) $\frac{5\pi}{4}$ (3) $\frac{3\pi}{2}$ (4) $\frac{7\pi}{4}$

گزینه ی 2 صحیح است.

من که به شخصه خیلی متعجب شدم که علاوه بر نمودار مثلثاتی و یک سوال مثلثاتی دیگه با سومین تست مربوط به مثلثاتی روبرو شدم!!!!

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \quad , \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \quad \text{می دانیم که}$$

$$\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x) \rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x(\sin x + \cos x) - (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)^2 = 0$$

$$(\sin x + \cos x)(2 \sin x \cdot \cos x - 1 + 2 \sin x \cdot \cos x) = (\sin x + \cos x)(2 \sin 2x - 1) = 0$$

$$\sin x + \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$2 \sin 2x - 1 = 0 \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{مجموع جواب ها} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{9\pi + \pi + 5\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$$

18- در تابع ضمنی $4\sqrt{xy} + \frac{1}{y} - 2x = 1$ تابع y بر حسب x منظور شده است. معادله ی خط مماس بر منحنی آن در نقطه ی (1 و 4) کدام

است؟

$$3y - x = -1 \quad (4)$$

$$3y + x = 7 \quad (3)$$

$$2y - x = -2 \quad (2)$$

$$y + 2x = 9 \quad (1)$$

گزینه ی 4 صحیح است.

خط مماس بر نمودار تابع را پیدا می کنیم :

$$4\sqrt{xy} + \frac{1}{y} - 2x - 1 = 0 \rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

تابع ضمنی ست. برای به دست آوردن شیب خط مماس ، از تابع داده شده مشتق ضمنی می گیریم :

$$m = y'_x = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{4\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}}\right) - 2}{4\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}}\right) - \frac{1}{y^2}} \xrightarrow{(4,1)} m = -\frac{1-2}{4-1} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)(x - 4) \rightarrow y - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3} 3y - x = -1$$

19- تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x - \cos 2x & : 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ a \tan x + b \sin 2x & : \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه ی $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر است. **b** کدام است؟

- (1) -1 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 1

گزینه ی 1 صحیح است.

با توجه به اینکه گفته شده است تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر است، اولین شرط مشتق پذیری یک تابع همانطور که می دانیم، پیوستگی است. پس ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم:

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \tan x + b \sin 2x = a \tan \frac{\pi}{4} + b \sin \frac{\pi}{2} = a + b \\ \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \sin^2 x - \cos 2x = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow a + b = \frac{1}{2} \quad (1)$$

حال باید شرط دوم مشتق پذیری یعنی برابر بودن مشتق چپ و راست تابع را بررسی کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} a(1 + \tan^2 x) + 2b \cos 2x & : f'(\frac{\pi}{4}^+) = f'(\frac{\pi}{4}^-) \\ 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin 2x = 3 \sin 2x & : \end{cases} \rightarrow 2a = 3 \quad (2)$$

$$\left(a = \frac{3}{2}, \quad b = -1 \right)$$

20- در کدام بازه تابع با ضابطه ی $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ نزولی و تقعر نمودار آن رو به بالاست؟

- (1) (3 و 1) (2) (4 و 1) (3) (1 و 0) (4) (3 و 0)

گزینه ی 1 صحیح است.

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x = -4x(x^2 - 6x + 9) = -4x(x-3)^2 < 0 \rightarrow x > 0 \quad (1)$$

$$f''(x) = -12x^2 + 48x - 36 = -12(x^2 - 4x + 3) > 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \rightarrow (x-1)(x-3) < 0$$

$$1 < x < 3 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) : (1,3)$$

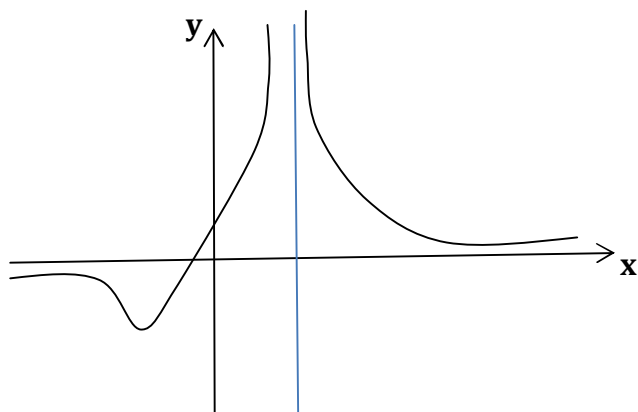
21- شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{x+a}{x^2+bx+4}$ است. مقادیر a, b کدام است؟

$b = -4, a > 0$ (4)

$b = 4, a > 0$ (3)

$b = -4, a < 0$ (2)

$b = 4, a < 0$ (1)



گزینه ی 4 صحیح است.

طول مجانب قائم نمودار تابع مثبت است و مخرج کسر باید ریشه ی مضاعف مثبت داشته باشد :

$$x^2 + bx + 4 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 16 = 0 \rightarrow b = \pm 4$$

بالتبع $b = -4$ صحیح است. زیرا برای داشتن ریشه ی مضاعف مثبت باید ضریب عددی x در معادله ی درجه ی دوم مفروض منفی باشد. پس گزینه های 1 و 3 نادرست می باشند.

$$y = \frac{x+a}{x^2-4x+4} = \frac{x+a}{(x-2)^2}$$

پس خط $x = 2$ مجانب قائم نمودار تابع است.

اگر به قسمتی از نمودار که در سمت چپ محور طول ها قرار دارد ، دقت داشته باشید ، نمودار تابع به ازای یک مقدار منفی صفر شده است :

$$y = 0 \rightarrow x + a = 0 \rightarrow x_{\text{منفی}} \rightarrow a \text{ مثبت}$$

22- به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$ دارای بی شمار جواب است؟

(4) هیچ مقدار

(3) 3

(2) -1

(1) -2

گزینه ی 2 صحیح است.

شرط اینکه دستگاه بی شمار جواب داشته باشد آن است که :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \rightarrow \frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m}$$

دو به دو تساوی ها را در نظر گرفته و مقدار مورد نظر برای m را به دست می آوریم :

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} m = 3, -1$$

$$\frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} m = -1$$

پس به ازای $m = -1$ دستگاه بی شمار جواب دارد.

23- شعاع دایره ی گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$ و $(1, 2)$ و $(-2, 1)$ برابر کدام است؟

$$\frac{1}{2}\sqrt{13} \quad (4)$$

$$\sqrt{5} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{10} \quad (1)$$

گزینه ی 1 صحیح است.

معادله ی کلی دایره به صورت زیر بیان می شود :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$(0, 0) \rightarrow c = 0, \quad (2, 1) \rightarrow 4 + 1 + 2a + b = 0, \quad (1, -2) \rightarrow 1 + 4 + a - 2b = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2a + b = -5 \\ a - 2b = -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{معادله ی دوم در ضرب } -2} \begin{pmatrix} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = 10 \end{pmatrix} + 5b = 5 \rightarrow b = 1, \quad a = -3$$

$$x^2 + y^2 - 3x + y = 0 \rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{2}$$

24- در هذلولی به معادله ی $3x^2 - 4y^2 - 6x - 9 = 0$, طول وتری از آن, گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\sqrt{7} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$3x^2 - 4y^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 2x) - 4(y^2) = 9 \rightarrow 3(x - 1)^2 - 4y^2 = 12$$

$$\xrightarrow{\div 12} \frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1, \quad a = 2, b = \sqrt{3}$$

$$\text{طول وتر کانونی} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)}{2} = 3$$

25- مقدار انتگرال معین $\int_{-1}^3 (x + [x]) dx$ کدام است؟

6,5 (4)

6 (3)

5,5 (2)

5 (1)

گزینه ی 3 صحیح است.

$$\int_{-1}^3 (x + [x]) dx = \int_{-1}^0 (x - 1) dx + \int_0^1 (x) dx + \int_1^2 (x + 1) dx + \int_2^3 (x + 2) dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_2^3 = \left(0 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(4 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{21}{2} - 6\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

26- اگر $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3 - 1}{x} dx = 3\sqrt{x} \cdot f(x) + C$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

$\frac{2}{9}x + \sqrt{x} + 2$ (4)

$\frac{2}{9}x + 3\sqrt{x} + 6$ (3)

$\frac{2}{3}x + 3\sqrt{x} + 6$ (2)

$\frac{2}{3}x + 3\sqrt{x} + 2$ (1)

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3 - 1}{x} dx = \int \frac{(1 + x\sqrt{x} + 3x + 3\sqrt{x} - 1)}{x} dx = \int \left(\sqrt{x} + 3 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx +$$

$$\int 3dx + 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 3x + 3 \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3x + 3 \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 6x^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + C = 3\sqrt{x}\left(\frac{2}{9}x + \sqrt{x} + 2\right) + C \rightarrow f(x) = \frac{2}{9}x + \sqrt{x} + 2$$

27- در مثلث ABC ، زاویه $\hat{A} = 108$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه های $BD = BA$ ، $CE = CA$ امتداد می دهیم. کوچکترین زاویه ی خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

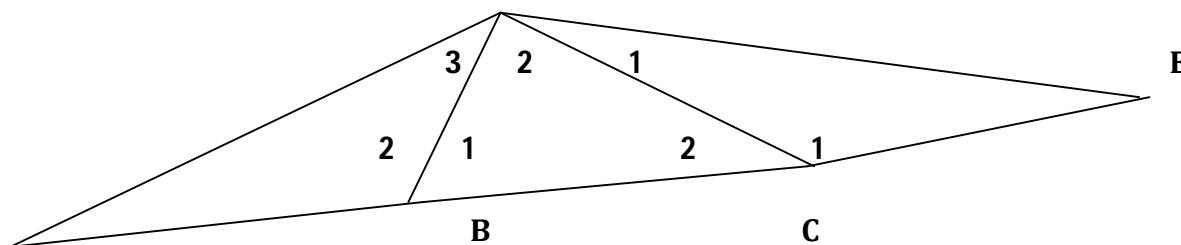
54 (4

36 (3

32 (2

24 (1

گزینه ی 3 صحیح است. A.



$$A_1 = E \quad C_2 = A_1 + E = 2A_1 \quad , \quad A_2 + B_1 + C_2 = 180 \rightarrow B_1 + C_2 = 72 \rightarrow 2(A_1 + A_3) = 72$$

$$A_1 + A_3 = 36 \quad , \quad A_1 = A_3 = 18 \quad , \quad C_2 = 2A_1 = 36$$

28- طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین به ضلع قائم 2 واحد است. با حذف گوشه های این مربع بزرگترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی کدام است؟

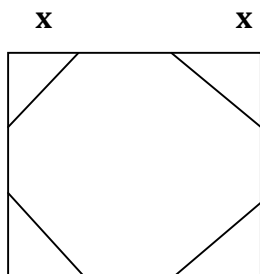
16 + 16√2 (4

24 + 8√2 (3

24√2 (2

32 (1

گزینه ی 4 صحیح است.



$$x = 2 \quad a = 2 + 2 + \sqrt{2} \quad , \quad s_{4\Delta} = 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 8 \quad , \quad s_{\text{مربع}} = 24 + 16\sqrt{2}$$

$$s_{\text{ضلعی هشت}} = 24 + 16\sqrt{2} - 8 = 16 + 16\sqrt{2}$$

29 - زاویه های مثلثی متناسب با اعداد 6 و 5 و 1 می باشد . کوچکترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگترین ضلع آن است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

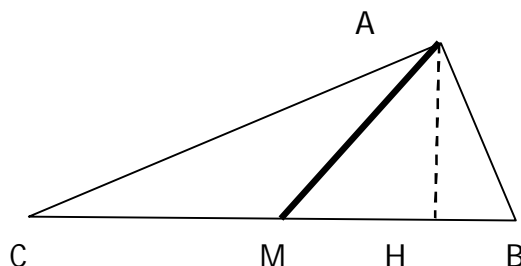
$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

گزینه ی 1 صحیح است.

اگر زاویه ی متناسب با عدد 1 را X فرض کنیم آنگاه :

$$x + 5x + 6x = 12x = 180 \rightarrow x = 15$$

پس زوایای مثلث برابر 15 و 75 و 90 می باشد.



در شکل مقابل میانه ی وتلارد بر وتر نصف وتر است. پس مثلث AMC متساوی الساقین بوده و از سویی M زاویه ی خارجی مثلث AMC بوده و مقدار آن 30 درجه است. (زاویه ی AMH)

در مثلث AHM نیز ضلع مقابل به زاویه ی 30 درجه نصف وتر بوده و خواهیم داشت :

$$\frac{AH}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}$$

30 - مکعبی به طول یال 2 واحد در داخل کوچکترین کره ی ممکن جای گرفته است. مساحت این کره کدام است؟

$$18\pi \quad (4)$$

$$12\pi \quad (3)$$

$$9\pi \quad (2)$$

$$8\pi \quad (1)$$

گزینه ی 3 صحیح است.

می دانیم در صورتی که بزرگترین مکعب ممکن در داخل کوچکترین کره قرار گیرد ، آنگاه طول قطر کره با طول قطر مکعب برابر خواهد بود.

و نیز طول قطر مکعبی به طول یال a برابر با $\sqrt{3}a$ می باشد.

با توجه به اینکه در صورت پرسش قطر کره 6 واحد فرض شده است ، می توان نوشت :

$$\sqrt{3}a = 2R \rightarrow R = \sqrt{3}$$

$$S = 4\pi(3) = 12\pi$$

