آشنایی با نسبیت خاص

احمد شریعتی

۵ شهریور ۱۳۹۳

چکیده

اینها یادداشتها یی است که برا ی درس نسبیت خاص، به دوره ی المپیاد فیزیک (تابستان ۱۳۹۳) تهیه کرده ام. این یادداشتها فقط برا ی این نوشته شده که به دانش‌آموزان در یادآوری مطالب درسی کمک کنند. این یادداشتها قطعاً اشتباه‌ها ی زیاد ی دارند. این متن، و بقیه ی عکسها و نمودارها یی را که برا ی این درس تهیه خواهم کرد، می‌توانید در نشانی زیر بیابید. بهتر است این متن را چاپ نکنید، چون قاعدتاً هر هفته تغییر خواهد کرد.

https://www.dropbox.com/sh/836ukcsvjd0h2t6/AADDeUG6v0ZEIdDCpQdcwl9Oa

۱ فیزیکِ ارسطویی و هیئتِ بطلمیوسی

پیش از گالیله فیزیک ارسطویی رایج بود. در فیزیک ارسطویی جهان به دو بخش تقسیم می‌شد: آسمان، یعنی ماه، خورشید، سیاره‌ها، و ستاره‌ها، که تصور بر آن بود که به دور زمین می‌گردند، و عالم پایین‌تر از ماه، یا به اصطلاح فلکِ تحتِ قمر، که یعنی زمین و جو آن. در عالمِ پایین‌تر از ماه همه چیز از چهار عنصر ساخته شده: خاک (یا زمین)، آب، باد (یا هوا)، و آتش. اجسام آسمانی از عنصر پنجم ی به نام اثیر یا عنصرِپنجم ساخته شده اند.

جای‌گاهِ طبیعی یِ خاک مرکزِ زمین است. جای‌گاهِ طبیعی یِ آب به دورِ آن است، جای‌گاهِ طبیعی یِ هوا بعد از آن، و جای‌گاهِ طبیعی یِ آتش کره ای است به دور این‌ها، و قبل از آسمان. اگر مقدار ی خاک و آب را در ظرف ی بریزیم، خاک ته‌نشین می‌شود و آب رو یِ آن می‌ایستد. توضیحِ ارسطویی: جای‌گاهِ طبیعی یِ خاک زیرِ جای‌گاهِ طبیعی یِ آب است و اجسام تمایل دارند به جای‌گاهِ طبیعی یِ خود برگردند. این بیت از شعر مولوی به خوبی بیان‌کننده ی این اصل ارسطویی است: هر کس ی کو دور ماند از اصلِ خویش؛ باز جوید روزگارِ وصلِ خویش.

در فیزیکِ ارسطویی، حرکت بر دو نوع است: حرکتِ طبیعی، و حرکتِ قسری (یعنی حرکت بر اثر نیرو). در عالمِ تحتِ قمر، حرکتِ طبیعی یِ خاک رفتن به سمتِ مرکزِ زمین است. حرکتِ طبیعی یِ آب هم رفتن به سمتِ پایین است. حرکتِ طبیعی یِ هوا و آتش به سمتِ بالا است. حرکتِ طبیعی یِ اجسامِ آسمانی حرکت رو یِ دایره با سرعتِ ثابت است.

اکنون حرکتِ یک پرتابه را در نظر بگیرید، مثلاً تیر ی که از کمان رها می‌شود. این حرکت طبیعی نیست، پس قسری است. در فیزیک ارسطویی حرکتِ قسری بی محرک ممکن نیست. اگر تیر ابتدا به سمتِ بالا می‌رود حتما محرکی دارد. در بدو امر محرکِ تیر زهِ کمان است، اما پس از جدا شدنِ تیر از زه چه؟ ارسطوییان می‌گفتند بعد از جدا شدنِ تیر از زهِ کمان، هوا است که به تیر نیرو وارد می‌کند که به بالا برود.

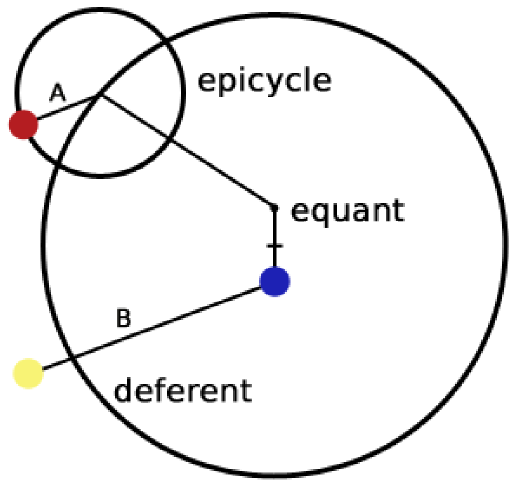
ارسطوییان تصور می‌کردند که نیرو و سرعت با هم متناسب اند، یعنی معادله ای به شکل $\boldsymbol{F} = k\,\boldsymbol{v}$. این معادله را می‌توانیم به کمک دینامیک نیوتنی بفهمیم. سیال ی مثلِ آب یا روغن در نظر بگیرید. اگر جسم ی در روغن حرکت کند، روغن یک نیرو یِ اصطکاک متناسب با سرعت به جسم وارد می‌کند، یعنی داریم $\boldsymbol{f} = -k\,\boldsymbol{v}$. اکنون فرض کنید به این جسم نیرو یی، مثلاً با یک نخ، وارد کنیم. بنا بر قانونِ دومِ نیوتن خواهیم داشت

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{f} = m\,\boldsymbol{a} \tag{1}$$

اگر جسم از حالتِ سکون شروع به حرکت کند، پس از مدت ی سرعت ش به سرعتِ حد می‌رسد. سرعتِ حد با شرطِ $\boldsymbol{a} = 0$ به دست می‌آید. در این حالت، واضح است که داریم

$$\boldsymbol{F} = k\,\boldsymbol{v}. \tag{2}$$

در مدلِ ارسطویی، ماه جسم ی است از جنس اثیر که به کره ای بلورین (سپهرِ ماه) چسبیده. مرکزِ این کره (مرکزِ سپهرِ ماه) تقریباً مرکزِ زمین است و این کره به دورِ یک محور با سرعتِ ثابت می‌چرخد. تیر (عطارد) هم، که از جنسِ اثیر است، به کره ای بلورین (سپهرِ تیر) چسبیده که شعاعِ آن بزرگتر از شعاعِ سپهرِ ماه است. بعد ناهید (زهره) است به همین ترتیب؛ بعد خورشید است، بعد مریخ، بعد مشتری، بعد کیوان، و بعد کره ای است که ستاره‌ها (ثوابت) به آن چسبیده اند. سپهرِ ستاره‌ها هر بیست و چهار ساعت یک بار به دور زمین می‌چرخد. این تصور، تصور ابتدایی در مدلِ ارسطویی بود. دقت کنید که اگر مرکزِ همه یِ این سپهرها مرکزِ زمین باشد، مدارِ همه یِ اجسامِ آسمانی به دورِ زمین دایره است با سرعتِ ثابت. منجمینِ قدیم می‌دانستند که این مدل ساده نمی‌تواند حرکتِ سیاره‌ها و ماه را توضیح بدهد. منجم ی به نامِ بطلمیوس، اهلِ اسکندریه، مدل را کاملتر کرد. او کره‌ها یِ بلوری را زائد دانست. فقط به مدارِ سیاره‌ها توجه کرد، و مدارها را به این نحو اصلاح کرد: سیاره رو یِ دایره ای موسوم به فلکِ تدویر حرکت می‌کند، مرکزِ این دایره نقطه ای است که خود ش رو ی دایره ای موسوم به فلکِ حامل



شکل ۱: نقطه یِ آبی زمین است. دایره ی بزرگ فلک حامل (deferent) است. مرکزِ فلکِ حامل دقیقا بر زمین منطبق نیست. (نقطه ای است که در شکل با یک خط افقی مشخص شده.) این نقطه وسطِ پاره‌خطی است که زمین را به معدل‌المسیر equant وصل می‌کند. سیاره، نقطه ی A رویِ فلکِ تدویر epicycle حرکت می‌کند. خط ی که معدل‌المسیر را به مرکزِ فلکِ تدویر وصل می‌کند با سرعتِ زاویه‌ای یِ ثابت می‌چرخد. بردار ی که مرکزِ فلکِ تدویر (epicycle) را به سیاره وصل می‌کند چنان می‌چرخد که همواره موازی یِ بردار ی باشد که زمین را به خورشید وصل می‌کند.

حرکت می‌کند. مرکزِ فلکِ حامل مرکزِ زمین است. بگذراید این را به زبانِ ریاضیاتِ امروز بیان کنیم. مدارِ سیاره را صفحه یِ (x, y) بگیریم. زمین در مبداء مختصات است. فرض کنیم در لحظه یِ صفر سیاره رو یِ محورِ x باشد. حرکتِ سیاره با این معادله‌ها داده می‌شود:

$$x(t) = a\ \cos(\omega\, t) + b\ \cos(\Omega\, t) \tag{3}$$

$$y(t) = a\ \sin(\omega\, t) + b\ \sin(\Omega\, t) \tag{4}$$

در این جا a شعاعِ فلکِ حامل، و b شعاعِ فلکِ تدویر است. حرکت با چهار پارامترِ حقیقی مشخص می‌شود: دو تا طول، a و b، و دو تا سرعتِ زاویه‌ای، ω و Ω. نکته یِ جالب ی که باید به آن توجه بکنیم این است که چون فقط راستا یِ بردار ی که مرکزِ زمین را به سیاره وصل می‌کند مهم است، می‌توان a و b را در هر عدد دلخواه ی ضرب کرد، بی آن که این راستا تغییر کند. به این ترتیب فقط نسبت a/b مهم است. یعنی مسئله عملا فقط سه پارامتر حقیقی دارد، که هر سه هم بی‌بُعد اند.

منجمینِ قدیم توانسته بودند با تعیینِ این پارامترها برا یِ هر سیاره، مدارِ سیاره‌ها (و ماه) را به نحو نسبتاً خوب ی توصیف کنند. یک نوآوری یِ دیگر هم این بوده که مرکزِ فلکِ حامل را نقطه ای غیر از مرکزِ زمین در نظر بگیرند.

۲ انقلابِ کوپرنیکی

کوپرنیک در سالِ ۱۵۴۳ مرد، و در همین سال کتاب ی از او منتشر شد به نامِ «در باره یِ گردشِ اجسامِ آسمانی». در این کتاب، کوپرنیک مدلِ جدید ی برا ی هیئت پیشنهاد کرده بود. بر اساسِ این مدل، خورشید کره ای است در مرکزِ جهان. تیر، ناهید، زمین، مریخ، مشتری، و کیوان، سیاره‌ها یی هستند که به همین ترتیب بر مدارها یی به دورِ خورشید می‌گردند. ماه کره ای است که به دورِ زمین می‌گردد. و ستاره‌ها اجسام ی ثابت اند، یعنی نسبت به خورشید حرکت ندارند. این که استدلالِ کوپرنیک برا یِ این مدل چه بوده مسئله ای است که نمی‌خواهیم واردِ آن بشویم. در موردِ مدلِ کوپرنیکی فقط به ذکرِ چند نکته اکتفا می‌کنیم.

- در مدلِ کوپرنیکی هم مدارِ اجسام ترکیب ی از فلکِ حامل و فلکِ تدویر است. هنوز هم حرکتِ اجسامِ آسمانی ترکیب ی از حرکت‌ها یِ دایره‌ای است.
- زمین مثلِ بقیه یِ سیاره‌ها است. به بیانِ دیگر، سیاره‌ها یِ دیگر هم لابُد مثلِ زمین اند!

- کوپرنیک فاصله یِ زمین تا خورشید را به عنوانِ واحدِ نجومی معرفی می‌کند. این واقعیتِ نجومی، که تیر و ناهید همواره نزدیکِ خورشید دیده می‌شوند، و هر کدام یک بیشترین فاصله یِ زاویه‌ای از خورشید دارند که در زمانها یِ خاص ی روی می‌دهد، در مدلِ کوپرنیکی علت ی بسیار ساده دارد، و کوپرنیک به سنجشِ این زاویه فاصله یِ تیر و ناهید از خورشید را به دست آورد.

$$R = \sin\alpha\,\mathrm{AU}. \tag{5}$$

- حرکتِ بازگشتی یِ مریخ و مشتری و کیوان در آسمان، در مدلِ کوپرنیکی تعبیرِ ساده ای دارد.

$$x_1 = \cos t \qquad y_1 = \sin t \tag{6}$$

$$x_2 = 1.5\,\cos(0.5\,t) \qquad y_2 = 1.5\,\sin(0.5\,t) \tag{7}$$

$$\tan\theta = \frac{1.5\,\sin(0.5\,t) - \sin t}{1.5\,\cos(0.5\,t) - \cos t} \tag{8}$$

۳ گالیله

گالیله مدلِ کوپرنیکی را پذیرفت و برا یِ آن تبلیغ کرد. طرفدارانِ فیزیکِ ارسطویی، که اعتبارِ سیاسی و مذهبی هم داشتند، با گالیله در افتادند. استدلالِ طرفدارانِ هیئتِ بطلمیوسی این بود که حرکتِ زمین به دورِ خودش و به دورِ خورشید با فیزیکِ ارسطویی نمی‌خواند. اساسِ استدلال این بود که چرا متوجهِ این حرکت نمی‌شویم. گالیله از چند جهت به استدلالِ ارسطوییان پاسخ داد.

گالیله با آزمایش نشان داد که حرکت بر سطحِ افقی یِ صیقلی نیاز به محرک ندارد. نحوه یِ استدلال این بود: گلوله ای را از یک سطحِ شیبدار رها می‌کنیم. در انتهایِ سطحِ شیبدار یک سطحِ افقی یِ صیقلی هست. گلوله مسافتِ نسبتاً زیاد ی رو یِ سطحِ افقی می‌رود تا متوقف شود. اما اگر سطح را بیشتر صیقلی کنیم، گلوله مسافتِ بیشتر ی می‌رود. گالیله نتیجه گرفت که اصطکاک مانعِ حرکت است، و این مانع را می‌توان کم کرد. پس حرکت نیست که نیازمندِ محرک (یعنی نیرو) است، بل که اصطکاک (نوع ی نیرو) در این جا باعثِ کند شدنِ حرکت می‌شود.

گالیله متوجّهِ این نکته یِ بسیار مهم شد: اگر کشتی ای رو یِ دریا یِ آرام، با سرعتِ ثابت در حالِ حرکت باشد، در داخلِ کشتی، اتفاق‌ها یِ فیزیکی درست همان طور ی روی می‌دهند که در یک کشتی یِ ساکن روی می‌دهند. برا یِ ما اتوبوس یا قطارِ در حالِ حرکت مثالِ ملموس‌تر ی است. اگر در یک اتوبوسِ در حالِ حرکت، که با سرعتِ ثابت رو یِ جاده یِ افقی حرکت می‌کند، در حال ی که ایستاده اید سنگ ی را از دستِ تان ول کنید، سنگ در امتدادِ یک خطِ قائم می‌افتد. یعنی، نسبت به اتوبوس، درست همان طور ی می‌افتد که اگر اتوبوس ساکن بود. این چیز ی است که فیزیکِ ارسطویی به هیچ وجه نمی‌تواند آن را توجیه کند.

در فیزیکِ ارسطویی (اگر آن را با چیزها یی که امروزه می‌دانیم تکمیل کنیم) یک زمانِ مطلق هست و یک فضا یِ مطلق، و حرکت نسبت به این فضا یِ مطلق معنی‌دارد. حرکت نسبت به فضا یِ مطلق، از دیدِ فیزیکِ ارسطویی، نیازمندِ محرک (یعنی نیرو) است. در باره یِ زمانِ مطلق بعداً صحبت خواهیم کرد. در این جا به مفهومِ فضا یِ مطلق می‌پردازیم.

فضا یِ مطلقِ ارسطویی. هندسه یِ این فضا همان هندسه یِ اقلیدسی است. یعنی روابطِ طولی ای که با خط‌کش‌ها یِ صُلب برا یِ اجسامِ ساکنِ صُلب می‌توان تحقیق کرد. در این فضا یک رابطه یِ هم‌نهشتی هست که همان هم‌نهشتی یِ هندسه یِ اقلیدسی است. برا یِ آن که این فضا را بهتر درک کنیم خوب است یک مثال بزنیم.

اتوبوس ی رو یِ جاده یِ افقی در حالِ حرکت است. شخص ی در اتوبوس ایستاده (نسبت به آن ساکن است) و سنگ ی را ول می‌کند. مسیرِ سنگ در اتوبوس یک خطِ راستِ قائم است. مسیرِ سنگ از دیدِ کس ی که کنارِ جاده ایستاده چیست؟ همه یِ شما می‌دانید که این مسیر یک سهمی است! در واقع سنگ، نسبت به ناظرِ کنارِ جاده یک حرکتِ پرتابی دارد با سرعتِ اولیه یِ افقی. کس ی که به فضا یِ مطلقِ ارسطویی معتقد است می‌پرسد: مگر می‌شود که یک مجموعه از نقاط (مسیرِ سنگ در فضا) هم خطِ راست باشد هم سهمی؟ مگر خطِ راست و سهمی هم‌نهشت اند؟ معمولاً چنین کسان ی این طور می‌پرسند: سنگ در هر لحظه در یک جا یی است. اگر این دنباله از نقاط را به هم وصل کنیم، بالاخره خطِ راست می‌شود یا سهمی؟ پاسخ ی که امروز می‌دهیم این است: مسیرِ این جسم از دیدِ ناظرِ ساکن در اتوبوس یک خطِ راست است، از دیدِ ناظرِ ساکن در جاده یک سهمی است. نکته این است که پس از گالیله دیگر به فضا ی مطلق ارسطویی اعتقاد نداریم. حالا دیگر یک فضازمانِ گالیله‌ای (یا نیوتنی) داریم.

۴ فضازمانِ گالیله‌ای

در هندسه یِ اقلیدسی نقطه یک مفهوم تعریف نشده است. متناظرِ نقطه در بحثِ ما مفهوم ی هست به نامِ رویداد. رویداد یعنی اتفاق ی که در یک جا ی فضا در یک لحظه یِ خاص رو ی می‌دهد. مثلا دو تا سنگ اگر به هم بخورند یک رویداد است: در جا یی خاص، و در زمان ی خاص این دو سنگ به هم خورده اند. البته، باید رفت به حدِ نقطه‌ای یِ این مثال. مثلا اگر دو تا ماشین به هم بخورند آیا یک رویداد داریم؟ واضح است که هر ماشین تشکیل شده از تعدادِ بسیار زیاد ی جسمِ کوچکتر. پس تصادفِ دو ماشین در واقع مجموعه‌ای است از تعدادِ زیاد ی رویداد. البته اگر در مقیاسِ طولِ یک جاده به طولِ چند کیلومتر مسئله را بررسی کنیم، برخورد دو خودرو با هم واقعاً یک رویداد است.

این که یک رویداد چه موقع ی رخ داده، با زمانِ روی دادنِ آن مشخص می‌شود. ببینیم زمان چیست.

در دنیا تغییراتِ زیاد ی رخ می‌دهد. از حرکتِ اجسام گرفته، تا تغییرِ رنگِ گیاهان، رشدِ جانوران، و تغییراتِ دیگر. مسئله یِ فیزیک این است که نظمِ این تغییرات را بفهمیم، طور ی که بتوانیم پیش‌بینی کنیم. برا یِ این کار ما ساعت می‌سازیم. هر ساعت ی یعنی یک وسیله ای که یک نشان‌گر ی دارد (عقربه) که حرکت می‌کند. حالت یا موضعِ عقربه برا یِ ما مشخص‌کننده یِ زمان است. مثلاً وقت ی می‌گوییم ساعت هفت است، یعنی عقربه‌ها یِ ساعت در وضعیتِ خاص ی قرار دارند. دقّت کنید که وضعیتِ کره یِ زمین هم در واقع مثلِ عقربه یِ یک ساعتِ بزرگ است.

تجربه می‌گوید ساعت‌ها یِ مختلف با هم اختلاف خواهند داشت. کدام ساعت را مرجعِ زمان‌سنجی بگیریم؟ جواب: آن ساعت ی که باعث شود قوانینِ فیزیک ساده‌تر شوند. مثال: این دو ساعت را در نظر بگیرید. ساعتِ اول، نبضِ یک انسانِ خاص. هر ضربانِ نبض را یک ثانیه بگیریم، و شروع کنیم به شمردن. ساعتِ دوم، کره یِ زمین. هر دور چرخشِ زمین به دورِ خودش را یک واحدِ زمان بگیریم. این ساعتِ دوم باعث می‌شود قوانینِ فیزیک ساده‌تر شوند. چرا؟ برا یِ دیدنِ علت ش بهتر است این مثال را در نظر بگیرید. چه قدر طول می‌کشد که یک سنگ که از سکون رها می‌شود، از بالا یِ یک ساختمانِ خاص به سطحِ زمین برسد؟ اگر با ساعتِ اول، یعنی نبضِ آن شخصِ خاص بسنجیم، به این بسته‌گی خواهد داشت که آن شخص در موقعِ آزمایش در چه حالی باشد. اگر قبل از آزمایش ورزش کرده باشد، این عدد بزرگ‌تر خواهد بود. اگر در هنگامِ آزمایش خواب باشد این عدد کوچک‌تر خواهد بود. پس برا یِ آن که مسئله یِ افتادنِ یک سنگ را حل کنیم، باید وضعیّتِ فیزیولوژیکِ آن شخصِ خاص را هم واردِ معادلاتِ مان بکنیم. اما اگر زمین را به عنوانِ ساعت در نظر بگیریم چنین نخواهد بود.

تا اواخرِ قرنِ نوزدهم، چرخشِ وضعی یِ زمین مبنا ی تعریفِ ثانیه بود، یعنی چرخشِ زمین ساعتِ استاندارد را تعریف می‌کرد. اواخرِ قرنِ نوزدهم حرکتِ زمین به دورِ خورشید شد ساعتِ استاندارد، زیرا اختلال‌ها یی که می‌توانند حرکتِ وضعی یِ

زمین را عوض کنند اثرِ بیشتر ی دارند تا اختلال‌ها یی که می‌توانند حرکتِ زمین به دورِ خورشید را عوض کنند. از اواسطِ قرنِ بیستم، ساعتها یِ اتمی مبنا یِ تعریفِ ثانیه شده اند. ساعتِ اتمی وسیله ای است که از یک نوعِ گذارِ خاصِ یک اتمِ خاص برا یِ درست کردنِ یک بسامدِ معیار استفاده می‌شود. این بسامد است که زمان را تعریف می‌کند.

۵ تغییر مختصات

خوب است ابتدا به یاد بیاوریم که تعریف کردنِ مختصه‌ها یِ دکارتی در صفحه چگونه است. دو خط متقاطع در صفحه می‌کشیم. این دو خط را محورها یِ x و y می‌نامیم. رو ی هر یک از خطها یک واحدِ طول و یک جهتِ مثبت انتخاب می‌کنیم. لازم نیست که واحدها مثلِ هم باشند. مبداء را، که معمولاً با O نشان می‌دهیم، محلِ تقاطعِ دو خط می‌گیریم. اکنون اگر نقطه ای مثلِ A در صفحه در نظر بگیریم، می‌توانیم از A دو خط، به موازاتِ محورها یِ x و y بکشیم، تا این دو محور را قطع کنند. به این ترتیب مختصه‌ها یِ نقطه یِ A به دست می‌آید.

معمولاً محورها ی x و y را عمود بر هم می‌گیریم، و معمولاً واحدِ طول رو یِ این دو محور را یکی می‌گیریم. اما به یاد داشته باشید که این انتخاب‌ها اجباری و همیشه‌گی نیستند.

فرض کنید محورها یِ x و y بر هم عمود باشند، و واحدِ طول رو یِ هر دو هم سانتی‌متر باشد. اکنون تغییرمختصه یِ زیر را در نظر بگیرید.

$$X = 2\,x - y \tag{9}$$

$$Y = x + y. \tag{10}$$

این تغییرِمختصه‌ها را می‌توان به عنوانِ یک دستگاهِ دو معادله با دو مجهول در نظر گرفت و حل کرد. حلِ آن این است:

$$x = \frac{1}{3}\,X + \frac{1}{3}\,Y \tag{11}$$

$$y = -\frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}\,y. \tag{12}$$

اگر Y را ثابت بگیریم و X را تغییر دهیم، یک خط خواهیم داشت. مثلاً اگر $Y = 0$ باشد، خطِ $y = -x$ به دست می‌آید. این خط در واقع محورِ X است. به همین ترتیب اگر X را ثابت بگیریم و Y را تغییر دهیم، یک خط به دست می‌آید. مثلاً خطِ $X = 0$ که یعنی خطِ $y = 2\,x$ همان محورِ Y است. نقطه یِ $(X = 1, Y = 0)$ که رو یِ محورِ X است واحدِ طول

رو یِ این محور را مشخص می‌کند. به همین ترتیب، نقطه یِ $(X = 0, Y = 1)$ که رو یِ محورِ Y است، واحدِ طول رو یِ محورِ Y را مشخص می‌کند. دقّت کنید که این دو واحد دیگر همان سانتی‌متر نیست.

۶ دوران و انعکاس

ابتدا دوران در صفحه ی (x, y) به دورِ محورِ z را در نظر بگیریم. بر اثرِ دوران به دورِ محورِ z به اندازه یِ زاویه یِ α نقطه یِ (x, y) به نقطه یِ (x', y') می‌رود، که داریم.

$$x' = x\,\cos\alpha - y\,\sin\alpha \tag{13}$$

$$y' = x\,\sin\alpha + y\,\cos\alpha \tag{14}$$

برا یِ اثباتِ این مطلب کافی است توجه کنیم که بر اثرِ دوران، فاصله یِ نقطه تا مبداء (یعنی محورِ z) عوض نمی‌شود. اگر این فاصله r باشد داریم

$$x = r\,\cos\theta, \qquad y = r\,\sin\theta \tag{15}$$

واضح است که بر اثرِ دوران داریم

$$x' = r\,\cos(\theta + \alpha) = r\,\cos\theta\,\cos\alpha - r\,\sin\theta\,\sin\alpha \tag{16}$$

$$y' = r\,\sin(\theta + \alpha) = r\,\cos\theta\,\sin\alpha + r\,\sin\theta\,\cos\alpha \tag{17}$$

دقت کنیم که در فضا یِ سه بعدی، بر اثرِ دوران به دورِ محورِ z به اندازه یِ α داریم

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{18}$$

که دقیقاً یعنی

$$\begin{cases} x' &= x\,\cos\alpha - y\,\sin\alpha \\ y' &= x\,\sin\alpha + y\,\cos\alpha \\ z' &= z \end{cases} \tag{19}$$

ماتریسِ زیر، ماتریسِ دوران به دورِ محورِ z به اندازه یِ α است.

$$R(z,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

به عنوانِ تمرین نشان دهید که ماتریس‌ها یِ دوران، به دورِ محورها یِ x و y چنین اند:

$$R(x,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$R(y,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{22}$$

اگر R یک ماتریسِ دوران باشد، چند ویژه‌گی یِ مهم دارد که در این جا فهرست می‌کنیم. متاسفانه در این فرصت کم امکانِ ارائه یِ اثباتِ اینها نیست.

$$R\,R^T = R\,R^T = \mathbb{I} \tag{23}$$

که یعنی، ترانهاده یِ ماتریسِ دوران، وارونِ آن است. یادآوری می‌کنیم که ترانهاده یِ یک ماتریس، یعنی ماتریس ی که با عوض کردنِ جا یِ سطرها و ستون‌ها به دست می‌آید. مثلاً

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(z,-\alpha) \tag{25}$$

دترمینانِ ماتریسِ دوران همواره 1 است. مثال:

$$\det R(z,\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \tag{26}$$

یادآوری:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c \tag{27}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \tag{28}$$

$$= a\,e\,i + b\,f\,g + c\,d\,h - c\,e\,g - b\,d\,i - a\,f\,h \tag{29}$$

خاصیتِ دیگرِ ماتریسِ دوران این است که مجموعِ عناصرِ قطرِ اصلی (که به آن رد یا trace می‌گویند) با فرمولِ زیر زاویه یِ دوران را می‌دهد.

$$\mathrm{tr}\,R = 1 + 2\,\cos\alpha \tag{30}$$

مثال، ماتریسِ زیر را در نظر بگیرید

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

این ماتریس دوران به دورِ محورِ $(1,1,1)$ به اندازه یِ $120°$ است. دقّت کنید که

$$\mathrm{tr}\,R = 0 = 1 + 2\,\cos 120° \tag{32}$$

محورِ دوران تنها خط ی است که بر اثرِ دوران عوض نمی‌شود. (البته منظور هر دوران ی به جز دورانِ صفر است. دورانِ صفر یعنی دوران ندادن، که بر اثرِ آن هیچ نقطه و خط ی تغییر نمی‌کند.) در واقع، برا یِ آن که محورِ دوران را بیابیم، باید بردارها یی را بیابیم که بر اثرِ اعمالِ ماتریس عوض نمی‌شوند.

۷ دورانِ محورها یِ مختصات

اکنون به فرمول‌ها یِ زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} x' &= x\,\cos\alpha + y\,\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\,\cos\alpha \\ z' &= z \end{cases} \tag{33}$$

می‌توانیم این فرمولها را به عنوانِ تعریفِ یک تغییرِ مختصه‌ها یِ دکارتی، از مختصه‌ها یِ (x, y, z) به مختصه‌ها یِ (x', y', z') در نظر بگیریم. در این صورت، به ساده‌گی می‌توان دید که محورها یِ (x', y', z') از دورانِ محورها یِ (x, y, z) به دورِ محورِ z به اندازه یِ α به دست می‌آیند. به فرقِ این فرمولها با فرمولها ی 19 دقّت کنید. در 19 محورها ثابت اند و (x', y', z') مختصه‌ها یِ نقطه یِ دوران‌یافته اند. اما در 33 محورها چرخیده اند، و (x', y', z') مختصه‌ها یِ همان نقطه یِ قبلی در مختصه‌ها یِ جدید است.

۸ انعکاس

تبدیلِ زیر را در نظر بگیرید.

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, -z) \tag{34}$$

این تبدیل چیز ی نیست جز انعکاس در آینه ای که در صفحه یِ (x, y) یعنی در صفحه یِ $z = 0$ است. دقّت کنید که نقاطِ رو یِ آینه، یعنی نقاط ی به شکلِ $(x, y, 0)$ تغییر نمی‌کنند، و نقاطِ رو یِ محورِ z یعنی نقاط ی به شکلِ $(0, 0, z)$ در آینه منعکس می‌شوند (به قرینه یِ خود تبدیل می‌شوند). واضح است که ماتریسِ تبدیلِ فوق این است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

این ماتریس متعامد است، که یعنی $R^T\,R = \mathbb{I}$ و به علاوه $\det R = -1$ است. هر ماتریس ی که این دو خاصیت را داشته باشد بیان کننده یِ انعکاس نسبت به یک صفحه است. مثلاً

$$I(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

به عنوانِ تمرین نشان بدهید که برا یِ این $I(\alpha)$ صفحه یِ آینده صفحه یِ زیر است:

$$\left\{(x, y, z) \mid \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right\} \tag{37}$$

خوب است ابتدا به دو مثالِ ساده توجّه کنیم.

$$I(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

که به وضوح انعکاس در صفحه یِ $x = 0$ است.

$$I(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

به ساده‌گی دیده می‌شود که صفحه یِ انعکاس صفحه یِ زیر است:

$$\{(x, y, z) \mid x = -y\} \tag{40}$$

$R\,R^T = \mathbb{I}$	$\det R1$	دوران	(41)
$R\,R^T = \mathbb{I}$	$\det R - 1$	انعکاس	(42)

ترکیبِ دو (یا تعدادِ زوج) انعکاس یک دوران است. مثلا:

$$I_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

I_1 انعکاس در صفحه یِ $x = 0$ و I_2 انعکاس در صفحه یِ $y = 0$ است. ترکیبِ این دو (که به ترتیب هم بسته‌گی ندارد) می‌شود

$$I_1\, I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(z, \pi) \tag{44}$$

که دوران به دورِ محورِ z به اندازه یِ $180°$ است.

کلی‌ترین تبدیلِ متعامد ترکیبِ یک دوران و یک انعکاس نسبت به صفحه یِ عمود بر محورِ دوران است. (این نکته را سرِ کلاس درست نگفته بودم، یک ی از دانش‌آموزان یادآوری کرد. از او متشکرم.) می‌توان ثابت کرد که هر تبدیلِ متعامد ی برابر است با ترکیبِ تعداد ی انعکاس نسبت به صفحه. برا یِ دیدینِ این مطلب ابتدا به محاسبه یِ زیر دقت کنید:

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\beta & \cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta & -\sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \\ \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta & \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \tag{46}$$

که نشان می‌دهد دوران حولِ محورِ z را می‌توان به صورتِ ترکیبِ دو انعکاس نوشت، و البته این نوشتن یکتا نیست. اینک اگر ماتریس ی به شکلِ زیر را در نظر بگیریم، واضح است که می‌توان آن را به صورتِ ترکیب سه تا انعکاس نوشت. (جزئیاتِ اثبات با شما.)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

۹ موج

مقدمه یِ دیگر ی که پیش از ورود به بحثِ نسبیّت لازم داریم، موضوعِ موج است. با چند مثال بررسی را شروع می‌کنیم. اول، امواجِ سطحِ آب. یک استخر را در نظر بگیرید. اگر هوا یِ بالا یِ استخر ساکن باشد (باد نوزد) و چیز ی استخر را مختل نکند، سطحِ آبِ استخر کاملاً افقی می‌ایستد. حال اگر مثلاً با انداختنِ یک سنگ سطحِ آب را مختل کنیم، موج‌ها یی در آن به وجود می‌آیند. موجِ سطحِ آب در واقع یک انحرافِ سطحِ آب از افقی بودن است که حرکت می‌کند. این حرکت سرعت ی دارد که بسته‌گی به عواملِ مختلف ی دارد، مثلاً عمقِ استخر. یا مثلاً یک ریسمانِ کشیده بینِ دو نقطه را در نظر بگیرید. اگر ریسمان را با زدنِ ضربه ای مختل کنیم، بخش ی از ریسمان تغییرِ شکل می‌دهد، و این تغییرِ شکل به چپ و راست حرکت می‌کند. این حرکت‌ها موج اند. سومین مثال صوت است. وقت ی با وسیله ای صدا در می‌آوریم، در واقع فشارِ هوا را در جا یی کم ی از مقدارِ تعادلی اش منحرف می‌کنیم. این تغییرِ فشار در همه جهت منتشر می‌شود. صوت در واقع انتشارِ تغییرِ فشار در هوا است.

موج‌ها یی که در محیط ی مثلِ استخر، یا هوا منتشر می‌شوند انواعِ بسیار زیاد ی دارند، اما دو نوع موج هست که مطالعه یِ آنها در این مرحله مهم‌تر است: امواجِ تخت، و امواجِ کروی.

۱.۹ موجِ تخت

موجِ تکفامِ تخت یعنی تابع ی به شکلِ

$$f(x,y,z,t)=A\,\cos\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega\,t\right) \tag{48}$$

که در این جا $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ بردارِ مکان است، t زمان است، ω ثابت ی است که بسامدِ زاویه ای نام دارد، و $\boldsymbol{k}$ بردار ی است که بردارِ موج نام دارد. A ثابت ی است که دامنه ی موج نام دارد.

مثال. اگر داشته باشیم $\boldsymbol{k}=k\,\hat{z}$ که $\hat{z}$ بردارِ یکه در جهتِ z باشد، آن وقت داریم

$$f(x,y,z,t)=A\,\cos(k\,z-\omega\,t) \tag{49}$$

واضح است که در هر نقطه از فضا (که برا یش z ثابت است) کمیّتِ f با بسامدِ $\nu=\omega/(2\,\pi)$ نوسان می‌کند. این هم واضح است که در هر لحظه (یعنی t ی ثابت) وضعیّت نقطه ی (x,y,z) دقیقاً مثلِ وضعیّتِ $(x,y,z+\lambda)$ است، که $\lambda=k/(2\,\pi)$ طولِ موج نام دارد.

به کمیّتِ

$$\phi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega\, t \tag{50}$$

فازِ موج می‌گوییم. مجموعه یِ ϕ ثابت صفحه ای است، عمود بر $\boldsymbol{k}$ که با سرعتِ

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{51}$$

حرکت می‌کند. مثلاً در موردِ حالتِ خاص ی که بالاتر گفتیم، واضح است که

$$\phi = k\, z - \omega\, t = k\left(z - \frac{\omega}{k} t\right) = k\,(z - c\, t) \tag{52}$$

واضح است که برا یِ آن که ϕ ثابت باشد، باید داشته باشیم $z = c\, t$ که یعنی صفحه ای، موازی یِ صفحه یِ (x, y) که با سرعتِ c به راست حرکت می‌کند.

دامنه یِ موجِ تخت ثابت است.

وقت ی سنگ ی را در آبِ استخر می‌اندازید، موج‌ها یی دایره‌ای به وجود می‌آیند. جبهه یِ این موج‌ها صفحه‌ها یِ تخت نیستند، بل که دایره اند. ضمناً، دامنه یِ آنها هم با بزرگ شدنِ شعاعِ دایره‌ها کوچک می‌شود؛ چیز ی شبیهِ

$$F(\rho, \varphi, z, t) = \frac{A}{\sqrt{\rho}} \cos\left(k\, \rho - \omega\, t\right) \tag{53}$$

دقّت کنید که سطوحِ فاز ثابت دایره‌ها یی بزرگ‌شونده اند:

$$k\, \rho - \omega\, t = \phi_0 \qquad \rho = c\, t + \frac{\phi_0}{k} \tag{54}$$

اگر در یک فضا یِ باز با زدنِ دست صدا تولید کنیم، این صدا به صورتِ یک موجِ کروی منتشر می‌شود؛ چیز ی شبیهِ

$$f(r, \theta\, \varphi, t) = \frac{A}{r} \cos(k\, r - \omega\, t) \tag{55}$$

در این جا سطوحِ فاز ثابت کره‌ها یی بزرگ‌شونده اند. دامنه (یعنی آن چه در کسینوی ضرب شده) متناسب به عکسِ فاصله است.

۲.۹ مخروطِ موج

معادله یِ

$$x^2 + y^2 - z^2\, \tan^2 \alpha = 0 \tag{56}$$

که در آن α یک زاویه یِ ثابت است، یک مخروطِ دوّار است. دقّت کنید که اگر $\alpha = 0$ باشد، این شکل چیز ی نیست جز محورِ z و اگر $\alpha = 90^\circ$ باشد، این معادله (پس از رفعِ ابهام) می‌شود صفحه یِ (x, y).

سنگ ی را در استخر ی می‌اندازیم. امواج ی دایره‌ای تولید می‌شوند. در $t = 0$ سنگ در مبداء مختصه‌ها افتاده. جبهه یِ موجِ درست شده دایره ای است که با سرعتِ c بزرگ می‌شود. یعنی معادله یِ

$$x^2 + y^2 = c^2\, t^2 \tag{57}$$

این معادله در فضازمان، که یعنی در فضا یِ (t, x, y) یک مخروط است. به این مخروط، مخروطِ موج می‌گوییم.

بر اثرِ یک انفجار در هوا، موج ی کروی با سرعتِ c منتشر می‌شود. اگر انفجار در $t = 0$ در مبداء مختصه‌ها روی داده باشد، جبهه یِ این موج با معادله یِ

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\, t^2 = 0 \tag{58}$$

داده می‌شود. این معادله یک مخروطِ سه‌بعدی در فضازمانِ چهاربعدی است!

مسئله. هواپیما یی با سرعتِ v در امتدادِ یک خطِ راست حرکت می‌کند. (جاذبه یِ زمین در این مسئله هیچ نقش ی ندارد.) موتورِ هواپیما باعثِ تولیدِ صوت می‌شود. صوتِ تولید شده، در هوا (که ساکن فرض می‌شود) با سرعتِ c حرکت می‌کند. اگر هواپیما در لحظه یِ $t_0 = 0$ در مبداء بوده باشد، و در امتدادِ محورِ x حرکت کند، در لحظه یِ $t > t_0$ جبهه یِ موجِ صوتِ تولید شده توسطِ موتورِ هواپیما به چه شکل ی است؟ برا یِ حالت‌ها یِ $c > v$ و $v > c$ بحث کنید. در حالتِ $v = c$ چه اتفاق ی می‌افتد؟

۱۰ خیز لرنتسی

در زیر c سرعتِ نور است.

$$c := 299,792,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}. \tag{59}$$

اگر v یک سرعتِ ثابت باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\beta := \frac{v}{c} \qquad\qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{60}$$

تبدیلِ زیر را در نظر بگیریم.

$$t' =\gamma \left(t - \frac{v}{c^2}\, x\right), \tag{61}$$

$$x' = \gamma\,(x - v\,t)\,, \tag{62}$$

$$y' = y, \tag{63}$$

$$z' = z. \tag{64}$$

این تبدیل را خیز لرنتسی (یا خیزِ لرنتس) می‌نامیم (به افتخار هندریک آنتون لُرنتس، فیزیک‌پیشه ی هلندی، اواخر قرن نوزدهم، اوایل قرن بیستم میلادی). این تبدیل ویژه‌گی‌ها یی دارد که در زیر بررسی می‌کنیم.

- این تبدیل فقط برا ی $|v| < c$ معنی دارد.
- برا ی $c \to \infty$ این تبدیل می‌شود خیز گالیله‌ای.
- وارونِ این تبدیل چنین است:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2}\, x'\right), \tag{65}$$

$$x = \gamma\,(x' + v\,t')\,, \tag{66}$$

$$y = y', \tag{67}$$

$$z = z'. \tag{68}$$

یعنی، کافی است متغیرها ی پریم‌دار و بی‌پریم را عوض کنیم، و v را به $-v$ تبدیل کنیم. این را می‌توان با حل کردن معادله‌ها نشان داد.

- حدِ $c \to \infty$ خیزِ لرنتس، خیزِ گالیله‌ای است.

اگر خیزِ لرنتس تبدیلِ بینِ دو چارچوبِ K و K باشد، قاعده یِ جمعِ سرعتها با مشتق‌گیری به دست می‌آید و چنین است.

$$\begin{aligned} u_x = \frac{dx}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\gamma(\Delta x' + v\,\Delta t')}{\gamma(\Delta t' + c^{-2}\,v\,\Delta x')} \\ &= \lim_{\Delta t'\to 0}\frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + c^{-2}\,v\,\Delta x'/\Delta t'} \\ &= \frac{u'_x + v}{1 + c^{-2}\,v\,u'_x} \end{aligned} \tag{69}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + c^{-2}\,v\,u'_x)} \tag{70}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z}{\gamma(1 + c^{-2}\,v\,u'_x)} \tag{71}$$

با استفاده از این فرمولها می‌توان اتحاد زیر را ثابت کرد.

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{u'_x\,v}{c^2}\right)^2 \tag{72}$$

چون $|v|$ اکیداً کوچکتر از c است، $(1 - v^2\,c^{-2})$ اکیداً مثبت است. با کم ی دقّت معلوم می‌شود که داریم

$$u^2 < c^2 \quad \Leftrightarrow \quad u'^2 < c^2 \tag{73}$$

$$u^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad u'^2 = c^2 \tag{74}$$

$$u^2 > c^2 \quad \Leftrightarrow \quad u'^2 > c^2 \tag{75}$$

متاسفانه فرصت نکردم بقیه ی مطالب ی را که در کلاس درس داده ام در این جزوه وارد کنم. بقیه یِ مطالب را می‌توانید از جزوه ی دیگر ی که قبلاً برا ی تدریس در دانشگاه تهیه کرده ام بخوانید.

درس‌نامه یِ

نسبیّت

احمد ِ شریعتی

گروه ِ فیزیک، دانش‌گاه ِ الزّهرا

shariati@mailaps.org

ویرایش ِ 1.0

2006/04/07

فصل I

نسبیّت

A فضا، زمان، و فضازمان

1 فیزیک یعنی توصیف ِ ریاضی‌وار ِ پدیده‌ها یی که در دنیا روی می‌دهد. این توصیف باید طور ی باشد که بتوان با آن نتیجه ی ِ آزمایش‌ها را پیش‌بینی کرد. برا ی ِ این کار فیزیک‌پیشه‌ها مشاهده‌پذیرها یی تعریف می‌کنند، و تمام ِ همّ ِشان این است که رابطه‌ها یی بین ِ این مشاهده‌پذیرها کشف کنند. تعریف ِ هر مشاهده‌پذیر ی به این نحو است که دست‌گاه ِ سنجش ِ آن کمیّت را مشخص کنیم. مثلاً دما آن چیز ی است که با دماسنج سنجیده می‌شود.

2 هر چه که در دنیا ی ِ ما روی می‌دهد در جا یی و در زمان ی روی می‌دهد. منظور ما از یک روی‌داد چیز ی است که در یک جا ی ِ خاص و در یک زمان ِ خاص روی می‌دهد، مثلاً یک روی‌داد می‌تواند ترکیب شدن ِ دو اتم هیدروژن با یک اتم اکسیژن باشد که به تولید ِ یک ملکول ِ آب می‌انجامد، و یک روی‌داد ِ دیگر می‌تواند قرار گرفتن ِ عقربه ی ِ ساعت‌شمار ِ ساعت ِ شما در برابر ِ عدد ِ هفت باشد.

3 معمولاً با مجموعه ای از روی‌دادها سروکار داریم. مثلاً در نظر بگیرید که در ظرف ی محتوی ی ِ مقدار ی اسید، یک معرف ِ اسید بریزیم. در این صورت رنگ ِ محلول عوض می‌شود، و این عوض شدن ِ رنگ پدیده ای است که روی داده. امّا این پدیده در واقع یک روی‌داد نیست، بل که مجموعه ای از روی‌دادها است که در ناحیه ای از فضا و بازه ای از زمان گسترده شده اند. ما اصطلاح ِ روی‌داد را برا ی ِ پدیده‌ها یی به کار می‌بریم که به اصطلاح نقطه‌ای اند، یعنی جا ی ِ آن‌ها در فضا یک نقطه است، و در یک لحظه ی ِ خاص روی داده اند (نه در یک بازه ی ِ زمانی).

واضح است که اگر بتوان از گسترده‌گی ی ِ فضایی و زمانی ی ِ مجموعه ای از روی‌دادها چشم پوشید، آن وقت می‌توان این مجموعه را یک تک‌روی‌داد پنداشت.

4 مجمومه ی ِ تمام ِ جاها ی ِ ممکن را فضا می‌نامیم. البتّه کم ی جلوتر که بحث پیش رفت، به این تعریف باز خواهیم گشت، و خواهیم دید که باید این تعریف را دقیق‌تر کنیم. فعلاً آن چه باید به آن توجهّ کنیم این است که فضا برا ی ِ ما آن چیز ی است که با هندسه ی ِ اقلیدسی ی ِ فضایی توصیف می‌شود.

5 در هندسه ی ِ اقلیدسی، نقطه، خط (ِ راست)، و صفحه مفهوم‌ها ی ِ تعریف‌نشده هستند. بین ِ این مفهوم‌ها ی ِ تعریف‌نشده، رابطه‌ها یی به نام ِ انگاره یا اصل ِ موضوع برقرار است که آن‌ها را بدون ِ اثبات می‌پذیریم، مثلاً این که "از هر دو نقطه یک و تنها یک خط می‌گذرد". سپس بنا یی ساخته می‌شود که عبارت است از مجموعه ای از تعریف‌ها و قضیّه‌ها؛ مثلاً مفهوم ی به نام ِ فاصله ی ِ بین ِ نقطه‌ها را تعریف می‌کنیم و سپس تعریف می‌کنیم که "دایره مجموعه نقطه‌ها یی از صفحه است که همه‌گی در یک فاصله از یک نقطه ی ِ خاص به نام ِ مرکز قرار دارند". بعد می‌توانیم به کمک ِ انگاره‌ها و قضیّه‌ها یی که پیش‌تر ثابت کرده ایم این قضیّه را ثابت کنیم که "از هر سه نقطه که بر یک خط قرار نداشته باشند یک و تنها یک دایره می‌گذرد".

6 یک ی از مفهوم‌ها ی ِ مهم در فیزیک، مفهوم ِ فاصله است. تعریف ِ فاصله هم مثل ِ تعریف ِ هر مشاهده‌پذیر ِ دیگر ی است: فاصله آن چیز ی است که آن را با خط‌کش می‌سنجیم. در زیر چند نکته ی ِ مهم از این تعریف را یادآوری می‌کنیم.

مجموعه ای از تجربه‌ها به ما می‌گوید که بعض ی از اجسام سفت‌تر از بقیه ی ِ اجسام اند، به این معنی که تغییر ِ شکل ِ آن‌ها کم‌تر از بقیّه ی ِ اجسام است. جسم ِ صُلب ایده‌آل‌سازی‌شده ی ِ این مفهوم است. یک تکّه چوب در اغلب ِ اوقات برا ی ِ ما یک جسم ِ صلب است.

به کمک ِ اجسام ِ صُلب ِ مختلف، خط‌کش می‌سازیم. با خط‌کش دو کار می‌کنیم. اوّلاً پاره‌خط ِ راست می‌کشیم، و ثانیاً خود ِ خط‌کش‌ها را در مقابل ِ هم می‌گذاریم و به این ترتیب هم‌طول بودن ِ آن‌ها را می‌آزماییم.

برا ی ِ سنجش ِ طول، یک ی از خط‌کش‌ها را باید واحد ِ طول بنامیم، و باید بپذیریم که طول ِ خط‌کش ِ خوب مستقل از این است که خط‌کش کجا است و کدام طرفی قرار گرفته؛ یعنی بپذیریم که طول ِ یک میله ی ِ صلب با منتقل کردن ِ آن در فضا و چرخاندن ِ آن عوض نمی‌شود. در عمل باید خط‌کش‌ها ی ِ مختلف را در فضا جابه‌جا کنیم و بچرخانیم، و هم‌طول بودن ِ آن‌ها را بیازماییم.

خط‌کش‌ها ی ِ مختلف را با هم مقایسه می‌کنیم و به تجربه می‌بینیم که هم‌طول بودن ِ آن‌ها بسته‌گی به وضعیّت ِ آزمایش‌گاه دارد. مثلاً اگر دو خط‌کش داشته باشیم، یک ی مسی و دیگر ی فولادی که در آزمایش‌گاه ی که دما یش 20° C است هم‌طول اند، وقت ی دما ی ِ آزمایش‌گاه 30° C

باشد دیگر هم‌طول نیستند. به این ترتیب، طول ی که برا یِ اشیاء تعریف می‌کنیم بسته‌گی به این دارد که از کدام خط‌کش برا یِ سنجش استفاد کنیم و دما یِ آزمایش‌گاه چه قدر باشد. برا یِ آن که بتوان بدون ِ ابهام طول ِ اشیاء ِ مختلف را تعریف کرد (یعنی در عمل تعیین کرد)، باید خط‌کش ی را که مبنا یِ سنجش ِ طول است، تثبیت کنیم. مثلاً تا مدّت‌ها یک خط‌کش ِ پلاتینی در مرکز ِ سازمان ِ وزن‌ها و مقدارها، واحد ِ طول، یعنی متر را تعریف می‌کرد.

خط‌کش ِ معرّف ِ متر را همانندسازی می‌کنیم و آن‌ها را مدرّج می‌کنیم. این که متر را به چند قسمت ِ مساوی می‌توانیم تقسیم کنیم بسته‌گی دارد به این که فناوری یِ ما تا چه حد پیش رفته است. به هر حال این حد بی‌نهایت نیست، امّا در تصوّر ِ کنونی یِ ما این حد فقط ناشی از ضعف ِ فناوری یِ ما است، امّا ممکن است که این حد ناشی از ساختار ِ خود ِ فضا باشد. به بیان ِ دیگر فرض ِ ما بر این است که فضا یک پیوستار است، امّا ضمناً ممکن است که فضا یک شبکه باشد.

برا یِ سنجش ِ طول‌ها یِ بزرگ‌تر از $1\,\mathrm{m}$ باید تعداد ی خط‌کش ِ هم‌طول با خط‌کش ِ معیار را به دنبال ِ هم گذاشت، و البتّه باید خط‌کش‌ها را چنان به دنبال ِ هم گذاشت که همه‌گی در امتداد ِ یک خط باشند. این کار در عمل بسیار سخت است، و معمولاً به جا یِ آن کار از قضیّه‌ها یِ هندسه استفاده می‌کنیم. این همان کار ی است که نقشه‌بردارها می‌کنند. آن‌ها برا یِ سنجش ِ طول ِ یک خیابان، یا ارتفاع ِ یک تپّه از یک خط‌کش ِ و یک تئودُلیت استفاده می‌کنند.

7 یک ی از مهم‌ترین دست‌آوردها یِ بشر، ساختن ِ دست‌گاه ِ عددها یِ حقیقی است که آن را با نماد ِ $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم. از زمان ِ دِکارت به این طرف می‌دانیم که یک تناظر ِ یک‌به‌یک هست بین ِ $\mathbb{R}$ و خط ِ اقلیدسی؛ یک تناظر ِ یک‌به‌یک هست بین ِ $\mathbb{R}^2$ و صفحه یِ اقلیدسی؛ و یک تناظر ِ یک‌به‌یک هست بین ِ $\mathbb{R}^3$ و فضا یِ اقلیدسی.

8 زمان مشاهده‌پذیر ی است که آن را با ساعت می‌سنجیم. این تعریف را در واقع مدیون ِ آلبرت اینشتین هستیم، و از این جا می‌توان بحث ِ نسبیّت ِ خاص را شروع کرد. اگر این تعریف شما را قانع نمی‌کند، می‌توانید بگویید زمان پارامتر ی است که توالی یِ روی‌دادها را مشخّص می‌کند؛ امّا اگر خوب دقّت کنید می‌بینید که این تعریف هم به آن جا منتهی می‌شود که زمان آن چیز ی است که با ساعت سنجیده می‌شود.

8.a ساعت در واقع سیستم ِ فیزیکی ای است که تغییر ِ یک ی از متغیّرها یِ دینامیکی یِ آن تناوبی است. هر تناوب ِ این متغیّر را یک تیک ِ ساعت می‌نامیم. آشناترین مثال ِ ساعت آونگ ِ ساده است. تجربه یِ کار کردن با آونگ ِ ساده به ما می‌گوید که اگر آونگ ی خوب ساخته شده باشد، و اگر دامنه یِ نوسان اش کم باشد، تعداد ِ زیاد ی نوسان می‌کند که همه‌گی با هم برابر اند. وجود ِ اصطکاک باعث می‌شود که آونگ به مرور انرژی اش را از دست بدهد و به این ترتیب ساعت از کار بایستد. ساعت‌سازها یِ قرن‌ها یِ هفدهم و هجدهم و نوزدهم ِ میلادی

توانستند سازوکارها یی اختراع کنند که انرژی ی ِ تلف‌شده ی ِ آونگ را جبران کند، و به این ترتیب ساعت‌ها یی ساختند که آونگ ِ آن‌ها دائم نوسان می‌کند. به علاوه، سازوکارها یی هم برا ی ِ ثبت ِ تعداد ِ نوسان‌ها ساختند (همان عقربه‌ها ی ِ ساعت‌شمار، دقیقه‌شمار، و ثانیه‌شمار). به مرور، آونگ در ساعت‌ها ی ِ مکانیکی جا ی ِ خود را به رقّاصک داد. رقّاصک در واقع یک نوسان‌گر ِ ساده ی ِ مکانیکی است که میدان ِ گرانش ِ زمین بر دینامیک ِ آن تأثیر ِ ناچیز ی دارد و بنا بر این می‌توان این ساعت‌ها ی ِ مکانیکی را بسیار راحت‌تر از ساعت‌ها ی ِ آونگی این ور و آن ور برد. امروزه ساعت‌ها ی ِ کوارتس برا ی ِ ما آشناتر است. در ساعت ِ کوارتس، یک بلور ِ کوارتس هست که به علّت ِ پدیده ی ِ پیزوالکتریک نوسان می‌کند و باعث می‌شود ظرفیّت ِ یک خازن متناوباً تغییر کند. یک شمارنده ی ِ الکترونیک این نوسان‌ها را می‌شمرد. کره ی ِ زمین هم سیستم فیزیکی ای است که یک حرکت ِ تناوبی دارد: چرخش ِ وضعی اش. اگر تله‌سکپ ی را در صفحه ی ِ نصف‌النّهار قرار بدهید و با آن به آسمان نگاه کنید، می‌بینید که ستاره‌ها از مقابل ِ تله‌سکپ عبور می‌کنند. در واقع ستاره‌ها ثابت اند، و این زمین است که به دور ِ محور ِ قطبی اش می‌چرخد و باعث می‌شود راستا ی ِ تله‌سکپ در فضا تغییر کند. پس زمین هم در واقع یک ساعت است.

9 یک ی از کارها ی ِ فیزیک‌پیشه‌ها این است که ساعت‌ها ی ِ مختلف ی بسازند و آن‌ها را با هم مقایسه کنند. تا پیش از اختراع ِ ساعت‌ها ی ِ کوارتس، زمین دقیق‌ترین ساعت ی بود که داشتیم. به همین دلیل هم واحد ِ زمان، یعنی ثانیه را به صورت ِ کسر ِ خاصّی از یک چرخش ِ کامل ِ زمین تعریف می‌کردیم. با اختراع ِ ساعت‌ها ی ِ دقیق ِ کوارتس و سپس ساعت‌ها ی ِ اتمی، معلوم شد که سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ چرخش ِ زمین ثابت نیست، بل که زمین کم ی می‌لنگد. در این جا یک نکته ی ِ بسیار مهم در مورد ِ تعریف ِ زمان هست: وقت ی می‌گوییم زمین می‌لنگد، منظور‌مان این است که طول ِ یک شبانه‌روز ِ کامل ِ خورشیدی $86400\,\mathrm{s}$ نیست، گاه ی کم‌تر است، گاه ی بیش‌تر است. امّا معنی ی ِ این جمله چیست؟ در واقع تنها چیز ی که می‌توانیم بگوییم این است که دو تا ساعت داریم (زمین و یک ساعت ِ کوارتس) که با هم هم‌آهنگ نیستند. امّا کدام‌یک از آن‌ها است که می‌لنگد؟ زمین یا بلور ِ کوارتس؟ پاسخ ِ این سؤال بر اساس ِ اصل ِ ساده‌گی در فیزیک است، به این معنی که باید ببینیم که اگر لنگیدن را به زمین نسبت بدهیم فیزیک ساده‌تر می‌شود، یا اگر آن را به بلور ِ کوارتس نسبت بدهیم. فیزیک‌پیشه‌ها علّت‌ها یی برا ی ِ لنگیدن ِ زمین می‌شناسند، مثلاً این که زمین یک کره ی ِ کامل نیست و بنا بر این برا ی ِ میدان ِ گرانشی ی ِ ماه و خورشید مثل ِ یک جسم ِ نقطه‌ای نیست. امّا هنوز علّت ی برا ی ِ آن که نوسان ِ بلور ِ کوارتس را نامنظّم بدانیم نمی‌شناسیم.

10 همان طور که متر را ریز کردیم (سانتی‌متر، میلی‌متر، میکرومتر، نانومتر، ...) تا بتوانیم طول‌ها را دقیق‌تر و دقیق‌تر بسنجیم، باید واحد ِ زمان (ثانیه) را هم ریز کنیم. برا ی ِ این کار باید

ساعت‌ها یی بسازیم که مثلاً هر یک میلیون تیک ِ آن‌ها یک ثانیه باشد. در این جا هم این سؤال پیش می‌آید که این کار را تا چه حدّ ی می‌توانیم ادامه بدهیم. فعلاً توانسته ایم ساعت‌ها یی بسازیم که با دقّت ِ 10^{-15} s تیک بکنند، امّا آیا در آینده خواهیم توانست ساعت‌ها یی بسازیم که با دقّت ِ مثلاً 10^{-30} s تیک کنند؟ با دقّت ِ 10^{-40} s چه طور؟ همانند ِ فضا، زمان هم ممکن است یک پیوستار باشد، یا ممکن است یک شبکه باشد. اگر زمان پیوستار باشد، آن وقت فاصله‌ها ی ِ خیل ی کوچک بین ِ روی‌دادها علی‌الاصول بامعنی اند، امّا اگر زمان یک شبکه باشد، آن وقت یک کوچک‌ترین فاصله ی ِ زمانی هست که نمی‌توان آن را ریزتر کرد. فعلاً، غالب ِ فیزیک ی که ساخته ایم بر این مبنا است که زمان یک پیوستار است، یعنی یک تناظر ِ یک‌به‌یک هست بین ِ مجموعه ی ِ همه ی ِ زمان‌ها و $\mathbb{R}$.

11 مجموعه ی ِ تمام ِ روی‌دادها را فضازمان می‌نامیم. موضوع ِ بحث ِ ما ساختار ِ فضازمان است. در فیزیک ِ امروز سه نظریّه ی ِ مهم در باره ی ِ ساختار ِ فضازمان داریم: 1) نسبیّت ِ گالیله‌ای، 2) نسبیّت ِ خاص، 3) نسبیّت ِ عام. نسبیّت ِ گالیله‌ای در واقع حد ِ خاص ی از نسبیّت ِ خاص است، و نسبیّت ِ خاص حد ِ خاص ی از نسبیّت ِ عام است. نسبیّت ِ خاص و نسبیّت ِ عام امروزه با چنان دقّت ی در تجربه تأیید شده اند که اطلاق ِ لفظ ِ نظریّه به آن‌ها تا حدّی گم‌راه‌کننده است. امروز اعتقاد ِ ما به نظریّه ی ِ نسبیّت ِ خاص و نظریّه ی ِ نسبیّت ِ عام درست مثل ِ اعتقاد ِ مان به نظریّه ی ِ اتمی ی ِ مادّه است.

12 فضازمان، از نظر ِ ریاضی، در واقع یک فضا ی ِ چهاربعدی است؛ زیرا هر روی‌داد، یعنی هر نقطه از فضازمان، با مشخّص شدن ِ چهار مختصّه مشخّص می‌شود. سه تا از این چهار مختصّه مکان ِ روی دادن ِ روی‌داد را مشخّص می‌کنند، و مختصّه ی ِ چهارم زمان ِ روی دادن ِ آن را مشخّص می‌کند.

13 تا پیش از بر آمدن ِ فیزیک ِ کلاسیک، یعنی تا پیش از گالیله و نیوتن، تصوّر بر این بود که فضا مستقل از ناظر است. این مستقل از ناظر بودن ِ فضا را، مطلق بودن ِ ارسطویی ی ِ فضا می‌نامیم. برا ی ِ آن که معنی ی ِ مطلق بودن ِ ارسطویی ی ِ فضا را به‌تر لمس کنیم به‌تر است مثال ی بزنیم. فرض کنید در اتوبوس ی نشسته اید که با سرعت ِ ثابت ِ v در امتداد ِ یک جادّه ی ِ افقی حرکت می‌کند. اگر در این حالت یک جسم ِ کوچک، مثلاً یک سیب را به بالا پرت کنید، سیب به طور ِ قائم بالا می‌رود و سپس باز می‌گردد. اگر از شما بپرسیم که مسیر ی که این سیب در فضا پیموده چیست، پاسخ ِ شما این است که "یک پاره‌خط ِ راست "؛ امّا اگر از کس ی که رو ی ِ جادّه ایستاده همین سؤال را بپرسیم، خواهد گفت "بخش ی از یک سهمی "، و واضح است که هیچ تبدیل ِ اقلیدسی ای خط را به سهمی نمی‌نگارد. کسان ی که فیزیک ِ کلاسیک (یعنی فیزیک ِ گالیله‌ای ـ نیوتنی) را درک نکرده اند در این مرحله می‌پرسند: " بالاخره مسیر ِ این سیب خط ِ

راست است یا سهمی؟ " این سؤال بر این پیش‌فرض بنا شده که یک فضا یِ مطلق ِ ارسطویی هست که مستقل از ناظر است، و می‌توان راجع به زیرمجموعه‌ها یِ آن حرف زد؛ یک ی از این زیرمجموعه‌ها مسیر ِ سیب ی است که آن را بالا انداخته ایم، و این مسیر هر چه باشد، نمی‌تواند هم سهمی باشد هم خط ِ راست، زیرا سهمی و خط ِ راست، به معنی یِ اقلیدسی با هم هم‌نهشت نیستند. فیزیک ِ کلاسیک فضا یِ مطلق ِ ارسطویی را کنار می‌گذارد، به این ترتیب که فضا در فیزیک ِ کلاسیک چیز ی است وابسته به ناظر.

14 تا پیش از اینشتین، تقریباً همه یِ فیزیک‌پیشه‌ها چنین می‌پنداشتند که زمان مستقل از ناظر است، به این معنی که می‌پنداشتند علی‌الاصول می‌توان ساعت‌ها یِ ایده‌آل ی ساخت که آهنگ ِ کارکرد ِ آن‌ها مستقل از حرکت ِ آن‌ها باشد. به این ترتیب اگر دو ناظر ِ داشته باشیم، $\mathcal{O}$ و $\mathcal{O}'$، و هر کدام از این دو ناظر یک ساعت ِ ایده‌آل داشته باشند، و هر ناظر با ساعت ِ خود اش بازه یِ زمانی یِ بین ِ دو روی‌داد ِ E_1 و E_2 را بسنجد، هر دو یک عدد به دست می‌آورند.

B اصل ِ نسبیّت ِ گالیله

15 در این مرحله به‌تر است منظورِ مان از آزمایش‌گاه و ناظر را روشن‌تر بیان کنیم. وقت ی می‌گوییم آزمایش‌گاه، منظورِ مان چیز ی مثل ِ یک سفینه یِ فضایی است: یک اتاق، با دیواره‌ها یی صُلب، که محورها یِ مختصّات را می‌نمایانند، و یک ساعت ِ دقیق. بنیادی‌ترین آزمایش یا رصد ی که یک آزمایش‌گر در آزمایش‌گاه ی از این نوع می‌کند، مشاهده یِ حرکت ِ ذرّه‌ها یِ آزمون در آزمایش‌گاه است. این کار یعنی ثبت ِ مکان ِ ذرّه در لحظه‌ها یِ مختلف. مکان ِ ذرّه در هر لحظه با دادن ِ سه مختصّه یِ فضایی، مثلاً x، y، و z مشخّص می‌شود. دیوارها یِ سفینه در واقع دست‌گاه ِ مختصّه‌ها را مجسّم می‌کنند. آزمایش‌گر ی که در این آزمایش‌گاه است ــ که معمولاً او را ناظر می‌نامیم ــ به کمک ِ یک یا تعداد ی ساعت زمان را می‌سنجد و ثبت می‌کند.

16 ناظر در فیزیک موجود ی است که می‌تواند پدیده‌ها یِ فیزیکی را توصیف کند. برا یِ این کار ناظر باید بتواند روی‌دادها یی را که در ناحیه ای از فضا و در گستره ای از زمان روی می‌دهند ثبت و فرمول‌بندی کند. این یعنی ناظر باید بتواند جا و زمان ِ روی دادن ِ روی‌دادها را تعیین کند. تعیین ِ جا یِ روی‌دادها یعنی تعیین ِ مختصّه‌ها یِ آن‌ها نسبت به یک دست‌گاه ِ مختصّات. این مختصّه‌ها می‌توانند مختصّه‌ها یِ دکارتی یا مختصّه‌ها یِ خمیده‌خط باشند. برا یِ تعیین ِ زمان ِ روی‌دادها ناظر باید تعداد ی ساعت داشته باشد. به‌زودی در بحث ِ نسبیّت ِ خاص خواهیم دید که ناظر در واقع به بی‌نهایت ساعت نیاز دارد.

17 آزمایش‌گاه‌ها یِ واقعی گستره یِ فضازمانی یِ محدود ی دارند، یعنی هم ابعاد ِ فضایی یِ آزمایش‌گاه محدود است، هم گستره یِ زمانی یِ آزمایش‌ها و رصدها یی که در آن

انجام می‌شود محدود است. در این مرحله فرض می‌کنیم که علی‌الاصول محدودیّت ی رو یِ گستره یِ فضازمانی یِ آزمایش‌گاه نیست. در آینده خواهیم دید که این فرض را در نظریّه یِ نسبیّت ِ عام باید کنار بگذاریم.

18 قرار می‌گذاریم که همه یِ آزمایش‌گرها، در هر آزمایش‌گاه ی که هستند، برا یِ تعیین ِ مکان ِ روی‌دادها از دست‌گاه‌ها یِ دکارتی (یِ متعامد ِ راست‌گرد) استفاده کنند؛ طول‌ها را بر حسب ِ متر و زمان‌ها را بر حسبِ ثانیه بسنجند. تعیین ِ مختصّه‌ها به کمک ِ خط‌کش‌ها یِ صُلب است. این قرارداد صرفاً برا یِ ساده شدن ِ بحث‌ها یِ آینده است، وگرنه، هیچ اشکال ی ندارد که از دست‌گاه‌ها یِ خمیده‌خط (مثلاً دست‌گاه ِ کروی) یا چپ‌گرد استفاده کنیم، یا این که یک آزمایش‌گر از واحدها یِ متریک استفاده کند و دیگری از واحدها یِ انگلیسی. نتیجه یِ آزمایش‌ها (مثلاً عوض شدن ِ رنگ ِ یک اسید در نتیجه یِ افزودن ِ یک معرف) به این بسته‌گی ندارد که از چه مختصّه‌ها یی یا چه واحدها یی، یا چه نمادگذاری ای استفاده می‌کنیم. (بند ِ ۲۸ را هم ببینید.)

19 دو آزمایش‌گاه در نظر بگیرید. آزمایش‌گاه ِ اوّل را L، و آزمایش‌گاه ِ دوّم را L' می‌نامیم. ناظر ی را که در L است $\mathcal{O}$، و ناظر ی را که در L' است $\mathcal{O}'$ می‌نامیم. $\mathcal{O}$ و $\mathcal{O}'$ یک آزمایش را در آزمایش‌گاه‌ها یِ خود می‌چینند. این آزمایش مثلاً می‌تواند برخورد ِ یک گلوله یِ 20 گرمی یِ فولادی که با سرعت ِ $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ حرکت می‌کند، با یک گلوله یِ مسی یِ 10 گرمی که ساکن است باشد. نکته یِ مهم این است که تمام ِ ابزار ی که $\mathcal{O}$ و $\mathcal{O}'$ به کار می‌برند، عین ِ هم اند، و دو آزمایش دقیقاً عین ِ هم چیده شده اند. فرض کنید $\mathcal{O}$ پدیده یِ خاصّ ی ببینند؛ مثلاً فرض کنید ببینند که پس از گذشت ِ $2.5\,\mathrm{s}$ از شروع ِ آزمایش، گلوله یِ مسی در نقطه یِ (x, y, z) به بخش ِ خاصّ ی از دست‌گاه ِ آزمایش می‌خورد. سؤال این است که $\mathcal{O}'$، که دقیقاً همین آزمایش را تکرار می‌کند، چه می‌بینند. جواب ِ این سؤال بسته‌گی دارد به این که L و L' چه ارتباط ی با هم دارند. مثلاً اگر L آزمایش‌گاه ی ساکن رو یِ زمین باشد، و L' آزمایش‌گاه ی باشد که نسبت به L با سرعت ِ زاویه‌ای یِ ω می‌چرخد، آن وقت به دلیل ِ وجود ِ نیروها یِ گریزازمرکز و کُریُلیس، نتیجه یِ این دو آزمایش یک‌سان نیست.

20 اصل ِ تقارن ِ گالیله‌ای یِ فضازمان می‌گوید که در وضعیّت‌ها یِ زیر نتیجه یِ هر آزمایش ی در L' همان نتیجه ای است که در L به دست می‌آید.

1) اگر L' حاصل ِ انتقال ِ زمانی یِ L باشد. این یعنی یک آزمایش را در دو زمان ِ مختلف انجام بدهیم.

2) اگر L' حاصل ِ انتقال ِ فضایی یِ L باشد. این یعنی دست‌گاه ِ آزمایش را منتقل کنیم.

3) اگر L' حاصل ِ چرخش ِ فضایی یِ ثابت ِ L باشد ــ محور و زاویه یِ چرخش هر چه می‌خواهد باشد. این یعنی دست‌گاه ِ آزمایش را بچرخانیم. دقّت کنید که منظور از این

چرخش، یک چرخش ِ ثابت است، نه دوران با سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ ثابت.

4) اگر L'، نسبت به L با سرعت ِ ثابت حرکت کند. این یعنی که دست‌گاه ِ آزمایش را سوار ِ یک قطار یا موشک بکنیم و همه چیز را با یک سرعت ِ ثابت ِ v (نسبت به آزمایش‌گاه ِ L) حرکت بدهیم و بعد آزمایش را انجام بدهیم. این تبدیل ِ L به L' را **خیز** می‌نامیم.

بیان ِ دیگر ِ این اصل ِ تقارن این است که اگر وضعیّت ِ نسبی ی ِ L و L' یک ی از وضعیّت‌ها ی ِ بالا باشد، با هیچ آزمایش ی در L و L' نمی‌توان آن دو را از هم تمیز داد.

21 میز ی را در آزمایش‌گاه بگذارید و رو ی ِ آن یک قطب‌نما بگذارید. در جهت ی که عقربه ی ِ قطب‌نما نشان می‌دهد (یعنی شمال ِ قطب‌نما) یک کتاب ِ فیزیک بگذارید. اگر این میز را بچرخانید، وضعیّت ِ نسبی ی ِ قطب‌نما و میز عوض می‌شود. این نشان می‌دهد که در واقع آزمایش‌گاه‌ها ی ِ رو ی ِ زمین تقارن ِ چرخشی ندارند. در واقع آزمایش‌گاه‌ها ی ِ رو ی ِ زمین تقارن ِ انتقالی هم ندارند. این یکی را می‌شود با قطب‌نما ی ِ دقیق ی که می‌تواند زاویه ی ِ میل ِ مغناطیسی را بسنجد، یا به کمک ِ یک آونگ ِ ساده دید. در مورد ِ آونگ ِ ساده، می‌دانیم که پریُد ِ آن به شتاب ِ گرانش ِ زمین بسته‌گی دارد و شتاب ِ گرانش ِ زمین به وضعیّت ِ زمین‌شناختی ی ِ اطراف ِ آزمایش‌گاه و عرض ِ جغرافیایی بسته‌گی دارد. پس در واقع آزمایش‌گاه‌ها ی ِ رو ی ِ زمین تقارن ِ انتقالی و چرخشی ندارند. با این حساب اصل ِ تقارن ِ گالیله‌ای چه می‌گوید؟ پاسخ این است که این اصل راجع به آزمایش‌گاه‌ها یی صحبت می‌کند که به اندازه ی ِ کافی از زمین و بقیّه ی ِ جسم‌ها ی ِ بزرگ ِ کیهانی (یعنی ستاره‌ها و سیّاره‌ها) دور اند. در واقع تصوّر ِ ما بر این است که اصل ِ تقارن ِ گالیله‌ای در آزمایش‌گاه‌ها یی که در فضا ی ِ بین ِ کهکشان‌ها ول اند برقرار است. از کجا این را می‌دانیم؟ از آن جا که تا کنون هر جا دیده ایم که این تقارن نقض شده، توانسته ایم منشاء ِ آن را بیابیم، و این منشاء هم‌واره یک جسم ِ مادّی بوده است ــ در مورد ِ عقربه ی ِ قطب‌نما، این منشاء میدان ِ مغناطیسی ی ِ زمین است که ناشی از جریان‌ها ی ِ الکتریکی در هسته ی ِ زمین است؛ در مورد ِ پریُد ِ آونگ، این منشاء یک ی میدان ِ گرانشی ی ِ زمین است که ناشی از جرم‌دار بودن ِ زمین است، و دیگر ی چرخش ِ زمین است که منجر به ایجاد ِ نیرو ی ِ کُریُلیس می‌شود.

22 به آسانی می‌توان قانع شد که اگر رابطه ی ِ L' با L ترکیب ی از تبدیل‌ها ی ِ (۲۰) باشد، باز هم نتیجه ی ِ آزمایش در هر دو آزمایش‌گاه یک ی است. به این ترتیب مجموعه ی ِ آزمایش‌گاه‌ها یی که با آزمایش‌گاه ِ L هم‌ارز اند، مجموعه ی ِ بسیار بزرگ ی است: هر انتقال ِ زمانی یا فضایی ی ِ L، هر چرخش ِ ثابت ِ L، هر خیز ِ L، و هر ترکیب ی از این تبدیل‌ها.

23 یک نکته ی ِ بسیار مهم در اصل ِ نسبیّت ِ گالیله این است که دو آزمایش‌گاه ی که این اصل در باره ی ِ آن‌ها گزاره ای را بیان می‌کند، باید نسبت به هم با سرعت ِ ثابت حرکت کنند. اگر قطار ی که در بالا به آن اشاره شد با شتاب حرکت کند، نتیجه ی ِ دو آزمایش ی که عین ِ هم چیده

شده اند یک‌سان نخواهد بود.

24 از تجربه این را هم می‌دانیم که اگر آزمایش‌گاه ـِ 1 نسبت به آزمایش‌گاه ـِ 2 با سرعت ـِ ثابت ـِ v در امتداد ـِ بردار ـِ $\mathbf{n}$ حرکت کند، آزمایش‌گاه ـِ 2 هم نسبت به آزمایش‌گاه ـِ 1 با همان سرعت ـِ v اما در امتداد ـِ بردار ـِ $-\mathbf{n}$ حرکت می‌کند. به علاوه، اگر آزمایش‌گاه ـِ 3 با سرعت ـِ ثابت نسبت به آزمایش‌گاه ـِ 2 حرکت کند، و آزمایش‌گاه ـِ 2 با سرعت ـِ ثابت نسبت به آزمایش‌گاه ـِ 1 حرکت کند، از تجربه می‌دانیم که حتماً سرعت ـِ آزمایش‌گاه ـِ 3 نسبت به آزمایش‌گاه ـِ 1 ثابت است. بحث در باره یِ این که مقدار ـِ این سرعت ـِ ثابت چه قدر است را به بعد موکول می‌کنیم.

25 اکنون آماده ایم که اصل ـِ نسبیّت ـِ گالیله را دقیق‌تر بیان کنیم. این اصل می‌گوید که اگر دسته ای از آزمایش‌گاه‌ها داشته باشیم که به قدر ـِ کافی از جسم‌ها یِ بزرگ ـِ دنیا (مثل ـِ زمین و خورشید) دور باشند و سرعت ـِ هر دو تا یِ آن‌ها نسبت به هم ثابت باشد، با هیچ آزمایش ـِ مکانیکی ای نمی‌توان یک ی از این آزمایش‌گاه‌ها را از دیگران متمایز کرد. به بیان ـِ ریاضی، اصل ـِ نسبیّت ـِ گالیله مجموعه یِ همه یِ آزمایش‌گاه‌ها یِ ممکن را به رده‌ها یِ هم‌ارزی افراز می‌کند. این رده‌ها یِ مختلف با هم هم‌ارز نیستند. مثلاً فرض کنید آزمایش‌گاه ـِ L' با سرعت ـِ $v + at$، و آزمایش‌گاه ـِ L'' با سرعت ـِ $w + at$ نسبت به آزمایش‌گاه ـِ L شتاب ـِ حرکت کنند (a که شتاب است، ثابت است). به این ترتیب سرعت ـِ L'' نسبت به L' (در نسبیّت ـِ گالیله‌ای) $w - v$ است که ثابت است. پس L' و L'' به یک رده یِ هم‌ارزی متعلق اند، که این رده، رده یِ هم‌ارزی یِ L نیست.

26 در فیزیک کلاسیک، یک ی از این رده‌ها یِ هم‌ارزی ای که اصل ـِ نسبیّت ـِ گالیله تعیین می‌کند از دیگر رده‌ها یِ هم‌ارزی متمایز می‌شود، رده یِ آزمایش‌گاه‌ها (یا ناظرها) یِ لخت. آزمایش‌گاه ـِ لخت آزمایش‌گاه ی است که در آن قانون ـِ اوّل ـِ نیوتن درست است. قانون ـِ اوّل ـِ نیوتن می‌گوید که اگر ذرّه ای آزاد باشد آن وقت این جسم با سرعت ـِ ثابت رو یِ یک خط ـِ راست حرکت می‌کند (معنی یِ آزاد بودن ـِ ذرّه این است که تأثیر ـِ اجسام ـِ دیگر بر آن بسیار کم باشد). به کمک ـِ خط‌کش می‌توان تعیین کرد که مسیر ـِ ذرّه خط راست است یا نه؛ امّا برا یِ تعیین ـِ این که جسم ی با سرعت ـِ ثابت حرکت می‌کند یا نه، ناظر باید ساعت داشته باشد.

27 سفینه‌ها یِ فضایی ای که به دور ـِ زمین می‌گردند (و موتور ـِ موشک‌ها یشان خاموش است) به‌ترین نمونه‌ها یِ آزمایش‌گاه‌ها یِ لخت اند. اگر به فیلم‌ها یی که از فضانوردها در این سفینه‌ها گرفته شده دقّت کرده باشید، حتماً دیده اید که اگر فضانورد جسم ی را رها کند، جسم یا در همان جا می‌ماند، یا با سرعت ـِ ثابت رو یِ یک خط ـِ راست حرکت می‌کند. (این که چرا این آزمایش‌گاه‌ها لخت اند، موضوع ی است که فعلاً برا یِ ورود به آن آماده نیستیم؛ فقط به ذکر ـِ این نکته اکتفا می‌کنیم که لخت بودن ـِ این آزمایش‌گاه‌ها محتوا یِ یک ی از اصل‌ها یِ فیزیک است به نام ـِ اصل ـِ هم‌ارزی.)

28 اصل ِ تقارن ِ گالیله‌ای گزاره ای است راجع به فضازمان که هیچ ربط ی به این که برا ی ِ توصیف ِ روی‌دادها چه دست‌گاه ِ مختصّه ای به کار می‌بریم ندارد. امّا، استفاده از دست‌گاه‌ها ی ِ لخت بامحورها ی ِ دکارتی، بیان و کاربرد ِ اصل ِ تقارن ِ گالیله‌ای را ساده‌تر می‌کند. برا ی ِ لمس کردن ِ این مطلب به‌تر است مثال ی از هندسه ی ِ اقلیدسی بزنیم. صفحه ی ِ اقلیدسی را E می‌نامیم. در این صفحه مختصّه‌ها ی ِ دکارتی ی ِ متعامد ِ (x, y) را به کار می‌بریم. دو دایره در نظر می‌گیریم، یک ی به شعاع ِ R و مرکز ِ O، دیگر ی به شعاع ِ R و مرکز ِ (a, b) .

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \left\{(x,y)\in E \quad | \quad x^2+y^2=R^2\right\}, \\
\Sigma' &= \left\{(x,y)\in E \quad | \quad (x-a)^2+(y-b)^2=R^2\right\}.
\end{aligned}$$

واضح است که این دو دایره هم‌نهشت اند. در واقع، به ساده‌گی می‌توان نشان داد که انتقال با بردار ِ (a, b) دایره ی ِ Σ را به دایره ی ِ Σ' می‌نگارد. مزیّت ِ استفاده از مختصّه‌ها ی ِ دکارتی این است که عمل‌گر ِ انتقال (T) در این مختصّه‌ها شکل ِ ساده ای دارد.

$$\begin{aligned}
T_{a,b}\big(\,\{(x,y)\mid f(x,y)=0\}\,\big) &= \{(x+a,y+a)\mid f(x,y)=0\} \\
&= \{(X,Y)\mid f(X-a,Y-b)=0\}\,.
\end{aligned}$$

حالت ِ خاص ِ این انتقال می‌گوید

$$\begin{aligned}
T_{a,b}(\Sigma) &= \left\{(x+a,y+b)\mid x^2+y^2=R^2\right\}\big) \\
&= \left\{(X,Y)\mid (X-a)^2+(Y-b)^2=R^2\right\}=\Sigma'.
\end{aligned}$$

اینک بیایید همین مطلب را در مختصّه‌ها ی ِ قطبی ی ِ $[r, \theta]$ ببینیم. در این مختصّه‌ها داریم

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \{\,[r,\theta]\in E \;\mid\; r-R=0\,\}, \\
\Sigma' &= \left\{\,[r,\theta]\in E \;\mid\; r^2-2r(a\cos\theta+b\sin\theta)+a^2+b^2-R^2=0\,\right\}.
\end{aligned}$$

هم‌نهشت بودن ِ دو مجموعه (مثلاً Σ و Σ') به این بسته‌گی ندارد که برا ی ِ توصیف ِ آن دو چه مختصّه‌ها یی به کار ببریم، امّا استفاده از مختصّه‌ها ی ِ دکارتی کمک می‌کند که این هم‌نهشتی را ساده‌تر تشخیص بدهیم.

29 از این به بعد به کرّات چنین عبارت‌ها یی را به کار خواهیم برد: " فرض کنید K و K' دو دست‌گاه ِ لخت با مختصّه‌ها ی ِ دکارتی باشند. " یا " فرض کنید $\mathcal{O}$ و $\mathcal{O}'$ دو ناظر ِ صُلب ِ لخت باشند که از مختصّه‌ها ی ِ دکارتی ی ِ (t, x, y, z) و (t', x', y', z') استفاده می‌کنند. " منظور از

چنین جمله‌ها یی این است: " دو آزمایش‌گاه ِ صُلب داریم، L و L'؛ که در هر دو قانون ِ اوّل ِ نیوتن درست است. در این دو آزمایش‌گاه برا یِ تعیین ِ جا یِ روی دادن ِ روی‌دادها از مختصّه‌ها یِ دکارتی استفاده می‌کنیم (معمولاً مختصّه‌ها یِ متعامد و راست‌گرد). " وقت ی می‌گوییم " فرض کنید E یک روی‌داد در فضازمان باشد با مختصّه‌ها یِ (t, x, y, z) و (t', x', y', z') "، منظور ِ مان این است که یک اتّفاق ی در یک جا یی در یک لحظه ای افتاده که اگر جا و زمان ِ روی‌دادن ِ آن را ناظر ی که در آزمایش‌گاه ِ L است تعیین کند، به عددها یِ (t, x, y, z) می‌رسد، و اگر جا و زمان ِ همین روی‌داد را ناظر ی که در آزمایش‌گاه ِ L' است تعیین کند، به عددها یِ (t', x', y', z') می‌رسد. اوّلین و بنیادی‌ترین سؤال ی که می‌خواهیم در این درس به آن جواب بدهیم این است که چه ارتباط ی بین ِ این دو مجموعه از عددها هست. تا پیش از برآمدن ِ نسبیّت ِ خاص، تصوّر ِ عمومی این بود که تبدیل ِ بین ِ این عددها یک تبدیل ِ گالیله است. نسبیّت ِ خاص این تصوّر را عوض کرد. در این جا ابتدا تبدیل‌ها یِ گالیله را مرور می‌کنیم، و سپس به تبدیل‌ها یِ لُرنتس می‌پردازیم.

C تبدیل‌ها ی ِ گالیله

فرض کنید K و K' دو دست‌گاه ِ لخت با مختصّه‌ها یِ دکارتی باشند. ناظر ِ وابسته به K را $\mathcal{O}$، و ناظر ِ وابسته به K' را $\mathcal{O}'$ می‌نامیم.

در ساده‌ترین حالت، فرض کنید اوّلاً K' نسبت به K ساکن باشد؛ ثانیاً محورها یِ K موازی یِ محورها یِ K باشد. در این صورت تبدیل ِ بین ِ آن‌ها به چنین شکل ی است:

$$
\begin{aligned}
t' &= t - t_0, \\
x' &= x - x_0, \\
y' &= y - y_0, \\
z' &= z - z_0.
\end{aligned}
$$

در این فرمول‌ها t_0، x_0، y_0، و z_0 چهار عدد ِ ثابت اند. اگر روی‌داد ی از دید ِ $\mathcal{O}$ در لحظه یِ t روی داده باشد، همین روی‌داد از دید ِ $\mathcal{O}'$ در لحظه یِ $t - t_0$ روی داده، یعنی ساعت‌ها یِ K به اندازه یِ t_0 جلوتر از ساعت‌ها یِ K' اند. اگر روی‌داد ی از نظر ِ $\mathcal{O}$ در نقطه یِ (x, y, z) روی داده باشد، همین روی‌داد از دید ِ $\mathcal{O}'$ در نقطه یِ $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ روی داده است؛ پس محورها یِ مختصّات ی که $\mathcal{O}'$ به کار می‌برد حاصل ِ انتقال ِ محورها ی ِ K است و بردار ِ این انتقال (x_0, y_0, z_0) است. این را می‌توان به ساده‌گی دید، کافی است دقّت کنیم که مبداء ِ دست‌گاه ِ

دکارتی ی ِ K' نقطه ی ِ $(x' = 0, y' = 0, z' = 0)$ است که با توجّه به فرمول ِ بالا هم‌ارز است با $(x = x_0, y = y_0, z = z_0)$.

31 فرض کنید K' نسبت به K ساکن باشد، و مبداء ِ زمانی و مبداء ِ دست‌گاه ِ مختصّه‌ها ی ِ دکارتی ی ِ فضایی ی ِ آن دو هم بر هم منطبق باشد، امّا راستا ی ِ محورها ی ِ $x'y'z'$ با راستا ی ِ محورها ی ِ xyz موازی نباشد. در این صورت داریم

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

که در این جا R_{ij} یک ماتریس ِ متعامد است، یعنی $R^\top R = \mathbb{I}$. اگر دست‌گاه‌ها ی ِ xyz و $x'y'z'$ هر دو راست‌گرد باشند، دترمینان ِ ماتریس ِ R مثبت (یعنی $+1$) است. یک مثال ِ ساده این است که

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z. \end{aligned}$$

به ساده‌گی می‌توان دید که در این وضعیّت محورها ی ِ $x'y'$ دور ِ محور ِ $z = z'$ به اندازه ی ِ θ در جهت ِ مثبت چرخیده اند.

32 فرض کنید محورها ی ِ فضایی ی ِ K' موازی ی ِ محورها ی ِ فضایی ی ِ K باشند و K' با سرعت ِ (v_x, v_y, v_z) نسبت به K حرکت کند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - v_x\, t, \\ y' &= y - v_y\, t, \\ z' &= z - v_z\, t. \end{aligned}$$

این تبدیل‌ها را خیزها ی ِ گالیله‌ای می‌نامیم. دقّت کنید که وارون ِ این تبدیل‌ها هست

$$\begin{aligned} t &= t', \\ x &= x' + v_x\, t', \\ y &= y' + v_y\, t', \end{aligned}$$

$$z = z' + v_z t'.$$

این فرمول‌ها دقیقاً همان فرمول‌ها ی ِ قبلی هستند، با این فرق که جا ی ِ متغیّرها ی ِ زبردار و بی‌زبر عوض شده، و $\mathbf{v}$ به $-\mathbf{v}$ تبدیل شده. این را اصل ِ وارونه‌گی می‌نامیم. دقّت کنید که اصل ِ وارونه‌گی تنها وقت ی برقرار است که محورها ی ِ K و K' موازی ی ِ هم باشند و نام‌ها ی ِ مشابه ی داشته باشند.

33 برا ی ِ آن که معنی ی ِ هندسی ی ِ خیزها ی ِ گالیله‌ای را به‌تر لمس کنیم، خوب است حالت ِ خاص ی را در نظر بگیریم که در آن بردار ِ سرعت ِ دست‌گاه ِ K' نسبت به K بردار ِ $(v, 0, 0)$ است. در این وضعیّت $y' = y$ و $z' = z$، و برا ی ِ مختصّه‌ها ی ِ t، x، t'، و x' داریم

$$t' = t,$$
$$x' = x - v\,t.$$

34 در شکل ِ (؟؟) محورها ی ِ (t, x) و (t', x') را کشیده ایم. دقّت کنید، وقت ی می‌گوییم محور ِ t'، یعنی محور ِ $x' = 0$، که چون $x' = x - vt$، محور ِ t' همان خط ِ $x = vt$ است. مشابهاً، منظور از محور ِ x'، همان محور ِ $t' = 0$ است، که چون $t' = t$، محور ِ x' همان خط ِ $t = 0$ است. بنا بر این محورها ی ِ x و x' بر هم منطبق اند، در حال ی که محور ِ t' بر محور ِ t منطبق نیست.

35 خوب است کم ی در باره ی ِ این مطلب بیندیشیم که منظور از محور ِ t و محور ِ t' در فضازمان چیست. فرض کنید در نقطه ی ِ $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$ از دست‌گاه ِ K، یعنی در مبداء ِ دست‌گاه ِ مختصّه‌ها ی ِ دکارتی ی ِ K، یک ساعت گذاشته باشیم. این ساعت در همه ی ِ زمان‌ها در همان نقطه است و گذشت ِ زمان را نشان می‌دهد. منظور از محور ِ t جهان‌خط ِ این ساعت است. به این ترتیب معنی ی ِ محور ِ t' هم واضح است: جهان‌خط ِ ساعت ی که در نقطه ی ِ $x' = 0$، $y' = 0$، $z' = 0$، یعنی مبداء ِ دست‌گاه ِ دکارتی ی ِ K' ساکن است (که یعنی از دید ِ $\mathcal{O}'$ ساکن است).

36 فرض کنید ذرّه ای در فضا حرکت کند. از دید ِ ناظر ِ $\mathcal{O}$ مسیر ِ این ذرّه با سه معادله ی ِ زیر داده می‌شود.

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

<u>همین</u> ذرّه را از دید ِ ناظر ِ $\mathcal{O}'$ در نظر بگیریم. از دید ِ $\mathcal{O}'$ مسیر ِ ذرّه با سه تابع ِ زیر داده می‌شود.

$$x' = x'(t'), \qquad y' = y'(t'), \qquad z' = z'(t').$$

چیز ی که می‌خواهیم بدانیم این است که اوّلاً این سه تابع چه ربط ی به سه تابع ِ $x(t)$، $y(t)$، و $z(t)$ دارند؛ ثانیاً سرعت و شتاب ِ این ذرّه از دید ِ $\mathcal{O}'$ چه ربط ی به سرعت و شتاب ِ ذرّه از دید ِ $\mathcal{O}$ دارند. خیزها ی ِ گالیله‌ای می‌گویند که $t = t'$ و

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - v_x\, t, \\ y'(t) &= y(t) - v_y\, t, \\ z'(t) &= z(t) - v_z\, t. \end{aligned}$$

بردار ِ سرعت ِ این ذرّه (از دید ِ $\mathcal{O}$) بنا به تعریف بردار ِ زیر است.

$$\mathbf{u}(t) := (v_x, v_y, v_z) := (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

از فرمول ِ خیزها ی ِ گالیله‌ای واضح است که برا ی ِ مؤلفه‌ها ی ِ دکارتی ی ِ سرعت داریم

$$\begin{aligned} u'_x(t) &= u_x(t) - v_x, \\ u'_y(t) &= u_y(t) - v_y, \\ u'_z(t) &= u_z(t) - v_z; \end{aligned}$$

و برا ی ِ مؤلفه‌ها ی ِ دکارتی ی ِ شتاب داریم

$$\begin{aligned} a'_x(t) &= u_x(t), \\ a'_y(t) &= u_y(t), \\ a'_z(t) &= u_z(t). \end{aligned}$$

فصل II

هم‌وردایی یِ گالیله‌ای

37 اصل ِ نسبیّت ِ گالیله (یا نسبیّت ِ گالیله‌ای) می‌گوید که قانون‌ها یِ فیزیک در خلاء باید چنان باشند که شکل ِ آن‌ها در نتیجه یِ تبدیل‌ها یِ گالیله تغییر نکند. معمولاً این جلمه را این طور می‌گویند: اصل ِ نسبیّت ِ گالیله‌ای می‌گوید که قانون‌ها یِ فیزیک باید گالیله‌هموردا باشند. در این جمله، اصطلاح ِ "گالیله‌هموردا" را به کار می‌بریم و نه "گالیله‌ناوردا" را. به کمیّت‌ها یی می‌گوییم "گالیله‌ناوردا" که مقدار ِ آن‌ها با تبدیل‌ها یِ گالیله تغییر نکند. مثلاً جرم ِ الکترون (در نسبیّت ِ گالیله‌ای) گالیله‌ناوردا است، یعنی برا یِ همه یِ ناظرها یِ لخت یک مقدار دارد. (و البتّه تجربه می‌گوید که در واقع چنین نیست.) برا یِ روشن شدن ِ مطلب ذرّه یِ آزاد ی به جرم ِ m در نظر بگیرید که با سرعت ِ ثابت ِ $\mathbf{v}$ در چارچوب ِ K حرکت می‌کند. انرژی یِ کل ِ این ذرّه هست

$$E=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right).$$

اگر چارچوب ِ K' با سرعت ِ $\mathbf{w}$ نسبت به K حرکت کند، انرژی یِ همین ذرّه، سنجیده شده در چارچوب ِ K'، هست

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2}m\left({v'}_x^2+{v'}_y^2+{v'}_z^2\right)\\ &= \frac{1}{2}m\left\{(v_x-w_x)^2+(v_y-w_x)^2+(v_x-w_x)^2\right\}\\ &= \frac{1}{2}m\left\{v^2-2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+w^2\right\}.\end{aligned}$$

دقّت کنید که در این فرمول‌ها m عوض نشده، پس می‌گوییم جرم ِ ذرّه گالیله‌ناوردا است، امّا اگر $\mathrm{w} \neq 0$ آن وقت به وضوح $E' \neq E$؛ پس انرژی ی ِ جنبشی ی ِ ذرّه گالیله‌ناوردا نیست.

38 قید ِ خلاء در بند ِ پیش لازم است، چرا که می‌دانیم اگر مادّه ای در کار باشد، شکل ِ قانون‌ها ی ِ فیزیک در دست‌گاه‌ها ی ِ مختلف یک‌سان نیست. مثلاً یک استخر را در نظر بگیرید. یک قانون ِ فیزیک این است که اگر سنگ ی را در آب ِ استخر بیندازید، موج‌ها یی تشکیل می‌شود که در همه ی ِ جهت‌ها با یک سرعت حرکت می‌کنند، و در نتیجه دایره‌ها یی هم‌مرکز می‌سازند. امّا این قانون از نظر ِ ناظر ی که کنار ِ استخر با سرعت ِ ثابت می‌دود دیگر برقرار نیست. (خوب است که خواننده در این جا کم ی تأمّل کند و خوب خود اش را قانع کند که واقعاً همین طور است که گفتیم.)

39 معادله‌ها ی ِ دیفرانسیل ی که در فیزیک ظاهر می‌شوند دو دسته اند: معادله ی ِ دیفرانسیل ِ عادّی، و معادله‌ها ی ِ دیفرانسیل ِ پاره‌ای. در معادله‌ها ی ِ دیفرانسیل ِ عادّی تابع‌ها یی ظاهر می‌شوند که به یک متغیّر ِ مستقل بسته‌گی دارند، و این متغیّر ِ مستقل زمان است. امّا بسیار ی از قانون‌ها ی ِ فیزیک به شکل ِ معادله‌ها ی ِ دیفرانسیل ِ پاره‌ای اند، مثلاً معادله ی ِ شرودینگر برا ی ِ یک ذرّه ی ِ آزاد به شکل ِ زیر است.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\overset{2}{\mathrm{grad}}\,\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

که در آن

$$\overset{2}{\mathrm{grad}} := \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

عمل‌گر ِ لاپلاس، یا به اصطلاح لاپلاسی است.[1] در چنین معادله‌ها یی، تابع‌ها یی ظاهر می‌شوند که علاوه بر زمان، به مکان هم بسته‌گی دارند. به چنین تابع‌ها یی "میدان" می‌گوییم.

A هم‌وردایی ی ِ معادله‌ها ی ِ دیفرانسیل ِ عادّی

40 مهم‌ترین معادله ی ِ دیفرانسیل ِ عادّی ای که در فیزیک ظاهر می‌شود قانون ِ دوّم ِ نیوتن است. این معادله برا ی ِ ذرّه ای به جرم ِ m، که آن را P می‌نامیم، چنین است.

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t),$$

[1] منظور از عمل‌گر ِ دیفرانسیل این است که این موجود ِ ریاضی رو ی ِ یک تابع ِ مشتق‌پذیر اثر می‌کند و حاصل یک تابع ِ دیگر می‌شود. مثلاً عمل‌گر ِ $\frac{\partial}{\partial x}$ وقت ی رو ی ِ تابع ِ $\sin(kx-\omega t)$ اثر می‌کند می‌دهد $k\cos(kx-\omega t)$.

$$m\ddot{y} = F_y(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t),$$
$$m\ddot{z} = F_z(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t).$$

در این جا $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ نیرو ی ِ کل ِ وارد بر ذرّه است که می‌تواند به مکان ِ ذرّه، به سرعت ِ آن، و به زمان بسته‌گی داشته باشد. این نیرو را بقیّه ی ِ ذرّه‌ها یی که در دنیا هستند به ذرّه ی ِ P وارد می‌کنند. به ساده‌گی می‌توان نشان داد که برا ی ِ آن که این معادله گالیله‌هم‌وردا باشد، ذرّه باید آزاد باشد، یعنی هر سه مؤلّفه ی ِ نیرو ی ِ وارد بر آن صفر باشد. نحوه ی ِ اثبات ِ این گزاره این است که ابتدا نشان بدهیم که $\mathbf{F}$ نه به مکان ِ P بسته‌گی دارد، نه به سرعت ِ آن، و نه به زمان؛ و بعد نشان بدهیم که مقدار ِ F باید صفر باشد. جزئیّات ِ اثبات را به خواننده وا می‌گذاریم.

41 اکنون دست‌گاه ی را در نظر می‌گیریم که از تعداد ی ذرّه تشکیل شده است. برا ی ِ مثال مظومه ی ِ شمسی را در نظر بگیرید. این دست‌گاه عبارت است از چندین جرم، که با توجّه به فاصله ی ِ آن‌ها از هم، می‌توان آن‌ها را جسم‌ها ی ِ نقطه‌ای انگاشت. این جسم‌ها عبارت اند از خورشید، تعداد ی سیّاره که به دور ِ خورشید می‌گردند، و تعداد ی ماه‌واره که به دور ِ سیّاره‌ها می‌گردند. برا ی ِ توصیف ِ این دست‌گاه به یک دست‌گاه ِ مختصّات نیاز داریم. فرض کنید این دست‌گاه را چنان بگیریم که مرکز ِ جرم ِ کل ِ منظومه در آن ساکن باشد. (مرکز ِ منظومه ی ِ شمسی با تقریب ِ بسیار خوب ی همان مرکز ِ جرم ِ خورشید است.) فرض کنید در این دست‌گاه ِ دکارتی، مکان ِ ذرّه ی ِ i اُم، $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ باشد. تمام ِ این اجسام بر هم نیرو وارد می‌کنند (نیرو ی ِ گرانش). بنا بر قانون ِ گرانش ِ نیوتن، نیرو یی که جسم ِ i اُم به جسم ِ j اُم وارد می‌کند هست

$$\mathbf{F}_{j\to i} = -GM_i\, M_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

پس نیرو یی که به جسم ِ i اُم وارد می‌شود هست

$$\mathbf{F}_i = -G\, M_i \sum_{j\neq i} M_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

و بنا بر این معادله ی ِ حرکت ِ جسم ِ i اُم هست

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j\neq i} M_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

به این ترتیب کل ِ دینامیک ِ منظومه ی ِ شمسی با دست‌گاه ِ معادله‌ها ی ِ زیر معیّن می‌شود. (N تعداد ِ کل ِ جسم‌ها ی ِ منظومه ی ِ شمسی است).

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j\neq i} M_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \qquad i = 1, 2, \cdots, N.$$

برا ی ِ حل ِ این دست‌گاه باید مکان ِ اولیّه و سرعت ِ اوّلیّه ی ِ ذرّه‌ها را بدانیم. دست‌گاه ِ بالا یک ویژه‌گی ی ِ بسیار مهم دارد که همان ناوردایی ی ِ گالیله‌ای است، و آن این است که: اگر معادله‌ها ی ِ نیوتن برا ی ِ منظومه ی ِ شمسی را از دید ِ $\mathcal{O}'$ بنویسیم که با سرعت ِ ثابت نسبت به $\mathcal{O}$ حرکت می‌کند، شکل ِ این معادله‌ها درست مثل ِ دست‌گاه ِ بالا است.

$$\ddot{\mathbf{r}'}_i = -G\sum_{j\neq i} M_j \frac{\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j}{|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|}, \qquad i = 1, 2, \cdots, N.$$

البته، واضح است که مکان‌ها ی ِ اوّلیّه و سرعت‌ها ی ِ اوّلیّه فرق می‌کنند.

B هم‌وردایی ی ِ معادله‌ها ی ِ دیفرانسیل ِ پاره‌ای

42 سؤال ی که می‌خواهیم به آن جواب بدهیم این است که اگر ناظر ِ $\mathcal{O}$ یک ی از قانون‌ها ی ِ فیزیک را به شکل ِ یک معادله ی ِ دیفرانسیل ِ پاره‌ای دید، ناظر ِ $\mathcal{O}'$ همین قانون را به چه شکل ی می‌بیند. یک بخش از پاسخ این است که ببینیم عمل‌گرها ی ِ مشتق‌گیری ی ِ پاره‌ای به چه نحو ی تبدیل می‌شوند. به زودی هم‌وردایی ی ِ معادله ی ِ شرودینگر را بررسی خواهیم کرد، و خواهیم دید که واقعاً تنها یک بخش از پاسخ در نحوه ی ِ تبدیل ِ مشتق‌ها ی ِ پاره‌ای است.

ابتدا چند نمادگذاری ی ِ مناسب معرّفی می‌کنیم، و سپس فرمول ِ کلّی را می‌نویسیم.

i نمادگذاری

43 از این به بعد، در بسیار ی از جاها، از نمادگذاری ی ِ زیر استفاده می‌کنیم.

$$x^0 := t,\ \ x^1 := x,\ \ x^2 := y,\ \ x^3 := z.$$

دقّت کنید که شاخص‌ها را بالا گذاشته ایم، نه پایین (بعداً علّت ِ این کار را خواهیم دید). اگر به توان‌ها ی ِ مختصّه‌ها نیاز پیدا کردیم، از پرانتز استفاده می‌کنیم، مثلاً ${(x^0)}^2$ یعنی t^2. وقت ی می‌نویسیم x^μ، یعنی یک ی از مختصّه‌ها: μ، و هر حرف ِ یونانی ی ِ دیگر ی، می‌تواند یک ی از اعضا ی ِ مجموعه ی ِ $\{0, 1, 2, 3\}$ باشد. برا ی ِ اعضا ی ِ مجموعه ی ِ $\{1, 2, 3\}$ از حروف ِ لاتین استفاده می‌کنیم. اکنون تعریف می‌کنیم

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

که صراحتاً یعنی

$$\partial_0 := \partial_t := \frac{\partial}{\partial x^0} := \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\partial_1 := \partial_x := \frac{\partial}{\partial x^1} := \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\partial_2 := \partial_y := \frac{\partial}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\partial_3 := \partial_z := \frac{\partial}{\partial x^3} := \frac{\partial}{\partial z}.$$

توان‌ها یِ این عمل‌گرها را هم به کار خواهیم برد، مثلاً

$$\partial_0^2 := \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} := \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

علاوه بر این‌ها، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \text{grad} &:= (\partial_1, \partial_2, \partial_3), \\ \partial &:= (\partial_0, \text{grad}), \end{aligned}$$

و یادآوری می‌کنیم که grad^2 یعنی عمل‌گر ِ لاپلاس، در حال ی که هنوز توان ِ دو یِ عمل‌گر ِ ∂ را تعریف نکرده ایم. ضمناً چیزها یی از نوع ِ ∂^0 یا ∂^1 را هم هنوز تعریف نکرده ایم.

44 قاعده یِ تبدیل ِ عمل‌گر ِ ∂_μ در واقع همان قاعده یِ مشتق‌گیری یِ زنجیری است. یادآوری می‌کنیم که اگر $u(x, y)$ و $v(x, y)$ دو تابع ِ دومتغیّره یِ حقیقی باشند، و $f(u, v)$ یک تابع ِ دومتغیّره یِ مشتق‌پذیر باشد، می‌توانیم تعریف کنیم

$$g(x, y) := f(u(x, y), v(x, y)).$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

این اتحادها را به شکل ِ

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial v},$$

می‌نویسیم، و البتّه همیشه دقّت می‌کنیم که طرف ِ چپ ِ این تساوی‌ها بر $g(x,y)$ اثر می‌کند در حال ی که طرف ِ راست ِ آن‌ها بر $f(u,v)$ اثر می‌کند.

اینک فرض کنید x'^μ ها چهار تابع از چهار متغیّر ِ x^μ باشند، که صراحتاً یعنی

$$\begin{aligned} x'^0 &= x'^0(x^0,x^1,x^2,x^3),\\ x'^1 &= x'^1(x^0,x^1,x^2,x^3),\\ x'^2 &= x'^2(x^0,x^1,x^2,x^3),\\ x'^3 &= x'^3(x^0,x^1,x^2,x^3). \end{aligned}$$

اگر f تابع ی از x'^μ ها باشد، و $g(x) := f(x'(x))$، آن وقت داریم

$$\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \sum_{\nu\,0}^{3} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial f}{\partial x'^\nu}.$$

این اتحاد را معمولاً به شکل ِ

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum\nolimits_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

یا

$$\partial_\mu = \sum\nolimits_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\,\partial'_\nu$$

می‌نویسیم همیشه به یاد داریم که عمل‌گر ِ سمت ِ چپ ِ تساوی ی ِ بالا بر $g(x) := f(x'(x))$ که تابع ی از x است اثر می‌کند، در حال ی که عمل‌گر ِ سمت ِ راست بر $f(x')$ اثر می‌کند که تابع ی از x' است.

45 دترمینان ِ

$$J := \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},$$

را یاکُبی ی ِ تبدیل می‌نامیم. اگر یاکُبی ی ِ تبدیل صفر نباشد، نگاشت ِ

$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

یک نگاشت ِ وارون‌پذیر است، و می‌توان آن را یک تغییر ِ مختصّه در صفحه ی ِ دوبعدی تلقّی کرد. تعمیم به بعدها ی ِ بالاتر سرراست است: یاکُبی ی ِ تبدیل یعنی دترمینان ِ

$$J := \det \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right],$$

و حکم ِ گزاره در هر بعد ی درست است.

ii تبدیل ِ مشتق‌ها ی ِ پاره‌ای

46 اینک به ساده‌گی دیده می‌شود که برا ی ِ خیزها ی ِ گالیله‌ای ی ِ

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - v_x\, t, \\ y' &= y - v_y\, t, \\ z' &= z - v_z\, t, \end{aligned}$$

داریم

$$J = \det \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t = \partial'_t - v_x\, \partial'_x - v_y\, \partial'_y - v_z\, \partial'_z = \partial'_t - \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad}', \\ \partial_x = \partial'_x, \\ \partial_y = \partial'_y, \\ \partial_z = \partial'_z. \end{array} \right. \tag{46.1}$$

این سه اتحاد ِ اخیر می‌گویند که عمل‌گر ِ grad^2 همان عمل‌گر ِ grad'^2 است. اثبات ِ این تساوی‌ها با خواننده است.

47 خیزها ی ِ گالیله می‌گویند $t' = t$، و از این جا نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt},$$

در حال ی که همان طور که دیدیم

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad}\,.$$

این دو تساوی با هم هیچ تناقض ی ندارند. برا ی ِ این که این را به‌تر درک کنیم باید به یاد بیاوریم که عمل‌گر ِ $\frac{d}{dt}$ رو ی ِ تابع‌ها ی ِ یک‌متغیّره عمل می‌کند، مثلاً رو ی ِ تابع ی ِ که بسته‌گی ی ِ x ِ ذرّه به t را می‌دهد؛ در حال ی که عمل‌گر ِ $\frac{\partial}{\partial t}$ رو ی ِ میدان‌ها، یعنی رو ی ِ تابع‌ها ی ِ چندمتغیّره عمل می‌کند. این که $\frac{d}{dt}$ همان $\frac{d}{dt'}$ است، ناشی از این واقعیّت است که ساعت‌ها ی ِ هر دو ناظر ِ $\mathcal{O}$ و $\mathcal{O}'$ با یک آهنگ کار می‌کنند (یعنی تیک‌تیک می‌کنند). امّا این که $\frac{\partial}{\partial t}$ با $\frac{\partial}{\partial t'}$ برابر نیست، ناشی از تعریف ِ مشتق‌گیری ی ِ پاره‌ای است: مشتق ِ پاره‌ای نسبت به t، یعنی x و y و z را ثابت نگه داریم و نسبت به t مشتق بگیریم، امّا مشتق ِ پاره‌ای نسبت به t'، یعنی x' و y' و z' را ثابت نگه داریم و نسبت به t' مشتق بگیریم. هر چند $t = t'$، امّا داریم $x' = x - v_x\, t$، $y' = y - v_y\, t$، و $z' = x - v_z\, t$، و بنا بر این ثابت نگه داشتن ِ x و y و z به معنی ی ِ تغییر ِ x' و y' و z' است.

iii هم‌وردایی ی ِ معادله ی ِ شرودینگر

48 بنا بر نظریّه ی ِ مکانیک ِ کوانتمی ی ِ غیرِنسبیّتی، معادله ی ِ شرودینگر برا ی ِ یک ذرّه ی ِ آزاد این است:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

در این جا m جرم ِ ذرّه، $\hbar$ ثابت ِ پلانک (تقسیم بر 2π)، و ψ تابع ِ حالت، یا تابع ِ موج ِ ذرّه است. تابع ِ حالت یک کمیّت ِ مختلط است و تعبیر ِ آن این است:

$|\psi(x,y,z,t)|^2\, dx\, dy\, dz$ برابر است با احتمال ِ حضور ِ ذرّه در جعبه ای به ابعاد ِ $dx \times dy \times dz$ اطراف ِ نقطه ی ِ (x,y,z) در زمان ِ t .

49 این که حالت ِ یک ذرّه با یک تابع ِ حالت ِ مختلط داده می‌شود که حل ِ معادله ی ِ شرودینگر است یک ی از قانون‌ها ی ِ فیزیک است، و اگر اصل ِ تقارن ِ گالیله‌ای درست باشد، باید در تمام ِ دست‌گاه‌ها ی ِ لخت به همین شکل برقرار باشد. پس معادله ی ِ شرودینگر برا ی ِ ذرّه ی ِ آزاد در دست‌گاه ِ K' باید به شکل ِ زیر باشد.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t'}.$$

امّا اگر از اتحادها ی ِ (46.1) استفاده کنیم، خواهیم دید که:

$$-\frac{\hbar'^2}{2m}\nabla'^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t'} - i\hbar\mathbf{v}\cdot\nabla'\psi.$$

این دو معادله با هم تناقض ندارند، زیرا علی‌الاصول ψ' می‌تواند با ψ فرق داشته باشد، طور ی که هر دو معادله ی ِ بالا درست باشند. نکته ی ِ بسیار مهم در این جا (یعنی در گالیله‌هم‌وردا

بودن ِ معادله ی ِ شرودینگر برا ی ِ ذرّه ی ِ آزاد) این است که فاز تابع ِ موج ِ یک تک‌ذرّه ی ِ آزاد مشاهده‌پذیر نیست. منظور از فاز هر عدد ِ مختلط ی است که قدرِمطلق ِ آن 1 باشد، یعنی هر عدد ی به شکل ِ $e^{i\alpha}$ که در آن α یک عدد ِ حقیقی است.

50 **مسئله.** تابع ِ $\alpha(x',y',z',t')$ چه باشد که اگر تعریف کنیم

$$\psi'(x',y',z',t') := \alpha(x',y',z',t')\,\psi\circ f(x',y',z',t'),$$

و ψ حل ِ معادله ی ِ شرودینگر در K باشد، ψ' حل ِ معادله ی ِ شرودینگر در K' باشد؟ یعنی داشته باشیم

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t'}.$$

در این جا

$$\psi\circ f(\mathbf{x}',t') := \psi(\mathbf{x}'-\mathbf{w}t',t'),$$

و $\mathbf{w}$ بردار ِ سرعت ِ دست‌گاه ِ K' نسبت به دست‌گاه ِ K است.

فصل III

نسبیّت ِ خاص I: خیزها ی ِ لُرنتس

A ناوردا بودن ِ سرعت ِ نور

51 نتیجه ی ِ بسیار ی از آزمایش‌ها ما را متقاعد کرده که نور موج است، و این موج در خلاء، در همه ی ِ جهت‌ها، با سرعت ِ $c \simeq 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ منتشر می‌شود. بیان ِ این مطلب به زبان ِ ریاضی این است که شدّت ِ نور، I، میدان ی است که معادله ی ِ دیفرانسیل ِ زیر را بر می‌آورد.

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \overset{2}{\mathrm{grad}}\, I = 0. \tag{51.1}$$

امّا شکل ِ این معادله در نتیجه ی ِ یک خیز ِ گالیله‌ای عوض می‌شود. بنا بر این اگر تبدیل ِ بین ِ دست‌گاه‌ها ی ِ لخت ی که با سرعت ِ ثابت نسبت به هم حرکت می‌کنند همان خیزها ی ِ گالیله‌ای باشد، و در یک ی از این دست‌گاه‌ها ی ِ لخت، مثلاً دست‌گاه ِ K، شدّت ِ نور معادله ی ِ موج ِ بالا را بر آورد، در آن صورت شدّت ِ نور در یک چارچوب ِ دیگر، مثلاً K'، دیگر حل ِ معادله ای شبیه ِ معادله ی ِ بالا نیست. بنا بر این می‌توان با انجام ِ آزمایش در داخل ِ K' و به دست آوردن ِ معادله ی ِ دیفرانسیل ِ پاره‌ای ی ِ شدّت ِ نور، سرعت ِ K' نسبت به K را به دست آورد. این یعنی که یک ی از دست‌گاه‌ها ی ِ لخت (K) با دیگر دست‌گاه‌ها ی ِ لخت فرق دارد، و سرعت ِ هر دست‌گاه ِ لخت ی، مثلاً K' را، نسبت به این دست‌گاه ِ مرجّح ِ K می‌توان با انجام ِ آزمایش ی در K' و بدون ِ نگاه کردن به K به دست آورد.

52 اینشتین اصل ِ نسبیّت ِ گالیله را تعمیم داد، به این ترتیب که پذیرفت که همه ی ِ قانون‌ها ی ِ فیزیک، از جمله قانون ِ انتشار ِ نور، در همه ی ِ دست‌گاه‌ها ی ِ لخت به یک شکل اند،

و بنا بر این با هیچ آزمایش ی در درون ِ یک آزمایش‌گاه ِ لخت نمی‌توان سرعت ِ آن را به دست آورد. اکنون اگر بپذیریم که یک قانون ِ فیزیک این است که "شدّت ِ نور حل ِ معادله ی ِ موج ِ (51.1) است"، آن وقت باید بپذیریم که خیزها ی ِ گالیله‌ای تبدیل ِ درست ِ دو دست‌گاه که نسبت به هم سرعت ِ ثابت دارند نیست. در این بخش خیزها یی موسوم به خیزها ی ِ لُرنتس را معرّفی می‌کنیم که خاصیّت ِ شان این است که شکل ِ معادله ی ِ موج را تغییر نمی‌دهند. این که آیا واقعاً تبدیل ِ بین ِ دست‌گاه‌ها یی که با سرعت ِ ثابت نسبت به هم حرکت می‌کنند همین خیزها ی ِ لُرنتس اند یا نه، مطلب ی است که باید آزمایش آن را تأیید یا رد کند.

53 از آزمایش می‌دانیم که صوت چیز ی نیست جز موج ِ فشار (یا چگالی) که اگر هوا جریان ِ کپّه‌ای نداشته باشد، در همه ی ِ جهت‌ها با سرعت ِ تقریباً $300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ منتشر می‌شود. این سرعت را w می‌نامیم. فرض کنید چگالی ی ِ هوا ρ باشد. (در واقع چگالی هست $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ که در آن ρ_0 ثابت است و $\delta\rho(t,x,y,z)$ انحراف ِ چگالی از مقدار ِ ρ_0 است). $\delta\rho$ حل ِ معادله ی ِ زیر است.

$$-\frac{1}{w^2}\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \overset{2}{\mathrm{grad}}\,\delta\rho = 0. \tag{53.1}$$

می‌دانیم که این معادله تقارن ِ گالیله‌ای ندارد، پس آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که این معادله یک قانون ِ فیزیک نیست؟ نه. به این دلیل که می‌دانیم که صوت موج ِ یک محیط ِ مادّی است، و آن محیط ِ مادّی (هوا) یک دست‌گاه ِ مرجع ِ مرجّح تعریف می‌کند (دست‌گاه ِ سکون ِ هوا) که در آن دست‌گاه، و فقط در آن دست‌گاه است که صوت در همه ی ِ جهت‌ها با یک سرعت (w) حرکت می‌کند و $\delta\rho$ حل ِ معادله ی ِ (53.1) است. فرق ِ مهم ِ نور با صوت در این است که نور در خلاء منتشر می‌شود و نه در یک محیط ِ مادّی. اگر نور در یک محیط ِ مادّی (اثیر) منتشر می‌شد، آن وقت هیچ اشکال ی نداشت که در یک دست‌گاه (دست‌گاه ِ سکون ِ اثیر) در همه ی ِ جهت‌ها با یک سرعت منتشر شود، و در دست‌گاه‌ها ی ِ دیگر سرعت اش به جهت بسته‌گی داشته باشد.

54 فرض کنید سنگ ی را در یک استخر ِ آرام بیندازیم. این باعث می‌شود موج ی بر سطح ِ آب ِ استخر به وجود آید. اگر عمق ِ آب ِ استخر در تمام ِ نقاط ِ استخر ثابت و حدود ِ متر باشد، این موج با سرعت ِ ثابت ی از مرتبه ی ِ $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ در همه ی ِ جهت‌ها رو ی ِ سطح ِ آب ِ استخر منتشر شود. این سرعت را w می‌نامیم. اگر سنگ در لحظه ی ِ t_0 به نقطه ی ِ (x_0, y_0) ِ سطح ِ آب خورده باشد، در لحظه ی ِ $t > t_0$، جبهه ی ِ نخستین موج ِ پدید آمده در سطح ِ آب ِ استخر دایره ای است به شعاع ِ $w(t-t_0)$، که یعنی معادله ی ِ

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - w^2\,(t-t_0)^2 = 0.$$

این معادله معادله ی ِ یک مخروط ِ معمولی (2 بعدی) در فضا ی ِ 3 بعدی ی ِ (t,x,y) است. این مخروط را مخروط ِ موج ِ سطح ِ آب ِ استخر می‌نامیم. دقّت کنید که مخروط ِ موج مخروط ی است در فضازمان و نه در فضا. آن چه در فضا (یعنی بر سطح ِ آب) مشاهده می‌شود دایره ای است که شعاع ِ آن با سرعت ِ w بزرگ می‌شود.

55 اینک فرض کنید در آزمایش‌گاه ِ لخت ِ K، در لحظه ی ِ t_0 در نقطه ی ِ (x_0,y_0,z_0) یک چراغ را فقط برا ی ِ یک لحظه (یعنی یک بازه ی ِ زمانی ی ِ کوچک ِ δt) روشن کنیم (و ضمناً فرض بر این است که ابعاد ِ چراغ بسیار کوچک است). نور ی که از این چراغ گسیل می‌شود در همه ی ِ جهت‌ها با سرعت ِ ثابت ِ

$$c = 299,792,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

حرکت می‌کند. این یعنی در لحظه ی ِ $t > t_0$ نور ِ این چراغ رو ی ِ سطح ِ کره ای است به شعاع ِ $c(t-t_0)$. بنا بر این در لحظه ی ِ t نقاط ی از فضا روشن اند که معادله ی ِ زیر را بر می‌آورند.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - c^2\,(t-t_0)^2 = 0.$$

این معادله معادله ی ِ یک مخروط ِ 3 بعدی در فضا ی ِ 4 بعدی ی ِ (t,x,y,z) است که آن را مخروط ِ نور می‌نامیم. در این جا هم باید دقّت کنیم که این مخروط یک مخروط ِ 3 بعدی در فضازمان است. آن چه در فضا دیده می‌شود کره ای است که شعاع ِ آن با سرعت ِ ثابت ِ c بزرگ می‌شود.

B خیزها ی ِ لُرنتس I: خیز در امتداد ِ محور ِ x

56 فرض کنید تبدیل ِ بین ِ دست‌گاه‌ها ی ِ K و K' چنین باشد:

$$\begin{cases} t = \gamma\left(t' + \dfrac{v}{c^2}\,x'\right), \\ x = \gamma\left(x' + v\,t'\right), \\ y = y', \\ z = z', \end{cases} \tag{56.1}$$

که در این جا $c = 299,792,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، و

$$\gamma(v) := \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

فعلاً کار ی به این نداریم که این تبدیل از کجا و با چه فرض‌ها یی به دست آمده است. فعلاً می‌خواهیم ببینیم نتیجه‌ها ی ِ ریاضی ی ِ چنین تبدیل‌ها یی، که آن‌ها را خیزها ی ِ لُرنتس می‌نامیم چیست.

57 مبداء ِ دست‌گاه ِ K' یعنی نقطه ی ِ $x' = y' = z' = 0$ به ازا ی ِ تمام ِ زمان‌ها (t' ها). این معادله در دست‌گاه ِ K به این شکل است:

$$t = \gamma t', \qquad x = \gamma\, v\, t', \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

با حذف ِ t' از دو معادله ی ِ اوّل می‌بینیم که $x = vt$. پس مبداء ِ دست‌گاه ِ K' نسبت به دست‌گاه ِ K با سرعت ِ ثابت ِ v حرکت می‌کند. به ساده‌گی می‌توان دید که هر نقطه از دست‌گاه ِ K' هم با همین سرعت ِ v در امتداد ِ محور ِ x ها ی ِ دست‌گاه ِ K حرکت می‌کند. (اثبات با خواننده است.)

58 اگر در دست‌گاه ِ معادله‌ها ی ِ (56.1) t'، x'، y'، و z' را مجهول و t، x، y، و z را معلوم بگیریم، و دست‌گاه را حل کنیم، خواهیم داشت

$$\left\{\begin{array}{l} t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}\,x\right), \\ x' = \gamma\,(x - v\,t)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \end{array}\right. \tag{58.1}$$

از این فرمول‌ها به ساده‌گی نتیجه می‌شود که هر نقطه از دست‌گاه ِ K نسبت به دست‌گاه ِ K' با سرعت ِ ثابت ِ $(-v, 0, 0)$ حرکت می‌کند.

C ناوردا بودن ِ سرعت ِ نور

59 فرض کنیم در دست‌گاه ِ K در لحظه ی ِ $t_0 = 0$ یک چراغ را در نقطه ی ِ $(0, 0, 0)$ روشن کنیم. معادله ی ِ مخروط ِ نور ِ این موج ِ کروی در دست‌گاه ِ K هست

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\, t^2 = 0.$$

اینک یک محاسبه ی ِ ساده و سرراست نشان می‌دهد که

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\, t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\, t'^2.$$

بنا بر این معادله ی ِ مخروط ی که انتشار ِ همین موج ِ کروی را در دست‌گاه ِ K' توصیف می‌کند باز هم یک مخروط است، یعنی در فضا (از دید ِ K') کره ای که شعاع اش با سرعت ِ c (همان c) زیاد می‌شود.

D اتسّاع ـِ زمان = کند کار کردن ـِ ساعت‌ها ی ـِ متحرّک

فرض کنید ساعت ی در دست‌گاه ـِ K' در نقطه ی ـِ $x' = 0$، $y' = 0$، $z' = 0$ ساکن باشد و در هر بازه ی ـِ زمانی ی ـِ dt' ثانیه‌ای یک تیک بکند. دو تا از این تیک‌ها را در نظر بگیریم:

تیک ـِ اوّل $t' = 0, \;\; x' = 0, \;\; y' = 0, \;\; z' = 0$

تیک ـِ دوّم $t' = dt', \;\; x' = 0, y' = 0, \;\; z' = 0$

این دو تیک کردن ـِ ساعت، دو روی‌داد در فضازمان هستند، که اگر تبدیل ـِ بین ـِ مختصّه‌ها ی ـِ K و K' تبدیل ـِ (56.1) باشد، داریم

تیک ـِ اوّل، در K $t = 0, \;\; x = 0, \;\; y = 0, \;\; z = 0$

تیک ـِ دوّم، در K $t = \gamma dt', \;\; x = v\, dt, \;\; y = 0, z = 0$

همان طور که می‌بینید، در دست‌گاه ـِ K فاصله ی ـِ این دو تیک $\gamma dt'$ ثانیه است. معنی ی ـِ این حرف این است که آهنگ ـِ کار ـِ ساعت ـِ متحرک کندتر از آهنگ ـِ کار ـِ ساعت ـِ ساکن است.

E انقباض ـِ طول = کوتاه شدن ـِ خط‌کش‌ها

60 خط‌کش ی را در نظر بگیرید که در دست‌گاه ـِ K' ساکن است. فرض کنید سر ـِ خط‌کش در نقطه ی ـِ $x' = A'$، $y' = B'$، $z' = C'$؛ و ته ـِ خط‌کش در نقطه ی ـِ $x' = A' + \Delta x'$، $y' = B' + \Delta y'$، $z' = C' + \delta z'$ باشد. طول ـِ این خط‌کش، در دست‌گاه ـِ K' هست

$$L_0 = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}.$$

دقّت کنید که دست‌گاه ـِ K' دست‌گاه ـِ سکون ـِ خط‌کش است، به همین علّت به L_0 می‌گوییم طول‌ِسکون ـِ خط‌کش، یا اصطلاحاً ویژه‌طول ـِ خط‌کش.

اکنون ببینیم طول ـِ این خط‌کش در دست‌گاه ـِ K چه قدر است. دقّت کنید که خط‌کش در دست‌گاه ـِ K با سرعت ـِ $(v, 0, 0)$ حرکت می‌کند. معقول‌ترین راه برا ی ـِ نسبت دادن ـِ یک طول به این خط‌کش ـِ متحرّک این است که ببینیم در یک t سر و ته ـِ خط‌کش کجا هستند، و بعد طول ـِ بردار ی که سر را به ته ـِ خط‌کش وصل می‌کند حساب کنیم. پیش از انجام ـِ این کار بهتر است مثال بزنیم: فرض کنید قطار ی در حال ـِ حرکت است، مثلاً از تهران می‌رود به مشهد. سر ـِ قطار در ساعت ـِ 10 ـِ شب در مشهد است، و ته ـِ قطار در ساعت ـِ 10 ـِ صبح در تهران بوده. آیا می‌توان گفت که طول ـِ قطار برابر است با فاصله ی ـِ تهران تا مشهد؟ قطعاً نه. باید ببینیم در یک لحظه، یعنی در یک t سر و ته ـِ قطار کجا هستند. تنها در این صورت است که می‌توان

$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ را طول ِ قطار دانست. پس برا ی ِ تعیین ِ طول ِ خط‌کش ِ متحرّک باید ببینیم سرو ته ِ این خط‌کش در دست‌گاه ِ K در یک لحظه ی ِ خاص، مثلاً t کجا هستند. دقّت کنید که سر و ته ِ خط‌کش دو نقطه اند که در دست‌گاه ِ K با سرعت ِ $(v,0,0)$ حرکت می‌کنند. معادله ی ِ جهان‌خط ِ سر و ته ِ خط‌کش را می‌توان این طور نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\text{سر} \quad x(t)=x_0+vt,\ \ y(t)=y_0,\ \ z(t)=z_0,\\
&\text{ته} \quad x(t)=x_0+\Delta x+vt,\ \ y(t)=y_0+\Delta y,\ \ z(t)=z_0+\Delta z.
\end{aligned}
$$

که در این صورت طول ِ خط‌کش در دست‌گاه ِ K هست

$$
\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}.
$$

مسئله این است که Δx، Δy، و Δz چه ربط ی به $\Delta x'$، $\Delta y'$، و $\Delta z'$ دارند. برا ی ِ یافتن ِ این رابطه از وارون ِ تبدیل ِ (56.1) یعنی از تبدیل ِ (58.1) استفاده می‌کنیم، و می‌بینیم

$$
\begin{aligned}
\Delta x' &= \gamma\left(\Delta x-\frac{v}{c^2}\Delta t\right)\Big|_{\Delta t=0}=\gamma\Delta x,\\
\Delta y' &= \Delta y,\\
\Delta z' &= \Delta z.
\end{aligned}
$$

از این جا به ساده‌گی دیده می‌شود که

$$
\begin{aligned}
L &:= \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\\
&= \sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2}.
\end{aligned}
$$

اگر θ' زاویه ی ِ خط‌کش با محور ِ x' باشد (زاویه ای که در دست‌گاه ِ سکون ِ خط‌کش، یعنی دست‌گاه ِ K' تعریف می‌شود)، آن وقت داریم

$$
\begin{aligned}
L_0\,\cos\theta' &= \Delta x',\\
L_0\,\sin\theta' &= \sqrt{(\Delta y')^2+(\Delta z')^2}.
\end{aligned}
$$

بنا بر این

$$
L=L_0\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta'+\sin^2\theta'}.
$$

این رابطه می‌گوید که اگر θ' صفر باشد، آن وقت طول ِ خط‌کش ِ متحرّک کوتاه‌تر از طولِ‌سکون ِ آن خط‌کش است (با یک ضریب ِ $1/\gamma$)؛ امّا اگر $\theta' = \pi/2$، آن وقت طول ِ خط‌کش ِ متحرّک همان ویژه‌طول ِ آن است. در حالت‌ها ی ِ بینابینی، یعنی $0 < \theta' < \pi/2$، هم‌واره طول ِ خط‌کش ِ متحرّک کوتاه‌تر از ویژه‌طول ِ آن است، امّا نسبت ِ این دو عدد به زاویه ی ِ خط‌کش با راستا ی ِ سرعت بسته‌گی دارد.

اگر θ زاویه ی ِ خط‌کش با محور ِ x باشد (زاویه ای که در دست‌گاه ِ K تعریف می‌شود که خط‌کش در آن متحرّک است)، آن وقت داریم

$$\begin{aligned} L\,\cos\theta &= \Delta x,\\ L\,\sin\theta &= \sqrt{(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}. \end{aligned}$$

رابطه ی ِ بین ِ θ و θ' این است:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\sqrt{(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(\Delta y')^2+(\Delta z')^2}}{\frac{\Delta x'}{\gamma}}\\ &= \gamma\tan\theta'. \end{aligned}$$

به این ترتیب دو نتیجه ی ِ مهم گرفتیم، و آن این که اگر تبدیل ِ بین ِ دو دست‌گاه ِ لخت به شکل ِ (56.1) و وارون ِ آن (58.1) باشد، آن وقت: 1) طول ِ اجسام ِ صُلب در امتداد ِ حرکت ِ شان با یک ضریب ِ $1/\gamma$ کوتاه می‌شود، و بنا بر این 2) زاویه ی ِ خط‌کش‌ها با محورها ی ِ مختصّات بسته‌گی به این دارد که این زاویه‌ها در چه دست‌گاه ی سنجیده شوند.

F تبدیل ِ سرعت‌ها

61 ذرّه ای را در نظر بگیرید که حرکت می‌کند. بنا به تعریف، در دست‌گاه ِ K، بردار ِ سرعت ِ این ذرّه هست

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (u_x, u_y, u_z)\,,$$

و در دست‌گاه ِ K'، بردار ِ سرعت ِ همین ذرّه هست

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right).$$

با دیفرانسیل‌گیری می‌بینیم

$$\begin{aligned} dt &= \gamma\left(dt' + v\,dx'\right), \\ dx &= \gamma\left(dx' + v, dt'\right), \\ dy &= dy', \\ dz &= dz'. \end{aligned}$$

با تقسیم ِ dx و dy و dz به dt می‌بینیم

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x} \tag{61.1}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + vu'_x\right)}, \tag{61.2}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + vu'_x\right)}. \tag{61.3}$$

این رابطه ی ِ تبدیل ِ سرعت‌ها است که می‌توانیم آن‌ها را به شکل ِ زیر بنویسیم.

$$\mathbf{u}_\parallel = \frac{\mathbf{u}'_\parallel + \mathbf{v}}{1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}, \tag{61.4}$$

$$\mathbf{u}_\perp = \frac{\mathbf{u}_\perp}{\gamma\left(1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}\right)}, \tag{61.5}$$

که در این جا

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

اکنون دقّت می‌کنیم که

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 1 - u_\parallel\, v \\ &= 1 - \frac{u'_\parallel\, v + v^2}{1 + u'_\parallel\, v} \\ &= \frac{1 - v^2}{1 + u'_\parallel\, v}, \end{aligned}$$

و از این جا

$$\left(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right)\left(1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}\right) = 1 - v^2.$$

به کمک ِ این اتحاد می‌توان (61.5) و (61.4) را برا ی ِ $\mathbf{u}'_\parallel$ و $\mathbf{u}'_\perp$ حل کرد. نتیجه این است:

$$\mathbf{u}'_\parallel = \frac{\mathbf{u}_\parallel - \mathbf{v}}{1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}},$$
$$\mathbf{u}'_\perp = \frac{\mathbf{u}_\perp}{\gamma\,(1 + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v})},$$

این نتیجه می‌گوید

وارون ِ تبدیل ِ سرعت‌ها به این ترتیب به دست می‌آید که جا ی ِ نمادها ی ِ زبردار و بی‌زبر را عوض کنیم، و به جا ی ِ $\mathbf{v}$ بگذاریم $-\mathbf{v}$.

اکنون u^2 را بر حسب ِ $\mathbf{u}'$ و $\mathbf{v}$ به دست می‌آوریم (جزئیّات ِ محاسبه با خواننده).

$$u^2 = u_\parallel^2 + u_\perp^2 \tag{61.6}$$

$$= 1 - \frac{(1-v^2)(1-{u'}^2)}{(1+\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v})^2} \tag{61.7}$$

$$u = \frac{\sqrt{(\mathbf{u}'-\mathbf{v})^2 - (\mathbf{u}'\times\mathbf{v})^2}}{1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}, \tag{61.8}$$

$$= \frac{\sqrt{(\mathbf{u}'-\mathbf{v})^2 - c^{-2}\,(\mathbf{u}'\times\mathbf{v})^2}}{1-c^{-2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}, \tag{61.9}$$

(61.7) را به دو شکل ِ معادل ِ زیر می‌نویسیم.

$$1 - u^2 = \frac{(1-v^2)(1-u'^2)}{(1+\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v})^2}, \tag{61.10}$$

$$\gamma(u) = \gamma(v)\,\gamma(u')\,\left(1 + \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}\right) \tag{61.11}$$

از این جا به ساده‌گی قضیّه ی ِ بسیار مهم ِ زیر نتیجه می‌شود.

62 قضیّه. $u^2 = c^2$ اگر و تنها اگر $u'^2 = c^2$

63 فرض کنید در چارچوب ِ لخت ِ K، دو ذرّه ی ِ 1 و 2 با سرعت‌ها ی ِ ثابت ِ $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ حرکت کنند. بنا به تعریف، سرعت ِ ذرّه ی ِ 2 نسبت به ذرّه ی ِ 1، که آن را با نماد ِ $\mathbf{u}_{21}$ نشان می‌دهیم، یعنی سرعت ِ ذرّه ی ِ 2 در چارچوب ِ K_1، که این چارچوب ِ K_1 با سرعت ِ $\mathbf{u}_1$ نسبت به K حرکت می‌کند. در نسبیّت ِ گالیله‌ای داریم

$$\mathbf{u}_{21}^{\mathrm{Galilean}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \tag{63.1}$$

$$u_{21}^{\rm Galilean} = \sqrt{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2)^2}. \tag{63.2}$$

امّا در نسبیّت ِ خاص، با توجّه به فرمول‌ها ی ِ جمع ِ سرعت‌ها، داریم

$$\mathbf{u}_{21}^{\|} = \frac{\mathbf{u}_2^{\|} - \mathbf{u}_1^{\|}}{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}, \tag{63.3}$$

$$\mathbf{u}_{21}^{\perp} = \frac{\mathbf{u}_2^{\perp}}{\gamma(u_1)\,(1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)}, \tag{63.4}$$

$$u_{21} = \frac{\sqrt{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^2 - (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)^2}}{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}, \tag{63.5}$$

$$= \frac{\sqrt{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^2 - c^{-2}\,(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)^2}}{1 - c^{-2}\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}. \tag{63.6}$$

64 در حالت ِ کلّی، اگر بردار ِ سرعت ِ چارچوب ِ K' نسبت به K $\mathbf{v}$ باشد، و بردار ِ سرعت ِ یک ذرّه ی ِ مادّی نسبت به K' $\mathbf{u}'$ باشد، بردار ِ سرعت ِ این ذرّه نسبت به K تابع ی است از $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}'$ که آن را با نماد ِ $f(\mathbf{v},\mathbf{u}')$ نشان می‌دهیم. نکته یِ بسیار مهم در مورد ِ جمع ِ نسبیّتی ی ِ سرعت‌ها این است که در حالت ِ کلّی

$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) \neq f(\mathbf{v},\mathbf{u}).$$

برای ِ دیدن ِ این موضوع کافی است محاسبه کنیم تا مثلاً ببینیم اگر $\mathbf{v} = (v,0,0)$ و $\mathbf{u} = (0,u,0)$، آن وقت داریم

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) &= (v, u\sqrt{1 - v^2/c^2}, 0)\,, \\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= (v\sqrt{1 - u^2/c^2}, u, 0)\,. \end{aligned}$$

G تبدیل ِ شتاب‌ها

65 برا ی ِ به دست آوردن ِ رابطه ی ِ تبدیل ِ شتاب از (61.1) و (61.2) و (61.3) دیفرانسیل می‌گیریم

$$du_x = \frac{du'_x\ (1+v\,u'_x) - v\,du'_x\ (u'_x+v)}{(1+v\,u'_x)^2} = \frac{1-v^2}{(1+v\,u'_x)^2}\,du'_x$$

$$= \frac{du'_x}{\gamma^2\,(1+v\,u'_x)^2}, \tag{65.1}$$

$$du_y = \frac{1}{\gamma}\frac{du'_y\ (1+v\,u'_x) - v\,du'_x\,u'_y}{(1+v\,u'_x)^2}, \tag{65.2}$$

$$du_z = \frac{1}{\gamma}\frac{du'_z\ (1+v\,u'_x) - v\,du'_x\,u'_z}{(1+v\,u'_x)^2}. \tag{65.3}$$

اگر این‌ها را به $dt = \gamma\,(dt' + v\,dx')$ تقسیم کنیم می‌بینیم

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3\,(1+v\,u'_x)^3}, \tag{65.4}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2\,(1+v\,u'_x)^2} - \frac{v\,a'_x\,u'_y}{\gamma^2\,(1+v\,u'_x)^3}, \tag{65.5}$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2\,(1+v\,u'_x)^2} - \frac{v\,a'_x\,u'_z}{\gamma^2\,(1+v\,u'_x)^3}. \tag{65.6}$$

این رابطه‌ها را می‌توان به شکل ِ زیر نوشت.

$$\mathbf{a}_\parallel = \frac{\mathbf{a}'_\parallel}{\gamma^3\,(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')^3}, \tag{65.7}$$

$$\mathbf{a}_\perp = \frac{\mathbf{a}'_\perp}{\gamma^2\,(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')^2} - \frac{\mathbf{u}'_\perp\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{\gamma^2\,(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')^3}. \tag{65.8}$$

66 فرض کنید سرعت ِ ذرّه در دست‌گاه ِ لخت ِ K' در یک روی‌داد صفر باشد، که این یعنی در این روی‌داد ِ خاص، $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. در این روی‌داد، دست‌گاه ِ K' یک دست‌گاه ِ سکون ِ آنی برا ی ِ آن ذرّه است. شتاب ِ ذرّه در این دست‌گاه را ویژه‌شتاب ِ ذرّه می‌نامیم. با توجّه به رابطه‌ها ی ِ

تبدیل ِ شتاب داریم

$$\mathbf{a}_\parallel = \gamma^{-3}(u)\,\mathbf{a}_\parallel^{\rm RF} \tag{66.1}$$

$$\mathbf{a}_\perp = \gamma^{-2}(u)\,\mathbf{a}_\perp^{\rm RF}. \tag{66.2}$$

H خیزها ی ِ لُرنتس II: خیز در امتداد ِ بردار ِ $\mathbf{n}$

67 فرض کنیم محورها ی ِ x'، y'، و z' ِ دستگاه ِ K' به ترتیب با محورها ی ِ x، y، و z ِ دستگاه ِ K موازی باشند، و بردار ِ سرعت ِ K' نسبت به K $\mathbf{v}$، و بردار ِ سرعت ِ K نسبت به K' $\mathbf{v}'$ باشد.

$$\mathbf{v} = (\,v_1 \quad v_2 \quad v_3\,)^\top,$$
$$\mathbf{v}' = (\,v_1' \quad v_2' \quad v_3'\,)^\top.$$

اگر محورها ی ِ K و K' موازی باشند

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{v} \qquad \text{or} \qquad v_j' = -v_j\,.$$

این گزاره به نام ِ اصل ِ وارونه‌گی (یا دوجانبه‌گی) معروف است.

68 دو بردار ِ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}'$ را وارد می‌کنیم

$$\mathbf{x} = (x^1,\ x^2,\ x^3) = (x,\ y,\ z),$$
$$\mathbf{x}' = (x'^1,\ x'^2,\ x'^3) = (x',\ y',\ z'),$$

و تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} &v := |\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'| \quad \mathbf{n} := \mathbf{v}/v = -\mathbf{v}'/v, \quad \mathbf{n} =: (n_1, n_2, n_3)\\ &\mathbf{x}_\parallel := \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\mathbf{n}, \qquad \mathbf{x}_\perp := \mathbf{x} - \mathbf{x}_\parallel,\\ &\mathbf{x}'_\parallel := \mathbf{x}'\cdot\mathbf{n}\mathbf{n}, \qquad \mathbf{x}'_\perp := \mathbf{x}' - \mathbf{x}'_\parallel. \end{aligned}$$

از اصل ِ وارونه‌گی نتیجه می‌شود که $\mathbf{n}$ در هر دو دستگاه یک ی است.

69 اینک می‌توانیم تبدیل ِ (56.1) را به شکل ِ زیر بنویسیم.

$$\mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}_\perp, \quad \mathbf{x}'_\parallel = \gamma(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{v}t), \quad t' = \gamma\left(t - |\mathbf{x}_\parallel|\frac{v}{c^2}\right),$$

و با افزودن ِ $\mathbf{x}'_\perp$ به $\mathbf{x}'_\parallel$ می‌بینیم

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\gamma - 1)\mathbf{x}_\parallel - \gamma \mathbf{v} t = \mathbf{x} + (\gamma - 1)\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\,\mathbf{n} - \gamma \mathbf{v} t,$$

که می‌توان آن را برحسب ِ مؤلّفه‌ها ی ِ دکارتی این طور نوشت.

$$x'_i = x_i + (\gamma - 1)\sum_{j=1}^{3} x_j n_j n_i - \gamma v_i t\,.$$

نوشتن ِ بخش ِ زمانی هم سرراست است.

$$t' = \gamma t - \gamma \sum_{j=1}^{3} v_j x_j\,.$$

حالا می‌توانیم این دو رابطه را به شکل ِ ماتریسی ی ِ زیر بنویسیم.

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\dfrac{v_1}{c^2} & -\gamma\dfrac{v_2}{c^2} & -\gamma\dfrac{v_3}{c^2} \\ -\gamma\, v_1 & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_1^2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_1\, v_2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_1\, v_3 \\ -\gamma\, v_2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_2\, v_1 & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_2^2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_2\, v_3 \\ -\gamma\, v_3 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_3\, v_1 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_3\, v_2 & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

با کم ی محاسبه می‌توان نشان داد که وارون ِ این رابطه به شکل ِ زیر است.

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\dfrac{v_1}{c^2} & \gamma\dfrac{v_2}{c^2} & \gamma\dfrac{v_3}{c^2} \\ \gamma\, v_1 & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_1^2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_1\, v_2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_1\, v_3 \\ \gamma\, v_2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_2\, v_1 & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_2^2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_2\, v_3 \\ \gamma\, v_3 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_3\, v_1 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_3\, v_2 & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

ماتریس ِ 4×4 ی را که در این‌جا ظاهر شده خیز ِ خالص می‌نامیم و آن را با نماد ِ $\mathfrak{B}(\mathbf{v})$ نشان می‌دهیم.

$$\mathfrak{B}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\dfrac{v_1}{c^2} & \gamma\dfrac{v_2}{c^2} & \gamma\dfrac{v_3}{c^2} \\ \gamma\, v_1 & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_1^2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_1\, v_2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_1\, v_3 \\ \gamma\, v_2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_2\, v_1 & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_2^2 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_2\, v_3 \\ \gamma\, v_3 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_3\, v_1 & \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_3\, v_2 & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{v^2} v_3^2 \end{pmatrix}$$