۹۴/۲/۲۸

## تبدیل لاپلاس:

تبدیلات لاپلاس ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه خطی می باشند مزیت روش تبدیل لاپلاس برای حل این معادلات آن است که بطور مستقیم و در یک مرحله جواب خصوصی معادله حاصل می شود و نیاز به حل معادله همگن و سپس یافتن جواب خصوصی معادله و اعمال شرایط اولیه نداریم، همچنین برای معادلات غیرهمگن نیز مورد استفاده قرار می گیرد مهمترین دسته از تبدیلات، تبدیلات انتگرالی می باشند که فرم زیر ارائه می شوند:

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)f(t)\,dt = F(s)$$ که $K(s,t)$ هسته تبدیل و $\alpha$ و $\beta$ کران های انتگرال گیری هستند ($\alpha$ و $\beta$ می توانند $\infty$ باشند)

## تبدیل لاپلاس:

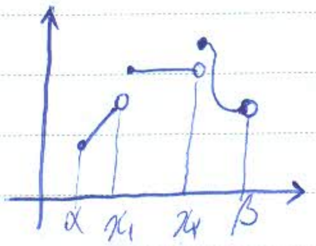
فرض کنید تابع $f(t)$ به ازاء $t\geq 0$ تعریف شده باشد در اینصورت تبدیل لاپلاس $f$ را که با $L\{f(t)\}$ نمایش می دهند بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$L\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$ واضح است که انتگرال فوق تابعی از $s$ می باشد و لذا گاهی آن را با $F(s)$ نمایش می دهند.

PAPCO

## توابع قطعه‌ای پیوسته (تکه‌ای پیوسته)

تابع $f(t)$ را در $[\alpha, \beta]$ قطعه‌ای پیوسته گوئیم هرگاه $f$ در کل $[\alpha, \beta]$ به جز حداکثر تعداد متناهی نقطه پیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی حد چپ و راست $f$ موجود و متناهی باشد




## قضیه (شرط کافی وجود تبدیل لاپلاس)

فرض کنید:

(i) تابع $f$ به ازای هر $A>0$ بر $[0, A]$ قطعه‌ای پیوسته باشد

(ii) تابع $f$، هم مرتبه با تابع نمایی باشد (یعنی $M>0$ موجود باشد بطوری که به ازای $t \geq M$،

$|f(t)| \leq Ke^{at}$ که $K>0$ و $a$ اعداد حقیقی اند)

در اینصورت تبدیل لاپلاس $f$ به ازای $s>a$ موجود است.

برهان)

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^M e^{-st} f(t)\,dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t)\,dt = I_1 + I_2$$

$$|I_2| \leq \int_M^\infty e^{-st} |f(t)|\,dt \leq K\int_M^\infty e^{-st} e^{at}\,dt = \frac{K}{-(s-a)} e^{-(s-a)t}\Big]_M^\infty \overset{s-a>0}{=} \frac{Ke^{-(s-a)M}}{s-a} \; ; s>a$$



$f(t) \rightarrow$ [تبدیل لاپلاس] $\rightarrow F(s)$

## تعریف (تبدیل لاپلاس معکوس)

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، آنگاه $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می‌نامند و با نماد $L^{-1}\{F(s)\}$ نمایش می‌دهند.

$$\underbrace{L\{f(t)\}}_{F(s)}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$$

تذکر: همواره داریم:

$$\lim_{s\to+\infty}F(s)=0$$

تبدیل لاپلاس چند تابع معروف:

(i) فرض کنید $f(t)=1$ ، $t\geq 0$ ، داریم:

$$L\{1\}=\int_0^{\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_0^{\infty}=\frac{1}{s};\ s>0$$

(ii) فرض کنید $n\geq 0$ و $f(t)=t^n$ ،

$$L\{t^n\}=\int_0^{\infty}e^{-st}t^n dt\underset{\text{جزء به جزء}}{=}\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$$

$$L\{t\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\underset{u}{t}\,dt=-\frac{t}{s}e^{-st}\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{e^{-st}}{s}dt=\frac{1}{s^2}\ s>0$$

(iii) فرض کنید $f(t)=e^{at}$ ، $t\geq 0$

$$L\{e^{at}\}=\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}dt=\frac{1}{-(s-a)}e^{-(s-a)t}\Big]_0^{\infty}=\frac{1}{s-a},\ s>a$$

$$L\{\sin at\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{dv} \underbrace{\sin at}_{u}\, dt = \quad f(t) = \sin at \quad t \geq 0$$ فرض کنید

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \sin at \Big]_0^\infty + \frac{a}{s} \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{dv} \underbrace{\cos at}_{u}\, dt$$

$$= \frac{a}{s}\left(-\frac{1}{s} e^{-st} \cos at\Big]_0^\infty - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st} \sin at\, dt\right) = \frac{a}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{a}{s} L\{\sin at\}\right)$$

$$= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} L\{\sin at\} \Rightarrow L\{\sin at\} = \frac{\frac{a}{s^2}}{1 + \frac{a^2}{s^2}}$$

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \; ; \; s > 0$$ ، بطور مشابه $$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \; ; s > 0$$

خواص تبدیل لاپلاس:

① تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس عملگرهای خطی می باشند. یعنی می توان نوشت:

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\}$$

اگر $F_1(s) = L\{f_1(t)\}$ و $F_2(s) = L\{f_2(t)\}$ آنگاه

$$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

$$c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\}$$

مثال: تبدیل لاپلاس توابع $f(t) = \cosh at$ و $f(t) = \sinh at$ را محاسبه کنید.

$$L\{\cosh at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cosh at\, dt \qquad f(t) = \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$L\{\cosh at\} = \frac{1}{2} L\{e^{at}\} + \frac{1}{2} L\{e^{-at}\}$$

حنظلی

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S-a}+\frac{1}{S+a}\right)=\boxed{\frac{S}{S^2-a^2}}\,,\ S>|a|$$

به طور مشابه:

$$L\{\sinh at\}=\frac{a}{S^2-a^2}\,,\ S>|a|$$

مثال: (i) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=4t^2-2\cos 3t+5e^{-t}-3\sinh 2t+1$ را بیابید.

(ii) تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را محاسبه کنید.

$$F(S)=\frac{5S-1}{S(S^2+1)(S-1)}$$

(i)
$$L\{f(t)\}=4\frac{2!}{S^3}-\frac{2S}{S^2+9}+\frac{5}{S+1}-\frac{3\times 2}{S^2-4}+\frac{1}{S}$$

(ii)
$$F(S)=\frac{A}{S}+\frac{B}{S-1}+\frac{CS+D}{S^2+1}\Rightarrow (S-1)(S^2+1)A+BS(S^2+1)+(CS+D)(S^2-S)=5S-1$$

$A=1,\ B=2,\ C=-3,\ D=-2$

$$\to F(S)=\frac{1}{S}+\frac{2}{S-1}-\frac{3S+2}{S^2+1}\Rightarrow L^{-1}\{F(S)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{S-1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{3S+2}{S^2+1}\right\}$$

$$=1+2e^{t}-3\cos t-2\sin t$$

۲ (تبدیل لاپلاس مشتق) فرض کنید $f$ بر بازه دلخواه $[0,A]$ پیوسته باشد و $f'$ قطعه‌ای پیوسته باشد. اگر $f$ هم مرتبه با تابع نمائی باشد (یعنی $|f(t)|\leq Ke^{at}$، $t\geq M$) در این صورت به ازاء $S>a$، $L\{f'(t)\}$ موجود است و داریم:

$$L\{f'(t)\}=SL\{f(t)\}-f(0)$$

برهان: $L\{f'(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{u} \underbrace{f'(t)dt}_{dv} = e^{-st}f(t)\Big]_0^\infty + S\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$

$= -f(0) + SL\{f(t)\}$

نتیجه: اگر $f$ و $f'$ و ... و $f^{(n-1)}$ توابعی پیوسته باشند و در شرایط قضیه وجود تبدیل لاپلاس صدق کنند و همچنین $f^{(n)}(t)$ به ازاء $t \geq 0$ قطعه‌ای پیوسته باشد داریم:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = S^n L\{f(t)\} - S^{n-1}f(0) - S^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{f''(t)\} = S^2 L\{f\} - Sf(0) - f'(0)$$

$$L\{f'''(t)\} = S^3 L\{f\} - S^2 f(0) - Sf'(0) - f''(0)$$

تبدیل لاپلاس $f(t) = \cos^2 t$, $t \geq 0$ را بدست آورید. $f'(t) = -\sin 2t$

$$\Rightarrow L\{f'(t)\} = \frac{-2}{S^2+4} \qquad SL\{f\} - \underbrace{f(0)}_{1} = \frac{-2}{S^2+4}$$

$$\Rightarrow L\{\cos^2 t\} = \frac{1}{S}\left(1 - \frac{2}{S^2+4}\right) = \frac{S^2+2}{S(S^2+4)}$$

تذکر: برای حل مسایل مقدار اولیه‌ی خطی به کمک تبدیل لاپلاس، کافیست از طرفین معادله تبدیل لاپلاس گرفته و پس با توجه به خطی بودن تبدیل لاپلاس، تک تک جملات توسط عملگر $L$ اثر داده می‌شوند و تبدیل لاپلاس مشتقات تابع مجهول به لاپلاس خود تابع تبدیل

می شوند در نهایت یک معادله ی جبری حاصل می شود که با حل آن لاپلاس تابع حاصل می شود و با محاسبه تبدیل معکوس تابع مجهول بدست می آید.

مثال) $y^{(4)} - y = 0 \quad y(0)=0 \text{ و } y'(0)=1 \text{ و } y''(0)=0 \text{ و } y'''(0)=0$

$$L\{y^{(4)}\} - L\{\underbrace{y}_{Y(S)}\} = L\{0\} \Rightarrow S^4 Y(S) - S^3 \cancel{y(0)}^{\,0} - S^2 \cancel{y'(0)}^{\,1} - S\cancel{y''(0)}^{\,0}$$

$$-\cancel{y'''(0)}^{\,0} - Y(S) = 0 \qquad Y(S) = \frac{S^2}{S^4-1} \; ; \; y(t) = L^{-1}\{Y(S)\}$$

$$Y(S) = \frac{AS+B}{S^2-1} + \frac{CS+D}{S^2+1} = \frac{\frac{1}{2}}{S^2-1} + \frac{\frac{1}{2}}{S^2+1} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\sinh t + \frac{1}{2}\sin t$$

③ (تبدیل لاپلاس انتگرال): اگر $f(t)$ تابعی قطعه ای پیوسته باشد که شرایط قضیه وجود تبدیل لاپلاس را دارا باشد و $L\{f(t)\} = F(S)$ داریم:

$$L\Big\{\underbrace{\int_0^t f(z)\,dz}_{h(t)}\Big\} = \frac{F(S)}{S} \; ; \; S>0$$

برهان)

$$h'(t) = f(t) \qquad \left.\begin{aligned} L\{h'(t)\} &= L\{f(t)\} = F(S) \\ &= S L\{h(t)\} - \cancel{h(0)}^{\,0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow L\{h(t)\} = \frac{F(S)}{S}$$

۲۹/۲/۹۴ (جبرانی)

مثال: مسأله مقدار اولیه زیر را حل کنید. $y''-4y'=1$ ; $y(0)=y'(0)=0$

$L\{y''\}-4L\{y'\}=L\{1\}$ $\quad s^2Y(s)-4sY(s)=\frac{1}{s}$

$Y(s)=\frac{1}{s^2(s-4)}$ $\quad L^{-1}\{\frac{1}{s-4}\}=e^{4t}$ $\quad L^{-1}\{\frac{\frac{1}{s-4}}{s}\}=\int_0^t e^{4z}dz=\frac{1}{4}(e^{4t}-1)$

$L^{-1}\{\frac{\frac{1}{s(s-4)}}{s}\}=\int_0^t \frac{1}{4}(e^{4z}-1)dz=\boxed{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}e^{4t}-\frac{1}{4}-t)}$

۴) خاصیت انتقال: اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ آن گاه داریم:

$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$

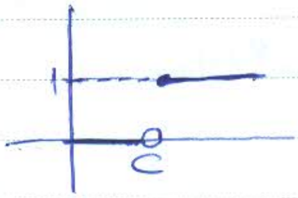
مثال: لاپلاس تابع $f(t)=\cosh t\cos t$ را بیابید.

$f(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cos t=\frac{1}{2}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}+\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}$

تعریف (تابع پله‌ای واحد):

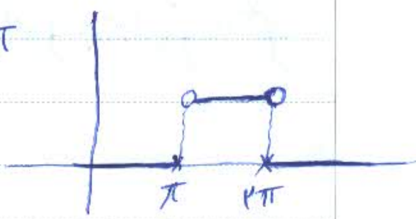
برای نمایش توابع دارای ناپیوستگی جهشی می‌توان از تابع پله‌ای واحد که بصورت زیر تعریف می‌شود استفاده نمود

$$U_c(t)=\begin{cases}0 & t<c\\ 1 & t\geq c\end{cases} \quad ; c\geq 0$$




$$L\{U_c(t)\}=\int_c^\infty e^{-st}dt=\frac{e^{-sc}}{s} \quad ; s>0$$

$$f(t) = U_{\pi}(t) - U_{2\pi}(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi \\ 1-0=1 & \pi \leqslant t < 2\pi \\ 1-1=0 & t \geqslant 2\pi \end{cases}$$




۵) اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ داریم: $L\{U_c(t) f(t-c)\} = e^{-sc} L\{f(t)\} = e^{-sc} F(s)$

$$L^{-1}\{e^{-sc} F(s)\} = f(t-c) U_c(t)$$

اثبات: $\displaystyle\int_c^{\infty} e^{-st} f(\underbrace{t-c}_{x})\,dt = e^{-sc} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx}_{F(s)}$

مثال: $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leqslant t < \frac{\pi}{4} \\ \sin t + \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) & ; t \geqslant \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow f(t) = \sin t + U_{\frac{\pi}{4}}(t) \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

$$L\{f\} = \frac{1}{1+s^2} + e^{-\frac{\pi}{4}s} \frac{s}{1+s^2}$$

مثال: $L^{-1}\left\{\dfrac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} = ?\quad L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = t - U_2(t)(t-2)$

$$= \begin{cases} t & t < 2 \\ 2 & t \geqslant 2 \end{cases}$$

مثال: جواب معادلهٔ دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$\begin{cases} 2y'' + y' + 2y = U_5(t) - U_{20}(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$2s^2 Y(s) + sY(s) + 2Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2+s+2)} \qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{s(2s^2+s+2)}\right\} = ?$$

$$\frac{1}{s(2s^2+s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{2s^2+s+2} \qquad A = \frac{1}{2},\ B = -1,\ C = \frac{-1}{2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-s-\frac{1}{2}}{2s^2+s+2}\right\} = -\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{\underbrace{s^2+\frac{s}{2}+1}_{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) - \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{\sqrt{15}}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t$$

$$= -\underbrace{e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{15}}{4}t + \frac{1}{2\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t\right)}_{h(t)}$$

$$y(t) = u_5(t)\left(\frac{1}{2}+h(t-5)\right) - u_{20}(t)\left(\frac{1}{2}+h(t-20)\right)$$

(6) تبدیل لاپلاس پیچش: اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ و $L\{g(t)\}=G(s)$ آن گاه

$L\{h(t)\}=F(s)G(s)$ که $h(t)=f(t)*g(t)$

به $(*)$ عملگر پیچش می گویند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau$$

خواص پیچش:

(i) $f*g=g*f$

(ii) $f*(g_1+g_2)=(f*g_1)+(f*g_2)$

(iii) $f*(g*h)=(f*g)*h$

(iv) $f*0=0*f=0$

$f*1\neq f$

PAPCO

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right\} = t * \sin at = \int_0^t \sin a\tau (t-\tau)\, d\tau = \frac{at - \sin at}{a^3}$$

مثال (معادله انتگرال - دیفرانسیل) معادله $y''(t) + y'(t) = \cos t + \int_0^t \sin(t-\tau)\, y'(\tau)\, d\tau$

$y(0) = y'(0) = 0$

را حل کنید:

$$s^2Y(s) + sY(s) = \frac{s}{s^2+1} + L\{\underbrace{\sin t}_{\frac{1}{s^2+1}}\}\underbrace{L\{y'\}}_{=sY(s)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{s}{s^2+1}}{s(s+1) - \frac{s}{s^2+1}} = \frac{1}{s(s^2+s+1)}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right\} = \left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\frac{2}{\sqrt{3}} = g(t)$$

$$y(t) = g(t) * 1 = \int_0^t g(\tau)\, d\tau = 1 - \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$$

(۷) تبدیل لاپلاس توابع متناوب: $f(t+P) = f(t)$

اگر $f$ تابعی که دارای پیوسته با دوره تناوب $P$ باشد داریم:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Ps}}\int_0^P e^{-st} f(t)\, dt$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) = \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt + \underbrace{\int_P^{2P} e^{-st} f(t)\, dt}_{\substack{x = t-P \\ = e^{-sP}\int_0^P e^{-sx} f(x)\, dx}} + \cdots$$

$$= \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt \underbrace{\left(1 + e^{-sP} + e^{-2sP} + \cdots\right)}_{= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sP})^n = \frac{1}{1-e^{-sP}}}$$

مثال: $f(t)=\begin{cases} 0 & 0<t<\pi \\ -\sin t & \pi<t<2\pi \end{cases}$ $\quad f(t+2\pi)=f(t)$

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)e^{-st}dt=\frac{1}{1+s^2}\,\frac{1}{e^{s\pi}-1}$$

۸) مشتق گیری از تبدیل لاپلاس: اگر f در شرایط وجود قضیه لاپلاس صدق کند می توان نوشت:

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$F'(s)=-\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt=-L\{tf\}$$

$$-F'(s)=L\{tf(t)\}$$

$$F''(s)=L\{t^2 f(t)\}$$

مثال: $L\{t^2\sin t\}=\left(\frac{1}{1+s^2}\right)''=\frac{-2(1+s^2)^2+8s^2(1+s^2)^2}{(1+s^2)^4}$

$$L\{t\underbrace{e^{-t}\cos t}_{f(t)}\}=\frac{-d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)=\frac{s^2+2s}{[(s+1)^2+1]^2}$$

مثال: $I=\int_0^\infty te^{-2t}\sin t\,dt=?$ $\quad L\{t\sin t\}=\frac{-d}{ds}\left(\frac{1}{1+s^2}\right)$

$$=-\frac{-2s}{(1+s^2)^2}\xrightarrow{s=2}\boxed{I=\frac{4}{25}}$$

مشتق بگیر / بگذار از راه های پیدا کردن تبدیل معکوس.

$$L^{-1}\{\overbrace{tg^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)}^{F(s)}\}=?$$

$$\underbrace{F'(s)}_{L\{tf(t)\}}=-\frac{1}{1+s^2}\Rightarrow L^{-1}\{F'(s)\}=-\sin t$$

$$\Rightarrow tf(t)=\sin t \qquad \boxed{f(t)=\frac{\sin t}{t}}$$

* لاپلاس مسائل زیادی دارد و مثال حل کن در کلاس وقت کمی شود.

$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{S}{S-1}\right)\right\} = ?$ $\quad F(S) = \ln(S) - \ln(S-1)$

$F'(S) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S+1}$

$t\,f(t) = -(1-e^{t})$

$\boxed{f(t) = \frac{e^{t}-1}{t}}$

$L^{-1}\left\{\frac{S}{S^2+1}\ln\left(\frac{S}{S-1}\right)\right\}$

۹۴/۳/۲

(۹) انتگرال تبدیل لاپلاس: اگر $f(t)$ در شرایط قضیه وجود تبدیل لاپلاس صدق کند آن گاه داریم:

$F(S) = L\{f(t)\}$ که در آن $\boxed{L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_S^{\infty} F(U)\,dU}$

مثال i) تبدیل لاپلاس $f(t) = \frac{1-\cos 2t}{t}$ را محاسبه کنید:

$L\left\{\frac{1-\cos 2t}{t}\right\} = \int_S^{\infty}\left(\frac{1}{U} - \frac{U}{U^2+4}\right)dU$

$= \ln\frac{U}{\sqrt{U^2+4}}\Big]_S^{\infty} = \boxed{\ln\frac{\sqrt{S^2+4}}{S}}$

ii) انتگرال زیر را محاسبه کنید: $I = \int_0^{\infty}\frac{\cos t - \cos 2t}{t}\,dt$

$L\left\{\frac{\cos t - \cos 2t}{t}\right\} = \int_S^{\infty}\left(\frac{U}{U^2+1} - \frac{U}{U^2+4}\right)dU = \frac{1}{2}\ln\frac{U^2+1}{U^2+4}\Big]_S^{\infty} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{S^2+1}{S^2+4}\right)$

$\xrightarrow{S=0} \boxed{I = \ln 2}$ $\quad e^{-St} \xrightarrow{S=0} = 1$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$f(t) = e^{t}\int_0^{t} e^{-2t}\,\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$

$L\{f(t)\} = F_1(S-1)$ و $L\left\{\int_0^{t} e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\} = F_1(S)$

$L\left\{\int_0^{t} e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\} = \frac{F_2(S)}{S}$ و $F_2(S) = L\left\{e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} \Rightarrow L\left\{e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = F_3(S+2)$

$F_3(S) = L\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \int_S^{\infty}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{U+1}\right)dU = \ln\frac{U}{U+1}\Big]_S^{\infty} = \boxed{\ln\left(\frac{S+1}{S}\right)}$ → همین روند را برمی‌گردم و جایگذاری می‌کنم و لاپلاس $f(t)$ را می‌یابم.

$L\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\}$

$\left\{L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{S}{a}\right)\right\}$