

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه یزد

پردیس علوم

پایان نامه

برای دریافت درجه دکتری

علوم کامپیوتر-محاسبات علمی

عنوان

ارائه‌ی چند الگوریتم برای ساخت پوشش‌های هندسی

استاد راهنما

دکتر محمد فرشی

استادان مشاور

دکتر محمد علی آبام و دکتر مهدیه هاشمی نژاد

پژوهش و نگارش

داود بخشش

تیرماه ۱۳۹۶



کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه/رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی از این پایان‌نامه/رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه/رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.



تقديم به

پدر و مادر و همسر عزيزم

و همه كسانى كه درست انديشيدن را به من آموختند.





## سپاس‌گزاری


سپاس خداوند یکتای عزتمندی که رحمت و دانش او در سراسر گیتی گسترده شده، آسمان‌ها و زمین همه از آن اوست و علم و دانش حقیقی را بر هر که بخواهد موهبت می‌فرماید. رحمت و لطف او را بی‌نهایت سپاس می‌گوییم چرا که فهم و درک مطالب این پژوهش را بر من ارزانی داشت و مرا به این اصل رساند که علم و ایمان دو بال یک پروازند. توفیق تلاش به من داد و هر بار که خطا کردم فرصتی دوباره، تا با امید، تلاشی تازه را آغاز کنم و به خواست او به نتیجه‌ی مطلوب نائل آیم. به‌راستی که همه چیز از آن اوست و همه‌چیز به خواست اوست.

در اینجا لازم است از تمامی افرادی که در نوشتن این رساله به من کمک کردند، تشکر نمایم. اول از همه، از استاد راهنمای گرانقدرم، دکتر محمد فرشی، کمال تشکر و قدردانی را دارم. ایشان، در این مدت چهارساله، به من بسیار راهنمایی و کمک کردند و با صبر، درایت و اندوخته‌های علمی ارزشمندشان همواره پاسخگوی سوالات زیاد بنده بودند. ایده‌های ناب و خلاقانه ایشان، مشوق و راهنمای خیلی خوبی برای بنده در این مدت بود.

من همچنین از پدر و مادرم به خاطر حمایت‌های بی‌دریغشان تشکر می‌کنم. مطمئناً، دعای خیر این عزیزان اگر همراه من نبود، نمی‌توانستم در نوشتن این رساله، موفق شوم. درنهایت، از همسرم به خاطر حمایت‌ها و تشویق‌هایش، بسیار سپاس گزارم.



بسمه تعالی

شناسه: ب/د/3	صور تجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره دکتری	 دانشگاه شهرد مدیریت تحصیلات تکمیلی																		
<p>جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی آقای/خانم: داود بخشش رشته/گرایش: علوم کامپیوتر/علوم کامپیوتر-محاسبات علمی تحت عنوان: ارائه ی چند الگوریتم برای ساخت پوشش های هندسی و تعداد واحد: ۱۸ در تاریخ ۱۳۹۶/۴/۲۸ با حضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید. پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان نامه با نمره به عدد ۱۹.۷۵ به حروف نوزده و هفتاد و پنج صدم و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.</p> <table><thead><tr><th>عنوان</th><th>نام و نام خانوادگی</th><th>امضاء</th></tr></thead><tbody><tr><td>استاد/استادان راهنما: الف:</td><td>دکتر محمد فرشی</td><td></td></tr><tr><td>استاد/استادان مشاور: الف: ب:</td><td>دکتر محمد علی آلام دکتر مهدیه هاشمی نژاد</td><td></td></tr><tr><td>داور داخل گروه: الف:</td><td>دکتر محمد رضا هوشمند اصل</td><td></td></tr><tr><td>داور خارج از گروه: الف: ب:</td><td>دکتر محمد قدسی دکتر علی محدث خراسانی</td><td></td></tr><tr><td colspan="3">نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر) نام و نام خانوادگی: دکتر علی محمد لطیف امضاء:</td></tr></tbody></table>			عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء	استاد/استادان راهنما: الف:	دکتر محمد فرشی		استاد/استادان مشاور: الف: ب:	دکتر محمد علی آلام دکتر مهدیه هاشمی نژاد		داور داخل گروه: الف:	دکتر محمد رضا هوشمند اصل		داور خارج از گروه: الف: ب:	دکتر محمد قدسی دکتر علی محدث خراسانی		نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر) نام و نام خانوادگی: دکتر علی محمد لطیف امضاء:		
عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء																		
استاد/استادان راهنما: الف:	دکتر محمد فرشی																			
استاد/استادان مشاور: الف: ب:	دکتر محمد علی آلام دکتر مهدیه هاشمی نژاد																			
داور داخل گروه: الف:	دکتر محمد رضا هوشمند اصل																			
داور خارج از گروه: الف: ب:	دکتر محمد قدسی دکتر علی محدث خراسانی																			
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر) نام و نام خانوادگی: دکتر علی محمد لطیف امضاء:																				



## چکیده

در این رساله به ارائه‌ی چند الگوریتم جدید برای ساخت پوشش‌های هندسی و همچنین بهبود برخی الگوریتم‌های موجود و بررسی برخی خواص هندسی پوشش‌های هندسی می‌پردازیم. یک گراف هندسی (اقلیدسی) را یک  $t$ -پوشش (برای  $t > 1$ ) گوئیم اگر بین هر دو رأس گراف، مسیری به طول حداکثر  $t$  برابر فاصله‌ی اقلیدسی آنها وجود داشته باشد.

در این رساله؛ ابتدا گراف یائوی پیوسته را معرفی می‌کنیم که از چرخش یک مخروط به مرکز هر نقطه و اتصال آن نقطه به نقاطی که در یک لحظه از این چرخش، نزدیک‌ترین نقطه به رأس مخروط بوده‌اند، بدست می‌آید. هرچند این گراف با در نظر گرفتن مقدار مناسب برای زاویه‌ی مخروط، یک  $t$ -پوشش است، اما تعداد یال‌های گراف می‌تواند مربعی باشد. اما، نشان می‌دهیم گراف حاصل، در برابر خطاهای ناحیه‌ای تحمل‌پذیر است.

سپس الگوریتم شکاف-حریصانه را که در سال ۱۹۹۷ برای ساخت پوشش‌های هندسی معرفی شد را بررسی و با تغییراتی، زمان اجرا و حافظه‌ی مصرفی آن را کاهش می‌دهیم. همچنین مقدار  $t$  را در نتایج مربوط به  $t$ -پوشش بودن نتیجه‌ی این الگوریتم بهبود می‌دهیم.

در ادامه، به بررسی گراف‌های هندسی خود-گرا و وتر-افزایشی می‌پردازیم. یک گراف هندسی را خود-گرا گوئیم، اگر برای هر دو رأس گراف، مسیری بین آن دو رأس وجود داشته باشد که در حرکت روی آن مسیر، از مبدأ به سمت مقصد، هیچگاه از نقاط پیش رو در مسیر دور نشویم. چنین مسیری را یک مسیر خود-گرا می‌نامیم. گراف هندسی، وتر-افزایشی است اگر برای هر دو رأس، یک مسیر وجود داشته باشد که با شروع از هر انتها به عنوان مبدأ، یک مسیر خود-گرا باشد. در این رساله، نشان می‌دهیم که برای هر مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که روی اضلاع یک مثلث حاده قرار گرفته‌اند، یک گراف وتر-افزایشی مسطح با به کار بردن حداکثر سه نقطه‌ی اشتاینری وجود دارد. همچنین، نشان می‌دهیم که برای هر مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که روی اضلاع یک مثلث منفرجه یا قائم‌الزاویه قرار گرفته‌اند، یک گراف وتر-افزایشی مسطح وجود دارد.

سپس؛ مفهوم مسیر خود-گرای ضعیف را با جایگزینی دور نشدن از تمام نقاط پیش رو در طول حرکت، با شرط دور نشدن از مقصد، تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای هر مجموعه‌ای از نقاط در صفحه، یک گراف خود-گرای ضعیف مسطح وجود دارد.

در ادامه، یک الگوریتم تقسیم و غلبه برای ساخت پوشش‌های هندسی ارائه می‌کنیم که یک پوشش هندسی با تعداد یال‌های نزدیک به خطی می‌سازد.

در نهایت به بررسی گراف‌های هندسی مقید به زاویه می‌پردازیم. یک گراف هندسی را مقید به زاویه‌ی  $\theta$  می‌نامیم، اگر زاویه‌ی بین هر دو یال مجاور به یک رأس در گراف، حداقل  $\theta$  باشد. نشان می‌دهیم که برای هر  $\theta > \pi/3$ ، لزوماً یک گراف همبند مقید به زاویه‌ی  $\theta$  برای هر مجموعه از نقاط وجود ندارد. همچنین نشان می‌دهیم برای  $\theta = \pi/3$  و هر  $t > 2/\sqrt{3}$ ، لزوماً یک  $t$ -پوشش مقید به زاویه‌ی  $\theta$  نیز برای هر مجموعه از نقاط وجود ندارد.



# فهرست مطالب

## فهرست تصاویر ج

## فهرست نمادها د

## ۱ پیشگفتار ۱

- ۱-۱ پوشش هندسی ..... ۲
- ۲-۱ الگوریتم‌های ساخت  $t$ -پوشش ..... ۵
- ۱-۲-۱ الگوریتم مسیر-حریصانه ..... ۵
- ۲-۲-۱ الگوریتم شکاف-حریصانه ..... ۷
- ۳-۲-۱ WSPD-پوشش ..... ۹
- ۴-۲-۱ گراف یائو و  $\Theta$ -گراف ..... ۱۱
- ۵-۲-۱  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر ناحیه-خطا ..... ۱۲
- ۶-۲-۱ گراف‌های خود-گرا ..... ۱۳
- ۳-۱ کلیات رساله ..... ۱۴

## ۲ گراف یائوی پیوسته ۱۹

- ۱-۲ مقدمه ..... ۲۰
- ۲-۲ گراف یائوی پیوسته برای مخروط‌های باریک ..... ۲۲
- ۳-۲ گراف  $cY(2\pi/3)$  یک  $411^\circ$ -پوشش ..... ۲۴
- ۴-۲ زاویه‌های بزرگ‌تر ..... ۳۲
- ۵-۲ تحمل‌پذیری خطا در  $cY(\theta)$  ..... ۳۴
- ۶-۲ خود-گرایی گراف‌های یائوی پیوسته ..... ۳۸
- ۷-۲ نتیجه‌گیری ..... ۴۰

۴۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۴۴	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۴۹	منابع و مآخذ
۵۳	نمایه



# فهرست تصاویر

- ۱-۱  $t$ -پوشش برای  $t$ های مختلف. . . . . ۳
- ۲-۱ نقطه‌ی  $u$  به نزدیک‌ترین نقطه در هر مخروط وصل می‌شود. . . . . ۱۲
- ۳-۱ مسیر خود-گرا و وتر-افزایشی. . . . . ۱۴
- ۱-۲ تعداد یال‌های گراف یائوی پیوسته می‌تواند مربعی باشد. . . . . ۲۱
- ۲-۲ . . . . . ۲۵
- ۳-۲ ناحیه‌های مجاور به  $a$  و  $b$  در حالت الف). . . . . ۲۷
- ۴-۲ (آ) نقطه‌ی  $v^*$  و زاویه‌ی  $\psi = \angle(v^*a, ac^*)$ . ب) مخروط  $C'_{ab}$  که با چرخاندن  $C_{ab}$  به اندازه‌ی  $\psi$  درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، بدست می‌آید. . . . . ۲۹
- ۵-۲  $N'_a$  و  $N_b$ . . . . . ۳۰
- ۶-۲ اگر  $\theta > \pi$ ، آنگاه  $cY(\theta)$  می‌تواند ناهمبند باشد. . . . . ۳۱
- ۷-۲ اثبات قضیه ۳-۴-۲. . . . . ۳۳
- ۸-۲ اثبات قضیه‌ی ۲-۵-۲. . . . . ۳۷
- ۹-۲ یک مجموعه نقطه که  $Y_4$  روی آن خود-گرا نیست اما  $cY(\pi/2)$  روی آن خود-گرا است. یال نقطه‌چین متعلق به  $Y_4$  نیست ولی متعلق به  $cY(\pi/2)$  است. . . . . ۳۸
- ۱۰-۲ اثبات قضیه‌ی ۱-۶-۲. . . . . ۳۹

# فهرست نمادها

۲	..... مجموعه‌ی اعداد حقیقی $d$ بعدی	$\mathbb{R}^d$
۲	..... $G$ گراف با مجموعه‌ی رئوس $S$ و مجموعه‌ی یال‌های $E$	$G(S, E)$
۲	..... فاصله‌ی اقلیدسی بین $q$ و $p$	$ pq $
۴	..... $wt(MST(S))$ وزن درخت پوشای کمینه روی مجموعه نقطه‌ی $S$	
۹	..... کوچک‌ترین جعبه‌ی احاطه‌کننده‌ی مجموعه‌ی $A$	$R(A)$
۹	..... تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا	<b>WSPD</b>
۱۱	..... گراف یائو با پارامتر $k$	$Y_k$
۱۲	..... مجموعه‌ی حاصل از حذف اعضای $S'$ از $S$	$S \setminus S'$
۱۳	..... گراف کامل روی مجموعه نقطه‌ی $S$	$K_S$
۱۳	..... خانواده‌ی همه‌ی ناحیه‌های محدب در صفحه	$\mathcal{C}$
۱۴	..... گراف یائوی پیوسته با پارامتر $\theta$	$cY(\theta)$
۲۶	..... مثلث با رئوس $a$ ، $b$ و $c$	$\triangle abc$

## فصل ۱

### پیشگفتار

## ۱-۱ پوشش هندسی

فرض کنید که می‌خواهیم چند شهر را با ساخت تعدادی جاده، به هم دیگر متصل کنیم به طوری که وقتی که شخصی بخواهد روی جاده‌هایی که ساخته‌ایم، بین دو شهر رانندگی کند، طول مسیری را که طی می‌کند نسبت به طول مسیر مستقیم (جاده‌ی کاملاً مستقیم بین آن دو شهر) تفاوت زیادی نداشته باشد. در مدل گرافی این مسئله، منظور این است که مجموع طول یال‌هایی که دو رأس (دو شهر) را به هم متصل می‌کنند، دارای یک کران بالایی که تابعی از فاصله‌ی دو نقطه است، باشد. این نوع از مسائل را می‌توان با ساخت یک  $t$ -پوشش<sup>۱</sup> حل کرد.

فرض کنید که  $S$  مجموعه‌ای از نقاط در فضای  $\mathbb{R}^d$  باشد. یک گراف  $G(S, E)$  را یک **گراف هندسی** یا **شبکه‌ی هندسی** گویند، هرگاه هر یال  $e = (p, q) \in E$  بین دو رأس  $p$  و  $q$ ، پاره‌خط واصل بین  $p$  و  $q$  باشد و وزن آن یال برابر با فاصله‌ی اقلیدسی بین  $p$  و  $q$  باشد که آن را با  $|pq|$  نمایش می‌دهیم. همچنین، طول یک مسیر  $P$  بین دو رأس در  $G$  را مجموع وزن همه‌ی یال‌های روی  $P$  تعریف می‌کنیم و با  $|P|$  نمایش می‌دهیم. حال، یک  $t$ -پوشش هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

**تعریف ۱-۱-۱** ( $t$ -پوشش هندسی). فرض کنید که  $t > 1$  یک عدد حقیقی باشد. یک گراف هندسی  $G(S, E)$  را یک  $t$ -پوشش هندسی برای  $S$  می‌نامند هرگاه برای هر دو رأس  $p, q \in S$  یک مسیر  $P$  بین  $p$  و  $q$  در  $G$  وجود داشته باشد به طوری که

$$|P| \leq t \cdot |pq|.$$

هر مسیری که دارای این شرط باشد، یک  $t$ -مسیر<sup>۲</sup> بین  $p$  و  $q$  در  $G$  نامیده می‌شود.

برای سادگی، تا انتهای این رساله، به جای  $t$ -پوشش هندسی، از  $t$ -پوشش استفاده می‌کنیم.

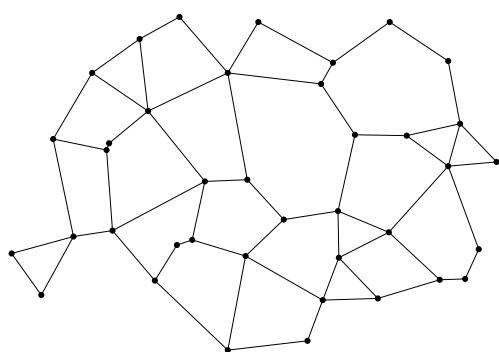
**تعریف ۱-۱-۲** (ضریب کشش). برای دو رأس  $p$  و  $q$  در یک گراف هندسی  $G(S, E)$ ، نسبت طول کوتاه‌ترین مسیر بین  $p$  و  $q$  در  $G$ ، به  $|pq|$  را ضریب کشش بین دو رأس  $p$  و  $q$  در  $G$  می‌نامند. بیش‌ترین ضریب کشش بین همه‌ی زوج رؤس گراف  $G$  را **ضریب کشش** گراف  $G$  می‌نامند.

<sup>۱</sup>  $t$ -spanner

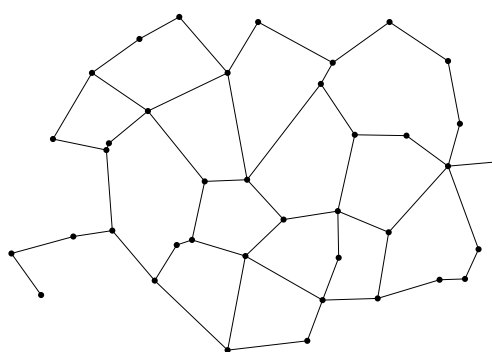
<sup>۲</sup>  $t$ -path

با توجه به تعریف‌های ۱-۱-۱ و ۲-۱-۱، به راحتی می‌توان گفت که ضریب کشش یک گراف هندسی  $G = (S, E)$  برابر است با کوچک‌ترین عدد حقیقی  $t > 1$  که  $G$  یک  $t$ -پوشش برای  $S$  باشد.

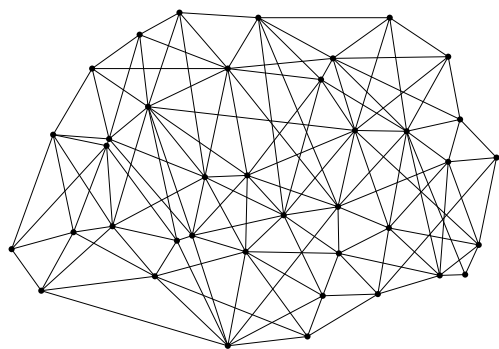
به طور شهودی، خاصیت  $t$ -پوشش در یک گراف هندسی قوی‌تر از خاصیت همبندی در آن گراف است، زیرا در یک گراف هندسی که  $t$ -پوشش است، نه تنها بین هر دو رأس یک مسیر وجود دارد بلکه طول آن مسیر حداکثر  $t$  برابر با فاصله ی اقلیدسی بین آن دو رأس است. پارامتر  $t$  معین می‌کند که یک  $t$ -پوشش چقدر به یک گراف کامل نزدیک است. به عبارتی دیگر، هر چقدر که  $t$  به عدد یک نزدیک شود،  $t$ -پوشش (برای نقاطی که روی یک خط قرار ندارند) نیز به گراف کامل نزدیک می‌شود (شکل ۱-۱ را ببینید).



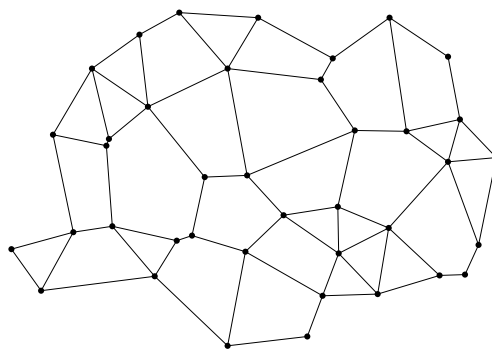
(ب) ۱/۷-پوشش.



(آ) ۲-پوشش.



(د) ۱/۱-پوشش.



(ج) ۱/۵-پوشش.

شکل ۱-۱:  $t$ -پوشش برای  $t$ های مختلف.

برای طراحی یک شبکه برای مجموعه‌ی مشخصی از نقاط، چندین معیار کیفی در نظر گرفته می‌شود. در زیر تعدادی از مهم‌ترین معیارهای کیفی برای ارزیابی شبکه‌های هندسی بیان شده است.

۱. اندازه<sup>۱</sup>: تعداد یال‌های شبکه را اندازه‌ی شبکه می‌نامند. در حالت کلی، ترجیح داده می‌شود که  $t$ -پوشش‌ها تا حد ممکن اندازه‌ی کوچکی (در حالت ایده‌آل، تعداد یال‌ها، از مرتبه‌ی خطی از تعداد رئوس است) داشته باشند.

۲. وزن<sup>۲</sup>: وزن یک گراف هندسی، برابر با مجموع وزن همه‌ی یال‌های آن گراف است. از آنجایی که هر  $t$ -پوشش باید تمام نقاط را به هم وصل کند، وزن آن از پایین، با وزن درخت پوشای کمینه<sup>۳</sup> کران‌دار می‌شود. بنابراین، بهترین وزنی که یک  $t$ -پوشش روی یک مجموعه نقطه‌ی  $S$  می‌تواند داشته باشد، به صورت مجانبی برابر وزن یک درخت پوشای کمینه روی  $S$  است. وزن درخت پوشای کمینه روی  $S$  را با  $wt(MST(S))$  نمایش می‌دهیم. وزن، معیار خوبی برای سنجش هزینه‌ی ساخت برخی شبکه‌ها نظیر شبکه‌ی راه‌ها است. بنابراین، اغلب،  $t$ -پوشش‌هایی با وزن کم مد نظر هستند. اخیراً،  $t$ -پوشش‌هایی با وزن کم در زمینه‌های مختلفی از جمله جستجوی فضای متریک<sup>۴</sup> [۳۴، ۳۵] و انتشار<sup>۵</sup> در شبکه‌های ارتباطی [۲۶]، مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

۳. درجه<sup>۶</sup>: بیش‌ترین تعداد یال‌های مجاور به هر رأس در گراف را درجه‌ی گراف می‌نامند و اغلب نیاز است که درجه‌ی گراف با یک ثابت کوچک محدود شود. کراندار بودن درجه‌ی  $t$ -پوشش بیانگر اندازه‌ی کوچک آن است، اما، عکس این مطلب لزوماً درست نیست.

ثابت شده است که برای هر مجموعه‌ای از  $n$  نقطه در  $\mathbb{R}^d$  و برای هر عدد حقیقی  $t > 1$ ، یک  $t$ -پوشش با اندازه‌ی  $O(n)$ ، درجه‌ی  $O(1)$  و وزن  $O(wt(MST(S)))$  وجود دارد [۲۳، ۳۳].

مفهوم،  $t$ -پوشش‌ها یا به عبارتی دیگر، شبکه‌های پوششی هندسی، اولین بار توسط پلگ<sup>۷</sup> و شافر<sup>۸</sup> [۳۷] در حوزه‌ی محاسبات توزیع شده و سپس توسط چو<sup>۹</sup> [۱۹] در حوزه‌ی هندسه‌ی محاسباتی معرفی شد. تاکنون، الگوریتم‌های زیادی برای ساخت پوشش‌های هندسی با خواص مختلف نظیر اندازه‌ی کوچک، درجه‌ی کران‌دار و وزن پایین یا ترکیب برخی از این خواص، ارائه شده است. در سال ۲۰۰۷، ناراسیمهان<sup>۱۰</sup> و اسمید<sup>۱۱</sup> [۳۳] کتابی با عنوان Geometric Spanner Networks

<sup>۱</sup>size

<sup>۲</sup>weight

<sup>۳</sup>minimum spanning tree

<sup>۴</sup>metric space searching

<sup>۵</sup>broadcasting

<sup>۶</sup>degree

<sup>۷</sup>Peleg

<sup>۸</sup>Schäffer

<sup>۹</sup>Chew

<sup>۱۰</sup>Narasimhan

<sup>۱۱</sup>Smid

منتشر کردند که تقریباً تمام الگوریتم‌های اصلی ساخت شبکه‌های پوششی هندسی را شامل می‌شود. شبکه‌های پوششی هندسی به عنوان یکی از شاخه‌های مهم هندسه‌ی محاسباتی، دارای کاربردهای زیادی هستند. از جمله این که در سال ۱۹۹۸، راثو<sup>۱</sup> و اسمیت<sup>۲</sup>، یک الگوریتم تقریبی برای حل مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد با کمک شبکه‌های پوششی ارائه کردند [۳۹]. در سال ۲۰۰۵، راسل<sup>۳</sup> و گیباس<sup>۴</sup>، با کمک شبکه‌های پوششی هندسی به مطالعه‌ی پروتئین‌ها پرداختند [۴۱]. در سال ۲۰۰۷، ناوارو<sup>۵</sup> و همکارانش روشی مبتنی بر  $t$ -پوشش‌ها برای جستجو در فضای متریک<sup>۶</sup> ارائه کردند [۳۶]. یکی دیگر از کاربردهای جالب شبکه‌های پوششی هندسی، تقریب درخت پوشای کمینه است. فرض کنید  $G$  یک  $t$ -پوشش برای  $S$  باشد. ثابت شده است که درخت پوشای کمینه‌ی گراف  $G$  یک  $t$ -تقریب<sup>۷</sup> برای درخت پوشای کمینه روی  $S$  است [۳۳]. به عبارتی دیگر، وزن درخت پوشای کمینه‌ی  $G$  حداکثر  $t$  برابر وزن درخت پوشای کمینه روی  $S$  است. مسئله‌ی ساخت  $t$ -پوشش‌ها با خصوصیات مختلف نظیر اندازه‌ی خطی، درجه‌ی محدود، وزن کم و یا ترکیبی از این خصوصیات، روی یک مجموعه از نقاط برای یک  $t > 1$ ، تاکنون به طور گسترده مطالعه شده است. در بخش بعدی به طور خلاصه برخی از الگوریتم‌های  $t$ -پوشش‌ها را بررسی می‌کنیم.

## ۲-۱ الگوریتم‌های ساخت $t$ -پوشش

در این بخش، به معرفی چند الگوریتم اساسی جهت ساخت  $t$ -پوشش می‌پردازیم.

### ۱-۲-۱ الگوریتم مسیر-حریصانه

یکی از معروف‌ترین الگوریتم‌های ساخت شبکه‌های پوششی هندسی، الگوریتم مسیر-حریصانه<sup>۸</sup> یا به اختصار حریصانه است (الگوریتم ۱-۲-۱ را ببینید). الگوریتم حریصانه، اولین بار توسط آلزوفر<sup>۹</sup>

<sup>۱</sup>Rao

<sup>۲</sup>Smith

<sup>۳</sup>Russel

<sup>۴</sup>Guibas

<sup>۵</sup>Navarro

<sup>۶</sup>metric

<sup>۷</sup> $t$ -approximate

<sup>۸</sup>path-greedy

<sup>۹</sup>Althöfer

و همکارانش در سال ۱۹۹۳ ارائه شد [۵]. این الگوریتم به این شکل عمل می‌کند که ابتدا تمام زوج نقاط را براساس فاصله‌ی بین آن‌ها (طول زوج نقطه) از کوچک به بزرگ مرتب می‌کند و سپس به ترتیب، آن زوج نقاط را پردازش می‌کند. الگوریتم از گراف با مجموعه یال‌های تهی شروع می‌کند. پردازش به این شکل است که الگوریتم بررسی می‌کند که آیا طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن زوج نقطه در گراف ساخته شده (تا آن لحظه از اجرای الگوریتم) بزرگ‌تر از  $t$  برابر طول آن زوج نقطه است یا خیر. اگر بزرگ‌تر بود، آنگاه بین آن زوج نقطه، یالی اضافه می‌کند و آن یال به مجموعه‌ی یال‌های گراف، اضافه می‌شود. به گراف هندسی حاصل از اجرای این الگوریتم، پوشش حریصانه گفته می‌شود.

آنچه که واضح است این است که با کمک یک الگوریتم پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در یک گراف (مثلاً الگوریتم معروف دایکسترا<sup>۱</sup>)، می‌توانیم الگوریتم حریصانه را پیاده‌سازی کنیم. ثابت شده است که پیاده‌سازی مستقیم الگوریتم حریصانه با کمک الگوریتم دایکسترا، باعث می‌شود که الگوریتم دارای پیچیدگی زمانی  $O(n^3 \log n)$  باشد [۳۳]. در سال ۲۰۱۰، بوز<sup>۲</sup> و همکارانش [۱۴] توانستند پیچیدگی زمانی الگوریتم حریصانه را به  $O(n^2 \log n)$  بهبود دهند. تا جایی که ما اطلاع داریم، این نتیجه، بهترین نتیجه‌ای است که تاکنون روی پیچیدگی زمانی الگوریتم حریصانه ارائه شده است. البته لازم به ذکر است که در سال ۲۰۱۷، آلواینز<sup>۳</sup> و همکارانش [۴] الگوریتمی جهت محاسبه‌ی پوشش حریصانه روی مجموعه‌ای از نقاط داده شده در صفحه که به طور یکنواخت توزیع شده‌اند ارائه کردند که امید ریاضی پیچیدگی زمانی آن  $O(n(\log^2 n) \log^2 \log n)$  است.

تاکنون، کارهای تحقیقاتی زیادی بر روی این الگوریتم انجام شده است. از جمله اینکه در سال ۱۹۹۴، سوارس<sup>۴</sup> [۴۲] ثابت کرد که درجه‌ی پوشش حریصانه، کران‌دار است که این موضوع نشان می‌دهد که تعداد یال‌های پوشش حریصانه خطی است. در سال ۱۹۹۷، داس<sup>۵</sup> و ناراسیمهان [۲۳] ثابت کردند که وزن گراف پوشش حریصانه روی یک مجموعه نقطه‌ی  $S$ ، از مرتبه‌ی  $O(wt(MST(S)))$  است. اگر از نظر پیچیدگی حافظه به الگوریتم حریصانه نگاه کنیم، می‌بینیم که دارای پیچیدگی حافظه از مرتبه‌ی  $O(n^2)$  است. البته در سال ۲۰۱۵، آلواینز و همکارانش

<sup>۱</sup>Dijkstra

<sup>۲</sup>Bose

<sup>۳</sup>Alewijnse

<sup>۴</sup>Soares

<sup>۵</sup>Das



[۳]، پیچیدگی حافظه‌ی الگوریتم حریصانه را با کمک مفهوم تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا<sup>۱</sup> که در

بخش‌های بعدی معرفی می‌شود، به  $O(n)$  بهبود دادند.

---

**Algorithm ۱-۲-1: PATHGREEDY( $S, t$ )**

---

```

/* This algorithm takes as input a set  $S$  of  $n$  points in  $\mathbb{R}^d$  and a
   real number  $t > 1$  The algorithm returns a  $t$ -spanner for  $S$ . */
1 Sort the  $\binom{n}{2}$  pairs of distinct points in non-decreasing order of their distances (ties
   are broken arbitrarily), and store them in a list  $L$ ;
2  $E := \emptyset$ ;
3  $G := (S, E)$ ;
4 foreach  $\{p, q\} \in L$  do
5    $\delta :=$ length of a shortest path in  $G$  between  $p$  and  $q$ ;
6   if  $\delta > t|pq|$  then
7      $E := E \cup \{(p, q)\}$ ;
8      $G := (S, E)$ ;
9   end
10 end
11 return  $G = (S, E)$ ;

```

---

## ۲-۲-۱ الگوریتم شکاف-حریصانه

یکی دیگر از الگوریتم‌های ساخت شبکه‌های پوششی هندسی که در کلاس الگوریتم‌های حریصانه قرار دارد، الگوریتم شکاف-حریصانه<sup>۲</sup> است که توسط آریا<sup>۳</sup> و اسمید [۶] معرفی شد (الگوریتم ۲-۲-۱ را ببینید). به گراف حاصل از این الگوریتم، پوشش شکاف-حریصانه گویند. این الگوریتم، مبتنی بر خاصیت شکاف<sup>۴</sup> است که توسط چاندرا<sup>۵</sup> و همکارانش [۱۸] معرفی شد.

فرض کنید که  $w \geq 0$  یک عدد حقیقی و  $E$  مجموعه‌ای از یال‌های جهت‌دار در فضای  $\mathbb{R}^d$  باشد. گوییم مجموعه‌ی  $E$  دارای خاصیت  $w$ -شکاف<sup>۶</sup> است هرگاه برای هر دو یال مجزای  $(p, q)$  و  $(r, s)$  در  $E$  داشته باشیم  $|pr| > \min(|pq|, |rs|)$ . گوییم مجموعه‌ی  $E$  دارای خاصیت  $w$ -شکاف قوی است هرگاه برای هر دو یال مجزای  $(p, q)$  و  $(r, s)$  در  $E$  داشته باشیم  $|pr| > \min(|pq|, |rs|)$  و  $|qs| > \min(|pq|, |rs|)$ .

خاصیت شکاف، خاصیت مفیدی برای تحلیل وزن یک شبکه‌ی پوششی است. چاندرا و

---

<sup>۱</sup>well-separated pair decomposition

<sup>۲</sup>gap-greedy

<sup>۳</sup>Arya

<sup>۴</sup>gap

<sup>۵</sup>Chandra

<sup>۶</sup> $w$ -gap

همکارانش در [۱۸] ثابت کردند که در هر گراف  $G(S, E)$  که  $E$  خاصیت شکاف را داراست، درجه‌ی خروجی هر رأس در  $G$  حداکثر یک و وزن  $G$ ، از مرتبه‌ی  $O(\log n \cdot wt(MST(S)))$  است. آن‌ها همچنین نشان دادند که در هر گراف  $G(S, E)$  که  $E$  خاصیت شکاف قوی را داراست، درجه‌ی ورودی هر رأس در  $G$  نیز حداکثر یک است.

الگوریتم شکاف-حریصانه به این صورت عمل می‌کند که ابتدا همه‌ی زوج نقاط را براساس طولشان از کوچک به بزرگ مرتب می‌کند، سپس این زوج نقاط به ترتیب پردازش می‌شوند. فرض کنید که  $p$  و  $q$  زوج نقطه‌ای باشد که الگوریتم قصد پردازش آن‌ها را دارد. الگوریتم، یال  $(p, q)$  را به مجموعه‌ی یال‌ها اضافه می‌کند اگر و فقط اگر تا آن لحظه از اجرای الگوریتم، هیچ یال  $(r, s)$  در مجموعه‌ی یال‌های گراف ساخته شده، وجود نداشته باشد به طوری که الف)  $(p, q)$  و  $(r, s)$  تقریباً هم‌جهت باشند ب) حداقل یکی از فاصله‌های  $|pq|$  و  $|rs|$  کوچک باشد (برای مشاهده‌ی جزئیات بیشتر الگوریتم، بخش؟؟ را ببینید). اگر چنین یال  $(r, s)$  وجود داشت، آنگاه یال  $(p, q)$  به مجموعه‌ی یال‌ها اضافه نمی‌شود در غیر این‌صورت، اضافه می‌شود. چاندرا و همکارانش در همان مقاله، ثابت کردند که الگوریتم شکاف-حریصانه، یک شبکه‌ی پوششی هندسی با ضریب کشش ثابت و از درجه‌ی کران‌دار تولید می‌کند که می‌توان مجموعه‌ی یال‌ها را به تعداد ثابتی زیرمجموعه افراز کرد به طوری که هر زیرمجموعه خاصیت شکاف را دارا باشد و در نتیجه وزن آن از مرتبه‌ی  $O(\log n \cdot wt(MST(S)))$  می‌باشد.

الگوریتم شکاف-حریصانه، در پیاده‌سازی مستقیم دارای پیچیدگی زمانی  $O(n^3)$  و پیچیدگی حافظه‌ی  $O(n^2)$  است (الگوریتم ۱-۲-۲ را ببینید). برطبق آنچه که می‌دانیم، هنوز هیچ بهبودی روی زمان و حافظه‌ی این الگوریتم وجود ندارد و این مسئله، همچنان حل نشده است. البته آریا و اسمید [۶]، الگوریتمی مشابه الگوریتم شکاف-حریصانه ارائه کردند که دارای پیچیدگی زمانی  $O(n \log^2 n)$  است و گراف حاصل، خواصش مشابه خواص گراف حاصل از الگوریتم شکاف-حریصانه

است اما لزوماً همان گراف حاصل از الگوریتم شکاف-حریصانه را تولید نمی‌کند.

---

**Algorithm ۱-۲-2:** GAPGREEDY( $S, \theta, w$ )

---

```

/* This algorithm takes as input a set  $S$  of  $n$  points in the
plane, and two real numbers  $\theta$  and  $w$  such that  $0 < \theta < \pi/4$ ,
 $0 \leq w < (\cos \theta - \sin \theta)/2$ . The algorithm returns a directed
 $t$ -spanner  $G = (S, E)$ , for  $t = 1/(\cos \theta - \sin \theta - 2w)$ . */
1 Sort the  $2\binom{n}{2}$  ordered pairs of distinct points in non-decreasing order of their
distances (ties are broken arbitrarily), and store them in a list  $L$ ;
2  $E := \emptyset$ ;
3 foreach ordered pair  $(p, q) \in L$  do
4    $add := \text{true}$ ;
5   foreach edge  $(r, s) \in E$  do
6     /* Let  $\vec{a}$  be a vector from the origin to the point  $a$ . We
define  $\text{angle}(pq, rs)$  to be the angle between the vectors
 $\vec{q-p}$  and  $\vec{s-r}$ . */
7     if  $\text{angle}(pq, rs) \leq \theta$  then
8        $add := add \wedge (|pr| > w|rs|) \wedge (|qs| > w|rs|)$ ;
9     end
10   if  $add = \text{true}$  then
11      $E := E \cup (p, q)$ ;
12   end
13 end
14 return  $G = (S, E)$ ;

```

---

### ۳-۲-۱ WSPD-پوشش

در سال ۱۹۹۵، کالاهان<sup>۱</sup> و کاساراجو<sup>۲</sup> [۷] ساختمان داده‌ای به نام تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا (WSPD)، را ارائه کردند. این ساختمان داده، یکی از مهم‌ترین ساختمان داده‌هایی است که می‌توان از آن جهت حل مسائل مجاورتی<sup>۳</sup> استفاده کرد. قبل از اینکه این ساختمان داده را معرفی نماییم، ابتدا مفهوم زوج خوش-مجزا را معرفی می‌کنیم.

فرض کنید که  $A$  یک مجموعه از نقاط در فضای  $\mathbb{R}^d$  و  $R(A)$  کوچک‌ترین جعبه‌ی احاطه کننده<sup>۴</sup>ی مجموعه‌ی  $A$  باشد.

**تعریف ۱-۲-۱** (زوج خوش-مجزا). فرض کنید که  $s > 0$  یک عدد حقیقی و  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی

---

<sup>۱</sup>Callahan

<sup>۲</sup>Kosaraju

<sup>۳</sup>proximity problems

<sup>۴</sup>bounding box

متناهی در فضای  $\mathbb{R}^d$  باشند. می‌گوییم که  $A$  و  $B$  نسبت به  $s$ ، خوش-مجزا هستند هرگاه توپ<sup>۱</sup>های مجزای  $d$ -بعدی  $C_A$  و  $C_B$  وجود داشته باشند به طوری که

۱. توپ‌های  $C_A$  و  $C_B$  دارای شعاع‌های یکسانی باشند.

۲. توپ  $C_A$ ، شامل جعبه‌ی احاطه‌گر  $R(A)$  باشد.

۳. توپ  $C_B$ ، شامل جعبه‌ی احاطه‌گر  $R(B)$  باشد.

۴. فاصله‌ی بین  $C_A$  و  $C_B$  بزرگ‌تر یا مساوی  $s$  برابر شعاع  $C_A$  باشد.

**تعریف ۱-۲-۲** (تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا). فرض کنید  $S$  یک مجموعه از  $n$  نقطه در فضای  $\mathbb{R}^d$  باشد. همچنین فرض کنید  $s > 0$  یک عدد حقیقی باشد. یک تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا برای  $S$  نسبت به  $s$ ، یک دنباله به صورت

$$\{A_1, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \dots, \{A_m, B_m\}$$

از زیرمجموعه‌های غیرتهی در  $S$  است به طوری که

۱. برای هر  $i$  با  $1 \leq i \leq m$ ،  $A_i$  و  $B_i$  نسبت به  $s$  زوج خوش-مجزا باشند و

۲. برای هر دو نقطه‌ی متمایز  $p$  و  $q$  در  $S$ ، دقیقاً یک اندیس  $i$  با  $1 \leq i \leq m$  وجود داشته باشد به طوری که  $q \in A_i$  و  $p \in B_i$  یا  $q \in B_i$  و  $p \in A_i$ .

عدد صحیح  $m$  را اندازه‌ی تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا و  $s$  را ضریب تفکیک<sup>۲</sup> می‌نامند.

کالاها و کاساراجو در همان مقاله، ثابت کردند که برای هر مجموعه‌ی  $S$  از  $n$  نقطه در فضای  $\mathbb{R}^d$  و برای یک  $d$  ثابت و یک  $s$  ثابت می‌توان یک تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا با تعداد خطی زوج در زمان  $O(n \log n)$  ساخت.

کالاها و کاساراجو در همان مقاله، نشان دادند که با کمک نتیجه‌ی بالا، می‌توان برای مجموعه‌ی  $S$  یک شبکه‌ی پوششی هندسی با ضریب کشش دلخواه  $t > 1$  و با تعداد خطی یال، در

<sup>۱</sup>Ball

<sup>۲</sup>separation ratio

زمان  $O(n \log n)$  ساخت. روش آن‌ها به این صورت است که ابتدا برای مجموعه‌ی  $S$  یک تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا به صورت  $\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$  با  $m = O(n)$  و با ضریب تفکیک  $s = \frac{t(t+1)}{t-1}$  می‌سازد. سپس، برای هر زوج  $\{A_i, B_i\}$ ، یک نقطه‌ی دلخواه در  $A_i$  و یک نقطه‌ی دلخواه در  $B_i$  انتخاب می‌کند و در نهایت آن نقاط دلخواه را با یک یال به هم وصل می‌کند. کالاهان و کاساراجو در همان مقاله ثابت کردند که گراف حاصل از الگوریتم که آن را WSPD-پوشش می‌نامیم، یک شبکه‌ی  $t$ -پوشش با تعداد خطی یال است. لازم به ذکر است که حداقل زمان لازم برای ساخت یک  $t$ -پوشش روی یک مجموعه نقطه‌ی  $S$  با  $n$  نقطه در فضای  $\mathbb{R}^d$   $\Omega(n \log n)$  است [۲۷]. واضح است که الگوریتم ساخت WSPD-پوشش از نظر زمان، بهینه است.

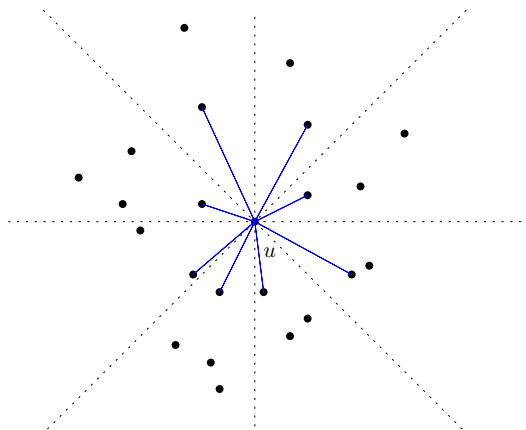
#### ۴-۲-۱ گراف یائو و $\Theta$ -گراف

یکی دیگر از روش‌های ساخت یک  $t$ -پوشش برای یک مجموعه نقطه‌ی داده شده  $S$  و یک عدد ثابت  $t > 1$ ، استفاده از **گراف یائو**<sup>۱</sup> است. گراف یائو اولین بار توسط یائو<sup>۲</sup> [۴۳] برای ساخت درخت پوشای کمینه در فضای اقلیدسی و در ابعاد بالا معرفی شد. برای یک عدد طبیعی  $k \geq 2$ ، گراف یائوی  $Y_k$  برای مجموعه‌ی  $S$  به صورت زیر ساخته می‌شود: در هر نقطه‌ی  $u$  در  $S$ ،  $k$  مخروط به مرکز  $u$  و با دهانه‌ی<sup>۳</sup>  $\frac{2\pi}{k}$  رسم می‌کنیم برای هر نقطه‌ی  $u$  در  $S$  و هر مخروط  $C_u$ ، یک یال بین  $u$  و نزدیک‌ترین نقطه (یکی از نزدیک‌ترین نقاط) به  $u$  در  $C_u$  وصل می‌کنیم (شکل ۲-۱ را ببینید). اگر عدد  $k$  به اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب شود، می‌توان ثابت کرد که گراف یائوی  $Y_k$  یک  $t$ -پوشش است که این  $t$  فقط وابسته به مقدار  $k$  است [۱۵].

در سال ۱۹۸۷، کلارکسون<sup>۴</sup> [۲۰] گرافی مشابه گراف یائو، که  $\Theta$ -گراف نامیده می‌شود، ارائه کرد. تفاوتی که بین ساخت گراف یائو و  $\Theta$ -گراف هست این است که اولاً یک خط دلخواه  $\ell$  را که از مرکز مخروط به سمت داخل مخروط می‌گذرد را در نظر می‌گیریم و دوماً در هر مخروط، رأس  $u$  را به نقطه‌ای در مخروط  $C_u$  وصل می‌کنیم که فاصله‌ی تصویر عمودش روی  $\ell$  تا  $u$  کم‌ترین باشد.

<sup>۱</sup> Yao graph  
<sup>۲</sup> Yao

<sup>۳</sup> aperture  
<sup>۴</sup> Clarkson



شکل ۲-۱: نقطه‌ی  $u$  به نزدیک‌ترین نقطه در هر مخروط وصل می‌شود.

الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n \log^{O(1)} n)$  برای ساخت  $\Theta$ -گراف روی مجموعه‌ای از نقاط در فضای  $\mathbb{R}^d$  که  $d > 2$  است، ارائه شده است [۳۳] اما تاکنون برای ساخت گراف یائو روی این مجموعه از نقاط، الگوریتم با زمان اجرای  $O(n \log^{O(1)} n)$  ارائه نشده است.

برای  $\Theta$ -گراف همانند گراف یائو وقتی عدد  $k$  به اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب شود، می‌توان ثابت کرد که  $\Theta$ -گراف، با پارامتر  $k = \frac{2\pi}{\theta}$ ، یک  $t$ -پوشش است که این  $t$  فقط وابسته به مقدار  $k$  است [۳۳]. واضح است که هم گراف یائو و هم  $\Theta$ -گراف هر دو دارای اندازه‌ی خطی هستند، اما می‌توان مثال‌هایی ارائه داد که نشان می‌دهند که درجه‌ی گراف یائو و  $\Theta$ -گراف، کراندار نیست [۳۳].

### ۵-۲-۱ $t$ -پوشش تحمل‌پذیر ناحیه-خطا

یکی از مباحث مهم در ساخت شبکه‌های هندسی، تحمل‌پذیری آن شبکه در برابر حذف تعدادی رأس یا یال از آن شبکه هست. لوکوپولوس<sup>۱</sup> و همکارانش [۳۰] مفهوم  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر خطای  $k$ -رأسی<sup>۲</sup> را به صورت زیر تعریف کردند. گراف  $G = (S, E)$  را یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر خطای  $k$ -رأسی یا به اختصار  $(k, t)$ -VFTS (برای عدد حقیقی  $1 < t$  و عدد صحیح غیرمنفی  $k$ ) گویند هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی  $S'$  از  $S$  با اندازه‌ی حداکثر  $k$ ، گراف  $G \setminus S'$  برای  $S \setminus S'$  یک  $t$ -پوشش باشد. همچنین  $G$  را یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر خطای  $k$ -یالی<sup>۳</sup> و یا به اختصار  $(k, t)$ -EFTS

<sup>۱</sup>Levcopoulos

<sup>۲</sup> $k$ -edge fault tolerant  $t$ -spanner

<sup>۳</sup> $k$ -vertex fault tolerant  $t$ -spanner

گویند هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی  $E'$  از  $E$  با اندازه‌ی حداکثر  $k$  و برای هر  $p$  و  $q$  در  $S$ ، گراف  $G \setminus E'$  شامل یک مسیر بین  $p$  و  $q$  با طول حداکثر  $t$  برابر طول کوتاه‌ترین مسیر بین  $p$  و  $q$  در گراف  $K_S \setminus E'$  باشد، که  $K_S$  گراف کامل روی  $S$  است. لوکوپولوس و همکارانش در همان مقاله، برای اولین بار سه الگوریتم برای ساخت شبکه‌های  $(k, t)$ -VFTS ارائه کردند. تعدادی کار تحقیقاتی دیگر نیز در همین زمینه انجام شده است [۲۱، ۳۱]. سوالی که ممکن است پرسیده شود این است که آیا می‌توان روی یک مجموعه نقطه‌ای داده شده، یک پوشش هندسی ساخت به طوری که با حذف یک ناحیه از آن، گراف حاصل باز هم یک پوشش هندسی باشد؟

در سال ۲۰۰۹، آبام<sup>۱</sup> و همکارانش [۱] مفهوم پوشش‌های تحمل‌پذیر ناحیه-خط<sup>۲</sup> را برای نقاط در صفحه معرفی کردند. برای یک ناحیه‌ی  $F$  در صفحه، فرض کنید  $G \ominus F$  گراف حاصل از حذف همه‌ی رئوس  $G$  که داخل ناحیه‌ی  $F$  قرار می‌گیرند و حذف همه یال‌های  $G$  که با ناحیه‌ی  $F$  اشتراک دارند، باشد. فرض کنید  $\mathcal{F}$  مجموعه‌ای از ناحیه‌ها در صفحه باشد. می‌گوییم که  $G$  یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر  $\mathcal{F}$ -خط است اگر برای هر  $F \in \mathcal{F}$ ، طول کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو رأس  $p$  و  $q$  در گراف  $G \ominus F$  حداکثر  $t$  برابر طول کوتاه‌ترین مسیر بین  $p$  و  $q$  در گراف  $K_S \ominus F$  باشد که در اینجا  $K_S$  گراف کامل هندسی روی  $S$  است. آبام و همکارانش در همان مقاله، نشان دادند که برای هر مجموعه‌ای از  $n$  نقطه در صفحه و هر خانواده‌ی  $\mathcal{C}$  از ناحیه‌های محدب<sup>۳</sup>، می‌توان یک پوشش تحمل‌پذیر  $\mathcal{C}$ -خط با  $O(n \log n)$  یال را در زمان  $O(n \log^2 n)$  ساخت.

## ۶-۲-۱ گراف‌های خود-گرا

در سال ۲۰۱۳، علمداری<sup>۴</sup> و همکارانش [۲] مفهوم رسم خود-گرا و رسم وتر-افزایشی را معرفی کردند. فرض کنید که  $G$  یک گراف هندسی با مجموعه‌ی رئوس  $S$  باشد. برای هر دو رأس  $s, t \in S$ ، یک مسیر از  $s$  به  $t$  در  $G$  را خود-گرا<sup>۵</sup> گویند، هرگاه برای هر نقطه‌ی  $q$  روی مسیر (نه ضرورتاً یک رأس)، یک نقطه‌ای که به طور پیوسته روی مسیر از  $s$  به  $q$  در حال حرکت است، هرگز در حرکتش

<sup>۱</sup> Abam

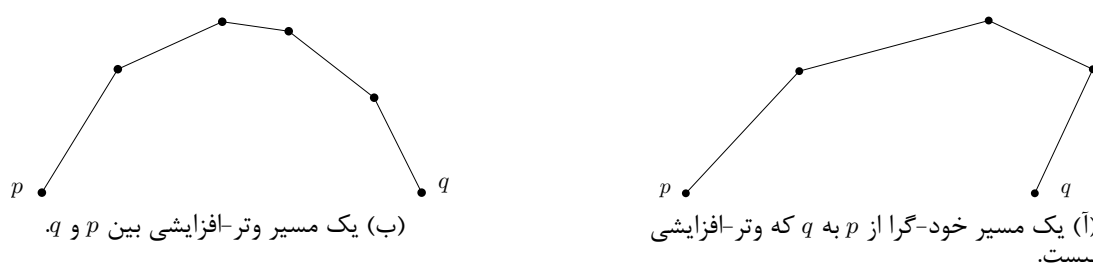
<sup>۲</sup> region-fault tolerant spanners

<sup>۳</sup> convex regions

<sup>۴</sup> Alamdari

<sup>۵</sup> self-approaching

از  $q$  دور نشود. گراف هندسی  $G$  را خود-گرا گویند هرگاه برای هر دو رأس  $s$  و  $t$  در  $G$ ، یک مسیر خود-گرا از  $s$  به  $t$  در  $G$  وجود داشته باشد (شکل ۳-۱ آ را ببینید). یک مسیر را وتر-افزایشی<sup>۱</sup> گویند اگر آن مسیر در هر دو جهت (مبدأ به مقصد و مقصد به مبدأ) خود-گرا باشد و یک گراف هندسی را وتر-افزایشی گویند هرگاه بین هر دو رأسش یک مسیر وتر-افزایشی وجود داشته باشد (شکل ۳-۱ ب را ببینید).



شکل ۳-۱: مسیر خود-گرا و وتر-افزایشی.

در زمینه‌ی ساخت گراف‌های خود-گرا بر روی یک مجموعه از نقاط در صفحه تعدادی کار تحقیقاتی انجام شده است [۲، ۲۴، ۳۲]. یکی از دلایل توجه زیاد به این نوع گراف‌ها در کارهای تحقیقاتی این است که این نوع گراف‌ها دارای ضریب کشش خوبی هستند. ثابت شده است که ضریب کشش گراف‌های خود-گرا حداکثر ۵/۳۳۳۲ [۲۹] و ضریب کشش گراف‌های وتر-افزایشی حداکثر ۲/۰۹۴ است [۴۰].

### ۳-۱ کلیات رساله

در این رساله، ما چند مسئله‌ی مرتبط با طراحی و تحلیل شبکه‌های هندسی را در نظر می‌گیریم: در فصل ۲، نوع جدیدی از گراف‌های هندسی به نام گراف یائوی پیوسته را معرفی می‌کنیم. فرض کنید که  $0 < \theta \leq 2\pi$  یک عدد حقیقی باشد. گراف یائوی پیوسته نسبت به زاویه‌ی  $\theta$  که با نماد  $cY(\theta)$  نمایش داده می‌شود روی مجموعه نقطه‌ی  $S$  به صورت زیر ساخته می‌شود: بین هر دو رأس  $p, q \in S$  یالی وجود دارد اگر و فقط اگر یک مخروط با دهانه‌ی  $\theta$  به مرکز  $p$  وجود داشته باشد به طوری که  $q$  نزدیک‌ترین نقطه به  $p$  در این مخروط باشد. به عبارتی دیگر، تصور کنید که

<sup>۱</sup>increasing-chord



یک مخروط با دهانه‌ی  $\theta$  حول یک نقطه‌ی  $p \in S$  می‌چرخد. بنابراین در گراف یائوی پیوسته،  $p$  همواره توسط یالی به نزدیک‌ترین نقطه‌ی داخل مخروط در حین چرخش متصل می‌شود. در این فصل، ضریب کشش، تحمل‌پذیری خطا و خاصیت خود-گرایی این نوع گراف‌ها را بررسی می‌کنیم. ما نشان می‌دهیم که برای هر  $0 < \theta \leq 2\pi/3$ ، گراف یائوی پیوسته‌ی  $cY(\theta)$  یک  $t$ -پوشش است که  $t$  یک مقدار ثابت می‌باشد، ولی برای  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  این گونه نیست. همچنین، نشان می‌دهیم که برای هر  $0 < \theta \leq \pi$ ، گراف  $cY(\theta)$  همبند است ولی برای هر  $\theta > \pi$ ، لزوماً همبند نیست. همچنین این خصوصیات را در مدل تحمل‌پذیری ناحیه-خطا نیز بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای هر  $\theta < \pi/3$ ، گراف  $cY(\theta)$  یک  $t$ -پوشش باقی می‌ماند ( $t$  مقدار ثابت و وابسته به  $\theta$  است) حتی اگر ناحیه‌ی محدبی از آن حذف شود. ما همچنین نشان می‌دهیم که  $cY(\theta)$  برای هر  $\theta \leq \pi$  همبند باقی می‌ماند حتی اگر بخش محدبی از آن حذف شود. این فصل، مستخرج از مقاله‌ی [۸] است.

در فصل ۴۴، یک الگوریتم برای ساخت پوشش شکاف-حریصانه با کمک WSPD ارائه می‌کنیم که پیچیدگی زمانی و حافظه‌ی آن به ترتیب  $O(n^3)$  و  $O(n)$  است. اگرچه، پوشش حریصانه یک پوشش با کیفیت عالی است و همچنین وزن آن از دیدگاه نظری بهتر از وزن پوشش شکاف-حریصانه است، اما تا جایی که ما اطلاع داریم هیچ الگوریتمی برای ساخت پوشش حریصانه در زمان  $O(n^2)$  پیش از این ارائه نشده است. در این فصل، نشان می‌دهیم که الگوریتمی برای ساخت پوشش شکاف-حریصانه در زمان  $O(n^2)$  و با بکاربردن  $O(n^2)$  حافظه وجود دارد. همچنین، ضریب کشش پوشش شکاف-حریصانه را بهبود می‌دهیم. در این فصل، همچنین سه الگوریتم با زمان اجرای  $O(n^3)$  برای ساخت پوشش شکاف-حریصانه ارائه می‌کنیم و چندین نتیجه‌ی تجربی روی زمان اجرای این الگوریتم‌ها ارائه می‌کنیم. با توجه به نتایج تجربی، نتیجه می‌گیریم که یکی از این الگوریتم‌ها (الگوریتم ۴۴) نسبت به الگوریتم‌های دیگری که معرفی می‌شوند، سریع‌تر است. ما همچنین به صورت تجربی خصوصیات هندسی پوشش حریصانه را در مقایسه با پوشش شکاف-حریصانه، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این فصل، مستخرج از مقاله‌ی [۱۲] است.

در فصل ۴۵، مفهوم جدیدی به نام **گراف‌های خود-گرای ضعیف** که حالت تضعیف شده‌ی گراف‌های خود-گرا است را معرفی می‌کنیم. ما یک الگوریتم ارائه می‌کنیم که در زمان چندجمله‌ای

تشخیص می‌دهد که آیا یک گراف هندسی داده شده، خود-گرای ضعیف است یا خیر. همچنین، مسئله‌ی ساخت یک گراف خود-گرای ضعیف مسطح برای هر مجموعه نقطه‌ای در صفحه و مسئله‌ی ساخت  $t$ -پوشش خود-گرای ضعیف (یک  $t$ -پوشش که بین هر دو رأس آن یک  $t$ -مسیر خود-گرای ضعیف وجود دارد) برای هر مجموعه نقطه در صفحه را بررسی می‌کنیم. به طور خاص، نشان می‌دهیم که برای هر عدد حقیقی  $t > 1$  و هر مجموعه نقطه‌ی  $S$  که روی مرز یک مثلث توزیع شده است، یک  $t$ -پوشش وتر-افزایشی با  $O(kn)$  یال که  $k$  فقط وابسته به  $t$  است، وجود دارد. همچنین در این فصل، مسئله‌ی حل‌نشده‌ای که توسط دهکردی و همکارانش [۳۸] مطرح شد را مورد بحث قرار می‌دهیم. به طور خاص، ما نشان می‌دهیم که یک گراف وتر-افزایشی مسطح برای هر مجموعه نقطه‌ای که روی مرز یک مثلث منفرجه یا قائم‌الزاویه قرار گرفته است، وجود دارد. همچنین، نشان می‌دهیم که برای هر مجموعه نقطه‌ای که روی مرز یک مثلث حاده قرار دارد، یک گراف وتر-افزایشی مسطح با اضافه کردن حداکثر ۳ نقطه‌ی اشتاینری وجود دارد. این فصل، مستخرج از مقاله‌ی [۹] است.

در فصل ۴؟، مسئله‌ی ادغام دو پوشش هندسی را معرفی می‌کنیم و سپس یک الگوریتم برای حل آن ارائه می‌کنیم. تا جایی که ما اطلاع داریم، هنوز هیچ الگوریتم تقسیم و غلبه‌ای برای ساخت یک پوشش هندسی ارائه نشده است. بنابراین، ما برای اولین بار، با استفاده از مفهوم ادغام دو پوشش هندسی، دو الگوریتم تقسیم و غلبه جهت ساخت یک  $t$ -پوشش برای یک مجموعه نقطه‌ی داده شده در صفحه ارائه می‌کنیم. همچنین، یک الگوریتم تقسیم و غلبه برای ساخت یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر ناحیه-خطا برای یک مجموعه از نقاط داده شده و برای یک‌سری از ناحیه‌های خاص در صفحه، ارائه می‌کنیم. این فصل، مستخرج از مقاله‌ی [۱۱] است.

در فصل ۴؟، مسئله‌ی ساخت پوشش‌های هندسی مقید به زاویه<sup>۱</sup> را روی یک مجموعه نقطه در صفحه در نظر می‌گیریم. فرض کنید که  $\theta$  یک عدد حقیقی مثبت باشد. یک گراف هندسی  $G(S, E)$  را مقید به زاویه‌ی  $\theta$  گویند هرگاه زاویه‌ی بین هر دو یال مجزای  $\{p, q\}$  و  $\{p, r\}$  در  $E$  حداقل  $\theta$  باشد. برای اولین بار در سال ۲۰۱۲، کارمی<sup>۲</sup> و اسمید [۱۷] مسئله‌ی ساخت شبکه‌ی پوششی هندسی مقید به زاویه را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که برای هر مجموعه نقطه‌ی  $S$

<sup>۱</sup>angle-constrained

<sup>۲</sup>Carmi

شامل  $n$  نقطه در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  و برای هر زاویه  $\theta$  با  $0 < \theta < \pi/3$ ، یک  $t$ -پوشش مقید به زاویه  $\theta$  وجود دارد که در زمان  $O(n \log n)$  ساخته می‌شود که  $t$  فقط به  $\theta$  وابسته است. آن‌ها در همان مقاله، مسئله‌ی ساخت شبکه‌ی پوششی هندسی مقید به زاویه  $\theta$  با  $\theta \geq \pi/3$  را به عنوان مسئله‌ی حل‌نشده مطرح کردند. در این فصل، ما این مسئله‌ی حل‌نشده را حل می‌کنیم. به طور خاص، نشان می‌دهیم که یک مجموعه‌ی  $P$  شامل  $n$  نقطه در صفحه وجود دارد به طوری که برای هر  $\theta > \pi/3$  هیچ گراف هندسی همبند مقید به زاویه  $\theta$  با مجموعه‌ی رئوس  $P$  وجود ندارد. همچنین نشان می‌دهیم که برای  $\theta = \pi/3$  و برای هر  $t < 2/\sqrt{3}$ ، هیچ  $t$ -پوشش مقید به زاویه  $\theta$  روی  $P$  وجود ندارد. این فصل، مستخرج از مقاله‌ی [۱۰] است.

در فصل ۲؟، نتیجه‌گیری و مسائل حل‌نشده را بیان می‌کنیم.



## فصل ۲

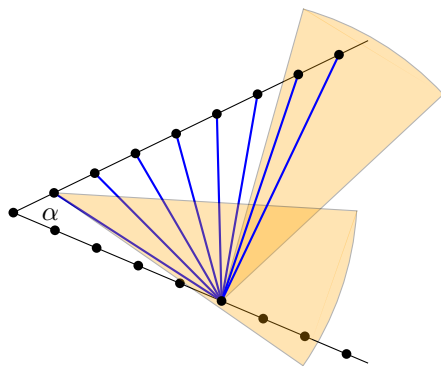
### گراف یائوی پیوسته

در فصل قبل، گراف یائو را تعریف کردیم. مجدداً این تعریف را در اینجا بیان می‌کنیم. فرض کنید که  $S$  مجموعه‌ای شامل  $n$  نقطه در صفحه باشد. یک روش ساده‌ی ساخت  $t$ -پوشش این است که ابتدا صفحه را حول هر نقطه‌ی  $p \in S$  به تعداد ثابتی مخروط<sup>۱</sup> افراز نماییم (لازم به ذکر است که مرز اولین مخروط در جهت ساعت‌گرد، مماس با محور  $x$ ها است) و سپس یال  $(p, r)$ ، که  $r$  نزدیک‌ترین نقطه به  $p$  در مخروط است را به گرافی که تاکنون ساخته شده، اضافه کنیم. این نوع گراف‌ها، به گراف‌های یائو معروف هستند که مستقلاً توسط فلینچباک<sup>۲</sup> و همکارش [۲۸] و یائو [۴۳] معرفی شدند. ثابت شده است که گراف‌های یائو، گراف‌های هندسی کامل را به خوبی تقریب می‌زنند [۵، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۲۰، ۲۲].

گراف یائو را با  $Y_k$  نمایش می‌دهیم که  $k$  تعداد مخروط‌ها است و هر مخروط دارای دهانه‌ی  $\theta = 2\pi/k$  است. برای اولین بار در سال ۱۹۸۷، کلارکسون [۲۰] نشان داد که  $Y_{12}$  یک  $(1 + \sqrt{3})$ -پوشش است. آلزوفر و همکارانش [۵] نشان دادند که برای هر  $t > 1$ ، یک  $k$  وجود دارد که  $Y_k$  یک  $t$ -پوشش است. برای  $k > 8$ ، بوز و همکارانش [۱۶] نشان دادند که  $Y_k$  یک شبکه‌ی پوششی با ضریب کشش حداکثر  $1/(\cos \theta - \sin \theta)$  است که بعدها بوز و همکارانش ثابت کردند که برای  $k > 6$ ، گراف  $Y_k$ ، یک شبکه‌ی پوششی با ضریب کشش حداکثر  $1/(1 - 2 \sin(\theta/2))$  است [۱۵]. دامیان<sup>۳</sup> و رادونیس<sup>۴</sup> [۲۲] ثابت کردند که ضریب کشش  $Y_6$ ،  $17/64$  است که بعدها توسط باربا<sup>۵</sup> و همکارانش [۱۳] این ضریب کشش به  $5/8$  بهبود داده شد. در همان مقاله، همچنین ضریب کشش  $Y_k$  برای مقادیر  $k$  فرد که  $k \geq 5$  به  $1/(1 - 2 \sin(3\theta/8))$  بهبود داده شد. بوز و همکارانش [۱۵] نشان دادند که  $Y_4$  یک  $663$ -پوشش است. برای  $k < 4$ ، ال ملا<sup>۶</sup> [۲۵] نشان داد که هیچ عدد ثابت  $t$  وجود ندارد که به ازای آن،  $Y_k$  یک  $t$ -پوشش شود.

گراف‌های یائو مبتنی بر این فرض اولیه هستند که همه‌ی نقاط یک چرخش مخروط یکسان با توجه به یک جهت ثابت خارجی را بکار می‌برند. از دیدگاه کاربردی، اگر این نقاط دستگاه‌های

<sup>۱</sup>cone<sup>۲</sup>Flinchbaugh<sup>۳</sup>Damian<sup>۴</sup>Raudonis<sup>۵</sup>Barba<sup>۶</sup>El Molla



شکل ۱-۲: تعداد یال‌های گراف یائوی پیوسته می‌تواند مربعی باشد.

بیسیم را نمایش دهند و یال‌ها راه‌های ارتباطی بین آنها را نمایش دهند، آنگاه این نقاط برای اینکه قادر باشند تا مخروط‌هایشان را به صورت یکسان بچرخانند، نیازمند اشتراک گذاری یک دستگاه مختصات یکسان هستند. عدم وجود اطلاعات مختصاتی یکسان، سطحی از مشکلات را به شبکه وارد می‌کند. در این رساله، ما نوع جدیدی از گراف‌های یائو به نام گراف‌های یائوی پیوسته، را از دیدگاه چرخش مخروط‌ها به طور داخلی، بررسی می‌کنیم.

فرض کنید که  $0 < \theta \leq 2\pi$  یک عدد حقیقی باشد. گراف یائوی پیوسته نسبت به زاویه  $\theta$  که با نماد  $cY(\theta)$  نمایش داده می‌شود روی مجموعه نقطه‌ای  $S$  به صورت زیر ساخته می‌شود: بین هر دو رأس  $p, q \in S$ ، یالی وجود دارد اگر و فقط اگر یک مخروط با دهانه‌ی  $\theta$  به مرکز  $p$  وجود داشته باشد به طوری که  $q$  نزدیک‌ترین نقطه به  $p$  در این مخروط باشد. به عبارتی دیگر، تصور کنید که یک مخروط با دهانه‌ی  $\theta$  حول یک نقطه‌ی  $p \in S$  می‌چرخد. در گراف یائوی پیوسته،  $p$  به نزدیک‌ترین نقطه‌ی داخل مخروط در حین چرخش، متصل می‌شود.

برخلاف گراف یائو، گراف یائوی پیوسته دارای این خاصیت است که به ازای هر  $\theta$  و هر  $\gamma$  که  $cY(\theta) \subseteq cY(\gamma)$ ،  $\theta \geq \gamma$ ، همچنین، برخلاف گراف‌های یائو که همواره تعداد یال‌های آن‌ها خطی است، گراف یائوی پیوسته ممکن است شامل تعدادی یال از مرتبه‌ی مربعی باشد (به طور مثال فرض کنید که نقاط ورودی به صورت یکسان روی دو پاره‌خط متقاطع که با هم زاویه‌ی  $\alpha < \pi$  می‌سازند، توزیع شده باشند. به ازای هر  $\theta < \alpha$ ،  $cY(\theta)$  شامل همه‌ی آن یال‌هایی است که یک سر انتهایی آن‌ها یک نقطه روی یک پاره‌خط و سر دیگر آن یال، نقطه‌ای روی پاره‌خط دیگر است، شکل ۱-۲ را ببینید).

در این فصل، خاصیت پوششی بودن، خاصیت خود-گرایی و خاصیت تحمل‌پذیر بودن ناحیه-خطا را برای گراف‌های یائوی پیوسته مطالعه می‌کنیم. در بخش ۲، نشان می‌دهیم که اگر  $\theta < 2\pi/3$ ، آنگاه ضریب کشش  $cY(\theta)$  برابر  $1/(1 - 2\sin(\theta/4))$  است. خواهیم دید که روشی که در این بخش بکار می‌رود را نمی‌توانیم برای حالت  $\theta = 2\pi/3$  بکار ببریم. در بخش ۳، برای اولین بار، روش جبری جدیدی را معرفی می‌کنیم و به کمک آن نشان خواهیم داد که  $cY(2\pi/3)$  یک  $6/41$ -پوشش است. در بخش ۴، حالتی که  $\theta > 2\pi/3$  است را بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که هیچ عدد ثابت  $t > 1$  وجود ندارد که به ازای آن،  $cY(\pi)$  یک  $t$ -پوشش باشد. ما مقدار ضریب کشش در حالتی که  $2\pi/3 < \theta < \pi$  باشد را به عنوان مسئله‌ی حل‌نشده مطرح می‌کنیم. همچنین همبندی گراف  $cY(\theta)$  را بررسی می‌کنیم و نشان خواهیم داد که به ازای هر  $\theta \leq \pi$ ، گراف  $cY(\theta)$  همبند است، اما اگر  $\theta > \pi$ ، آنگاه  $cY(\theta)$  ممکن است ناهمبند باشد. در بخش ۵، تحمل‌پذیری ناحیه-خطا در  $cY(\theta)$  را مطالعه می‌کنیم. در بخش ۶، نشان می‌دهیم که  $cY(\theta)$  خود-گرا نیست و در بخش ۷، این فصل را نتیجه‌گیری می‌کنیم.

توجه کنید که در طول این فصل، فرض می‌کنیم که نقاط در حالت کلی قرار دارند یعنی فاصله‌ها از یک رأس به رئوس دیگر یکتا هستند.

## ۲-۲ گراف یائوی پیوسته برای مخروط‌های باریک

در این بخش، مسئله‌ی محاسبه‌ی ضریب کشش گراف  $cY(\theta)$  برای زمانی که  $\theta < 2\pi/3$  است را در نظر می‌گیریم.

**لم ۱-۲-۲ ([۱۳]).** اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه نقطه باشند به طوری که  $|ac| \leq |ab|$  و  $\alpha < \pi$ ،  $\angle(ba, ac) \leq \alpha$ ، آنگاه

$$|bc| \leq |ab| - (1 - 2\sin(\alpha/2))|ac|,$$

که در اینجا،  $\angle(ba, ac)$  زاویه‌ی بین پاره‌خط‌های  $ba$  و  $ac$  است.

برای دو رأس  $a$  و  $b$  در گراف  $cY(\theta)$ ، فرض می‌کنیم که  $C_{ab}$  مخروطی با دهانه‌ی  $\theta$  و به مرکز



$a$  باشد به طوری که  $b$  روی نیمساز زاویه‌اش قرار می‌گیرد.

**قضیه ۲-۲-۲.** اگر  $0 < \theta < 2\pi/3$ ، آنگاه گراف  $cY(\theta)$  دارای ضریب کشش  $1/(1 - 2\sin(\theta/4))$  است.

**اثبات.** برای اثبات قضیه، کافی است نشان دهیم که بین هر دو رأس  $a$  و  $b$  در  $cY(\theta)$  یک مسیر با طول حداکثر  $|ab|/(1 - 2\sin(\theta/4))$  وجود دارد. اثبات مبتنی بر استقرا روی رتبه‌ی فاصله‌ی  $|ab|$  است (منظور از رتبه‌ی فاصله‌ی یک زوج نقطه یعنی اینکه تمام زوج نقاط را بر اساس فاصله‌ی اقلیدسی آن‌ها از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. به شماره‌ی هر زوج نقطه در این ترتیب، رتبه‌ی فاصله‌ی آن زوج می‌گوییم).

**پایه‌ی استقرا:** در صورتی که  $a$  و  $b$  نزدیک‌ترین زوج از رؤس باشند، از این رو،  $(a, b)$  در هر مخروط با مرکز  $a$  که شامل  $b$  باشد، به  $cY(\theta)$  اضافه می‌شود.

**فرض استقرا:** فرض می‌کنیم که حکم، برای هر دو رأس که فاصله‌ی اقلیدسی آن‌ها از فاصله‌ی اقلیدسی زوج  $(a, b)$ ، کمتر است، برقرار باشد.

**حکم استقرا:** حال، نشان می‌دهیم که بین دو رأس  $a$  و  $b$  یک مسیر به طول  $|ab|/(1 - 2\sin(\theta/4))$  وجود دارد.

اگر  $(a, b)$  در گراف باشد، آنگاه بدیهی است که یک مسیر به طول حداکثر  $|ab|/(1 - 2\sin(\theta/4))$  بین  $a$  و  $b$  وجود دارد و اثبات تمام است. پس، فرض کنید که  $(a, b)$

متعلق به  $cY(\theta)$  نباشد. این بدین معناست که رأسی نزدیک‌تر به  $a$  نسبت به  $b$ ، در هر مخروط با دهانه‌ی  $\theta$  و به مرکز  $a$  که شامل  $b$  باشد، وجود دارد. بنابراین، این موضوع برای مخروط  $C_{ab}$

نیز صدق می‌کند. فرض کنید که  $n_a$  نزدیک‌ترین رأس به  $a$  در  $C_{ab}$  باشد. از آنجایی که  $C_{ab}$

دارای دهانه‌ی  $\theta$  است، بنابراین  $\angle(n_a a, ab)$  حداکثر  $\theta/2$  است. بنابراین، طبق لم ۲-۲-۱ داریم

$$|bn_a| \leq |ab| - (1 - 2\sin(\theta/4))|an_a|$$

توجه کنید از آنجایی که  $0 < \theta < 2\pi/3$ ، داریم  $\theta/4 < \pi/6$  که

بدین معناست که  $1 - 2\sin(\theta/4) > 0$  و از این رو،  $|bn_a| < |ab|$ . بنابراین، می‌توانیم فرض استقرا

را برای  $n_a$  و  $b$  بکار ببریم. پس، یک مسیر  $Q$  بین  $n_a$  و  $b$  با طول حداکثر  $|bn_a|/(1 - 2\sin(\theta/4))$

وجود دارد. حال مسیر  $\{(a, n_a)\} \cup Q$  را در نظر بگیرید. به وضوح این مسیر، یک مسیر بین  $a$  و  $b$

---

<sup>۱</sup>rank of distance

است و طول آن حداکثر برابر است با:

$$|an_a| + \frac{1}{1 - 2\sin(\theta/4)} |bn_a| \leq |an_a| + \frac{1}{1 - 2\sin(\theta/4)} (|ab| - (1 - 2\sin(\theta/4))|an_a|) =$$

$$|an_a| + \frac{1}{1 - 2\sin(\theta/4)} |ab| - |an_a| = \frac{1}{1 - 2\sin(\theta/4)} |ab|.$$

این رابطه، اثبات را کامل می‌کند. ■

## ۲-۳ گراف $cY(2\pi/3)$ یک $6/0$ پوشش

بزرگ‌ترین ریشه‌ی چندجمله‌ای

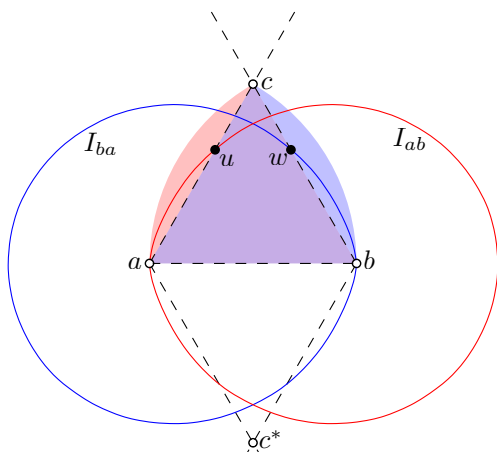
$$p(t) = -25 + 90t - 39t^2 - 246t^3 + 363t^4 + 138t^5 - 589t^6 + 216t^7 + 291t^8 - 204t^9 - 84t^{10} + 6t^{11} + 2t^{12}$$

را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که  $t \approx 6/0$  بزرگ‌ترین ریشه‌ی  $p(t)$  است. در این بخش، ثابت می‌کنیم که  $cY(2\pi/3)$  یک  $t$ -پوشش است. بدین منظور، نشان می‌دهیم که برای هر دو رأس  $a$  و  $b$  در  $cY(2\pi/3)$ ، یک مسیر از  $a$  به  $b$  به طول حداکثر  $t|ab|$  وجود دارد. در انتهای این بخش، مشخص خواهد شد که این چندجمله‌ای چگونه بدست می‌آید.

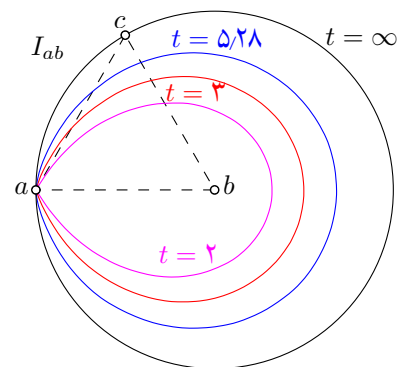
فرض کنید که  $a$  و  $b$  دو رأس دلخواه در  $cY(2\pi/3)$  باشد. اثبات مبتنی بر استقرا روی رتبه‌ی فاصله‌ی  $|ab|$  است. در صورتی که  $a$  و  $b$  نزدیک‌ترین زوج رئوس در  $cY(2\pi/3)$  باشند، به وضوح، یال  $(a, b)$  در هر مخروط به مرکز  $a$  که شامل  $b$  باشد، اضافه می‌شود (توجه کنید که ما از قبل فرض کرده‌ایم که نقاط در حالت کلی قرار دارند). حال، فرض کنید که نتایج برای هر دو رأس که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از  $|ab|$  است، برقرار باشد. نشان می‌دهیم که برای دو رأس  $a$  و  $b$  در  $cY(2\pi/3)$ ، یک مسیر از  $a$  به  $b$  به طول حداکثر  $t|ab|$  وجود دارد. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که  $a = (0, 0)$  و  $b = (1, 0)$ . بنابراین  $|ab| = 1$ . ما مجموعه‌ی استقرایی  $a$  نسبت به  $b$  را با  $I_{ab} = \{p \in \mathbb{R}^2 : |ap| + t|pb| \leq t|ab|\}$  تعریف می‌کنیم (شکل ۲-۲ را ببینید).

اثبات را با یک لم شروع می‌کنیم که از فرض اولیه که نقاط در حالت کلی قرار دارند، نتیجه

می‌شود.



(ب) مجموعه‌های استقرایی  $I_{ba}$  و  $I_{ab}$  نمایش داده شده‌اند. بخش‌های دایره‌ای که  $n_a$  و  $n_b$  می‌توانند قرار گیرند به ترتیب با رنگ آبی روشن و قرمز روشن نمایش داده شده است.



(آ) مجموعه‌ی استقرایی  $I_{ab}$  برای مقادیر مختلف  $t$ .

شکل ۲-۲

لم ۲-۳-۱. مجموعه‌ی استقرایی  $I_{ab}$ ، توسط دیسک  $D$  به مرکز  $b$  و شعاع  $|ab|$  دربرگرفته می‌شود.

همچنین، هر نقطه‌ی  $p \neq a$  که روی مرز  $D$  است، خارج از  $I_{ab}$  قرار دارد.

**اثبات.** فرض کنید که  $p \neq a$  یک نقطه در  $I_{ab}$  باشد. از آنجایی که  $|ap| > 0$ ، داریم  $|tpb| < |ap|$ .

در نتیجه،  $|ap| + |tpb| \leq |ab|$ . در نتیجه،  $p$  حتماً داخل دایره به مرکز  $b$  و شعاع  $|ab|$  قرار دارد و روی مرز آن

قرار ندارد. ■

همان طور که از قبل ذکر شد  $C_{ab}$  یک مخروط به مرکز  $a$  است که  $b$  روی نیمسازش قرار

دارد. فرض کنید که  $n_a$  و  $n_b$  به ترتیب نزدیک‌ترین نقاط به  $a$  و  $b$  در مخروط‌های  $C_{ba}$  و  $C_{ab}$

باشند. هرگاه  $n_a \in I_{ab}$ ، آنگاه یک مسیر از  $a$  به  $b$  به طول حداکثر  $|ab| + t|ab|$  وجود داشته باشد. درواقع،

چون  $n_a \in I_{ab}$  طبق لم ۲-۳-۱ داریم  $|n_a b| < |ab|$ . بنابراین، می‌توانیم فرض استقرا را بکار ببریم

و یک مسیر  $Q$  به طول حداکثر  $t|n_a b|$  بین  $n_a$  و  $b$  بدست آوریم. چون  $n_a \in I_{ab}$ ، بنابراین مسیر

$\{(a, n_a)\} \cup Q$  یک مسیر از  $a$  به  $b$  به طول حداکثر  $|an_a| + t|n_a b| \leq |ab| + t|ab|$  است که مطلوب می‌باشد.

به طور مشابه، مجموعه‌ی  $I_{ba}$  دارای خاصیت استقرایی است.

توجه کنید که اگر  $n_a \in I_{ab}$  یا  $n_b \in I_{ba}$ ، آنگاه اثبات با توجه به خاصیت استقرایی، تمام

است و حکم برقرار می‌باشد. از این رو، فرض می‌کنیم که  $n_a \notin I_{ab}$  و  $n_b \notin I_{ba}$  از آنجایی که

$a = (0, 0)$  و  $b = (1, 0)$ ، بنابراین مجموعه‌ی نقاط روی مرز  $I_{ab}$ ، در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$((-2+x)x+y^2)^2 t^2 + (x^2+y^2)^2 - 2(2+(-2+x)x+y^2)(x^2+y^2)t^2 = 0, \quad (1-2)$$

که این معادله، یک منحنی درجه‌ی چهار بر اساس  $x$  و  $y$  را تعریف می‌کند. فرض کنید که  $c$  و  $c^*$  نقاط اشتراک مرزهای  $C_{ba}$  و  $C_{ab}$  باشند و فرض کنید که  $c$  بالای  $c^*$  قرار دارد (شکل ۲-۲ ب را ببینید). از آنجایی که مثلث‌های  $\triangle abc$  و  $\triangle abc^*$  متساوی‌الاضلاع هستند، داریم  $c = (1/2, \sqrt{3}/2)$  و  $c^* = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ . نقطه‌ی اشتراک مرز  $I_{ab}$  با پاره خط  $ac$  را  $u$  می‌نامیم. بنابراین،  $u$  برابر است با

$$u = \left( \frac{t(t-2)}{2(t^2-1)}, \frac{\sqrt{3}t(t-2)}{2(t^2-1)} \right) \approx (0.3438, 0.5956). \quad (2-2)$$

به طور مشابه، فرض کنید که نقطه‌ی اشتراک مرز  $I_{ba}$  با پاره خط  $bc$  را  $w$  می‌نامیم. بنابراین،  $w$  برابر است با

$$w = \left( 1 - \frac{t(t-2)}{2(t^2-1)}, \frac{\sqrt{3}t(t-2)}{2(t^2-1)} \right) \approx (0.6561, 0.5956).$$

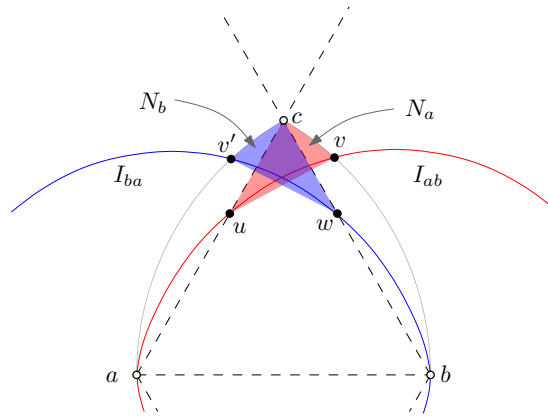
سه نقطه‌ی  $x$ ،  $y$  و  $y'$  را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که  $|xy'| = |xy|$ . قطاع مدور<sup>۱</sup> به مرکز  $x$  که بین  $xy$  و  $xy'$  و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، قرار گرفته است را با  $\mathcal{C}(x, y, y')$  نمایش می‌دهیم. حال، دو حالت وجود دارد که آن‌ها را در نظر می‌گیریم:

**حالت الف):** فرض کنید که  $n_a$  و  $n_b$  هر دو بالای محور  $x$  قرار دارند. اثبات در حالتی که دو نقطه زیر محور  $x$  است، مشابه است. از آنجایی که  $n_a$  و  $n_b$  به ترتیب در قطاع‌های مدور  $\mathcal{C}(a, b, c)$  و  $\mathcal{C}(b, c, a)$  قرار دارند، بنابراین، داریم  $|n_a n_b| < |ab|$ . پس، می‌توانیم فرض استقرا را روی  $n_a n_b$  بکار ببریم و سپس یک مسیر  $\varphi_{n_a n_b}$  از  $n_a$  به  $n_b$  به طول حداکثر  $t|n_a n_b|$  بدست آوریم. حال، مسیر  $\varphi_{ab} = \varphi_{n_a} \cap \varphi_{n_a n_b} \cup n_b b$  از  $a$  به  $b$  را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که طول  $\varphi_{ab}$  حداکثر  $t|ab|$  است. بدین منظور، کرانی را روی طول پاره خط  $n_a n_b$  پیدا می‌کنیم.

**لم ۲-۳-۲.** در پیکربندی حالت الف) که در شکل ۲-۲ ب نمایش داده شده است، داریم:

$$|n_a n_b| \leq |uc| = |wc| = |uw|.$$

<sup>۱</sup> circular sector



شکل ۲-۳: ناحیه‌های مجاور به  $a$  و  $b$  در حالت الف).

**اثبات.** همان طور که از قبل ذکر شد،  $n_a$  باید داخل قطاع مدور  $\mathcal{C}(a, b, c)$  قرار گیرد. همچنین، چون فرض کرده‌ایم که  $n_a$  خارج از  $I_{ab}$  قرار دارد، بنابراین  $n_a$  در قسمت  $\mathcal{C}(a, b, c) \setminus I_{ab}$  قرار دارد. فرض کنید که  $N_a$  پوشش محدب<sup>۱</sup>  $\mathcal{C}(a, b, c) \setminus I_{ab}$  باشد و  $v$  نقطه‌ی اشتراک  $I_{ab}$  و کمانی از قطاع مدور  $\mathcal{C}(a, b, c)$  باشد (شکل ۲-۳ را ببینید). به طور مشابه، فرض کنید که  $v'$  نقطه‌ی اشتراک  $I_{ba}$  و کمانی از قطاع مدور  $\mathcal{C}(b, c, a)$  باشد. بنابراین،  $N_a$  توسط پاره‌خط‌های  $uc$ ،  $uv$  و کمان مدور به مرکز  $a$  و به شعاع ۱ که  $v$  را به  $c$  متصل می‌کند، احاطه شده است. به طور مشابه،  $N_b$  را پوشش محدب  $\mathcal{C}(b, c, a) \setminus I_{ba}$  می‌نامیم. چون  $n_a \in N_a$  و  $m_b \in N_b$ ، بنابراین با محاسبه‌ی بیش‌ترین فاصله‌ی بین یک نقطه در  $N_a$  و یک نقطه در  $N_b$ ، می‌توانیم یک کران بالا روی فاصله‌ی بین  $n_a$  و  $m_b$  بدست آوریم. ما دو نقطه‌ای که این فاصله را بیشینه می‌کند، با  $m_a$  و  $m_b$  نمایش می‌دهیم که  $m_a \in N_a$  و  $m_b \in N_b$  (توجه کنید که ممکن است چند زوج  $(m_a, m_b)$  وجود داشته باشد). از آنجایی که تابع فاصله‌ی اقلیدسی، یک تابع محدب (تابع  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع محدب در فضای برداری  $X$  است هرگاه به ازای هر  $x_1$  و  $x_2$  در  $X$  و به ازای هر  $t \in [0, 1]$ ، داشته باشیم

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

است و از آنجایی که هر دو مجموعه‌ی  $N_a$  و  $N_b$  محدب هستند، بنابراین زوجی مانند

$(m_a, m_b)$  وجود دارد به طوری که  $m_a$  روی مرز  $N_a$  و  $m_b$  روی مرز  $N_b$  قرار دارند.

در حقیقت، ادعا می‌کنیم که فقط نیاز است که مرزهای مثلث‌های  $\Delta(u, v, c) \subset N_a$  و

$\Delta(w, c, v') \subset N_b$  را به منظور پیدا کردن  $(m_a, m_b)$ ، در نظر بگیریم. برای اثبات این ادعا، ماه<sup>۲</sup>

ایجاد شده توسط  $N_a \setminus \Delta(u, v, c)$  را در نظر بگیرید. برای یک نقطه‌ی  $x$  در این ماه، دورترین نقطه

<sup>۱</sup>convex hull

<sup>۲</sup>lune

از آن که در  $N_b$  قرار دارد و با  $f(x)$  نمایش می‌دهیم را در نظر بگیرید. توجه کنید که دایره به مرکز  $f(x)$  که از  $x$  می‌گذرد، یا  $c$  و یا  $v$  و یا هر دو را شامل نمی‌شود، زیرا، شعاع این دایره کوچک‌تر از شعاع کمان مدور روی مرز  $N_a$  است (شکل ۲-۳ را ببینید). بنابراین، یا  $c$  و یا  $v$  نسبت به  $x$  از  $f(x)$  دورترند و از این رو،  $m_a$  و  $m_b$  نمی‌توانند داخل این ماه قرار گیرند. بنابراین،  $m_a$  روی مرز مثلث  $\Delta(u, v, c)$  قرار دارد. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که  $m_b$  روی مرز مثلث  $\Delta(w, c, v')$  قرار دارد. از آنجایی که مختصات رئوس مثلث‌های  $\Delta(u, v, c)$  و  $\Delta(w, c, v')$  را از قبل می‌دانیم، بنابراین

می‌توانیم به راحتی بررسی کنیم  $|m_a m_b| = |uc| = |cw| = |uw|$ . ■

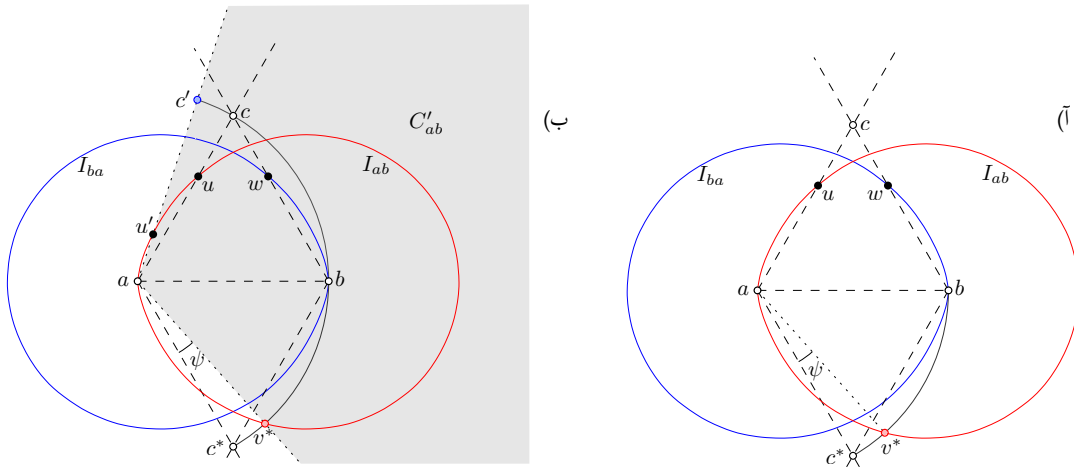
از آنجایی که طول  $|n_a n_b|$  حداکثر  $|uc|$  است و  $|an_a|$  و  $|bn_b|$  هر دو حداکثر ۱ هستند، بنابراین، با توجه به لم ۲-۳-۲، طول مسیر  $\varphi_{ab} = an_a \cup \varphi_{n_a n_b} \cup n_b b$  حداکثر  $2 + t|uc|$  است. حال، ثابت می‌کنیم که  $2 + t|uc| \leq t|ab|$  از آنجایی که  $a = (0, 0)$ ،  $b = (1, 0)$ ،  $c = (1/2, \sqrt{3}/2)$  و  $|au| = \frac{t(t-2)}{t^2-1}$  نامساوی  $|au| = \frac{t(t-2)}{t^2-1}$  هم ارز با نامساوی زیر است:

$$2 + t \left( 1 - \frac{t(t-2)}{t^2-1} \right) \leq t.$$

این نامساوی درست است هرگاه  $2 \geq t^3 - 4t^2 + 2$  و  $t > 1$ . از آنجایی که  $t = 670411$  بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه‌ی حقیقی  $2 + 4x^2 - x^3$  است، بنابراین اثبات تمام است. بنابراین، هرگاه پیکربندی حالت الف) را داشته باشیم، می‌توانیم فرض استقرا را بکار ببریم و یک مسیر  $\varphi_{ab}$  از  $a$  به  $b$  به طول حداکثر  $|ab| \leq 2 + t|uc|$  بدست آوریم.

**حالت ب):** اثبات حالت ب) کمی مشکل است اما روش اثبات مانند حالت الف) است. اگر  $n_a$  و  $n_b$  در جهت‌های مخالف همدیگر نسبت به پاره خط  $ab$  قرار گیرند، آنگاه بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم فرض کنیم که  $n_a$  پایین محور  $x$  و  $n_b$  بالای محور  $x$  قرار دارد. توجه کنید که  $c^*$  نقطه‌ی تقاطع مرزهای  $C_{ba}$  و  $C_{ab}$  است که در پایین محور  $x$  قرار دارد.

از آنجایی که  $(a, b)$  یال  $cY(2\pi/3)$  نیست، بنابراین  $n_a$  باید داخل  $\mathcal{C}(a, c^*, b)$  قرار گیرد. فرض کنید که  $v^*$  نقطه‌ی تقاطع مرز  $I_{ab}$  با کمان  $\mathcal{C}(a, c^*, b)$  باشد (شکل ۲-۴ را ببینید). این نقطه‌ی تقاطع همیشه وجود دارد زیرا  $b$  داخل  $I_{ab}$  است و طبق لم ۲-۳-۱،  $c^*$  خارج از  $I_{ab}$  قرار دارد. از آنجایی که کمان  $\mathcal{C}(a, c^*, b)$  بخشی از دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  است، از معادله‌ی ۱-۲ داریم:



شکل ۲-۴: (آ) نقطه‌ی  $v^*$  و زاویه‌ی  $\psi = \angle(v^*a, ac^*)$  (ب) مخروط  $C'_{ab}$  که با چرخاندن  $C_{ab}$  به اندازه‌ی  $\psi$  درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، بدست می‌آید.

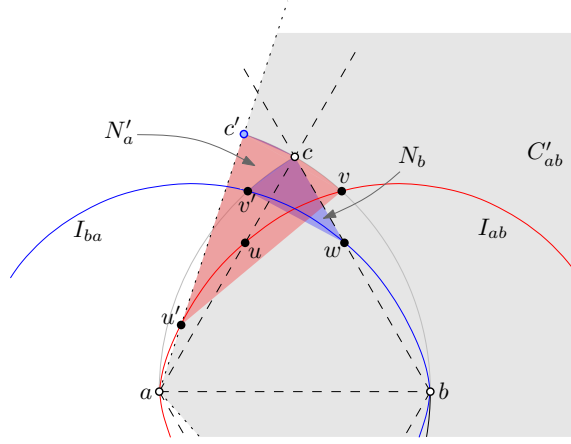
$$v^* = \left( \frac{t^2 + 2t - 1}{2t^2}, -\frac{t-1}{2t^2} \sqrt{(t+1)(3t-1)} \right) \quad (3-2)$$

$$\approx (0.6518, -0.7583).$$

فرض کنید که  $\psi = \angle(v^*a, ac^*)$  (شکل ۲-۴(آ) را ببینید). از آنجایی که  $\psi = \pi/3$  فرض کنید که  $\angle(ba, av^*)$  بنابراین از معادله‌ی ۳-۲ داریم:

$$\begin{aligned} \tan(\psi) &= \tan(\pi/3 - \angle(ba, av^*)) = \frac{\tan(\pi/3) - \tan(\angle(ba, av^*))}{1 + \tan(\pi/3) \tan(\angle(ba, av^*))} \\ &= \frac{\sqrt{3}(t^2 + 2t - 1) - (t-1)\sqrt{(t+1)(3t-1)}}{t^2 + 2t - 1 + \sqrt{3}(t-1)\sqrt{(t+1)(3t-1)}}. \end{aligned} \quad (4-2)$$

بنابراین  $\tan(\psi) \approx 0.1885$  و در نتیجه  $\psi \approx 10.6800^\circ$ . فرض کنید که مخروط  $C'_{ab}$  (و بدین ترتیب نقطه‌ی  $c'$ ) از چرخش  $C_{ab}$  (نقطه‌ی  $c$ ) حول نقطه‌ی  $a$  و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و به اندازه‌ی  $\psi$  درجه، بدست آید. توجه کنید که  $\mathcal{C}(a, v^*, b) \subset I_{ab}$  (شکل ۲-۴(ب) را ببینید). فرض کنید که  $n'_a$  نزدیک‌ترین نقطه به  $a$  داخل  $C'_{ab}$  باشد. اگر  $n'_a$  داخل  $I_{ab}$  باشد، بنابر فرض استقرا، اثبات تمام است. بنابراین، فرض کنید که  $n'_a \notin I_{ab}$  از آنجایی که  $\mathcal{C}(a, v^*, b) \subset I_{ab}$ ،  $n'_a$  نمی‌تواند داخل  $\mathcal{C}(a, v^*, b)$  باشد و از این رو،  $n'_a$  باید بالای محور  $x$  قرار گیرد. فرض کنید که پوشش محدب  $\mathcal{C}(a, c', b) \setminus I_{ab}$  باشد. بنابراین،  $n'_a$  باید داخل  $N'_a$  باشد (شکل ۲-۵ را ببینید). همانند حالت الف)  $n_b$  باید داخل  $N_b$  که پوشش محدب  $\mathcal{C}(b, c, a) \setminus I_{ba}$  است، قرار گیرد. فرض کنید که  $u' \in ac$  نقطه‌ی اشتراک مرزهای  $C'_{ab}$  و  $I_{ab}$  باشد (شکل ۲-۵ را ببینید). از معادله‌ی ۴-۲ نتیجه



شکل ۲-۵:  $N_b$  و  $N'_a$

می‌شود که معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی  $a$  و  $c'$  می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$y = \tan(\pi/3 + \psi) x = \frac{\tan(\pi/3) + \tan(\psi)}{1 - \tan(\pi/3) \tan(\psi)} x$$

$$= \frac{\sqrt{3}(t^2 + 2t - 1) + (t - 1)\sqrt{(t+1)(3t-1)}}{-(t^2 + 2t - 1) + \sqrt{3}(t-1)\sqrt{(t+1)(3t-1)}} x.$$

بنابراین، مؤلفه‌ی  $x$  نقطه‌ی  $u'$  برابر است با

$$\frac{1}{4t^2(t^2 - 1)} \left( 5t^4 - 2t^3 + 2t^2 + 2t - 1 \right. \\ \left. - \sqrt{3}(t-1)(t^2 + 4t - 1)\sqrt{(t+1)(3t-1)} \right)$$

و مؤلفه‌ی  $x$  نقطه‌ی  $c'$  برابر است با

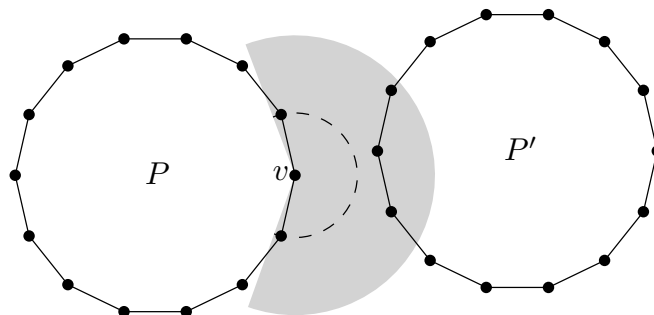
$$\frac{-(t^2 + 2t - 1) + \sqrt{3}(t-1)\sqrt{(t+1)(3t-1)}}{4t^2}.$$

بنابراین،  $u' \approx (0.1124, 0.3207)$  و  $c' \approx (0.3308, 0.9436)$ . مشابه اثبات لم ۲-۳-۲، لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۲-۳-۳. در پیکربندی حالت ب)، فاصله‌ی بین  $n'_a$  و  $n_b$  حداکثر  $|u'c|$  است.

**اثبات.** چون  $n'_a \in N'_a$  و  $n_b \in N_b$ ، بنابراین، با محاسبه‌ی بیش‌ترین فاصله‌ی بین یک نقطه در  $N'_a$  و یک نقطه در  $N_b$ ، می‌توانیم یک کران بالا برای فاصله‌ی بین  $n'_a$  و  $n_b$  بدست آوریم. مشابه اثبات لم ۲-۳-۲، می‌توانیم نشان دهیم که بیش‌ترین فاصله زمانی ایجاد می‌شود که یک نقطه مانند  $m_a$  از مرز  $N'_a$  و یک نقطه مانند  $m_b$  از مرز  $N_b$  انتخاب شود. به راحتی می‌توان درستی این موضوع را بررسی کرد که فاصله‌ی هر نقطه‌ی  $p \in N_b$  از  $u'$  نسبت به فاصله‌ی هر نقطه‌ی  $q \in N'_a$  که  $q \neq p$ ، از





شکل ۲-۶: اگر  $\theta > \pi$ ، آنگاه  $cY(\theta)$  می‌تواند ناهمبند باشد.

$u'$  بیش‌تر است. بنابراین، کافی است دورترین نقطه‌ی  $N_b$  از  $u'$  را پیدا کنیم. همچنین توجه کنید که دایره به مرکز  $u'$  که از نقطه‌ای روی کمان مدور از  $N_b$  می‌گذرد، شامل  $c$  نمی‌شود. بنابراین، کافی است که دورترین نقطه‌ی روی مرز مثلث  $\Delta(w, c, v')$  از  $u'$  را پیدا کنیم.

با توجه به مختصات دقیق  $u'$  و همچنین مختصات رئوس مثلث  $\Delta(w, c, v')$ ، به راحتی

می‌توانیم بررسی کنیم که  $m_a = u'$  و  $m_b = c$  بنابراین  $|n'_a n_b| \leq |m_a m_b| = |u'c|$ . ■

با توجه به لم ۲-۳-۳، فاصله‌ی بین  $n'_a$  و  $n_b$  حداکثر برابر  $|u'c| > 1$  است. بنابراین، طبق

فرض استقرا می‌توانیم یک مسیر  $\varphi_{n'_a n_b}$  از  $n'_a$  به  $n_b$  به طول حداکثر  $t|n'_a n_b|$  بدست آوریم.

فرض کنید که  $\varphi_{ab} = \varphi_{n'_a n_b} \cup n_b b \cup a n'_a$  یک مسیر از  $a$  به  $b$  باشد. با توجه به لم ۲-۳-۳،

به وضوح، طول  $\varphi_{ab}$  حداکثر  $2 + \varphi_{n'_a n_b} + t|u'c| \geq 2$  است.

ما اکنون ثابت می‌کنیم که  $t|ab| \geq 2 + t|u'c|$  از آنجایی که  $a = (0, 0)$ ،  $b = (1, 0)$  و

$c = (1/2, \sqrt{3}/2)$ ، بنابراین با استفاده از مختصات  $u'$ ، به این نتیجه می‌رسیم که  $t|ab| \geq 2 + t|u'c|$

هرگاه  $p(t) \geq 0$  و  $t \approx 6.411$  (توجه کنید که  $t \approx 6.411$  بزرگ‌ترین ریشه‌ی حقیقی چندجمله‌ای

$p(t)$  است). بنابراین، هرگاه پیکربندی حالت ب) رخ دهد، می‌توانیم با کمک استقرا یک مسیر  $\varphi_{ab}$

از  $a$  به  $b$  به طول حداکثر  $t|ab| \geq 2 + t|u'c|$  بدست آوریم.

به طور خلاصه، برای هر دو رأس  $a$  و  $b$  در  $cY(2\pi/3)$  و برای ثابت  $t \approx 6.411$ ، یک مسیر

از  $a$  به  $b$  در  $cY(2\pi/3)$  به طول حداکثر  $t|ab|$  وجود دارد. بنابراین قضیه‌ی زیر را بدست می‌آوریم.

**قضیه ۲-۳-۴.** گراف  $cY(\theta)$  یک  $t$ -پوشش است به طوری که اگر  $\theta = 2\pi/3$ ، آنگاه  $t \leq 6.411$

و اگر  $\theta < 2\pi/3$ ، آنگاه  $t \leq \min \left\{ 6.411, \frac{1}{1 - 2 \sin(\theta/4)} \right\}$ .

## ۴-۲ زاویه‌های بزرگ‌تر

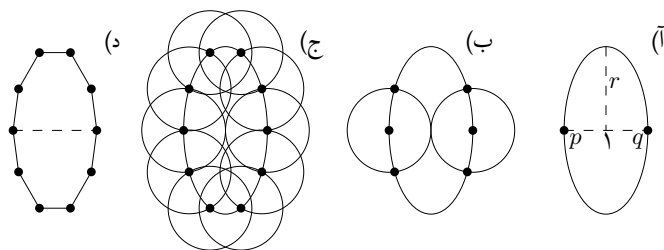
قضیه ۴-۳-۲، یک کران بالا برای ضریب کشش  $cY(\theta)$  برای مقادیر  $\theta \leq 2\pi/3$  فراهم می‌کند. اما برای مقادیر  $\theta > 2\pi/3$  چه اتفاقی می‌افتد؟ نتایجی که در ادامه می‌آید نشان می‌دهد که اگر  $\theta$  خیلی بزرگ باشد، آنگاه  $cY(\theta)$  می‌تواند ناهمبند باشد.

**قضیه ۴-۲-۱.** برای هر  $\theta > \pi$ ، مجموعه‌ای از نقاط وجود دارد به طوری که  $cY(\theta)$  روی آن ناهمبند است.

**اثبات.** چون  $\theta > \pi$ ، بنابراین  $\epsilon > 0$  وجود دارد به طوری که  $\theta = \pi + \epsilon$ . فرض کنید که  $P$  یک چندضلعی منتظم باشد به طوری که زاویه‌های داخلی آن حداقل  $\pi - \epsilon/2$  رادیان باشد.  $P'$  را یک کپی از  $P$  در نظر بگیرید. حال،  $P$  و  $P'$  را طوری در صفحه قرار می‌دهیم که فاصله‌ی بین آن‌ها بیش‌تر از فاصله‌ی بین دو رأس متوالی روی  $P$  باشد (شکل ۴-۶ را ببینید). یک رأس  $v$  روی  $P$  را در نظر بگیرید. زاویه‌ی خارجی  $v$ ، حداکثر  $2\pi - (\pi - \epsilon/2) = \pi + \epsilon/2$  رادیان است. از آنجایی که این زاویه کم‌تر از  $\theta$  است، هر مخروط به مرکز  $v$  یکی از همسایه‌های  $v$  روی  $P$  را شامل می‌شود. از این رو، از آنجایی که فاصله‌ی بین  $P$  و  $P'$  بیش‌تر از فاصله‌ی  $v$  تا همسایه‌هایش است، در  $cY(\theta)$ ،  $v$  هرگز به رأسی در  $P'$  وصل نخواهد شد. از آنجایی که ما  $v$  را به صورت کاملاً دلخواه انتخاب کردیم و  $P'$  یک کپی از  $P$  است، در نتیجه، هیچ یالی در  $cY(\theta)$  را به  $P'$  متصل نخواهد کرد. ■

**قضیه ۴-۲-۲.** برای هر مجموعه نقطه‌ی  $S$  و هر  $\theta \leq \pi$ ، گراف یائوی پیوسته‌ی  $cY(\theta)$  روی  $S$ ، همبند است.

**اثبات.** از آنجایی که برای هر  $\theta \leq \pi$ ، داریم  $cY(\pi) \subseteq cY(\theta)$ ، کافی است قضیه را برای  $\theta = \pi$  ثابت کنیم. فرض کنید که  $S_r$  مجموعه‌ی همه‌ی نقاط در  $S$  باشد به طوری که مختصات  $x$  آن‌ها بیش‌ترین است. حال، مجموعه‌ی  $S' = S \setminus S_r$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که  $S' \neq \emptyset$  و  $v$  یک نقطه‌ی دلخواه در  $S'$  باشد (توجه کنید که در حالتی که  $S' = \emptyset$  است، همه‌ی نقاط  $S$  روی یک خط افقی قرار دارند که مشابه آنچه که در پاراگراف بعدی آمده است، می‌توان ثابت کرد که  $cY(\theta)$



شکل ۷-۲: اثبات قضیه ۳-۴-۲.

همبند است). ثابت می‌کنیم که بین  $v$  و یک نقطه در  $S_r$  یک مسیری در  $cY(\pi)$  وجود دارد. از آنجایی که  $v \in S'$ ، بنابراین، همواره یک مخروط  $C$  به مرکز  $v$  و با دهانه‌ی  $\pi$  وجود دارد که شامل یک نقطه در  $S_r$  باشد. حال، فرض کنید که  $q$  نزدیک‌ترین نقطه به  $v$  در  $C$  باشد. به وضوح،  $(v, q)$  یالی در  $cY(\pi)$  است. از آنجایی که تعداد نقاط  $S$  متناهی است، بنابراین با تکرار روند بالا، بین  $v$  و یک نقطه در  $S_r$  یک مسیری وجود دارد.

حال، فرض کنید که تعداد اعضای  $S_r$ ، حداقل ۲ باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که بین هر دو رأس در  $S_r$ ، یک مسیر مستقیم وجود دارد که فقط کافیست مخروط را در هر رأس  $S_r$  اندکی بچرخانید تا شامل فقط یک رأس در  $S_r$  باشد. حال، از آنجایی که بین هر رأس در  $S'$  و یک رأس در  $S_r$  یک مسیری هست، پس با اتصال مسیرها، بین هر دو رأس در  $S$  یک مسیری در  $cY(\pi)$  است و در نتیجه  $cY(\pi)$  همبند است. ■

در ادامه، نشان می‌دهیم که هیچ عدد ثابت  $t$  وجود ندارد که  $cY(\pi)$  یک  $t$ -پوشش باشد.

**قضیه ۳-۴-۲.** به ازای هر عدد ثابت  $t > 1$ ، مجموعه‌ای از نقاط در صفحه وجود دارد به طوری که گراف یائوی پیوسته‌ی  $cY(\pi)$  روی آن یک  $t$ -پوشش نیست.

**اثبات.** مجموعه‌ی نقاطی را که می‌خواهیم بسازیم،  $S$  می‌نامیم. فرض کنید که  $S$  مجموعه‌ای از دو نقطه‌ی  $p$  و  $q$  باشد به طوری که  $|pq| = 1$  باشد. می‌خواهیم نقاطی را به  $S$  اضافه کنیم به طوری که طول کوتاه‌ترین مسیر بین  $p$  و  $q$  در گراف  $cY(\pi)$  روی مجموعه‌ی رؤس  $S$ ، به اندازه‌ی دلخواه زیاد شود. روش ساخت این مجموعه در شکل ۷-۲ نمایش داده شده است. فرض کنید که  $C$  دایره‌ای به قطر  $|pq|$  باشد که از  $p$  و  $q$  می‌گذرد. ما این دایره را به صورت عمودی و با مضربی از  $2r$  که  $r \geq 1$  یک عدد حقیقی است، همانند یک کش، می‌کشیم (شکل ۷-۲ را ببینید). شکل

حاصل یک بیضی می‌باشد. ابتدا چهار نقطه، هر یک به فاصله‌ی  $1/2$  از  $p$  یا  $q$  را روی این بیضی قرار می‌دهیم (شکل ۲-۷ ب را ببینید). سپس، نقاط دیگری را به این شکل اضافه می‌کنیم که ما این نقاط را در فاصله‌ی  $1/2$  از نقاط موجود قرار می‌دهیم و این کار را ادامه می‌دهیم تا وقتی که هر دو زنجیره‌ی نقاط، به همدیگر برسند (شکل ۲-۷ ج را ببینید).

حال، یک رأس  $v$  از مجموعه‌ی جدید  $S$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که  $H$  نیم‌صفحه‌ای است که از  $v$  می‌گذرد و شامل تعدادی نقطه در  $S$  است. بر طبق ساختی که از  $S$  ارائه کردیم به وضوح، فاصله‌ی  $v$  تا همسایه‌هایش روی بیضی نسبت به فاصله‌ی  $v$  تا نقاط دیگر که در  $H$  هستند، کمتر است (به غیر از انتهای زنجیره). بنابراین، در ساخت  $cY(\pi)$  هیچ قطری در این بیضی ایجاد نمی‌شود. در نتیجه،  $cY(\pi)$  تشکیل یک چندضلعی محدب می‌دهد که در واقع همان پوشش محدب  $S$  است (شکل ۲-۷ د را ببینید).

حال اگر  $r$  را افزایش دهیم، تعداد رئوس روی هر زنجیره افزایش می‌یابد. وقتی که هر یک از زنجیره‌ها دارای  $k$  رأس است، طول کوتاه‌ترین مسیر بین  $p$  و  $q$  حداقل  $k/2 = 2k/2$  خواهد بود. از آنجایی که فاصله‌ی بین  $p$  و  $q$  ثابت می‌ماند، می‌توانیم  $r$  را به اندازه‌ی دلخواه، بزرگ انتخاب کنیم، بنابراین، هیچ مقدار ثابت  $t$  وجود ندارد که به ازای آن،  $cY(\pi)$  یک  $t$ -پوشش باشد. ■

## ۲-۵ تحمل‌پذیری خطا در $cY(\theta)$

فرض کنید که  $C$  خانواده‌ی همه‌ی ناحیه‌های محدب در صفحه باشد. در این بخش، نشان می‌دهیم که برای هر  $0 < \theta < \pi/3$ ، گراف یائوی پیوسته‌ی  $cY(\theta)$  یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر  $C$ -خطا برای  $t \geq 1/(1 - 2 \sin(\theta/2))$  است. علاوه بر این، نشان می‌دهیم که برای هر  $\theta \leq \pi$  و هر ناحیه‌ی محدب  $C$ ، گراف  $cY(\theta) \ominus C$  همبند است اگر و فقط اگر گراف  $K_S \ominus C$  همبند باشد. ما به لم زیر نیاز داریم.

لم ۲-۵-۱ ([۱]). گراف هندسی  $G$  روی  $S$  یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر  $C$ -خطا است اگر و فقط اگر یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر  $\mathcal{H}$ -خطا باشد که در آن  $C$  خانواده‌ی همه‌ی ناحیه‌های محدب در صفحه

و  $\mathcal{H}$  خانواده‌ی همه‌ی نیم‌صفحه‌ها است.

حال، قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم.

**قضیه ۲-۵-۲.** فرض کنید که  $\theta$  و  $t$  دو عدد حقیقی باشند به طوری که  $0 < \theta < \pi/3$  و  $t \geq 1/(1 - 2\sin(\theta/2))$ . برای هر مجموعه نقطه‌ی  $S$  در صفحه، گراف  $cY(\theta)$  یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر  $C$ -خطا است که  $C$  خانواده‌ی همه‌ی ناحیه‌های محدب در صفحه است.

**اثبات.** طبق لم ۲-۵-۱، کفایت نشان دهیم که  $cY(\theta)$  یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر  $\mathcal{H}$ -خطاست که  $\mathcal{H}$  خانواده‌ی همه‌ی نیم‌صفحه‌ها است. فرض کنید که  $h$  یک نیم‌صفحه‌ی دلخواه در  $\mathcal{H}$  باشد. باید نشان دهیم که برای هر زوج نقطه‌ی  $p, q \in S$  که خارج از  $h$  قرار دارند، یک  $t$ -مسیر بین  $p$  و  $q$  در  $cY(\theta) \ominus h$  وجود دارد. فرض کنید که  $p, q \in S$  دو نقطه خارج از  $h$  باشند. اثبات بر اساس استقرا روی رتبه‌ی فاصله‌ی اقلیدسی  $|pq|$  است.

**پایه‌ی استقرا:** در صورتی که  $p$  و  $q$  نزدیک‌ترین زوج نقاط در  $S \ominus h$  باشند، بنابراین، یال  $(p, q)$  باید در  $cY(\theta) \ominus h$  باشد (زیرا طبق فرض اولیه‌ی ما، نقاط در حالت کلی قرار دارند یعنی فاصله‌ی بین یک رأس تا رئوس دیگر یکتا است).

**فرض استقرا:** فرض می‌کنیم  $(p, q)$  یک زوج نقطه باشد و برای هر  $a, b \in S \ominus h$  که  $|ab| < |pq|$ ، یک  $t$ -مسیر بین  $a$  و  $b$  در  $cY(\theta) \ominus h$  وجود دارد.

**حکم استقرا:** نشان می‌دهیم که یک  $t$ -مسیر بین  $p$  و  $q$  در  $cY(\theta) \ominus h$  وجود دارد. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که  $p$  به  $h$  نزدیک‌تر از  $q$  به  $h$  باشد (توجه کنید که ما از ابتدا فرض کرده‌ایم که نقاط در حالت کلی قرار دارند). از آنجایی که  $p$  و  $q$  خارج از  $h$  قرار دارند، بنابراین یک  $\theta$ -مخروط (یک مخروط با دهانه‌ی  $\theta$ ) مانند  $C_p$  به مرکز  $p$  وجود دارد به طوری که  $q \in C_p$  و  $C_p$  نیم‌صفحه‌ی  $h$  را قطع نکند (شکل ۲-۸ را ببینید). فرض کنید که  $r$  نزدیک‌ترین نقطه به  $p$  داخل مخروط  $C_p$  باشد. از آنجایی که  $0 < \theta < \pi/3$ ، داریم  $1 - 2\sin(\theta/2) > 0$  و از آنجایی که  $|pr| \leq |pq|$ ، طبق لم ۲-۲-۱، داریم  $|rq| < |pq|$ . بنابراین، می‌توانیم فرض استقرا را روی  $(r, q)$  بکار ببریم و یک  $t$ -مسیر  $Q$  از  $r$  به  $q$  در  $cY(\theta) \ominus h$  بدست آوریم. حال، مسیر  $P := \{(p, r)\} \cup Q$  را در نظر بگیرید. به

وضوح،  $P$  یک مسیر از  $p$  به  $q$  در  $h \ominus cY(\theta)$  است. با توجه به لم ۲-۲-۱، داریم:

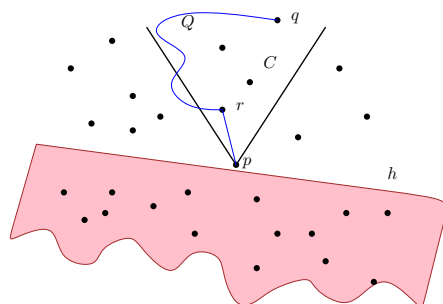
$$\begin{aligned} |P| &= |pr| + |Q| \leq |pr| + t|rq| \leq |pr| + t(|pq| - (1 - 2\sin(\theta/2))|pr|) \\ &= t|pq| + (1 - t(1 - 2\sin(\theta/2)))|pr| \leq t|pq|. \end{aligned}$$

نامساوی آخر در رابطه‌ی بالا، از رابطه‌ی  $t \geq 1/(1 - 2\sin(\theta/2))$  نتیجه می‌شود. بنابراین،  $P$  یک  $t$ -مسیر از  $p$  به  $q$  در  $h \ominus cY(\theta)$  است. ■

در ادامه، ما همبندی  $C \ominus cY(\theta)$  که  $C$  یک ناحیه‌ی محدب در صفحه است را بررسی می‌کنیم. از آنجایی که برای هر  $\theta < \pi/3$ ، گراف  $cY(\theta)$  یک پوشش تحمل‌پذیر ناحیه-خطا است، بنابراین  $C \ominus cY(\theta)$  همبند است اگر و فقط اگر  $K_S \ominus C$  همبند باشد. در ادامه، نشان می‌دهیم که برای  $\pi/3 \leq \theta \leq \pi$ ، گراف  $C \ominus cY(\theta)$  همبند است. ابتدا، لم زیر را ثابت می‌کنیم.

**لم ۲-۵-۳.** برای هر نیم‌صفحه‌ی  $h$  و هر زاویه‌ی  $0 < \theta \leq \pi$ ، گراف  $h \ominus cY(\theta)$  همبند است.

**اثبات.** فرض کنید که  $p$  دورترین رأس از  $h$  که خارج از  $h$  قرار دارد، باشد. نشان می‌دهیم که از هر رأس خارج از  $h$  یک مسیر به  $p$  وجود دارد. با اتصال مسیرها از رؤوس مختلف، یک مسیر بین هر زوج از رؤوس خارج از  $h$  بدست می‌آوریم که این لم را ثابت می‌کند. حال، فرض کنید که  $v$  یک رأس خارج از  $h$  باشد. اگر  $v$  دورترین رأس از  $h$  نباشد، آنگاه فرض کنیم که  $L$  یک خط موازی با مرز  $h$  باشد که از  $v$  می‌گذرد. از آنجایی که رؤوسی وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها از  $h$  نسبت به فاصله‌ی  $v$  تا  $h$  بیش‌تر است، بنابراین، نیم‌صفحه‌ای مانند  $g$  که مرز آن  $L$  باشد و شامل  $h$  نباشد وجود دارد که حتماً شامل رأسی در  $h \ominus cY(\theta)$  باشد. بنابراین،  $g$  شامل یک  $\theta$ -مخروط غیرتهی به مرکز  $v$  است. فرض کنید که  $u$  نزدیک‌ترین رأس به  $v$  در این  $\theta$ -مخروط باشد. به وضوح،  $(u, v)$  یک یال در  $h \ominus cY(\theta)$  است. حال، با حرکت از  $v$  به سمت  $u$  و تکرار این فرایند، از دور می‌شویم تا زمانی که به یک رأس مانند  $v'$  که در دورترین فاصله از  $h$  قرار دارد، برسیم. در این لحظه، توجه کنید که همه‌ی رؤوسی که در دورترین فاصله از  $h$  قرار دارند باید روی یک خط  $\ell$  موازی با  $h$  قرار گیرند. فرض کنید که  $v' \neq t$ . بنابراین، مخروط به مرکز  $v'$  که  $h$  را قطع نمی‌کند و همچنین یکی از مرزهایش منطبق بر خط  $\ell$  و در جهت  $p$  است را در نظر بگیرید. این مخروط را اندکی بچرخانید



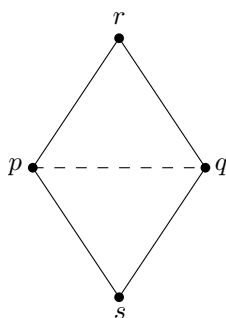
شکل ۲-۸: اثبات قضیه ۲-۵-۲.

تا  $p$  را شامل شود ولی شامل هیچ رأسی در  $h$  نباشد. نزدیک‌ترین رأس در این مخروط به  $v'$  رأس بعد از  $v'$  روی  $\ell$  و در جهت  $p$  است. ما این رأس را  $w$  می‌نامیم. با حرکت از  $v'$  به سمت  $w$  و تکرار این فرایند، در نهایت به  $p$  می‌رسیم. این نشان می‌دهد که  $cY(\theta) \ominus h$  همبند است. ■

**قضیه ۲-۵-۴.** برای هر ناحیه‌ی محدب  $C$  و هر زاویه‌ی  $\theta \leq \pi$ ، گراف  $cY(\theta) \ominus C$  همبند است اگر و فقط اگر  $K_S \ominus C$  همبند باشد که  $K_S$  گراف کامل هندسی روی  $S$  است.

**اثبات.** فرض کنید که  $C$  یک ناحیه‌ی محدب دلخواه در صفحه باشد. از آنجایی که  $cY(\theta)$  زیرگرافی از  $K_S$  است، بنابراین  $cY(\theta) \ominus C$  زیرگرافی از  $K_S \ominus C$  است. بنابراین، اثبات یک طرف قضیه واضح است: از همبندی  $cY(\theta) \ominus C$  می‌توان همبندی  $K_S \ominus C$  را نتیجه گرفت. حال، طرف دیگر قضیه را ثابت می‌کنیم. بدین منظور، نشان می‌دهیم که بین هر زوج رأسی که در  $K_S \ominus C$  توسط یک یال بهم وصل هستند، یک مسیر در  $cY(\theta) \ominus C$  وجود دارد. اتصال این مسیرها، بین هر دو رأسی که در  $K_S \ominus C$  توسط یک مسیر به هم متصل هستند، یک مسیر در  $cY(\theta) \ominus C$  ایجاد می‌کند و اثبات را کامل می‌کند.

فرض کنید که  $(u, v)$  یک یال در  $K_S \ominus C$  باشد. بنابراین یال  $(u, v)$  ناحیه‌ی  $C$  را قطع نمی‌کند. از آنجایی که هر دو چندضلعی محدب نامتقاطع، می‌توانند توسط یک خط، مجزا شوند، بنابراین یک نیم‌صفحه‌ی  $h$  وجود دارد که شامل  $C$  باشد ولی  $u$  و  $v$  در آن نیم‌صفحه نباشد. با توجه به لم ۲-۵-۳،  $cY(\theta) \ominus h$  همبند است، بنابراین یک مسیر از  $u$  به  $v$  در  $cY(\theta)$  وجود دارد که به طور کامل خارج از  $h$  قرار دارد. از آنجایی که  $h$  شامل  $C$  است، این مسیر در  $cY(\theta) \ominus C$  نیز وجود دارد. بنابراین، یک مسیر بین هر دو رأس انتهایی هر یال  $K_S \ominus C$  در  $cY(\theta) \ominus C$  وجود دارد که



شکل ۹-۲: یک مجموعه نقطه که  $Y_4$  روی آن خود-گرا نیست اما  $cY(\pi/2)$  روی آن خود-گرا است. یال نقطه‌چین متعلق به  $Y_4$  نیست ولی متعلق به  $cY(\pi/2)$  است.

■

این قضیه را ثابت می‌کند.

## ۶-۲ خود-گرایی گراف‌های یائوی پیوسته

ممکن است این طور تصور شود که گراف‌های یائو، خود-گرا هستند. اما مثال‌های نقضی برای این موضوع وجود دارد. حال، سؤالی که ممکن است مطرح شود این است که آیا یک  $\theta$  وجود دارد که  $cY(\theta)$  روی هر مجموعه از نقطه در صفحه، خود-گرا یا وتر-افزایشی باشد؟ شکل ۹-۲ مثالی از مجموعه‌ای از چهار نقطه‌ی  $\{p, q, r, s\}$  را نشان می‌دهد که در آن گراف یائوی  $Y_4$  خود-گرا نیست اما  $cY(\pi/2)$  خود-گرا است. توجه کنید که در این شکل، این چهار نقطه، رئوس یک متوازی‌الاضلاع هستند که فقط اندکی جابجا شده‌اند که هیچ دو فاصله‌ای یکی نباشد. همه‌ی چهار یال متوازی‌الاضلاع متعلق به  $cY(\pi/2)$  و  $Y_4$  هستند اما قطر کوچک این متوازی‌الاضلاع یعنی  $(p, q)$ ، متعلق به  $cY(\pi/2)$  است ولی متعلق به  $Y_4$  نیست. اما عدم وجود یال  $(p, q)$  در  $Y_4$  باعث می‌شود که هر مسیر بین  $p$  و  $q$  در  $Y_4$ ، خود-گرا نباشد. این نشان می‌دهد که  $Y_4$  خود-گرا نیست و به راحتی می‌توان بررسی کرد که  $cY(\pi/2)$  روی این مجموعه نقطه، خود-گرا است. حال، در ادامه نشان می‌دهیم که گراف  $cY(\theta)$ ، همیشه خود-گرا نیست.

**قضیه ۶-۲-۱.** برای هر  $\theta > 0$ ، مجموعه‌ای از نقاط وجود دارد به طوری که  $cY(\theta)$  روی آن خود-گرا نیست.



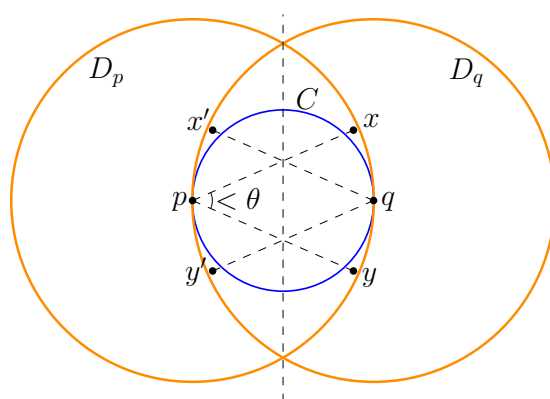
**اثبات.** ما قضیه را برای  $0 < \theta \leq 2\pi/3$  ثابت می‌کنیم. از آنجایی که اگر  $\theta \geq 2\pi/3$ ، آنگاه

$$cY(\theta) \subseteq cY(2\pi/3),$$

بنابراین، قضیه برای هر  $\theta > 0$ ، نتیجه می‌شود.

برای ساخت مجموعه نقطه، دو نقطه‌ی  $p = (0, 0)$  و  $q = (1, 0)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که  $C$  دایره‌ای به قطر یک باشد که از  $p$  و  $q$  عبور می‌کند و  $D_p$  و  $D_q$  دایره‌هایی به ترتیب به مرکز  $p$  و  $q$  و به شعاع یک باشند (شکل ۲-۱۰ را ببینید). همچنین، فرض کنید که  $x$  و  $y$  دو نقطه، خارج از  $C$  و داخل ماه  $p$  و  $q$  باشند به طوری که  $\angle(xp, pq) < \theta/2$  و  $\angle(yp, pq) < \theta/2$  باشد و  $x'$  و  $y'$  تصویر آینه‌ای  $x$  و  $y$  نسبت به عمود منصف  $(p, q)$  باشند.

حال،  $cY(\theta)$  را روی این مجموعه نقطه در نظر بگیرید. از آنجایی که  $\angle(xp, py) = \angle(x'q, qy') < \theta$ ،  $cY(\theta)$  شامل یال  $(p, q)$  نمی‌باشد، زیرا هر  $\theta$ -مخروط به مرکز  $p$  که شامل  $q$  باشد، حداقل یکی از نقاط  $x$  و  $y$  را که به  $p$  در مقایسه با  $q$  نزدیک‌تر هستند، در بر می‌گیرد. به طور مشابه، هر  $\theta$ -مخروط به مرکز  $q$  که شامل  $p$  باشد باید حداقل یکی از  $x'$  و  $y'$  را که به  $q$  نسبت به  $p$  نزدیک‌تر هستند، در بر بگیرد. به علاوه، براساس قضیه‌ی تالس<sup>۱</sup>، هیچ یک از یال‌های  $(p, x)$ ،  $(p, y)$ ،  $(p, x')$  و  $(p, y')$  نمی‌توانند بخشی از مسیر خود-گرا از  $p$  به  $q$  باشند. از آنجایی که این یال‌ها تنها یال‌هایی هستند که در  $cY(\theta)$  وجود دارند، بنابراین در  $cY(\theta)$  هیچ مسیر خود-گرا از  $p$  به  $q$  و یا بالعکس وجود ندارد. این نشان می‌دهد که  $cY(\theta)$  خود-گرا نیست. ■



شکل ۲-۱۰: اثبات قضیه‌ی ۲-۶-۱.

<sup>۱</sup>Thales

## ۷-۲ نتیجه‌گیری

ما نوع جدیدی از گراف‌های هندسی به نام گراف یائوی پیوسته را معرفی کردیم و ضریب کشش، تحمل‌پذیری خطا و خاصیت خود-گرایی آن‌ها را بررسی کردیم. ما نشان دادیم که برای هر  $0 < \theta \leq 2\pi/3$ ، گراف یائوی پیوسته‌ی  $cY(\theta)$  یک  $t$ -پوشش است که در آن  $t$  یک مقدار ثابت می‌باشد، ولی برای  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  این‌گونه نیست. همچنین نشان دادیم که برای هر  $0 < \theta \leq \pi$ ، گراف  $cY(\theta)$  همبند است ولی برای هر  $\theta > \pi$  لزوماً همبند نیست. ما همچنین این خصوصیات را در مدل تحمل‌پذیری ناحیه-خطا نیز بررسی کردیم و نشان دادیم که برای هر  $\theta < \pi/3$ ، گراف  $cY(\theta)$  یک  $t$ -پوشش باقی می‌ماند ( $t$  مقدار ثابت و وابسته به  $\theta$  است) حتی اگر ناحیه‌ی محدبی از آن حذف شود. همچنین نشان دادیم که  $cY(\theta)$  برای هر  $\theta \leq \pi$ ، همبند باقی می‌ماند حتی اگر بخش محدبی از آن حذف شود.

در زیر دو سؤال به عنوان مسئله‌ی حل‌نشده، مطرح می‌کنیم.

۱. آیا  $cY(\theta)$  برای  $2\pi/3 < \theta < \pi$  یک  $t$ -پوشش که  $t$  مقدار ثابتی باشد، است؟

۲. آیا  $cY(\theta)$  برای  $\pi/3 \leq \theta \leq \pi$  یک  $t$ -پوشش تحمل‌پذیر  $C$ -خطا که  $t$  یک مقدار ثابتی باشد،

است؟

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

## ا

broadcasting ..... انتشار

Size ..... اندازه

## پ

convex hull ..... پوشش محدب

region-fault tolerant spanners ..... پوشش‌های تحمل‌پذیر ناحیه-خطا

## ت

Thales ..... تالس

well-separated pair decomposition ..... تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا

Ball ..... توپ

## ج

metric space searching ..... جستجوی فضای متریک

bounding box ..... جعبه‌ی احاطه‌کننده

## خ

self-approaching ..... خود-گرا

## د

Dijkstra ..... دایکسترا

Degree ..... درجه

minimum spanning tree ..... درخت پوشای کمینه

aperture ..... دهانه‌ی

## ر

rank of distance ..... رتبه‌ی فاصله

## ش

gap ..... شکاف

gap-greedy ..... شکاف-حریصانه

## ض

separation ratio ..... ضریب تفکیک

## ق

circular sector ..... قطاع مدور

## گ

Yao graph ..... گراف یائو

## م

lune ..... ماه

metric ..... متریک

cone ..... مخروط

proximity problems ..... مسائل مجاورتی

path-greedy ..... مسیر-حریصانه

angle-constrained ..... مقید به زاویه

## ن

convex regions ..... ناحیه‌های محدب

## و

increasing-chord ..... وتر-افزایشی

weight ..... وزن

## □

$t$ -spanner .....  $t$ -پوشش

$t$ -approximate .....  $t$ -تقریب

$t$ -path .....  $t$ -مسیر

## □

$w$ -gap .....  $w$ -شکاف

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

## A

angle-constrained ..... مقید به زاویه  
aperture ..... دهانه‌ی

## B

Ball ..... توپ  
bounding box ..... جعبه‌ی احاطه کننده  
broadcasting ..... انتشار

## C

circular sector ..... قطاع مدور  
cone ..... مخروط  
convex hull ..... پوشش محدب  
convex regions ..... ناحیه‌های محدب

## D

Degree ..... درجه

Dijkstra ..... دایکسترا

## G

gap ..... شکاف

gap-greedy ..... شکاف-حریصانه

## I

increasing-chord ..... وتر-افزایشی

## L

lune ..... ماه

## M

metric ..... متریک

metric space searching ..... جستجوی فضای متریک

minimum spanning tree ..... درخت پوشای کمینه



## P

path-greedy ..... مسیر-حریصانه  
proximity problems ..... مسائل مجاورتی

## R

rank of distance ..... رتبه‌ی فاصله  
region-fault tolerant spanners ..... پوشش‌های تحمل‌پذیر ناحیه-خطا

## S

self-approaching ..... خود-گرا  
separation ratio ..... ضریب تفکیک  
Size ..... اندازه

## T

$t$ -approximate .....  $t$ -تقریب  
Thales ..... تالس  
 $t$ -path .....  $t$ -مسیر  
 $t$ -spanner .....  $t$ -پوشش

## W

weight	.....	وزن
well-separated pair decomposition	.....	تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا
$w$ -gap	.....	$w$ -شکاف

## Y

Yao graph	.....	گراف یائو
-----------	-------	-----------

# منابع و مآخذ

- [1] ABAM, M. A., DE BERG, M., FARSHI, M., AND GUDMUNDSSON, J. Region-fault tolerant geometric spanners. *Discrete & Computational Geometry* 41, 4 (2009), 556–582.
- [2] ALAMDARI, S., CHAN, T. M., GRANT, E., LUBIW, A., AND PATHAK, V. Self-approaching graphs. in *International Symposium on Graph Drawing* (2012), Springer, pp. 260–271.
- [3] ALEWIJNSE, S. P. A., BOUTS, Q. W., TEN BRINK, A. P., AND BUCHIN, K. Computing the greedy spanner in linear space. *Algorithmica* 73, 3 (2015), 589–606.
- [4] ALEWIJNSE, S. P. A., BOUTS, Q. W., TEN BRINK, A. P., AND BUCHIN, K. Distribution-sensitive construction of the greedy spanner. *Algorithmica* 78, 1 (2017), 209–231.
- [5] ALTHÖFER, I., DAS, G., DOBKIN, D., JOSEPH, D., AND SOARES, J. On sparse spanners of weighted graphs. *Discrete & Computational Geometry* 9, 1 (1993), 81–100.
- [6] ARYA, S., AND SMID, M. Efficient construction of a bounded-degree spanner with low weight. *Algorithmica* 17, 1 (1997), 33–54.
- [7] B. CALLAHAN, P., AND R. KOSARAJU, S. A decomposition of multidimensional point sets with applications to  $k$ -nearest-neighbors and  $n$ -body potential fields. *Journal of the ACM (JACM)* 42, 1 (1995), 67–90.
- [8] BAKHSHESH, D., BARBA, L., BOSE, P., DE CARUFEL, J.-L., DAMIAN, M., FAGERBERG, R., FARSHI, M., VAN RENSSSEN, A., TASLAKIAN, P., AND VERDONSCHOT, S. Continuous Yao graphs. *Computational Geometry: Theory and Applications* (to appear).
- [9] BAKHSHESH, D., AND FARSHI, M. (weakly) self-approaching geometric graphs and spanners. *Submitted to Computational Geometry: Theory and Applications*.
- [10] BAKHSHESH, D., AND FARSHI, M. Angle-constrained spanners with angle at least  $\pi/3$ . *Information Processing Letters* 120 (2017), 44 – 46.

- [11] BAKHSHESH, D., AND FARSHI, M. An algorithm of merging of geometric spanners networks and its applications. *Submitted to Journal of New Researches in Mathematics* (In Persian).
- [12] BAKHSHESH, D., AND FARSHI, M. Improving space and time complexity of the gap-greedy spanner algorithm. *CSI Journal on Computer Science and Engineering* (to appear).
- [13] BARBA, L., BOSE, P., DAMIAN, M., FAGERBERG, R., KENG, W. L., O’ROURKE, J., VAN RENSSSEN, A., TASLAKIAN, P., VERDONSCHOT, S., AND XIA, G. New and improved spanning ratios for Yao graphs. in *Proceedings of the 30th Symposium on Computational Geometry* (2014), SoCG’14.
- [14] BOSE, P., CARMI, P., FARSHI, M., MAHESHWARI, A., AND SMID, M. Computing the greedy spanner in near-quadratic time. *Algorithmica* 58, 3 (2010), 711–729.
- [15] BOSE, P., DAMIAN, M., DOUÏEB, K., O’ROURKE, J., SEAMONE, B., SMID, M., AND WUHRER, S.  $\pi/2$ -angle Yao graphs are spanners. *International Journal of Computational Geometry & Applications* 22, 1 (2012), 61–82.
- [16] BOSE, P., MAHESHWARI, A., NARASIMHAN, G., SMID, M., AND ZEH, N. Approximating geometric bottleneck shortest paths. *Computational Geometry: Theory and Applications* 29, 3 (2004), 233–249.
- [17] CARMI, P., AND SMID, M. An optimal algorithm for computing angle-constrained spanners. *Journal of Computational Geometry* 3, 1 (2012), 196–221.
- [18] CHANDRA, B., DAS, G., NARASIMHAN, G., AND SOARES, J. New sparseness results on graph spanners. *International Journal of Computational Geometry & Applications* 05 (1995), 125–144.
- [19] CHEW, P. There is a planar graph almost as good as the complete graph. in *Proceedings of the second SOCG* (1986), ACM, pp. 169–177.
- [20] CLARKSON, K. L. Approximation algorithms for shortest path motion planning. in *Proceedings of the 19th ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC 1987)* (1987), pp. 56–65.
- [21] CZUMAJ, A., AND ZHAO, H. Fault-tolerant geometric spanners. *Discrete & Computational Geometry* 32, 2 (2004), 207–230.

- [22] DAMIAN, M., AND RAUDONIS, K. Yao graphs span theta graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* 4, 02 (2012), 1250024.
- [23] DAS, G., AND NARASIMHAN, G. A fast algorithm for constructing sparse euclidean spanners. *International Journal of Computational Geometry & Applications* 07, 04 (1997), 297–315.
- [24] DEHKORDI, H. R., FRATI, F., AND GUDMUNDSSON, J. Increasing-chord graphs on point sets. *Journal of Graph Algorithms and Applications* 19, 2 (2015), 761–778.
- [25] EL MOLLA, N. M. Yao spanners for wireless ad hoc networks. Master’s thesis, Villanova University, 2009.
- [26] FARLEY, A. M., PROSKUROWSKI, A., ZAPPALA, D., AND WINDISCH, K. Spanners and message distribution in networks. *Discrete Applied Mathematics* 137, 2 (2004), 159 – 171.
- [27] FARSHI, M., AND POUREIDI, A. A lower bound for computing geometric spanners. *Computational Geometry: Theory and Applications* 53 (2016), 21 – 26.
- [28] FLINCHBAUGH, B. E., AND JONES, L. K. Strong connectivity in directional nearest-neighbor graphs. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 2, 4 (1981), 461–463.
- [29] ICKING, C., KLEIN, R., AND LANGETEPE, E. Self-approaching curves. in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1999), volume 125, Cambridge University Press, pp. 441–453.
- [30] LEVCOPOULOS, C., NARASIMHAN, G., AND SMID, M. Improved algorithms for constructing fault-tolerant spanners. *Algorithmica* 32, 1 (2002), 144–156.
- [31] LUKOVSKI, T. *New results on geometric spanners and their applications*. Ph.D. thesis, Heinz Nixdorf Institute and Department of Mathematics and Computer Science, Paderborn University, Paderborn, Germany, 1999.
- [32] MASTAKAS, K., AND SYMVONIS, A. On the construction of increasing-chord graphs on convex point sets. in *Information, Intelligence, Systems and Applications (IISA), 2015 6th International Conference on* (2015), IEEE, pp. 1–6.

- [33] NARASIMHAN, G., AND SMID, M. *Geometric spanner networks*. Cambridge University Press, 2007.
- [34] NAVARRO, G., AND PAREDES, R. Practical construction of metric  $t$ -spanners. in *Algorithm Engineering and Experiments* (2003), volume 3, pp. 69–81.
- [35] NAVARRO, G., PAREDES, R., AND CHÁVEZ, E.  $t$ -spanners as a data structure for metric space searching. in *International Symposium on String Processing and Information Retrieval* (2002), Springer Berlin Heidelberg, pp. 298–309.
- [36] NAVARRO, G., PAREDES, R., AND CHÁVEZ, E.  $t$ -spanners for metric space searching. *Data & Knowledge Engineering* 63, 3 (2007), 820–854.
- [37] PELEG, D., AND SCHÄFFER, A. A. Graph spanners. *Journal of graph theory* 13, 1 (1989), 99–116.
- [38] R. DEHKORDI, H., FRATI, F., AND GUDMUNDSSON, J. Increasing-chord graphs on point sets. in *Graph Drawing* (2014), Springer, pp. 464–475.
- [39] RAO, S. B., AND SMITH, W. D. Approximating geometrical graphs via “spanners” and “banyans”. in *Proceedings of the thirtieth annual ACM symposium on Theory of computing* (1998), ACM, pp. 540–550.
- [40] ROTE, G. Curves with increasing chords. in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1994), volume 115, Cambridge University Press, pp. 1–12.
- [41] RUSSEL, D., AND GUIBAS, L. J. Exploring protein folding trajectories using geometric spanners. in *Pacific Symposium on Biocomputing* (2005), World Scientific, pp. 42–53.
- [42] SOARES, J. Approximating euclidean distances by small degree graphs. *Discrete & Computational Geometry* 11, 1 (1994), 213–233.
- [43] YAO, A. C. C. On constructing minimum spanning trees in  $k$ -dimensional spaces and related problems. *SIAM Journal on Computing* 11, 4 (1982), 721–736.

# نمایه

۱	انتشار، ۴	ش
	اندازه، ۴	شکاف، ۷
		شکاف-حریصانه، ۷
پ		ض
پوشش محدب، ۲۷		ضریب تفکیک، ۱۰
پوشش‌های تحمل‌پذیر ناحیه-خطا، ۱۳		ق
		قطاع مدور، ۲۶
ت		گ
تالس، ۳۹		گراف یائو، ۱۱
تجزیه‌ی زوجی خوش-مجزا، ۷		م
توپ، ۱۰		ماه، ۲۷
ج		متریک، ۵
جستجوی فضای متریک، ۴		مخروط، ۲۰
جعبه‌ی احاطه‌کننده، ۹		مسائل مجاورتی، ۹
خ		مسیر-حریصانه، ۵
خود-گرا، ۱۳		مقید به زاویه، ۱۶
د		ن
دایکسترا، ۶		ناحیه‌های محدب، ۱۳
درجه، ۴		و
درخت پوشای کمینه، ۴		وتر-افزایشی، ۱۴
دهانه‌ی، ۱۱		وزن، ۴
ر		□
رتبه‌ی فاصله، ۲۳		$t$ -پوشش، ۲

$t$ -تقریب، ۵

$t$ -مسیر، ۲

□

$w$ -شکاف، ۷





## Abstract

In this thesis, we propose some algorithms for constructing geometric spanners and improve some of previous algorithms. We also study some geometric properties of the geometric spanners. A geometric (Euclidean) graph is called  $t$ -spanner, if for every two vertices of the graph, there exists a path in the graph of length at most  $t$  times the Euclidean distance between them.

In this thesis, we first introduce the continuous Yao graphs. A continuous Yao graph is obtained by rotating a cone around every point and connecting it to the closest point in the cone during the rotation. Although by considering the cones with a suitable angular diameter the continuous Yao graphs are  $t$ -spanners, the number of the edges of the graph can be quadratic. But, we show that the continuous Yao graphs are region-fault tolerant  $t$ -spanner.

Then, we consider the gap-greedy algorithm that introduced in 1997 for constructing geometric spanners, and reduce the time and space complexity of the gap-greedy algorithm. Also, we improve the value of  $t$  in the results related to the  $t$ -spanner property of the gap-greedy algorithm.

Later, we consider the self-approaching graphs and the increasing-chord graphs. A geometric graph is called self-approaching, if for every two vertices of the graph, there exists a path between them such that by moving on the path, from source to destination, we continuously get closer to the forward points on the path. We call such a path a self-approaching path. A geometric graph is called increasing-chord if for every two vertices, there exists a path between them that is self-approaching from any of the two endpoints to another endpoint. In this thesis, we show that there exists an increasing-chord plane geometric graph for every point set whose points are on the boundary of an acute triangle, using at most three Steiner points. Furthermore, we show that there exists an increasing-chord plane geometric graph for every point set whose points are on the boundary of an obtuse or right triangle.

Then, we introduce weakly self-approaching graphs by replacing the condition getting closer to the forward points by getting closer to the destination, and we show that for every point set in the plane, there exists a weakly self-approaching plane graph.

Later, we propose a divide and conquer algorithm to construct a geometric spanner with near linear number of edges.

Finally, we consider the angle-constrained geometric graphs. For any  $\theta > 0$ , a geometric graph is called  $\theta$ -angle constrained if the angle between any two edges incident to a vertex is at least  $\theta$ . We show that for every  $\theta > \pi/3$ , a connected  $\theta$ -angle constrained graph does not exist, necessarily. Moreover, we show that there exists a point set such that for  $\theta = \pi/3$  and every  $t > 2/\sqrt{3}$ , there is no  $\theta$ -angle constrained  $t$ -spanner on the point set.



**Yazd University**  
**Faculty of Sciences**

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the  
Requirements for the Ph.D. in Computer Science

Title:

**Proposing Some Algorithms for Constructing  
Geometric Spanners**

Supervisor

**Dr. Mohammad Farshi**

Advisors

**Dr. Mohammad Ali Abam, Dr. Mahdieh Hasheminezhad**

By

**Davood Bakhshesh**

**July 2017**