فصل ۴: سینماتیک سیال

میلاد نادری
دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا
Naderi.m@aut.ac.ir
پاییز ۹۵

مروری بر فصل

- سینماتیک سیال با حرکت سیالات بدون درنظر گرفتن نیروها و ممان های ایجاد کننده حرکت سر و کار دارد.
- موضوعاتی که در این فصل بحث می شوند عبارتند از:

❖ مشتق مادی و رابطه آن با دیدگاه لاگرانژی و اویلری جریان سیال

❖ مشاهدات جریان

❖ ترسیم داده های جریان

❖ خصوصیات سینماتیک اساسی حرکت و تغییر شکل سیال

دیدگاه لاگرانژی

- در دیدگاه لاگرانژی جریان سیال بر اساس موقعیت و سرعت ذرات بررسی می شود.
- این دیدگاه بر اساس قانون دوم نیوتون بنا شده شده است.
- این دیدگاه در عمل برای تحلیل جریان دشوار است.
  - سیال ها از میلیاردها مولکول ساخته شده اند.
  - توصیف یا مدلسازی برهمکنش بین مولکول ها سخت است.
- به هر حال این دیدگاه در برخی کاربردهای خاص مفید است
  - اسپری ها، دینامیک حباب، ذرات، گازهای منبسط شده.
- این روش به نام ریاضی دان ایتالیایی oseph Louis Lagrange (1736-1813) نام گذاری شده است.

دیدگاه اویلری

- دیدگاه اولیری: یک دامنه و یا حجم کنترل بوسیله جریانات ورودی و خروجی به آن تعریف می شود.
- **متغیرهای جریان** را که توابعی از مکان و زمان هستند به صورت زیر تعریف میکنیم:

.

- **میدان فشار:** P=P(x,y,z,t)
- **میدان سرعت:** $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z,t)$

$$\vec{V}=u(x,y,z,t)\vec{i}+v(x,y,z,t)\vec{j}+w(x,y,z,t)\vec{k}$$

- **میدان شتاب:**

$$\vec{a}=\vec{a}(x,y,z,t)$$

$$\vec{a}=a_x(x,y,z,t)\vec{i}+a_y(x,y,z,t)\vec{j}+a_z(x,y,z,t)\vec{k}$$

- این متغیرهای جریان (و دیگر متغیرها) **میدان جریان** را تشکیل می دهند.
- این دیدگاه برای فرمول بندی و مسائل مقدار مرزی (معادلات دیفرانسیل پاره ای) بسیار مناسب است
- این روش به افتخار ریاضی دان سوییسی Leonhard Euler (1707-1783) نام گذاری شده است.

میدان شتاب

- برای یک ذره سیال قانون دوم نیوتون به شکل زیر نوشته می شود:

$$\vec{F}_{particle} = m_{particle}\vec{a}_{particle}$$

- شتاب ذره، مشتق زمانی سرعت ذره می باشد:

$$\vec{a}_{particle} = \frac{d\vec{V}_{particle}}{dt}$$

به هر حال سرعت ذره در یک نقطه، همان سرعت سیال است.

$$\vec{V}_{particle} = \vec{V}\left(x_{particle}(t), y_{particle}(t), z_{particle}(t)\right)$$

- برای گرفتن مشتق زمانی از سرعت می بایست از قانون زنجیره ای استفاده شود:

$$\vec{a}_{particle} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_{particle}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_{particle}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_{particle}}{dt}$$

میدان شتاب

- تعریف می کنیم:

$$\frac{dx_{particle}}{dt}=u,\frac{dy_{particle}}{dt}=v,\frac{dz_{particle}}{dt}=w$$

$$\vec{a}_{particle}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

- به صورت برداری شتاب می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\vec{a}(x,y,z,t)=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{V}$$

- ترم اول **شتاب محلی** نامیده می شود و در جریان های ناپایا غیرصفر است.
- ترم دوم **شتاب جابجایی** نام دارد و که در آن اثر حرکت ذره سیال به یک موقعیت جدید در جریان که در آنجا سرعت متفاوت است ، در نظر گرفته می شود.

مشتق مادی

- اپراتور مشتق کلی d/dt مشتق مادی نامیده می شود و اغب به صورت D/Dt نمایش داده می شود

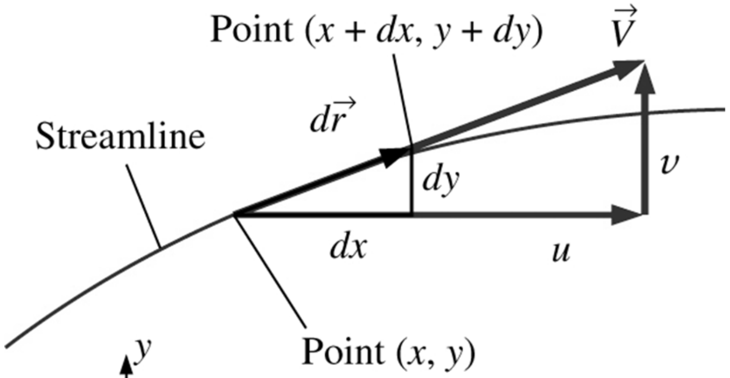
$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{V}$$

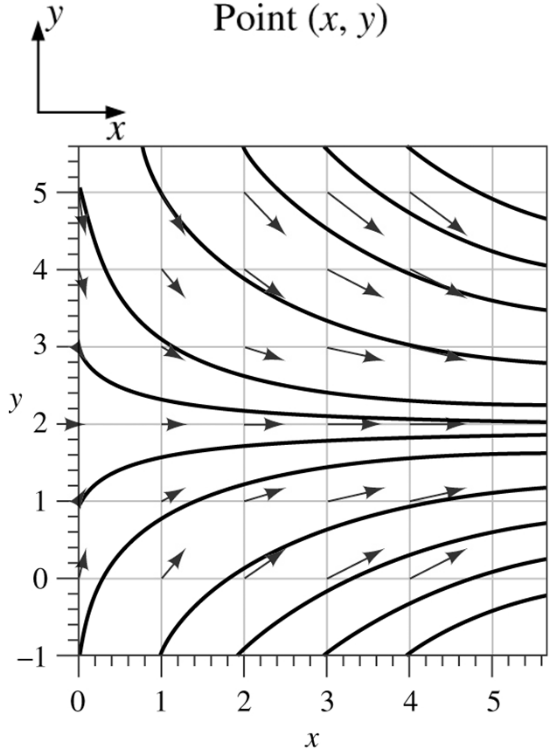
- شتاب جابجایی غیر خطی است. این عبارت، منبع بسیاری از پدیده ها و چالش اصلی در حل مسائل مربوط به سیالات می باشد.
- نام دیگر مشتق مادی، **مشتق کلی** می باشد.

مشاهده جریان

- مشاهده جریان، بررسی چشمی خصوصیات میدان جریان است.
- مشاهده جریان هم در روش های آزمایشگاهی و هم در روش های عددی (CFD) اهمیت دارد.
- روش های متعددی برای مشاهده جریان وجود دارد:
  - خطوط جریان و لوله های جریان (Streamlines & streamtubes)
  - خطوط مسیر (Pathlines)
  - و....

خطوط جریان





- یک خط جریان منحنی است که همه جا مماس بر بردار سرعت محلی لحظه ای می باشد.
- المان طولی از یک منحنی را در نظر بگیرید:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

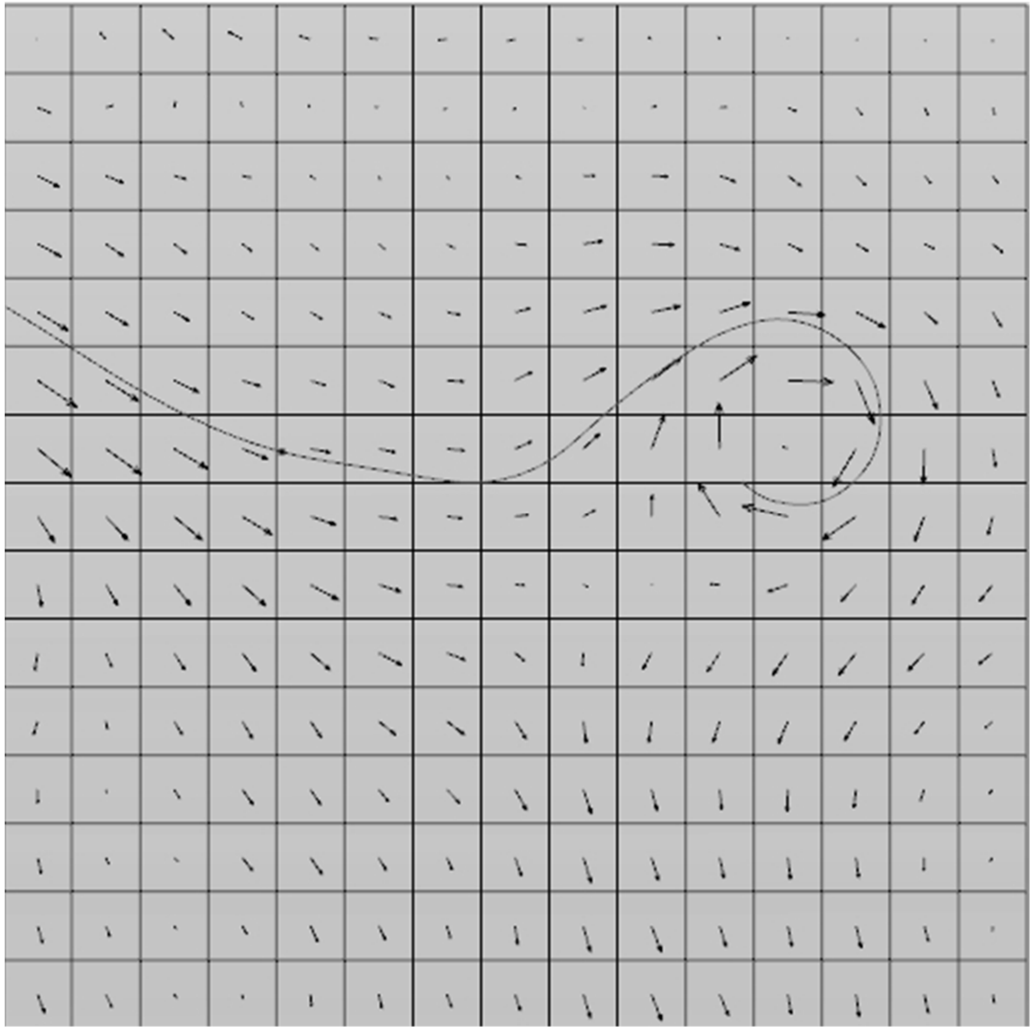
- طبق تعریف $d\vec{r}$ باید با بردار سرعت موازی باشد:

- $$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

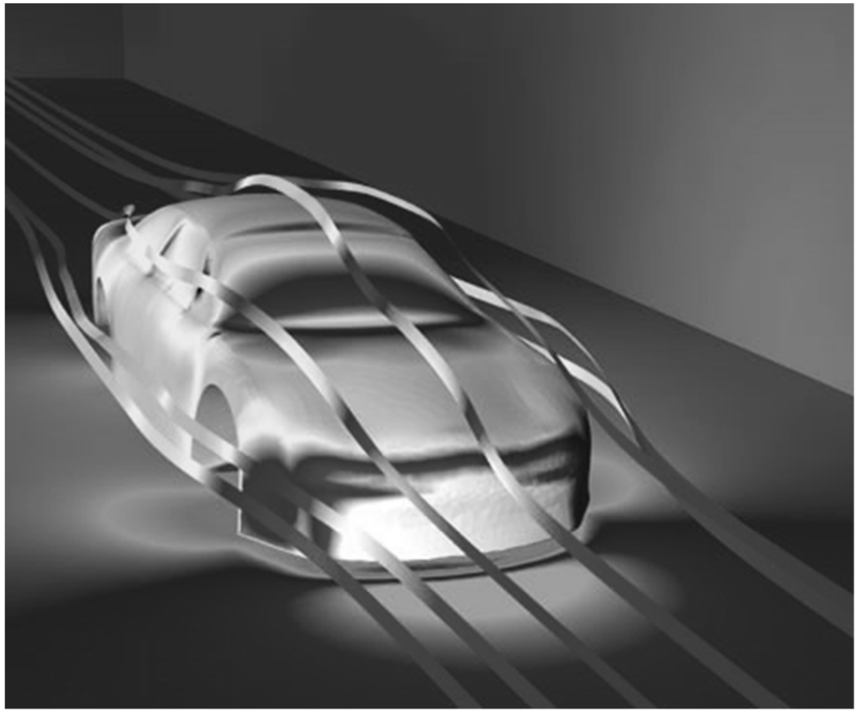
- از موازی بودن دو بردار، رابطه زیر برای خطوط جریان بدست می آید:

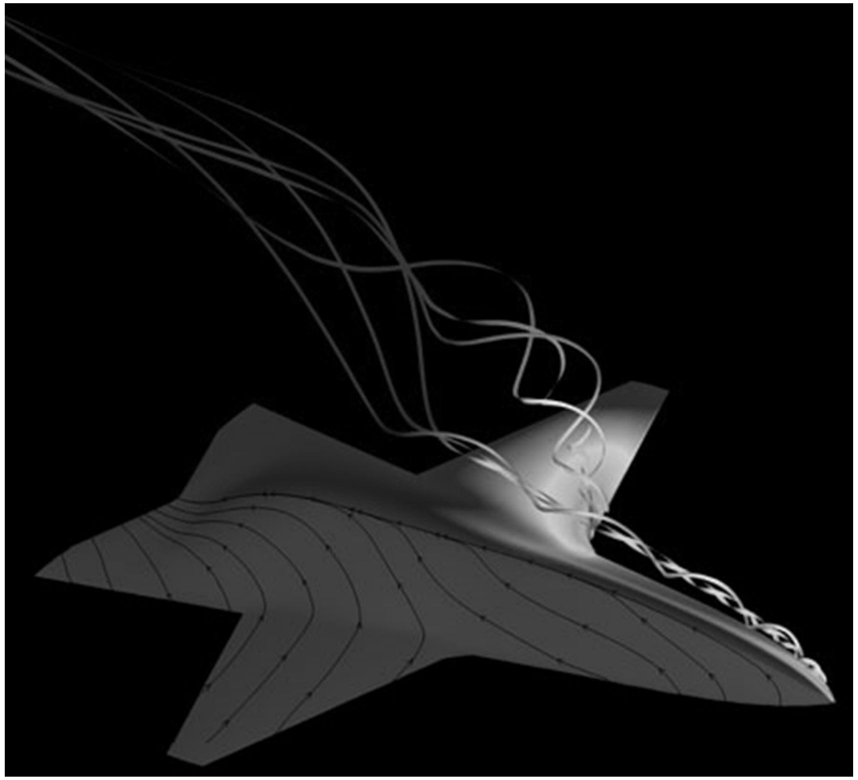
$$\frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

خطوط جریان

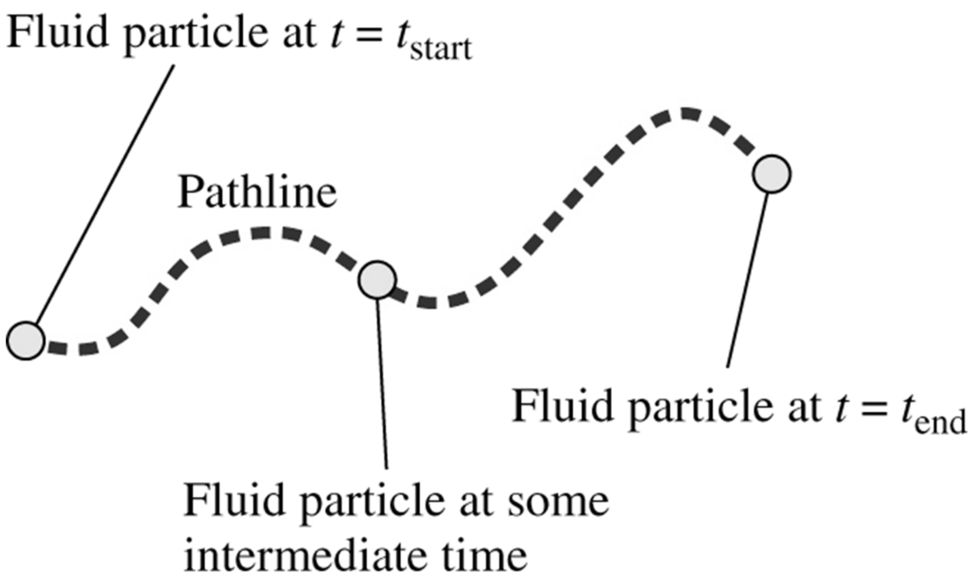


خطوط جریان





خطوط مسیر (PathLines)



- خط مسیر، مسیر واقعی طی شده توسط یک ذره خاص در یک دوره زمانی می باشد.
- معادله آن مشابه بردار موقعیت مادی ذره می باشد:

$$\left(x_{particle}(t), y_{particle}(t), z_{particle}(t)\right)$$

- موقعیت ذره در زمان t :

$$\vec{x} = \vec{x}_{start} + \int_{t_{start}}^{t} \vec{V} dt$$

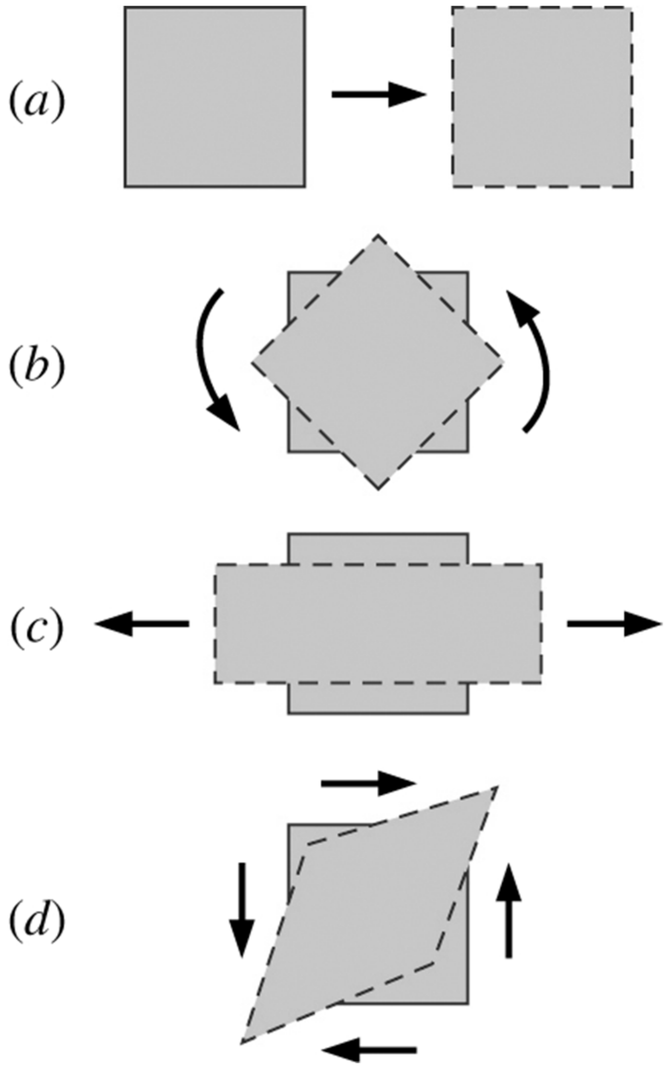
- یک تکنیک آزمایشگاهی مدرن برای اندازه گیری میدان سرعت روی یک صفحه در میدان سرعت PIV نام دارد
- Particle Image Velocimetry (PIV)

مقایسه

- برای جریان پایا(دائمی)، خطوط جریان و خطوط مسیر یکسان هستند.
- برای جریان ناپایا (غیردائمی) این خطوط می توانند متفاوت باشند.

  - خطوط جریان یک تصویر (عکس) لحظه ای از میدان جریان است.
  - خطوط مسیر الگوهایی از جریان هستند که همراه با پیشینه زمانی می باشند.
  - خط مسیر: مسیر جریان یک ذره مشاهده شده در گذر زمان.

توصیف سینماتیک



- در مکانیک سیالات، یک المان ممکن است تحت چهار نوع اساسی از حرکت قرار بگیرد
  - a) Translation جابجایی
  - b) Rotation چرخش
  - c) Linear strain کرنش خطی
  - d) Shear strain کرنش برشی
- از آنجایی که سیالات به صورت مداوم در حال حرکت هستند، بهتر است حرکت و تغییر شکل آنها بر اساس **نرخ** بیان شود.
- الف) سرعت: نرخ جابجایی
- ب) سرعت زاویه ای: نرخ چرخش
- ج) نرخ کرنش خطی
- د) نرخ کرنش زاویه ای

نرخ جابجایی و چرخش

- به منظور استفاده از این نرخ ها آنها را بر حسب سرعت و مشتقات سرعت بیان می کنیم
- نرخ بردار جابجایی به صورت بردار سرعت در مختصات کارتزین توصیف می شود:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

- **نرخ چرخش در یک نقطه به صورت نرخ چرخش دو خطی که در آن نقطه در ابتدا بر هم عمود هستند تعریف می شود. نرخ بردار چرخش در مختصات کارتزین:**

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

نرخ کرنش خطی و حجمی

- **نرخ کرنش خطی، نرخ افزایش طول به ازای یکای طول تعریف می شود.**
- **در مختصات کارتزین:**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

- نرخ کرنش حجمی در مختصات کارتزین:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

- از آنجایی که حجم یک المان سیال برای جریان تراکم ناپذیر ثابت است، نرخ کرنش حجمی باید برابر با صفر باشد.

نرخ کرنش برشی

- **نرخ کرنش برشی** در یک نقطه به صورت نصف نرخ کاهش زاویه بین دو خط که در ابتدا عمود بر هم بوده اند تعریف می شود.
- نرخ کرنش برشی در مختصات کارتزین:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

نرخ کرنش برشی

می توانیم نرخ کرنش خطی و نرخ کرنش برشی را باهم در یک تانسور نرخ کرنش متقارن مرتبه دوم با هم ترکیب کنیم.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ورتیسیتی و جریان چرخشی

- بردار ورتیسیتی به صورت کرل بردار سرعت تعریف می شود

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

- ورتیسیتی برابر است با دو برابر سرعت زاویه ای یک ذره سیال.

$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega}$$

- مختصات کارتزین:

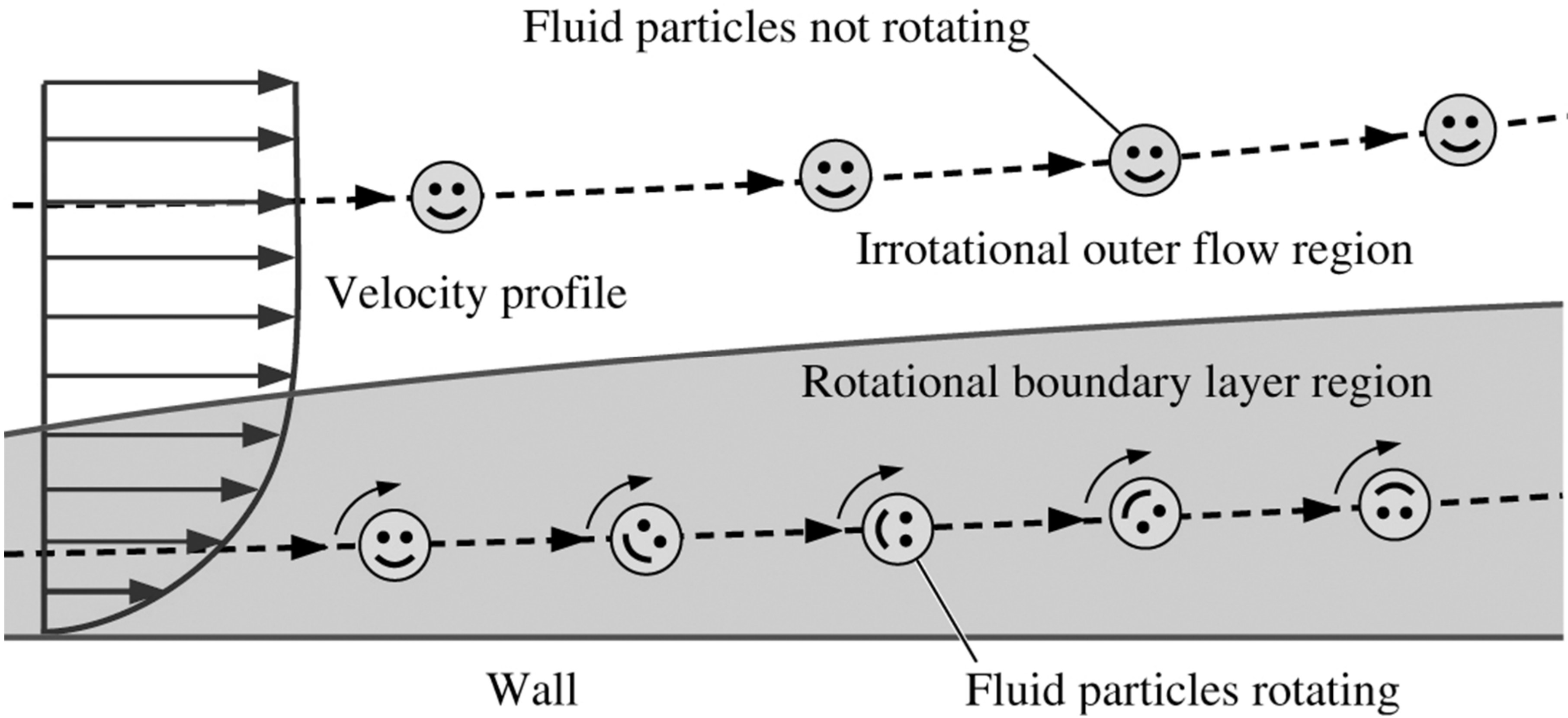
$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\vec{k}$$

مختصات استوانه ای:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)\vec{e}_z$$

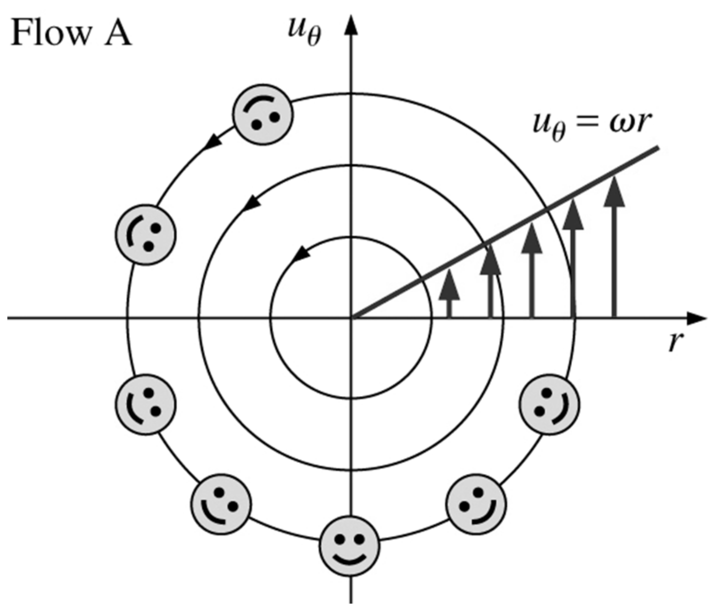
- در ناحیه ای که $\zeta = 0$، جریان غیرچرخشی نامیده میشود.
- درغیر اینصورت جریان را چرخشی می نامیم.

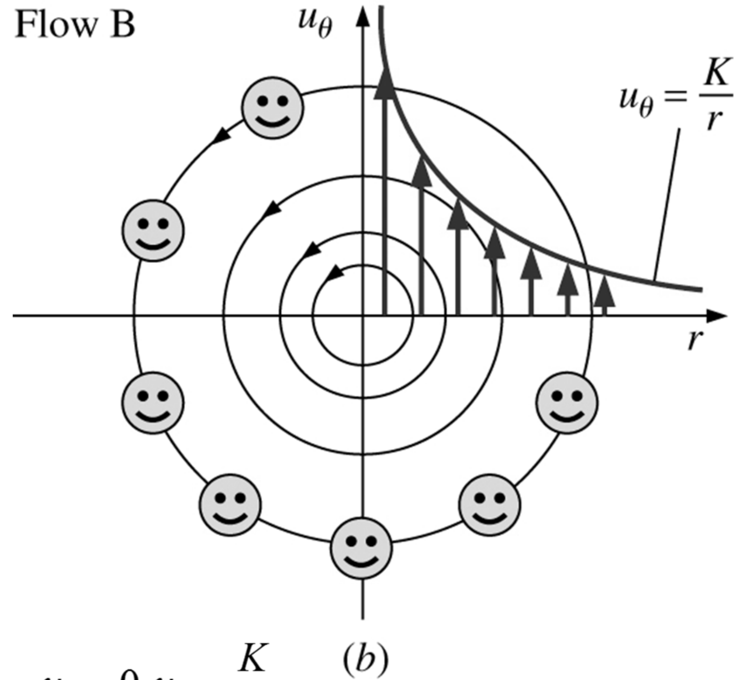
ورتیسیتی و چرخشی



مقایسه دو جریان دایروی

حالت خاص: دو جریان زیر با خطوط جریان دایروی را درنظر بگیرید.





$$u_r = 0, u_\theta = \omega r$$

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - 0\right)\vec{e}_z = 2\omega\vec{e}_z$$

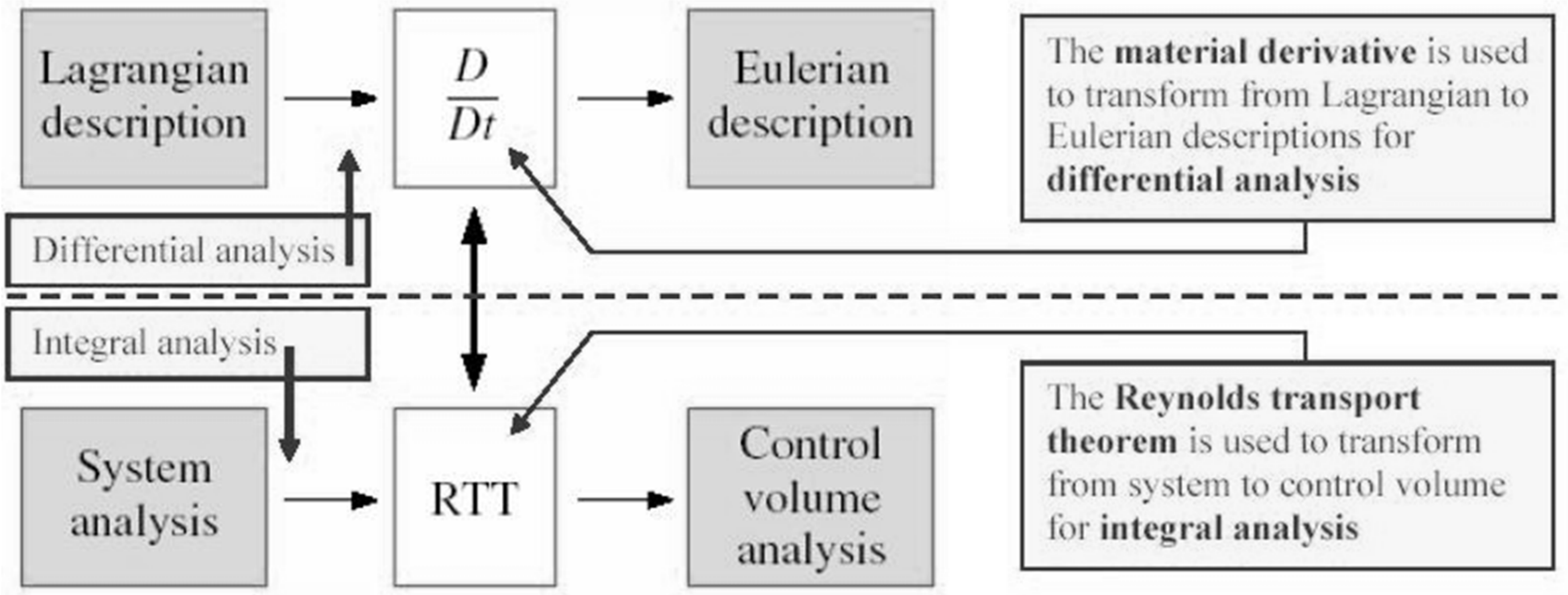
$$u_r = 0, u_\theta = \frac{K}{r}$$

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(K)}{\partial r} - 0\right)\vec{e}_z = 0\vec{e}_z$$

تئوری انتقال رینولدز (RTT)

- یک سیستم، مقداری مشخص از ماده با هویت ثابت است. جرم نمی تواند از مرزهای سیستم عبور کند.
- یک حجم کنترل، ناحیه ای در فضا است که برای مطالعه انتخاب شده است. جرم می تواند از سطح کنترل عبور کند.
- قوانین بقای اصلی (قانون بقای جرم، انرژی و مومنتم) مستقیما به سیستم ها اعمال می شوند.
- بهرحال در اغل مسائل مکانسک سیالات، تحلیل حجم کنترل بر تحلیل سیستمی ارحجیت دارد (به همان علتی که دیدگاه اویلری بر دیدگاه لاگرانژی ارجح است.)
- بنابراین لازم است که قوانین بقا از سیستم به حجم کنترل تبدیل شود. این عمل توسط تئوری انتقال رینولدر RTT انجام میشود.

تئوری انتقال رینولدز (RTT)



شباهت مستقیمی بین تبدیل از دیدگاه لاگرانژی به اویلری (برای تحلیل های دیفرانسیلی برای یک المان سیال بی نهایت کوچک) و تبدیل از سیستم به حجم کنترل (برای تحلیل انتگرالی با استفاده از میدان های جریان محدود و بزرگ) وجود دارد.

تئوری انتقال رینولدز (RTT)

- مشتق مادی (تحلیل دیفرانسیلی)

$$\frac{Db}{Dt}=\frac{\partial b}{\partial t}+\left(\vec{V}\bullet\vec{\nabla}\right)b$$

- فرم عمومی RTT، حجم کنترل غیر ثابت (تحلیل انتگرالی)

$$\frac{dB_{sys}}{dt}=\int_{CV}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho b\right)d\forall+\int_{CS}\rho b\vec{V}\bullet\vec{n}dA$$

	جرم	مومنتم (اندازه حرکت)	انرژی	مومنتم زاویه ای
B, خواص گسترده	m	$m\vec{V}$	E	$\vec{H}$
b, خواص متمرکز	1	$\vec{V}$	e	$\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)$

- در فصل ۵ و ۶، تئوری انتقال رینولدز را به قانون های بقای جرم، انرژی، مومنتم خطی و زاویه ای اعمال خواهیم کرد.

تئوری انتقال رینولدز (RTT)

- تفسیر RTT:
- نرخ زمانی تغییر خاصیت B سیستم معادل است با مجموع (ترم ۱) + (ترم ۲)
- ترم ۱: نرخ زمانی تغییر B حجم کنترل
- ترم ۲: شار خالص خروجی B از حجم کنترل ناشی از عبور جرم از سطح کنترل

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, d\forall + \int_{CS} \rho b \vec{V} \bullet \vec{n}\, dA$$

حالت های خاص RTT

برای حجم کنترل های **در حال حرکت** و یا **تغییر شکل**:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, d\cancel{V} + \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \bullet \vec{n} dA$$

- که سرعت مطلق V در ترم دوم با سرعت نسبی جایگزین شده است.
- $V_r = V - V_{CS}$
- V_r سرعت سیال است که نسبت به یک سیستم مختصات متحرک که با حجم کنترل حرکت می کند بیان شده است.

حالت های خاص RTT

برای جریان پایا، ترم نرخ زمانی حذف میشود:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \cancelto{0}{\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, d\forall} + \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \bullet \vec{n} dA = \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \bullet \vec{n} dA$$

برای حجم کنترل با خروجی و ورودی های تعریف شده میتوان RTT را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho b d\forall + \sum_{out} \rho_{avg} b_{avg} V_{r,avg} A - \sum_{in} \rho_{avg} b_{avg} V_{r,avg} A$$

مثال ۱

$$(2x\hat{\mathbf{i}} - 4y\hat{\mathbf{j}}) \times (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}) = (2x\,dy + 4y\,dx)\hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$2x\,dy = -4y\,dx \quad \text{or} \quad \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -2\ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln x^{-2} + \ln C = \ln(Cx^{-2})$$

$$x^2y = C$$

$$x^2y = -4$$

ادامه حل مثال ۱

$$\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (4\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}) \cdot (n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}}) = 0$$

$$4n_x + 4n_y = 0 \qquad \therefore n_x = -n_y$$

$$n_x^2 = 1 - n_x^2 \qquad \therefore n_x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$$

مثال ٢

$u = 20y^2$ and $v = -20xy$

$$\mathbf{a} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\overbrace{\cancel{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}}}^{0} + \overbrace{\cancel{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}}}^{0}$$
$$= 20y^2(-20y\hat{\mathbf{j}}) - 20xy(40y\hat{\mathbf{i}} - 20x\hat{\mathbf{j}})$$
$$= -800xy^2\hat{\mathbf{i}} - 400(y^3 - x^2y)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a} = -800\hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

ادامه حل مثال ۲

- سرعت زاویه ای دو مولفه صفر دارد:

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{0}{\cancel{w}}}{\cancel{\partial y}} - \frac{\partial \overset{0}{\cancel{v}}}{\cancel{\partial z}}\right) = 0, \quad \Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{0}{\cancel{u}}}{\cancel{\partial z}} - \frac{\partial \overset{0}{\cancel{w}}}{\cancel{\partial x}}\right) = 0$$

- مولفه Z سرعت زاویه ای در نقطه داده شده برابر است با:

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(-20y - 40y) = 30 \text{ rad/s}$$

- بردار ورتیستی دو برابر بردار سرعت زاویه ای است:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\Omega_z \hat{\mathbf{k}} = 60\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}$$

- مولفه های غیر صفر نرخ کرنش:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(-20y + 40y) = -10 \text{ rad/s}$$
$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= -20x = -20 \text{ rad/s}$$