چگونه ریاضیات کاربردی، محض شد

مرتضی منیری
دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه شهید بهشتی

آذر ۱۳۹۸

چکیده

مدی در مقالهٔ

“**How Applied Mathematics Became Pure**”

The Review of Symbolic Logic, 2008

به چگونگی شکل‌گیری دیدگاه معاصر در مورد جایگاه ریاضیات در مقایسه با علوم تجربی، و همچنین چگونگی پیدایش ریاضیات محض می‌پردازد. در این سخنرانی، به این مقاله می‌پردازیم.

به اعتقاد مدی در مورد جایگاه ریاضیات، سه دوره تاریخی متفاوت را می‌توان از هم جدا کرد.

نخست: عصر یونانیان (افلاطون)

ریاضیات مطالعه اشیاء ریاضی مجرد و تغییرناپذیر چون نقطه و خط است. انسان قبل از تولد از طریق روح خود که غیرمادی است از این اشیاء مطلع می‌شود. یادگیری پس از تولد، در واقع یادآوری است. دانش حقیقی همین ریاضیات است و علوم دیگر اعتقاداتی قابل‌تغییر و غیرقطعی در مورد جهان محسوس هستند. از این جهت، تنها ریاضی است که شایستگی آن را دارد که «دانش» نامیده شود.

نخست: عصر یونانیان (افلاطون)

According to Plato's metaphysics, mathematics is the study of eternal and unchanging abstract Forms, while science is uncertain and changeable opinion about the world of mere becoming. Indeed, in Plato's lights, of the two, only mathematics deserves to be called KNOWLEDGE at all!

سپس: عصر انقلاب علمی (گالیله، نیوتن)

بنا به نظر پیش‌روان انقلاب علمی در قرن هفدهم، قوانین طبیعت به زبان ریاضی نوشته شده‌اند. مطالعه ریاضیات جدا از مطالعه طبیعت نیست. برای مثال، در مطالعه سقوط آزاد اجسام، آنچه اهمیت دارد روابط ریاضی بین کمیتهای مرتبط از قبیل جرم و شتاب هستند و اینکه ماهیت جاذبه واقعا چیست، اهمیت ندارد. بنابراین، ریاضیات و علوم دیگر، دارای جایگاهی برابر هستند.

سپس: عصر انقلاب علمی (گالیله، نیوتن)

[Nature] is written in that great book which ever lies before our eyes – I mean the universe – but we cannot understand it if we do not first learn the language and grasp the symbols in which it is written. The book is written in the mathematical language, and the symbols are triangles, circles, and other geometric figures, without whose help it is impossible to comprehend a single word of it. (Galileo, 1610)

بالاخره: دیدگاه غالب در قرن بیستم (پوزیتیویست‌های منطقی، حلقه وین، کارناپ)

هرگونه اظهار نظرعلمی باید متکی بر نتایج تجربی و قابل آزمایش، باشد. گزاره‌های فلسفی بی‌معنا هستند و آنها را باید شبه‌گزاره نامید. اما در مورد ریاضیات چه؟ آنها می‌خواستند ارزش ریاضیات را حفظ کنند. برای این منظور، آنها ریاضیات را به صورت نحوی و به عنوان یک زبان در نظر گرفتند که درستی‌های آن متکی بر قرارداد است (البته کسانی مانند گودل، هنوز دل در گرو واقع‌گرایی داشتند). در هر حال، جایگاه علوم تجربی فراتر از ریاضیات است.

بالاخره: دیدگاه غالب در قرن بیستم (پوزیتیویست‌های منطقی، حلقه وین، کارناپ)

For contemporary philosophers, science is the best knowledge we have and the status of mathematics is problematic.

البته باید توجه کنیم که ریاضیات در طی قرون تغییر یافته است، ریاضیات زمانه افلاطون با ریاضیات عصر نیوتن و همچنین با ریاضیات معاصر متفاوت است.

تغییر جایگاه ریاضیات

در ادامه مقاله، مدی به بررسی تحولات تاریخی‌ای می‌پردازد که به تغییر جایگاه ریاضیات منجر شدند. در این میان، او سه مثال را مطرح می‌کند.

تاریخچه نظریه گروه

تاریخچه نظریه گروه از زمان استفاده از جایگشت‌ها توسط گالوا تا ظهور مفهوم مجرد گروه که تنها چند دهه بعد صورت گرفت.

Though we now recognize the role of substitution groups and their subgroups in Galois' work around 1830, Galois himself never isolated the concept; that was left to Cayley some 20 years later. The surprise is that Cayley's version passed unnoticed, as did Dedekind's a decade later still, simply because there were not enough examples of groups to make the notion useful. It was not until the ز1870 when many diverse examples of groups had been identified – in Galois theory, number theory, geometry, and the theory of differential equations – that the idea of an abstract group caught on and flourished.

تحول هندسه از اقلیدس تا گاوس

تحول هندسه از اقلیدس تا گاوس، زمانی که امکان وجود هندسه‌های مختلف که لزوما مطابقتی با جهان خارج ندارند، مطرح شد. انتخاب هندسه مناسب برای مدل‌سازی جهان، کار فیزیکدانان است. نتیجه مهم حاصل از این تحول آن بود که این موضوع پذیرفته شد که نظریه‌ای ریاضی می‌تواند مستقل از تجربه موجود باشد.

Mathematical theories are protected from empirical falsification by positing a special realm of abstracta about which they remain true.

فوریه در مقابل پواسون و لاپلاس

در قرن هجدهم نیز ریاضیات وسیله‌ای بود برای آشکار کردن قوانین طبیعت. در این قرن، اویلر چهره مسلط ریاضیات بود.

در قرن نوزدهم، فوریه به مطالعهٔ دینامیک حرارت پرداخت. او خود را پیرو سنت نیوتن می‌دانست. کار او بر اساس چند مشاهده ساده متکی بود، برای مثال آنکه، در وضعیتی که دوجسم‌کنار هم قرار دارند، حرارت از جسم داغ‌تر با شدتی متناسب با اختلاف درجهٔ حرارت به جسم دیگر منتقل می‌شود. فوریه با مدلسازی ریاضی و در نظر گرفتن ذراتی که حرارت بین‌شان انتقال می‌یابد به عنوان ذراتی بی‌نهایت کوچک و در نظر گرفتن انتقال حرارت به عنوان جریانی پیوسته، معادله دیفرانسیل انتقال حرارت خود را به دست آورد.

فوریه در مقابل پواسون و لاپلاس

در این میان، پواسون و لاپلاس با فوریه مخالفت کردند. از نظر آنها، معادله فوریه تنها می‌توانست تقریبی از واقعیت فیزیکی باشد. برای مثال، فرض فوریه در مورد پیوسته بودن جریان حرارت و به طبع آن، تبدیل یک سری به یک انتگرال، تنها به صورت تقریبی قابل قبول بود. در عوض آنها، با استفاده از یک تئوری فیزیکی در خصوص انتقال حرارت، به معادله مشابهی رسیدند. از نظر این دو، بدون توجیه فیزیکی، دستاورد فوریه تنها ریاضیات بود.

پوانکاره و نظریه اتمی مواد

نظریه اتمی مواد بعدها توسط دالتون مطرح شد و تا مطالعه حرکت براونی توسط انیشتین ادامه یافت. با این همه تنها پس از نتایج آزمایشگاهی پرین در سال ۱۹۱۲ بود که پوانکاره اعلام کرد:

The atom of the chemist is now a reality

مدل‌سازی در مقابل توصیف

در هر حال، می‌تون ادعا کرد که بنابر دیدگاه معاصر، کار دانشمندان ارائه مدل ریاضی برای دستگاه‌های فیزیکی مورد مطالعه است و نه توصیف آن‌ها. به قول دوئم:

«When a physicist does an experiment, two very distinct representations of the instrument on which he is working fill his mind: one is the image of the concrete instrument that he manipulates in reality; the other is a schematic model of the same instrument, constructed with the aid of symbols supplied by theories; and it is on this ideal and symbolic instrument that he does his reasoning, and it is to it that he applies the laws and formulas of physics». (Duhem, 1906)

دیدگاه معاصر

توجه به دیدگاه معاصر با دیدگاه عصر نیوتون مهم است. تا وقتی با مدلهای سادهٔ فیزیکی سروکار داریم، می‌توان یکریختی بین مدل ریاضی و دستگاه فیزیکی نظیر را پذیرفت، برای مثال وقتی که توپ را کاملا کروی و سطح زمین را مسطح فرض می‌کنیم و طول و وزن و ارتفاع را عدد حقیقی می‌انگاریم تا محل اصابت آن را پس از پرتاب محاسبه کنیم. اما زمانی که فضا-زمان را یک منیفلد پیوسته فرض می‌کنیم، چه؟ به نظر می‌رسد که در مورد مدلهای ریاضی جدید مورد استفاده در فیزیک، فرض یکریخت بودن آنها با جهان فیزیکی که توصیف می‌کنند دشوار است.

ارتباط ریاضیات و جهان خارج

مدی تغییر دیدگاه در مورد ارتباط ریاضیات و جهان خارج را به شکل زیر خلاصه می‌کند:

We have now viewed the rise of pure mathematics from several vantage points. First, we have seen how the study of many pure mathematical concepts, structures, and theories arose simply because mathematicians began to pursue a range of peculiarly mathematical goals with no immediate connection to applications. Second, we have seen how Euclidean geometry, once unblushingly regarded as the true theory of physical space, became the study of one among many abstract mathematical spaces.

ادامه نقل قول

Third and finally, we have seen how our best mathematical accounts of physical phenomena are not the literal truths Newton took them for but freestanding abstract models that resemble the world in ways that are complex and sometimes not fully understood. **Paradoxical as it may sound, it now appears that even applied mathematics is pure.**

کاری که دانشمندان انجام می‌دهند، ساخت مدل ریاضی برای پدیده‌های فیزیکی است و نه بیان ساختار ریاضی عالم. اما این مدل لزوما توصیف دقیقی از جهان خارج نیست. به این معنی، ریاضیات کاربردی وجود ندارد، هر چه هست عبارت است از ریاضیات محض.

We are constructing abstract mathematical models and trying our best to make true assertions about the ways in which they do and do not correspond to the physical facts.

به بیان دوئم:

Our physical theories do not pride themselves on being explanations; our hypotheses are not assumptions about the very nature of material things. Our theories have as their sole aim the economical condensation and classification of experimental laws. Agreements with experiment is the sole criterion of truth for a physical theory.

(Duhem, 1906)

مدی در مقابل کواین و پاتنام

اما با ظهور قسمتهایی از ریاضیات محض که ارتباط آشکاری با جهان فیزیکی ندارد، این سوال پیش می‌آید که چه چیزی می‌تواند راهنمای ریاضیدانان باشد؟ اشیاء ریاضی به چه معنایی وجود دارند؟

در این مورد تز اجتناب‌ناپذیری کواین- پاتنام می‌گوید: مجموعه علوم، شامل ریاضیات، را می‌بایست به عنوان یک کل نگریست. اشیاء ریاضی به همان ترتیبی که اشیاء نظریه‌های فیزیکی وجود دارند، موجودند. اما اگر فیزیکدانان معتقد باشند که خود مدلهای ریاضی جهان طبیعی تنها تا حدودی با جهان خارج مطابقت دارند، این تز چندان مقبول به نظر نمی‌رسد. به‌علاوه بخش‌هایی از ریاضیات که هیچ کاربردی برای آنها متصور نیست، چه می‌شوند؟

به اعتقاد مدی، نتایج تجربی نمی‌توانند نادرست بودن اصلی در ریاضی را نشان دهند: مثال اصل انتخاب و پارادوکس باناخ-تارسکی

From this I think it is clear that considerations from applications are quite unlikely to prompt mathematicians to restrict the range of abstract structures they admit

به نظر مدی، در مورد ریاضیات باید ملاک‌های درونی خود ریاضیات حاکم باشد. مقاله با اظهارنظر زیر از مدی خاتمه می‌یابد:

This leaves us with the open question of how the methodological decisions of contemporary mathematics are properly justified, but that, again, is a story for another day.