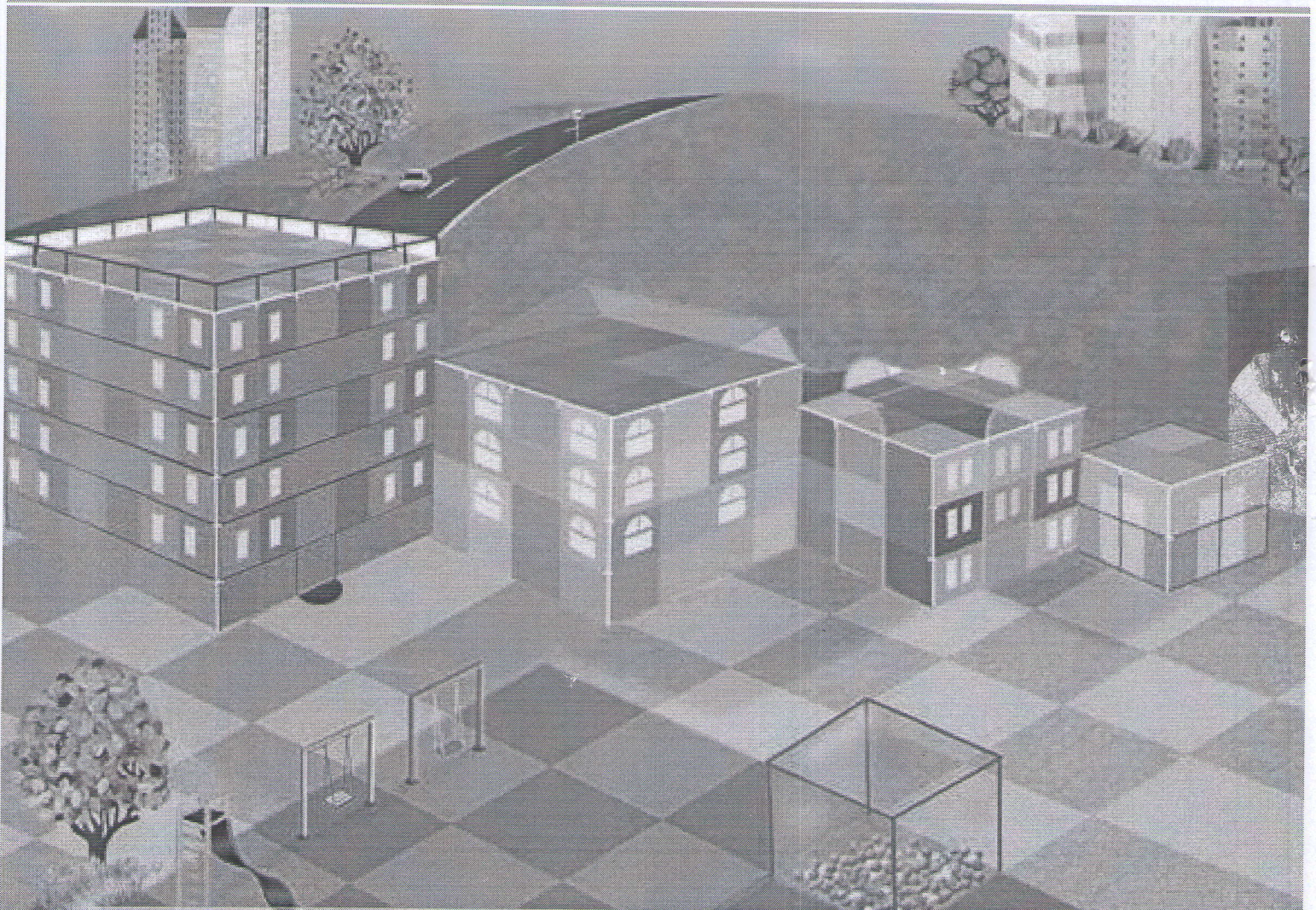


توان و جذر

فصل ۸



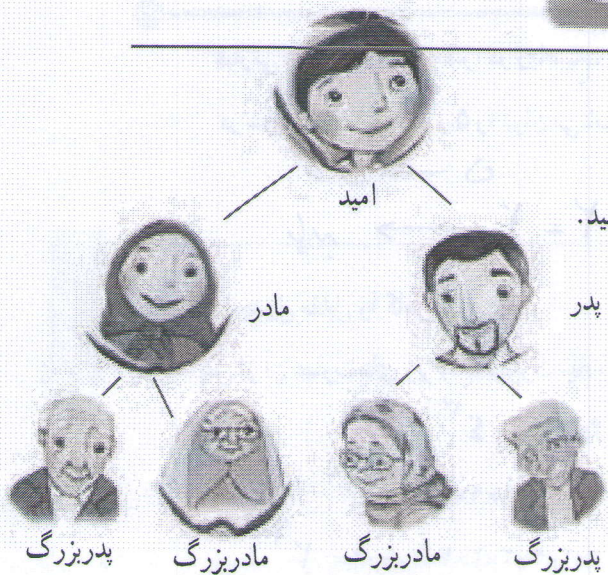
وقتی یک سلول به سلول‌های دیگر تبدیل می‌شود و این عمل تکرار می‌گردد، در مدت کوتاهی تعداد سلول‌ها به سرعت افزایش پیدا می‌کنند.

رشد تعداد سلول‌ها به صورت توانی است. شاید به همین علت است که جراحی پوست در مدت کوتاهی ترمیم می‌شود و سلول‌های جدید جایگزین سلول‌های مرده می‌شوند.

- تعریف توان
- محاسبه عبارت‌های توان‌دار
- ساده کردن عبارت‌های توان‌دار
- جذر و ریشه

تعریف توان

فعالیت



۱- امید می‌داند که نوهٔ چهار نفر است. این چهار نفر پدر بزرگ‌ها و مادر بزرگ‌های امیدند. او می‌خواهد بداند که نتیجهٔ چند نفر است؟ (به فرزند نوه، نتیجه می‌گویند). امید برای پاسخ سؤال خود شکل زیر را کشید.

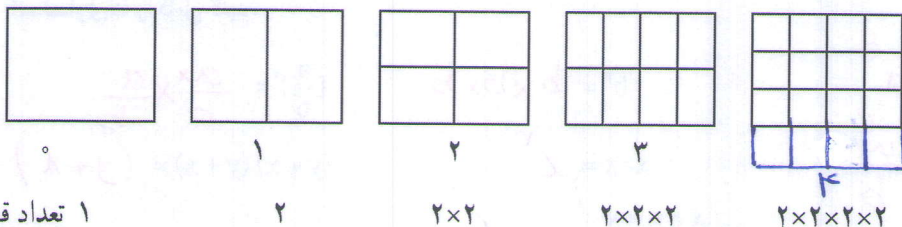
پدر و مادرها نسبت خوشیاوندی ندارند

- الف) شکل را کامل کنید و با استفاده از آن بگویید که امید نتیجهٔ چند نفر است؟ **۸ نفر**
- ب) به نظر شما تعداد افرادی که امید نبیرهٔ آنها است، چند نفرند؟ (به فرزند نتیجه، نبیره می‌گویند). **۱۶ نفر**
- ج) جدول زیر را کامل کنید. برای محاسبهٔ تعداد از ماشین حساب نیز می‌توانید کمک بگیرید.

تعداد در نسل n ام چند نفر است
 $(2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2) = 2^n$

امید	بستگان امید	روش محاسبه	تعداد
فرزند	پدر و مادر	۲	۲
نوه	پدر بزرگ و مادر بزرگ	2×2	۴
نتیجه	نسل سوم	$2 \times 2 \times 2$	۸
نبیره	نسل چهارم	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	۱۶
	نسل هفتم	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	۱۲۸

۲- یک کاغذ را چند بار تا می‌زنیم و هر بار تعداد قسمت‌هایی را که کاغذ تقسیم شده است، می‌شماریم. چه الگویی در



تعداد قسمت‌ها می‌بینید؟

اصلاحیه
 رد در زیر اینها فرستو

تعداد تا

۱ تعداد قسمت‌ها

اگر تا زدن را به همین ترتیب ادامه دهیم، در تای هشتم چند تا قسمت خواهیم داشت؟

در تای دهم چند قسمت خواهیم داشت؟

در تای n ام چند قسمت خواهیم داشت؟

چه راهی برای خلاصه کردن عبارت‌های بالا پیشنهاد می‌کنید؟

$(2 \times 2 \times \dots \times 2) = 2^8$
 بار

$2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 1024$
 بار

$2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$
 بار n

MATH-HOME.IR

عبارتی مانند $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ را در ریاضیات برای ساده تر شدن به صورت 2^5 می نویسیم و آن را چنین می خوانیم: ۲ به توان ۵. در عبارت 2^5 ، ۲ را پایه و ۵ را توان می نامیم. درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می دادیم.

توان \rightarrow ۵
 پایه \rightarrow ۲ $\rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ (چونیم رو به توان بیخ)

عبارت	شکل ساده شده	خوانده می شود	حاصل
7×7	7^2	هفت به توان ۲	۴۹
$7+7$	2×7	دو ضرب در ۷	۱۴
$2/5 \times 2/5 \times 2/5$	$(2/5)^3$	دو پنجم به توان ۳	۱۵/۱۲۵
$1 \times 1 \times 1$	1^3	یک به توان ۳	۱
$1+1$	2×1	دو ضرب در ۱	۲
$5/3 \times 5/3$	$(5/3)^2$	پنج سوم به توان ۲	۲۵/۹

۱- جدول مقابل را کامل کنید.

پس از آن عبارت های زیر را به صورت ساده شده بنویسید.

$4 \times 4 \times 4 = 4^3$
 $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$
 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$
 $a \times a \times a = a^3$ $b \times b = b^2$

۲- عددهای داده شده را مانند نمونه تجزیه کنید و به صورت عدد توان دار بنویسید.

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$ $144 = 2^4 \times 3^2$ $200 = 2^3 \times 5^2$ $135 = 3^3 \times 5$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ در صورت امکان موارد نادرست را اصلاح کنید.

$4^2 = 64$ ~~x~~ $5^2 = 14$ ~~x~~ $5^2 = 5 \times 2$ ~~x~~ $\rightarrow 25$ $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ ✓
 $2^2 = 3^2$ ~~x~~ $1 \neq 9$ $9^2 = 18$ ~~x~~ $\rightarrow 81$ $(\frac{3}{1})^2 = \frac{4}{11}$ ~~x~~ $3^4 = 81$
 $\frac{3^2}{5} = \frac{9}{25}$ ~~x~~ $\frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$ ~~x~~ $5^2 = 25$ ~~x~~ $\rightarrow 25$ $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{4}$ ~~x~~ $(\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{14}$ ~~x~~

۴- تساوی ها را کامل کنید.

$a \times a \times a \times a = a^4$ $b^2 = b \times b \times b$ $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$
 $\frac{a \times a \times a}{b} = \frac{a^3}{b}$ $x \times x = x^2$ $(y+x)(y+x) = (y+x)^2$
 $(ab)^2 = ab \times ab$ $\frac{x \times x \times x}{y \times y \times y \times y \times y} = \frac{x^3}{y^5}$

۵- در تکثیر سلول ها، هر سلول به ۲ سلول تقسیم می شود. دوباره هر کدام از آن سلول ها خودشان به ۲ سلول تقسیم

می شوند و این کار ادامه پیدا می کند. جدول زیر را کامل کنید و حاصل را به صورت عدد توان دار بنویسید.

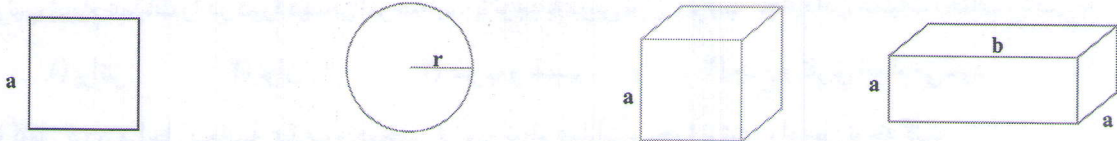
مرحله تکثیر	۱	۲	۳	۴	۷	n
تعداد سلول	۲	2×2	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$
به صورت توان دار	2^1	2^2	2^3	2^4	2^7	2^n

کار در کلاس

$11^0 = 1 \rightarrow 1$ $0+1=1$
 $11^1 = 11 \rightarrow 2$ $1+1=2$
 $11^2 = 121 \rightarrow 3$ $2+1=3$
 $11^3 = 1331 \rightarrow 4$ $3+1=4$

الگویابی
 سیم عدد ۱۱
 رقم دوازدهم (۱۲+۱=۱۳)

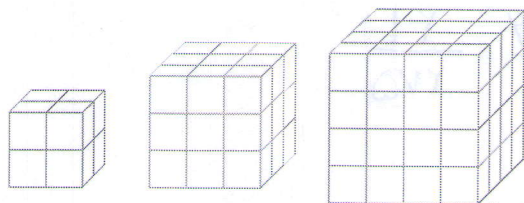
۱- با توجه به شکل های زیر مساحت و حجم های خواسته شده را با عبارات های توان دار جبری نمایش دهید.



$S = a \times a = a^2$ $S = \pi r^2 \times r = \pi r^3$ $V = a \times a \times a = a^3$ $V = a^2 b$

۲- جمله های کلامی زیر را به صورت عبارت جبری نشان دهید.

- هر عدد به توان یک برابر خودش می شود: $a^1 = a$
- یک به توان هر عدد برابر یک می شود: $1^a = 1$
- مجذور هر عدد یعنی آن عدد به توان ۲: $a^2 =$ مجذور a
- مکعب یک عدد یعنی آن عدد به توان ۳: $x^3 =$ مکعب x
- صفر به توان هر عدد به جز صفر برابر است با...
 $0^a = 0$



۳- تعداد مکعب های کوچک $1 \times 1 \times 1$ را در هر شکل با یک عدد

توان دار نشان دهید.
 $n^3 =$ مکعب n تایی

$2 \times 2 \times 2 = 8$ $3 \times 3 \times 3 = 27$ $4 \times 4 \times 4 = 64$

۴- حاصل هر عبارت توان دار را به دست آورید.

$3^2 = 9$ $4^2 = 16$ $5^2 = 25$ $6^2 = 36$ $7^2 = 49$
 $8^2 = 64$ $9^2 = 81$ $10^2 = 100$ $11^2 = 121$ $12^2 = 144$

دو مجذور = ۴ یک مجذور = ۱ دو مکعب = ۸ یک مکعب = ۱
 $\frac{2^3}{5^2} = \frac{8}{25}$ $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$ $\frac{2^4}{7} = \frac{16}{7}$ $0.2^2 = 0.04$
 $0.01^2 = 0.0001$ $1/1^2 = 1/1$ $2/1^2 = 2/1$ $0.5^2 = 0.25$

۵- مقدار عبارت 3^n را به ازای عددهای داده شده به دست آورید.

n	۱	۲	۳	۴
3^n	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$

۶- حاصل عددهای $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ را به دست آورید و به صورت نمودار ستونی در دفتر خود رسم کنید (باید واحد

مناسبی برای محور عددی رسم کنید). در مورد نحوه رسم هر ستون توضیح دهید، آیا می توانید 2^6 یا 2^7 را در دفتر خود رسم

کنید؟ چرا؟ تقریباً غیر ممکن است یا بسختی می توان این کار را انجام داد



۷- عدد 11^{12} به طور تقریبی چند رقمی است؟ چرا؟

$11^{12} \approx 10^{12}$ $11^{12} = 3,138,428,374,721$
 سیم ۱۳ رقم دار ۱۰۶

آموزش الیبتحا (یادآوری)

۴۳

فعالیت

ترتیب انجام عملیات را در دوره دبستان آموخته‌اید. با توجه به درس توان، ترتیب انجام دادن عملیات مختلف ریاضی به صورت (۱) پرانتز (۲) توان (۳) ضرب و تقسیم (۴) جمع و تفریق انجام می‌شود. با کامل کردن مراحل محاسبه عبارت و همچنین ترتیب انجام عملیات و نحوه نوشتن راه حل توجه کنید.

$$\frac{2^3 \times 4 + 10}{9^2 - 5^2} = \frac{8 \times 4 + 10}{81 - 25} = \frac{32 + 10}{56} = \frac{42}{56} = \frac{3}{4}$$

ساده کردن محاسبه جمع و تفریق محاسبه ضرب محاسبه توان‌ها

محاسبه‌های بعدی را کامل کنید.

$$2 \times 3^2 - (2^2 + 2) = 2 \times 9 - (4 + 2) = 9 - 6 = 3$$

$$\frac{10 \div (8 - 6) + 9 \times 4}{2^5 + 3^5} = \frac{10 \div 2 + 36}{32 + 243} = \frac{5 + 36}{275} = \frac{41}{275}$$

۱- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

$$2^5 + 3^2 = 32 + 9 = 41 \quad 2^5 \times 3^2 = 32 \times 9 = 288 \quad 2^5 - 3^2 = 32 - 9 = 23$$

$$2^5 \div 8 = 32 \div 8 = 4 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \quad 5^2 - 5 \times 2 = 25 - 10 = 15$$

$$= \frac{420 - 14}{100} = \frac{406}{100} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{4}{25} \quad \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$2^4 - 3^2 + 10 = 16 - 9 + 10 = 17 \quad 5^1 + 10^0 + 0^5 = 5 + 1 + 0 = 6$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$$(3+2)^2 = 2^2 + 3^2 \quad \times \quad 25 \neq 13 \quad (4 \times 3)^2 = 3^2 \times 4^2 \quad \checkmark \quad 144 = 9 \times 16 \Rightarrow 144 = 144$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{22}{32} \quad \times \quad \frac{4}{9} \neq \frac{22}{32} \quad 5 \times 6^2 = (6 \times 5)^2 \quad \times \quad 5 \times 36 \neq 30^2 \Rightarrow 180 \neq 900$$

$$2^2 \times 5^2 = 10^2 \quad \times \quad 100 \neq 10000 \quad 2^2 \times 2^2 = 2^4 \quad \checkmark \quad 1 \times 14 = 14$$

۳- نحوه محاسبه را توضیح دهید.

$$2^8 + 8^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 8 \times 8 = 256 + 64 = 320$$

۱۰۷

۱) چون الیبت اول توان است پس ابتدا حاصل 2^8 را محاسبه می‌کنیم

۲) و سپس 8^2 را محاسبه می‌کنیم

۳) حاصل را با هم جمع می‌کنیم

۱- مانند نمونه عبارت‌های توان‌دار را محاسبه کنید.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 =$$

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2)$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$

$$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$

با توجه به توان‌ها و حاصل عبارت‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲- عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

اصلاح شود

$$-(2 \times 2 \times 2) = -8$$

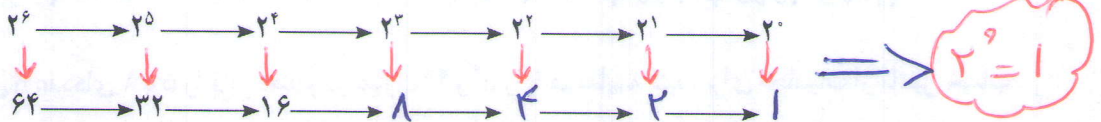
$$-2^3 = 2 \times 2 \times 2 = -8$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

۳- الگوی عددی زیر را کامل کنید.



ارتباط بین عددهای توان‌دار و حاصل آنها را توضیح دهید. اعداد توان‌دار در ردیف اول با عدد مناسب در ردیف دوم برابر می‌باشند. مثال $2^5 = 32$

$$2^5 = 32$$

$$\Rightarrow 2^9 = 1$$

هر عدد توان صفر (بغیر صفر) برابر یک است

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$-3^2 = -9$$

$$(-5)^2 = +25$$

$$-1^5 = -1$$

$$(-1)^5 = -1$$

$$(-1)^4 = 1$$

$$-1^4 = -1$$

$$7^0 = 1$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$$

$$(-9)^0 = 1$$

$$0^0 + 1/1^0 = 0 + 1 = 1 \quad 4 + 2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$-1^5 = -1$$

$$2^2 = 4$$

$$(-2)^2 = -4$$

$$5^0 = 1$$

۲- در جای خالی علامت < یا = یا > بگذارید.

$$2^0 \text{ } \textcircled{>} \text{ } 2^1$$

$$7^0 \text{ } \textcircled{>} \text{ } 7^1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \text{ } \textcircled{>} \text{ } 2^0$$

$$(-2) \text{ } \textcircled{=} \text{ } (-2)^1$$

MATH-HOME.IR

۱- کدام درست و کدام نادرست هستند؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

$$(2+2)^0 = 2^0 + 3^0 \quad \times$$

$$1 \neq 2$$

$$4 + 2^0 = 6 \quad \times$$

$$4 + 1 \neq 6$$

$$(2\frac{1}{2})^0 > (-\frac{1}{2})^2 \quad \checkmark$$

$$1 > \frac{1}{4}$$

$$2^0 + 3^0 + 5^0 = 1 \quad \times$$

$$1 + 1 + 1 \neq 1$$

$$(-\frac{2}{3})^0 + (\frac{1}{3})^0 > 1 \quad \checkmark$$

$$1 + \frac{1}{3} > 1$$

$$4^0 < (-2)^2 \quad \checkmark$$

$$1 < 4$$

۲- الف) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0 = 2000 + 400 + 70 + 2 = 2472$$

$$5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 5000 + 0 + 10 + 9 = 5019$$

ب) با توجه به تمرین‌های بالا عددهای زیر را به صورت گسترده و سپس توانی نمایش دهید.

$$4225 = 4000 + 200 + 30 + 5 = 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$9207 = 9000 + 200 + 0 + 7 = 9 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

۳- به جای n عددهای ۱ تا ۵ را قرار دهید و در عبارت 4^n و n^4 را با هم مقایسه کنید. برای محاسبات از ماشین حساب

استفاده کنید.

n	۱	۲	۳	۴	۵
4^n	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$
n^4	$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$

$$4^1 = 1, 4, 16, 64$$

$$10^4 = 10000$$

برای $n=10$ کدام یک بزرگ‌تر از دیگری است؟

۴- در بعضی از ماشین حساب‌ها کلید توان به صورت زیر استفاده می‌شود. عددهای توان‌دار را محاسبه می‌کنند. برای

مثال 2^3 به صورت زیر محاسبه می‌شود. حالا شما عددهای مختلف را در ماشین حساب وارد و حاصل آنها را ملاحظه کنید. چه

راه دیگری برای پیدا کردن جواب 2^3 وجود دارد؟

$$x^y$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

۵- حاصل عبارت‌ها را به ازای عددهای داده شده به دست آورید.

$$a^2 - b^2 + ab \quad a=-2 \quad b=2 \quad \Rightarrow (-2)^2 - 2^2 + (-2) \times 2 = 4 - 4 + (-4) = -4$$

$$a^3 - 2b^2 + a^2b \quad a=1 \quad b=-2 \quad \Rightarrow 1^3 - 2 \times (-2)^2 + 1 \times (-2) = 1 - 8 - 2 = -9$$

۱- زهره می خواست مسئله هایی را که معلم داده بود، حل کند. معلم ریاضی خواسته بود که دانش آموزان مساحت مستطیل به طول 2^4 و عرض 2^3 را به دست آورند. زهره به صورت زیر عمل کرد و عبارت ها را به صورت ضرب نوشت.

$$S = a \times b = 2^4 \times 2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{مرتبۀ ۴}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{مرتبۀ ۳}}$$

سیما با مشاهده عبارت زهره به او گفت: هفت تا ۲ ضرب شده است. پس عبارت تو با 2^7 برابر است. نتیجه گیری سیما

$$2^4 \times 2^3 = 2^7$$

را با یک تساوی نشان دهید.

$$5^2 \times 5^4 = \underbrace{5 \times 5}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{\text{مرتبۀ ۴}} = 5^6$$

۲- مانند نمونه عمل کنید.

$$4^2 \times 4^3 = \underbrace{4 \times 4}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{\text{مرتبۀ ۳}} = 4^5$$

$$7^2 \times 7^3 = \underbrace{7 \times 7}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{7 \times 7 \times 7}_{\text{مرتبۀ ۳}} = 7^5$$

$$x^2 \times x^3 = \underbrace{x \times x}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{x \times x \times x}_{\text{مرتبۀ ۳}} = x^5$$

$$a^2 \times a^4 = \underbrace{a \times a}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{a \times a \times a \times a}_{\text{مرتبۀ ۴}} = a^6$$

با توجه به تساوی های بالا یک رابطه برای ساده کردن عبارات های توان دار با پایه های مساوی بنویسید.

۳- با توجه به رابطه بالا، مانند نمونه عبارت تواندار را به صورت ضرب ۲ یا چند عبارت تواندار بنویسید.

$$\begin{matrix} b & c & b+c \\ a \times a & = & a \end{matrix}$$

$$2^5 = 2^2 \times 2^3$$

$$2^7 = 2^4 \times 2^3$$

$$2^7 = 2^2 \times 2^2 \times 2^3$$

$$5^4 = 5^2 \times 5^2$$

$$5^5 = 5^3 \times 5^2$$

$$5^4 = 5^2 \times 5^3 \times 5^4$$

۱- حاصل عبارات های زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

$$5^2 \times 5^4 = 5^6$$

$$(-2)^4 \times (-2)^2 = (-2)^6 = 2^6$$

$$(-4)^1 \times (-4)^5 = (-4)^6$$

$$7^2 \times 7 = 7^3$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^7$$

$$1/5^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^4 = 1/5^8$$

۲- با باز کردن عبارت تواندار جواب را ساده تر کنید و محاسبات را مانند نمونه پاسخ دهید.

$$3^4 = 3^2 \times 3^2 = 9 \times 9 = 81$$

$$2^6 = 2^3 \times 2^3 = 8 \times 8 = 64 \quad 4^2 = 4^2 \times 4^0 = 16 \times 1 = 16 \quad 5^4 = 5^2 \times 5^2 = 25 \times 25 = 625$$

۳- اگر $2^{10} = 1024$ باشد حاصل 2^{12} را به دست آورید.

$$2^{12} = 2^{10} \times 2^2 = 1024 \times 4 = 4096$$

۱- مانند نمونه عبارت‌ها را باز کرده و دوباره به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$2^3 \times 5^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 10 \times 10 = 10^2$$

$$3^2 \times 4^2 = (3 \times 3) \times (4 \times 4) = (3 \times 4) \times (3 \times 4) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 5^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times 5 \times 5 = \frac{15}{4} \times \frac{15}{4} = \left(\frac{15}{4}\right)^2$$

$$a^m \times b^m = a \times a \times \dots \times a \times b \times b \times \dots \times b = (a \times b) \times (a \times b) \times \dots \times (a \times b) = (a \times b)^m$$

با مقایسه تساوی‌ها یک قانون کلی برای ساده کردن عبارت‌های توان دار با توان‌های مساوی به دست آورید. *یادها را در هم ضرب کنید*

۲- با قانونی که به دست آوردید، عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$2^3 \times 3^3 = 6^3$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 2^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$(-2)^4 \times (-1)^4 = (+2)^4 = 2^4$$

$$(-2)^5 \times 3^5 = (-6)^5$$

$$x^2 \times y^2 = (xy)^2$$

$$(ab)^m = a^m \times b^m$$

$$6^5 = (2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$$

۳- به تساوی‌های روبه‌رو توجه کنید.

مانند نمونه‌های بالا عددهای توان دار زیر را باز کنید.

$$15^2 = (3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2$$

$$10^4 = 2^4 \times 5^4$$

$$12^3 = 2^3 \times 3^3 \times 2^3 = 2^6 \times 3^3$$

$$(xy)^1 = x^1 \times y^1$$

$$(xyz)^2 = x^2 \times y^2 \times z^2$$

$$30^5 = 2^5 \times 3^5 \times 5^5$$

۱- مانند نمونه عبارت‌های توان دار را تا حد امکان ساده کنید.

$$5^2 \times 5^4 \times 7^6 = 5^6 \times 7^6 = 35^6$$

$$7^2 \times 7^3 \times 9^5 = 7^5 \times 9^5 = 63^5$$

ضرب با پایه‌های مساوی

$$2^3 \times 6^3 \times 3^3 \times 4^3 = 12^3 \times 12^3 = 12^6$$

$$(2^5 \times 3^2 \times 5) \times (2^2 \times 3^5 \times 5^6) = (2^7 \times 3^7) \times (3^2 \times 5^6) \times (5 \times 5^2) = 2^7 \times 3^9 \times 5^9 = 30^9$$

$$2^a \times 2^b = 2^{a+b}$$

۲- عبارت توان دار مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

به جای a و b عددهای 3 و 5 و یک بار 4 و 7 قرار دهید و تساوی‌ها را به صورت عددی بنویسید.

$$2^3 \times 2^5 = 2^8$$

$$2^4 \times 2^7 = 2^{11}$$

$$4 + 7 = 11$$

$$5 + 3 = 8$$

توان عدد ۲	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
شماره ی عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
تعداد ارقام	۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵	۶	۷	۷	۸	۸	۹

مستطاب ۳ یک بار تکرار شده است
 $n = \left[\frac{2n}{5} \right] + 1$ توان
 قسمة صحیح

پاسخ باز است

- ۱- در تساوی های زیر به جای a و b و c عددهای مختلفی قرار دهید و تساوی های عددی بسازید.
 $a^b \times a^c = a^{b+c}$ $5^3 \times 5^2 = 5^{3+2}$ $a^b \times b^c = (a \times b)^c$ $5^2 \times 3^2 = (5 \times 3)^2$
- ۲- با استفاده از تجزیه به عددهای اول، هر عدد را به صورت توان دار بنویسید.
 $121 = 11 \times 11 = 11^2$ $256 = 2^8$ $441 = 3^2 \times 7^2$ $10000 = 2^4 \times 5^4$

- ۳- مسئله هایی طرح کنید که پاسخ آنها:
 الف) 2^2 (الف) ب) 2×3 (ب) ج) 5^2 باشد.
 ب) مساحت مستطیلی به طول عرضی ۲، ۳، ۲، ۳، ۲، ۳، ۲، ۳ (ج) مساحت مربعی به ضلع ۵ را بدست آورید

- ۴- عددهای توان دار را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
 3^0 و 4^0 و 6^0 و 8^1 و 9^2 و 4^10 و 3^5 و 9^2 و 8^1 و 6^0 و 4^0
- ۵- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ توضیح دهید.
 $4^2 \times 4^2 = 4^{12}$ ~~$3^2 \times 2^2 = 6^5$~~ $4^2 + 2^2 = 6^2$ ~~$4^2 + 2^2 = 6^2$~~ ~~$4^2 + 2^2 = 6^2$~~

~~$4^2 \times 4^2 = 4^{12}$~~ $4^2 \times 4^2 = 4^7$ ✓ ~~$3^2 \times 2^2 = 6^5$~~ $3^2 \times 2^2 = 6^2$ ✓ ~~$4^2 + 2^2 = 6^2$~~ $4^2 + 2^2 = 20$ ≠ 6^2 ~~$4^2 + 2^2 = 6^2$~~ $4^1 + 3^1 = 7^1$ ✓ ~~$4^2 + 2^2 = 6^2$~~ $4 + 3 = 7$ ✓

$(-2^2) \times 7^2 = (-14)^2$ ✓ $(\frac{2}{3})^0 \times (\frac{2}{3})^7 = (\frac{2}{3})^7$ ✓

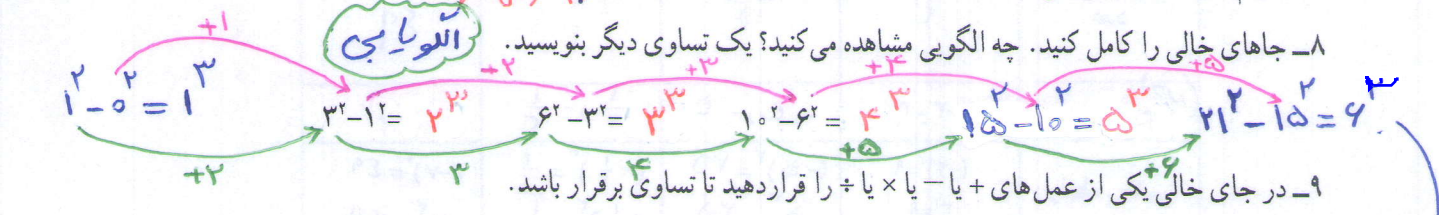
۶- کدام یک از عبارت های زیر $(\frac{2}{3})^2$ را نشان می دهد؟
 $\frac{2}{3} \times 3$ $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} + 3$ $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ $\frac{2+2+2}{3}$ $\frac{3 \times 2}{3}$

۷- به جدول زیر توجه کنید و با توجه به آن سوال ها را جواب دهید.
 ۱- رقمی ۲- رقمی

۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۱	۴	۱۶	۶۴	۲۵۶	۱۰۲۴	۴۰۹۶	۱۶۳۸۴	۶۵۵۳۶	۲۶۲۱۴۴	۱۰۴۸۵۷۶
۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵	۶	۷

حاصل عبارت 4096×65536 را به صورت توان دار بنویسید.
 $4^6 \times 4^8 = 4^{14}$

تعداد رقم های ۴۱ را پیش بینی کنید. ۴۲ چند رقمی می شود؟ چرا؟
 ۱۳ رقمی است



$$\left[\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2 \right] = n^2$$

اصلاحیه
 $(1+2+3+\dots+n)^2 - (0+1+2+3+\dots+(n-1))^2 = n^2$

۱- یک شرکت برای محوطه‌سازی، سنگ‌های مرمر در اندازه‌های 25×50 سانتی متر خریداری کرده است. سنگ فروش در مجموع ۸۱ متر مربع سنگ به این شرکت فروخته است. ضلع بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان با این سنگ‌ها ساخت چند متر است؟

۶ متر است

۲- مساحت یک زمین بازی کودکان که به شکل مربع است، برابر ۱۴۴ متر مربع است. طول ضلع این مربع چند متر است؟

$12 \times 12 = 144$ ✓

$10 \times 10 = 100$ ✗

$11 \times 11 = 121$ ✗

۱۲ متر است

۳- جدول زیر طول ضلع تعدادی مربع و مساحت آنها داده شده است. جاهای خالی را کامل کنید.

طول ضلع	۳	۴	۱/۵	۲/۵	۹	۷/۴	۱۱/۶	۲۰	۰/۹
مساحت مربع	۹	۱۶	۲,۲۵	۴/۲۵	۸۱	۵۴,۷۶	۱۲۱/۳۶	۴۰۰	۰/۸۱

۴- در الگوی عددی زیر آیا عدد ۱۵ قرار می‌گیرد؟ چرا؟ **خیر، مجذور هیچ عددی ۱۵ نمی‌شود**

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2$

با کمک ماشین حساب، حدس و آزمایش عددی پیدا کنید که بتوان به جای x قرار داد. **وجود ندارد** $x^2 = 15$

در تساوی $3^2 = 9$ ، عدد ۹ را توان دوم یا مجذور عدد ۳ و عدد ۳ را نیز ریشه دوم یا جذر ۹ می‌نامند. آیا ۳- نیز

$(-3) \times (-3) = 9$

ریشه دوم ۹ است؟ چرا؟ **بله**

پس ۳- هم جذر یا ریشه دوم عدد ۹ می‌باشد

جدول زیر را کامل کنید.

عدد	۹	۲۵	۱/۴	۴۹
ریشه دوم (جذر)	۳ و -۳	+۵, -۵	۱/۲ و -۱/۲	۷ و -۷
رابطه ریاضی	$(-3)^2 = 9$ $3^2 = 9$	$(-5)^2 = 25$ $5^2 = 25$	$(-1/2)^2 = 1/4$ $(1/2)^2 = 1/4$	$(-7)^2 = 49$ $7^2 = 49$

توان دوم یا مجذور عدد ۳ را با ۳^۲ و توان دوم یا مجذور عدد ۳- را با ۳^۲(-) نمایش می‌دهیم. برای نمایش ریشه

دوم از نماد $\sqrt{\quad}$ (بخوانید رادیکال) استفاده می‌کنیم.

ریشه‌های دوم عدد ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر $\sqrt{9} = 3$ و $-\sqrt{9} = -3$

اصلاح شود

مثبت

۱- تساوی‌ها را کامل کنید.

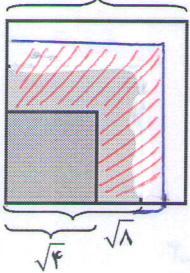
$$\begin{array}{cccc} \sqrt{16} = 4 & -\sqrt{16} = -4 & \sqrt{36} = 6 & -\sqrt{81} = -9 \\ \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} & -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} & \sqrt{49} = 7 & \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9} \end{array}$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست هستند؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{25} = 5 & \sqrt{25} > 5 \quad \times & \sqrt{25} = 5 \quad \checkmark & \sqrt{25} = 5 \times 2 \quad \times \\ \sqrt{25} = 5^2 \quad \times & \sqrt{25} = -5 \quad \times & -\sqrt{25} = -5 \quad \checkmark & \sqrt{25} < 5 \quad \times \end{array}$$

در این درس منظور از جذر همان جذر مثبت است

۱- مربع به مساحت‌های ۴، ۸، ۹ سانتی متر مربع در شکل زیر نمایش داده شده است. طول ضلع‌های مربع‌ها نیز



شکل اصلاح شود

$$\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$$

مشخص شده است. با کمک شکل عبارت را کامل کنید.

به نظر شما به کدام یک از این دو عدد نزدیک‌تر است؟ $\sqrt{9}$

۲- به کمک روش فوق و با توجه به سطر اول جدول زیر، جذر تقریبی عددهای داده شده را به دست آورید و جدول را

کامل کنید.

مربع کامل قبلی	عدد	مربع کامل بعدی	جذر تقریبی
۴	۵	۹	$\sqrt{5}$ بین عددهای ۲ و ۳ است
۱۶	۱۷	۲۵	$\sqrt{17}$ بین دو عدد ۴ و ۵ است
۴۹	۶۱	۶۴	$\sqrt{61}$ بین عددهای ۷ و ۸ است
۲۵	۳۵	۳۶	$\sqrt{35}$ بین عددهای ۵ و ۶ است

$\sqrt{28}$ به $5/3$ نزدیک تر است یا $5/2$

۱- می خواهیم مقدار تقریبی $\sqrt{28}$ را به دست آوریم.

الف) $\sqrt{28}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟ چرا؟

ب) به کدام یک نزدیک تر است؟ چرا؟

$$\sqrt{25} < \sqrt{28} < \sqrt{36} \Rightarrow 5 < \sqrt{28} < 6$$

عدد ۵ چون ۲۸ به ۲۵ نزدیک تر است

ج) با توجه به جدول زیر جای خالی را کامل کنید: $\sqrt{28} \approx 5/2$

اصلاح (نیازی نیست)

عدد	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
مجذور	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶

با ماشین حساب انجام شود

خواهی در نظر گرفته شود که با ماشین حساب مطابقت دارد

۲- به همین روش مقدار تقریبی عددهای زیر را به دست آورید. راهبرد حدس و آزمایش

$$\sqrt{20} \approx$$

$$\sqrt{14} \approx$$

$$\sqrt{8} \approx$$

۱- چرا عددهای منفی جذر ندارند؟ یعنی عبارت مقابل بی معناست؟ $\sqrt{-25} = ?$

چون حاصل ضرب دو عدد مثبت و یا دو عدد منفی، عددی مثبت است

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست اند؟

$$\sqrt{5} > 4 \quad \times$$

$$\sqrt{6} \text{ بین } 7 \text{ و } 5 \text{ است} \quad \times$$

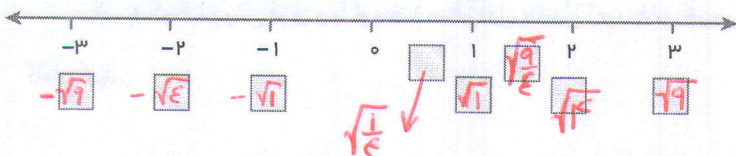
$$\sqrt{15} < \sqrt{21} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{12} < 4 \quad \checkmark$$

$$\sqrt{40} \text{ بین } 7 \text{ و } 5 \text{ است} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{3} > 2 \quad \times$$

۳- به جای \square در محور اعداد زیر یکی از عددهای $\sqrt{9}$ ، $-\sqrt{4}$ ، $\sqrt{1}$ ، $-\sqrt{1}$ ، $\sqrt{9/4}$ و $-\sqrt{9}$ را قرار دهید.



۴- جاهای خالی را کامل کنید.

الف) ۷ و -۷ ریشه های هستند. (ب) مجذور عدد صفر همان است.

ج) اگر عددی صفر نباشد، توان دوم آن همیشه است.

د) هر عدد مثبت دارای ریشه دوم است که یکی از آنها دیگری است.

۵- جذر تقریبی عددهای زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{1000}$$

$$\sqrt{500}$$

$$\sqrt{30}$$

$$\sqrt{40}$$

اصلاح شود

± 3 (۳)

-۳ (۳)

جذر $\sqrt{81}$ برابر است با

۳ (۲)

۹ (۱)

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید و برای هر کدام یک مثال بزنید.

- توان
- پایه
- مجذور
- مکعب
- جذر
- جذر تقریبی

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

- محاسبه عدد توان‌دار
- محاسبه یک عبارت توان‌دار با رعایت ترتیب
- محاسبه عبارت توان‌دار با پایه‌های منفی
- قانون ضرب با پایه‌های مساوی
- استفاده از قانون ضرب با پایه‌های مساوی در محاسبه
- قانون ضرب با توان‌های مساوی
- استفاده از قانون ضرب با پایه‌های مساوی در تجزیه عددها
- ساده کردن یک عبارت توان‌دار
- مفهوم جذر و ریشه
- پیدا کردن جذر یا ریشه عددهای مربع کامل و جذر تقریبی
- مفهوم مجذور و مکعب
- تأثیر پرانتز در محاسبه عبارت توان‌دار
- توان صفر

از این درس در ساده کردن عبارت‌های جبری و نوشتن رابطه‌های ریاضی در محاسبه سطح و حجم استفاده می‌کنیم.

در صورتی که تمرین‌های زیر را بتوانید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی فرا گرفته‌اید.

۱- عبارت توان‌دار زیر را محاسبه کنید.

$$(2^3 + 0^4) + 2^2 \times 3^2 - 1^3 = (8 + 0) + 4 \times 9 - 1 = 8 + 36 - 1 = 43$$

۲- عبارت توان‌دار را تا حد امکان ساده کنید.

$$(0.25)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{1}{45} = 225 \quad \text{یا} \quad 4^2 \times 8^3 \times 6^2 \times 3^3 = 24^2 \times 24^2 = 24^4$$

۳- جذر تقریبی عدد ۳۲ را بنویسید.

$$\sqrt{32} \approx 5.66$$

۴- ریشه‌های عدد ۱۲۱ را بنویسید و تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\sqrt{49} = 7$$

$$-\sqrt{25} = -5$$

$$5 < \sqrt{32} < 6$$

مقدار	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۳	۵/۴	۵/۵	۵/۶	۵/۷
مجذور	۲۵	۲۵/۱	۲۷/۴	۲۸/۹	۲۸/۹	۲۹/۱۶	۳۰/۲۵	۳۱/۳۶	۳۲/۴۹

① کم تر شود $\frac{100}{100} a \times \frac{100}{100} a = \frac{96}{100} a^2 = 96\% S \Rightarrow 100\% - 96\% = 4\%$

$a = 30$ $\frac{20}{100} \times 30 = 6$ $S_1 = 900$ $S_2 = 24^2 = 576$
 $900 - 576 = 324$

② روشی دوم: راهبرد مثال

$x \mid 324$
 $100 \mid 900$
 $\Rightarrow x = 34\%$

تمرین های دوره ای ۴

$a = 10 \rightarrow \frac{20}{100} \times 10 = 2$
 $S_1 = 100$ $S_2 = 96$
 $100 - 96 = 4$

$(+49) \times (-65) = + \checkmark$
 $(+13) \times (-35) = + \checkmark$
 $(-4-3) \div (-7) =$

۱- حاصل عبارت ها را پیدا کنید.
 $(-24) \times (-35) = + \frac{24 \times 35}{24 \times 20} = + \frac{840}{480} = + 1.75$
 $(-21) \times (-20) = + \frac{21 \times 20}{7 \times 4} = + \frac{420}{28} = + 15$
 $(7-18) \times (-2) =$

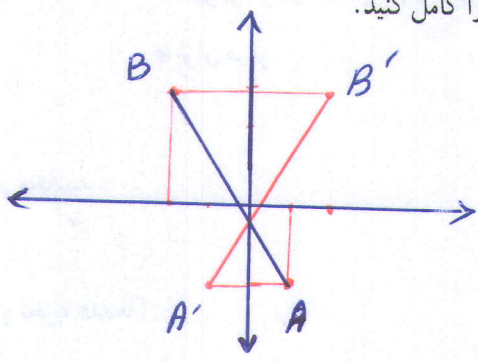
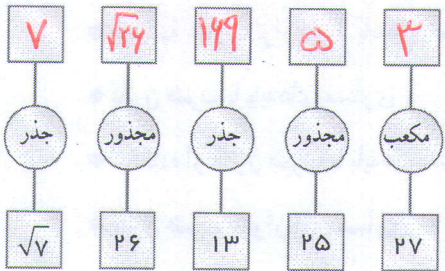
۲- مساحت مربعی به ضلع a برابر است با a^2 . اگر از ضلع مربع 20% کم کنیم. مساحت مربع چند درصد کم می شود؟

۳- الگوی زیر را توصیف کنید و چهار عدد بعدی آن را بنویسید.

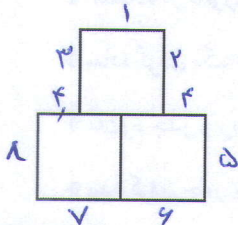
۵ و ۲۵ و ۱۲۵ و $4^3=64$ و $3^3=27$ و $10^3=1000$ و $7^3=343$ و $1^3=1$ و $2^3=8$

توان های عدد ۵ نسبت

۴- نمودارهای زیر را کامل کنید.



۵- مساحت شکل مقابل ۷۵ است. محیط شکل را پیدا کنید. (سه مربع مساوی هستند).



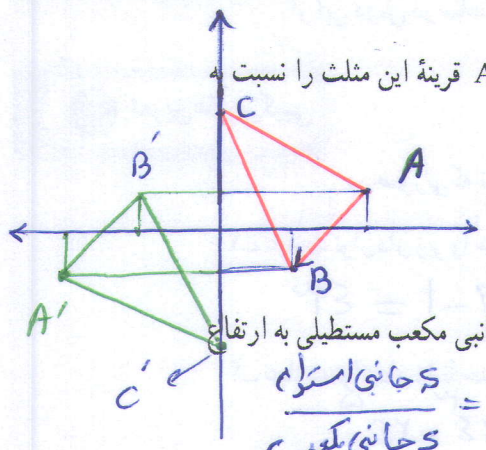
$75 \div 3 = 25$ $4 \times 3 = 12$ $8 \times 5 = 40$
 $\sqrt{25} = 5$ $12 - 4 = 8$ $اصلاح مانده$

۶- نقاط به مختصات $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ را پیدا کنید و پاره خط AB را رسم کنید. قرینه این پاره خط را نسبت

به محور عرض ها پیدا کنید و مختصات رأس های A' و B' را بنویسید.

۷- مختصات سه رأس مثلث ABC عبارت اند از $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ قرینه این مثلث را نسبت به

مبدأ مختصات پیدا کنید.



$AB = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$
 $A + AC = C$
 $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

مختصات بردار AB را بنویسید.

جمع متناظر با بردار AC را بنویسید.

۸- مساحت جانبی استوانه ای به ارتفاع 10 و شعاع قاعده 3 بیشتر است یا مساحت جانبی مکعب مستطیلی به ارتفاع

$\frac{S_{\text{جانبی استوانه}}}{S_{\text{جانبی مکعب}}} = \frac{2 \times 3 \times 3.14 \times 10}{4 \times 3 \times 10} = \frac{37.68}{12} > 1$

10 که قاعده اش مربعی به ضلع 3 است؟

۹- آیا اگر هر عدد را به توان 2 برسانیم، از خودش بزرگ تر می شود؟ چرا؟

۱۰- حاصل ضرب های زیر را بنویسید.

$2x \times 3x = 6x^2$ $-4n^2 \times 7n = -28n^3$ $-4n \times n^2 \times 8n^3 = -32n^6$

$5\% \rightarrow 5^2 = 25$
 $5\% > 25$

x	x ² - 3x	بررسی
0	0	✓
1	1 - 3 = -2	✓
2	4 - 6 = -2	✓
3	9 - 9 = 0	✓
4	16 - 12 = 4	✓
5	25 - 15 = 10	✓

$$2x \times 3x = 6x^2$$

$$-6x^2 \times 7x = -42x^3 \quad -4x \times x^2 \times 8x^2 = -32x^4$$

۱۱- عبارتهای جبری زیر را ساده کنید.

$$2(x+1) - 2(1-x) = 4x$$

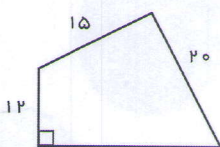
$$2(x-1) + 3x - 1 - x = 4x - 3$$

$$2(x^2y - xy^2) - 2(y^2x - yx^2) = 2x^2y - 2xy^2 - 2y^2x + 2yx^2 = x^2 - 4x + 1$$

۱۲- با راهبرد حدس و آزمایش پاسخ معادله $x^2 - 3x = 18$ را به دست آورید.

۱۳- قاعده یک منشور به صورت زیر است. اگر ارتفاع این منشور ۱۰ سانتی متر باشد، حجم و مساحت جانبی و

مساحت کل آن را پیدا کنید. *چون مساحت قاعده را نمی توان محاسب کرد*



پس حجم را هم نمی توانیم محاسب کنیم

۱۴- عبارت توان دار زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\left(-\frac{1}{7}\right)^4 \times \left(\frac{6}{5}\right)^7 \times \left(1\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{7}\right)^4 \times \left(\frac{6}{5}\right)^9$$

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

۱۵- عدد ۱۴۴ را تجزیه کنید و به صورت توان دار بنویسید.

$$[24, 36] = 72$$

$$[12, 48] = 48$$

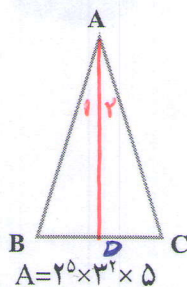
$$(24 \text{ و } 36) = 12$$

$$(12 \text{ و } 48) = 12$$

$$(50 \text{ و } 35) = 5$$

$$[50, 35] = 350$$

۱۷- مثلث ABC متساوی الساقین است. نیمساز زاویه A را رسم می کنیم. چرا این نیمساز ضلع BC را نصف می کند؟



$$A_1 = A_2 \text{ (تعیین نیمساز)}$$

$$AD = AD$$

$$\text{فرض } AB = AC$$

$$\left. \begin{matrix} A_1 = A_2 \\ AD = AD \\ AB = AC \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{(قضی فرض)}} \triangle ABD = \triangle ACD \xrightarrow{\text{اهزای متساوی}} BD = CD$$

۱۸- ب.م.م. و ک.م.م دو عدد A و B را به دست آورید.

$$B = 2^3 \times 3^5 \times 7$$

$$(A, B) = 2^3 \times 3^2$$

$$[A, B] = 2^5 \times 3^5 \times 5 \times 7$$