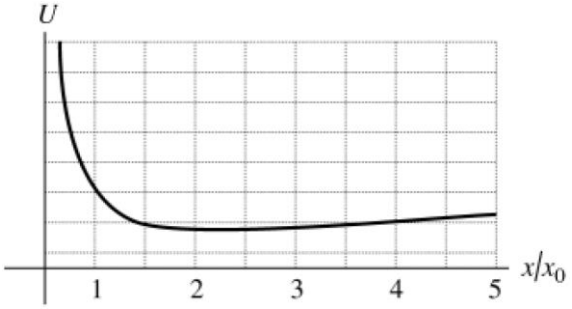
به نام خدا

پاسخ مسالهٔ ۳-۳: باید توجه داشت که مقدار سرعت به ازای کمینهٔ انرژی پتانسیل بیشینه خواهد شد و برعکس. همچنین نیرو برابر قرینهٔ مشتق انرژی پتانسیل نسبت به موقعیت است. مقادیر اکسترموم موقعیت نقاطی هستند که انرژی کل با انرژی پتانسیل برابر می‌شود.

(الف) با حذف β بر حسب α و x_0 به صورت $\beta = \alpha/x_0$ داریم:

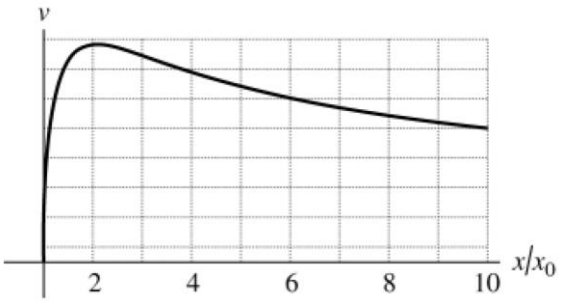
$$U(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x} = \frac{\alpha}{x_0^2}\frac{x_0^2}{x^2} - \frac{\alpha}{x_0 x} = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{x}\right)\right]$$

از رابطهٔ بالا $U(x_0) = 0$. برای $x < x_0$ انرژی پتانسیل مثبت و برای $x > x_0$ (با فرض $\alpha, \beta > 0$) انرژی پتانسیل منفی است. نمودار انرژی پتانسیل در شکل ۳-۳ رسم شده است.



شکل ۳-۳: نمودار انرژی پتانسیل ذره

(ب) $v(x) = \sqrt{-\frac{2}{m}U} = \sqrt{\left(\frac{2\alpha}{mx_0^2}\right)\left(\left(\frac{x_0}{x}\right) - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right)}$. پروتون در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند تا اینکه به سرعت بیشینه می‌رسد و سپس سرعت آن کاهش می‌یابد، اگرچه هیچ گاه از حرکت باز نمی‌ایستد. علامت منفی در عبارت سرعت ذره نشان می‌دهد که ذره تنها در نقاطی که انرژی پتانسیل آن منفی است یافت می‌شود یعنی به ازای $x > x_0$. نمودار سرعت ذره در شکل ۳-۴ رسم شده است.



شکل ۳-۴: نمودار سرعت ذره

به نام خدا

(ج) بیشینهٔ سرعت متناظر با بیشینهٔ انرژی جنبشی و در نتیجه کمینهٔ انرژی پتانسیل می‌باشد. این کمینه زمانی اتفاق می‌افتد که $\frac{dU}{dx}=0 \Rightarrow \frac{\alpha}{x_0}\left[-2\left(\frac{x_0}{x}\right)^3+\left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right]=0$. پاسخ رابطهٔ اخیر عبارتست از $x=2x_0$ در این نقطه داریم:

$$U(2x_0)=-\frac{\alpha}{4x_0^2} \quad , \quad v=\sqrt{\frac{\alpha}{2mx_0^2}}$$

(د) بیشینهٔ سرعت در نقطه‌ای اتفاق می‌افتد که مشتق انرژی پتانسیل برابر صفر باشد و بنابراین نیرو در این نقطه صفر است.

(ه) $x_1=3x_0$ و $U(3x_0)=-\frac{2\alpha}{9x_0^2}$. بنابراین:

$$v(x)=\sqrt{\frac{2}{m}\left(U(x_1)-U(x)\right)}=\sqrt{\frac{2}{m}\left[\left(-\frac{2}{9}\frac{\alpha}{x_0^2}\right)-\frac{\alpha}{x_0^2}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^2-\frac{x_0}{x}\right)\right]}=\sqrt{\frac{2\alpha}{mx_0^2}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)-\left(\frac{x_0}{x}\right)^2-\frac{2}{9}\right)}$$

ذره محدود به حرکت در ناحیه‌ای است که $U(x)<U(x_1)$ باشد. بیشینهٔ سرعت در $x=2x_0$ اتفاق می‌افتد اما در این حالت ذره بین x_1 و م.قعیت دیگری که در آن انرژی جنبشی کمینه است نوسان خواهد کرد.

(و) باید توجه داشت که مقدار $U(x)-U(x_1)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2-\left(\frac{x_0}{x}\right)+\frac{2}{9}\right]=\frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)-\frac{1}{3}\right]\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)-\frac{2}{3}\right]$$

که در $x=3x_0=x_1$ و $x=\frac{3}{2}x_0$ برابر صفر است و بنابراین انرژی جنبشی در این نقاط صفر است. بنابراین هنگامیکه ذره از x_0 رها می‌شود به بی‌نهایت می رود وبه هیچ بیشینهٔ فاصله‌ای نمی‌رسد. در حالیکه هنگامیکه ذره از x_1 رها می‌شود بین $\frac{3}{2}x_0$ و $3x_0$ نوسان خواهد کرد.