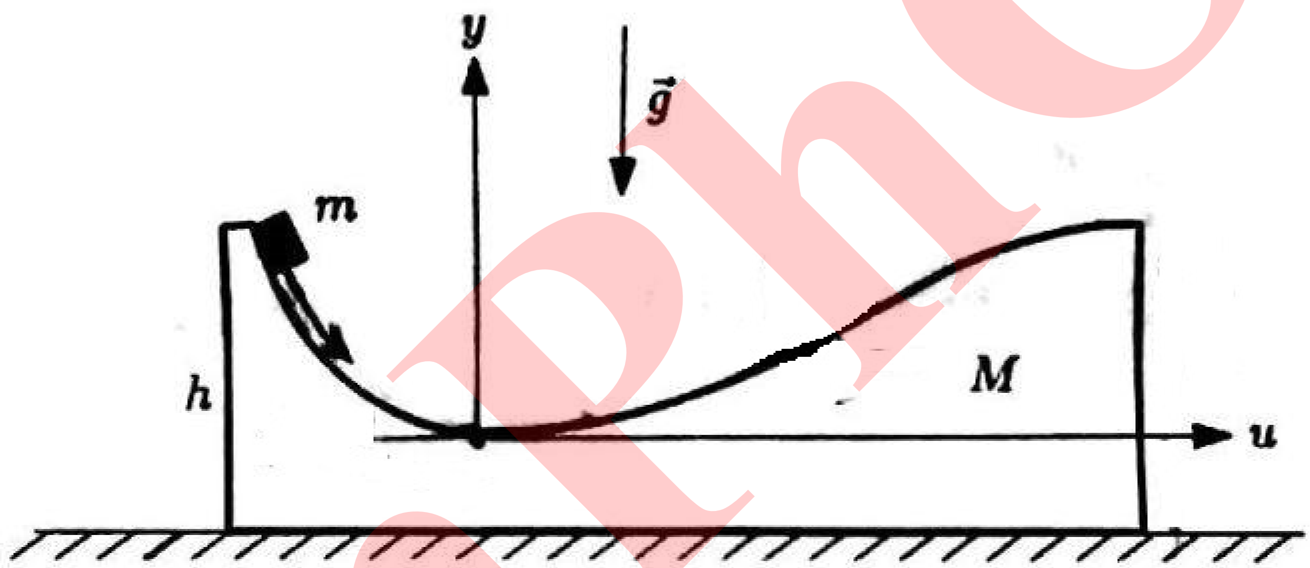
نهم شهریور ۹۶ – (مدت سه و نیم ساعت)

مسئله ۵–

در شکل زیر مقطع عمودی ظرفی به جرم M داده شده است. فرض کنید این مقطع با منحنی $y=f(u)$ داده شده که u مختصه افقی در دستگاه ساکن نسبت به ظرف است که مبدا مختصات آن گودترین نقطه ظرف است. ارتفاع ظرف از هر طرف h است. جرم کوچک m از حال سکون بدون اصطکاک از بالاترین نقطه ظرف در یک سمت سر می خورد و تا نقطه مقابل بالا می رود و بر می گردد. شتاب گرانش در جهت $(-y)$ است و اندازه آن g است. ظرف روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد.



الف) سرعت لحظه ای هر کدام از جرم ها را بر حسب تابع $f(u)$ و مشتقات آن به دست آورید.

ب) نیروی عمودی از طرف ظرف را بر حسب تابع $f(u)$ و مشتقات آن به دست آورید و مقدار آن را در گودترین نقطه ظرف پیدا کنید.

ج) زمان رسیدن از حالت سکون در بالاترین نقطه ظرف در یک سمت به نقطه هم ارتفاع آن در سمت دیگر را به صورت یک انتگرال به دست آورید.

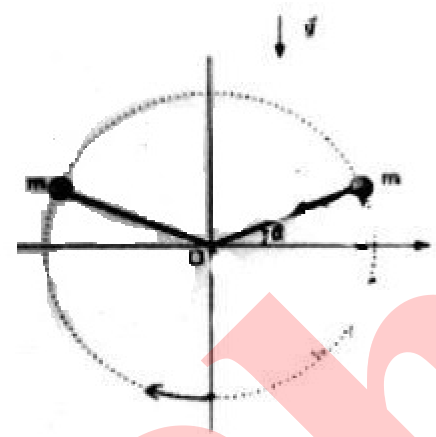
د) برای $f(u)=h\sin^2(\pi u/2l)$ زمان رفتن از $u=-l$ به $u=l$ را حساب کنید. اگر جواب نامتناهی است علت را توضیح دهید.

ه) فرض کنید حرکت از نقطه $u=-l+\epsilon$ تا $u=l-\epsilon$ صورت می گیرد. در این حالت جواب قسمت (د) را بر حسب ϵ به دست آورید.

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

مسئله ۶ـ

مطابق شکل دو گلوله به جرم m در انتهای دو نخ به طول l بسته شده اند. انتهای دیگر نخ ها به نقطه O بسته شده اند. گلوله ها در صفحه قائم حول نقطه O بالا و پایین می روند و یک بار در بالاترین نقطه و بار دیگر در پایین ترین نقطه مسیر با هم برخورد می کنند. برخوردها کشسان است به طوری که بعد از هر برخورد فقط جهت سرعت ها عوض می شود. شرایط مسئله به گونه ای است که نخ ها هرگز شل نمی شوند. شتاب گرانش به سمت پایین و مقدار آن g است. موقعیت دستگاه در هر لحظه با زاویه θ که نخ متصل به گلوله سمت راست با افق می سازد، مشخص می شود. نقطه O توسط یک عامل خارجی با معادله $Y = Y(t)$ حرکت داده می شود، که Y مختصه قائم نقطه O از دید ناظر لخت است. فرض کنید در پایین ترین نقطه مسیر هر کدام از دو گلوله بعد از برخورد با هم با سرعت زاویه ای ω_0 به حرکت در می آیند.



الف) معادلات حرکت گلوله سمت راست را از دید ناظر لخت به دست آورید.

ب) فرض کنید در طی مدتی که گلوله سمت راست از $\theta = -\pi/2$ تا $\theta = 0$ حرکت می کند، نقطه O ساکن است. سرعت زاویه ای گلوله ها هنگام رسیدن به وضعیت $\theta = 0$ را ω_1 بنامید و آن را حساب کنید. در ادامه مسئله می توانید این کمیت را جزو داده ها در نظربگیرید.

ج) حال فرض کنید از $\theta = -\theta_0$ تا $\theta = 0$ نقطه O با شتاب ثابت a به سمت پایین کشیده می شود. نیروی عامل خارجی F را به صورت تابعی از θ به دست آورید. سپس عبارت تقریبی $F(\theta)$ را برای $\theta_0 \ll 1$ حساب کنید. دو جمله نخست را در بسط $F(\theta)$ در نظر بگیرید.

د) با توجه به کوچک بودن θ_0 و با فرض آن که $t = 0$ لحظه عبور گلوله سمت راست از موقعیت $\theta = 0$ است، $\theta(t)$ را حساب کنید. دو جمله نخست در بسط $\theta(t)$ را در نظر بگیرید. سپس این رابطه را معکوس کنید و $t(\theta)$ را تا حد دو جمله نخست بسط به دست آورید.

ه) کار نیروی F را در طی مدت حرکت از $\theta = -\theta_0$ تا $\theta = 0$ بر حسب داده ها به دست آورید. دوجمله نخست در بسط جواب بر حسب θ_0 را در نظر بگیرید. (۱/۵ نمره)

و) حال فرض کنید در طی حرکت از $\theta = 0$ تا $\theta = \theta_1$ عامل خارجی با شتاب ثابت a نقطه O را به موقعیت اولیه بر می گرداند و ساکن می کند. زاویه θ_1 را بر حسب θ_0 و سایر داده ها به دست آورید. سپس کار عامل خارجی را در این بخش از حرکت نیز حساب کنید.

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

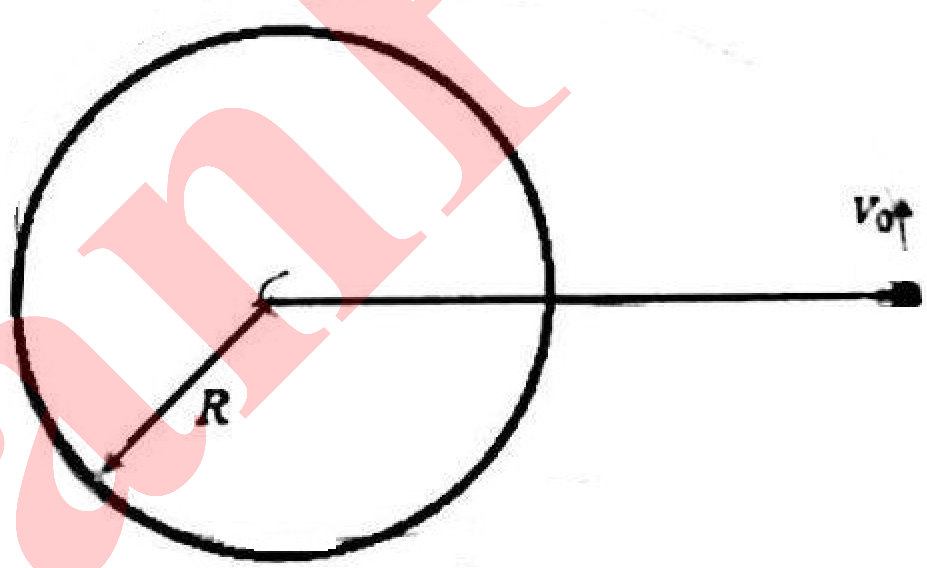
۷- در این مساله می خواهیم یک مدل ساده برای بررسی حرکت ستاره ها ی حاشیه یک کهکشان ارائه دهیم. قبل از شروع مساله راهنمایی های داده شده در انتهای سوال را بخوانید.

ذره ای به جرم m را در نظر بگیرید که در محیطی سه بعدی، تحت اثر یک منبع نیروی مرکزی و به فرم $\vec{f} = -k\vec{r}$ قرار دارد. در این عبارت k یک ثابت مثبت و $\vec{r}$ بردار مکان ذره نسبت به مبدا نیرو است. در زمان $t = 0$ بردار مکان و سرعت این ذره نسبت به مبدا نیرو را به ترتیب $\vec{r}_0$ و $\vec{v}_0$ بگیرید.

الف-	نشان دهید که به ازای تمامی مقادیر $\vec{r}_0$ و $\vec{v}_0$ حرکت ذره حول مبدا نیرو مقید خواهد بود. به عبارت دیگر اندازه ی فاصله ی ذره از مبدا نیرو همواره مقداری محدود خواهد ماند.

ب-	نشان دهید در حالتی که دو بردار اولیه ی سرعت و مکان ذره موازی نباشند، حرکت ذره حول مبدا نیرو، بر روی یک بیضی خواهد بود که مرکز آن بر مرکز نیرو منطبق است.

اکنون مطابق شکل زیر یک ابر کروی یکنواخت به جرم M و شعاع R را در نظر بگیرید. ستاره ای به جرم m و در فاصله اولیه $2R$ از مرکز ابر قرار دارد. این ستاره بردار سرعت اولیه ای به مقدار V_0 و عمود بر بردار شعاع دارد. در تمامی بخش های زیر تنها بر همکنش بین ستاره و ذرات کره را نیروی گرانشی در نظر بگیرید. جرم ستاره در برابر جرم کره بسیار کوچک است به گونه ای که کره را می توان ساکن گرفت و از تغییر توزیع جرم آن صرف نظر کرد.(جرم به صورت یکنواخت در کل کره پخش شده است)



پ-	حداقل اندازه ی V_0 (V_m) را به گونه ای تعیین کنید تا ستاره در هیچ زمانی وارد کره نشود.

اکنون فرض کنید که مقدار سرعت اولیه ی ستاره برابر با $\frac{V_m}{3}$ باشد. بنابراین ستاره در یک نقطه وارد این کره خواهد شد.

ت-	بردار سرعت($\vec{v_i}$) و مکان($\vec{r_i}$) ستاره را در لحظه ی ورود به کره تعیین کنید. اندازه زاویه ی بین این دو بردار چه قدر است؟

فرض کنید که حرکت ستاره در داخل کره بدون اصطکاک و بدون برخورد با ذرات کره است.

ث-	حداقل فاصله ی ستاره از مرکز کره (r_m) را تعیین کنید.

ج-	بردار سرعت($\vec{v_f}$) و مکان ($\vec{r_f}$) ستاره را در لحظه ی خروج از کره تعیین کنید. اندازه زاویه ی بین این دو بردار چه قدر است؟

می دانیم که فاصله ی ستاره از مرکز پس از خروج از کره، به بیشینه مقدار $2R$ خواهد رسید.

چ-	- آیا این ستاره در زمانی که مجدد به فاصله ی $2R$ می رسد در مکان اولیه خود ($\vec{r_0}$) قرار دارد؟ در صورت منفی بودن جواب، زاویه ی بین بردار نهایی مکان ستاره و بردار اولیه ی آن ($\vec{r_0}$) را تعیین کنید.

ح	- بردار مکان ستاره در N امین باری که به فاصله ی $2R$ می رسد را تعیین کنید. آیا مقداری برای N وجود دارد که به ازای آن بردار مکان ستاره برابر با $\vec{r_0}$ شود؟ در صورت وجود کوچکترین مقدار آن را بیابید.

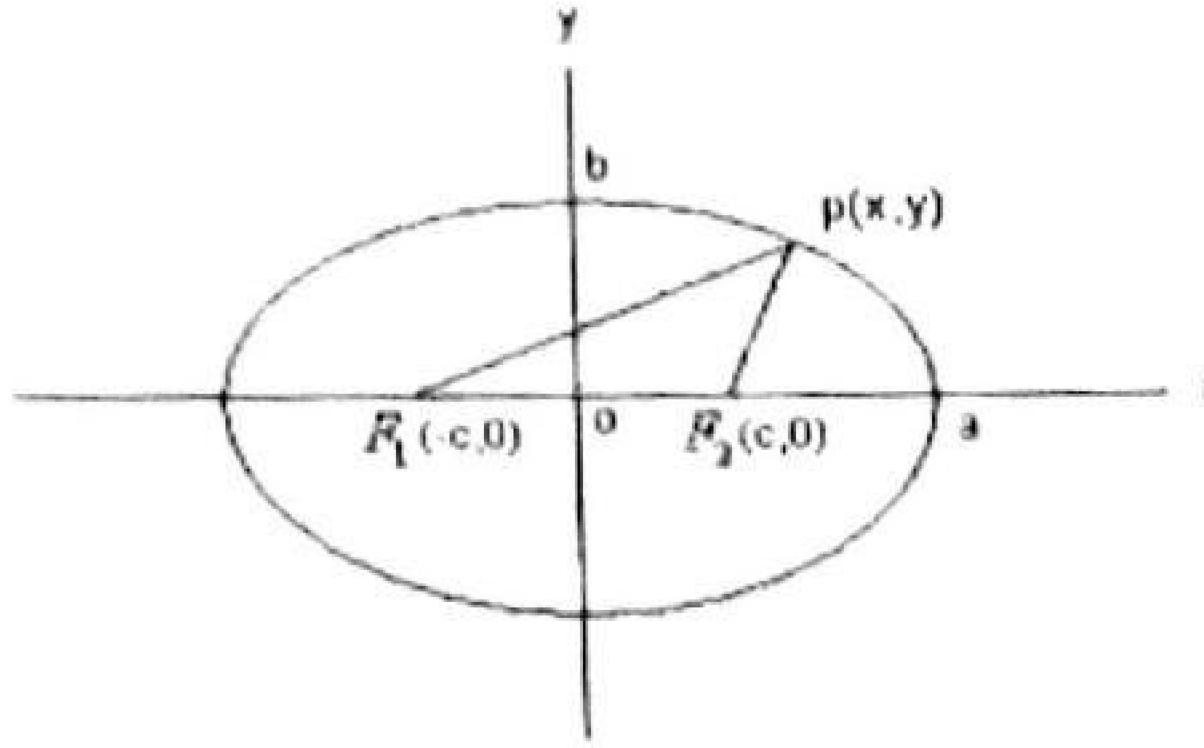
راهنمایی :

- بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت(که آن ها را کانون های بیضی می نامیم) مساوی با ثابتی مثبت است. معادله ی بیضی در دستگاه مختصاتی منطبق بر مرکز بیضی که محور x و y آن به ترتیب در راستای نیم قطر بزرگ و کوچک بیضی باشند به صورت زیر است.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

که در معادله ی فوق a و b به ترتیب برابر با نیم قطر بزرگ و کوچک بیضی می باشند.

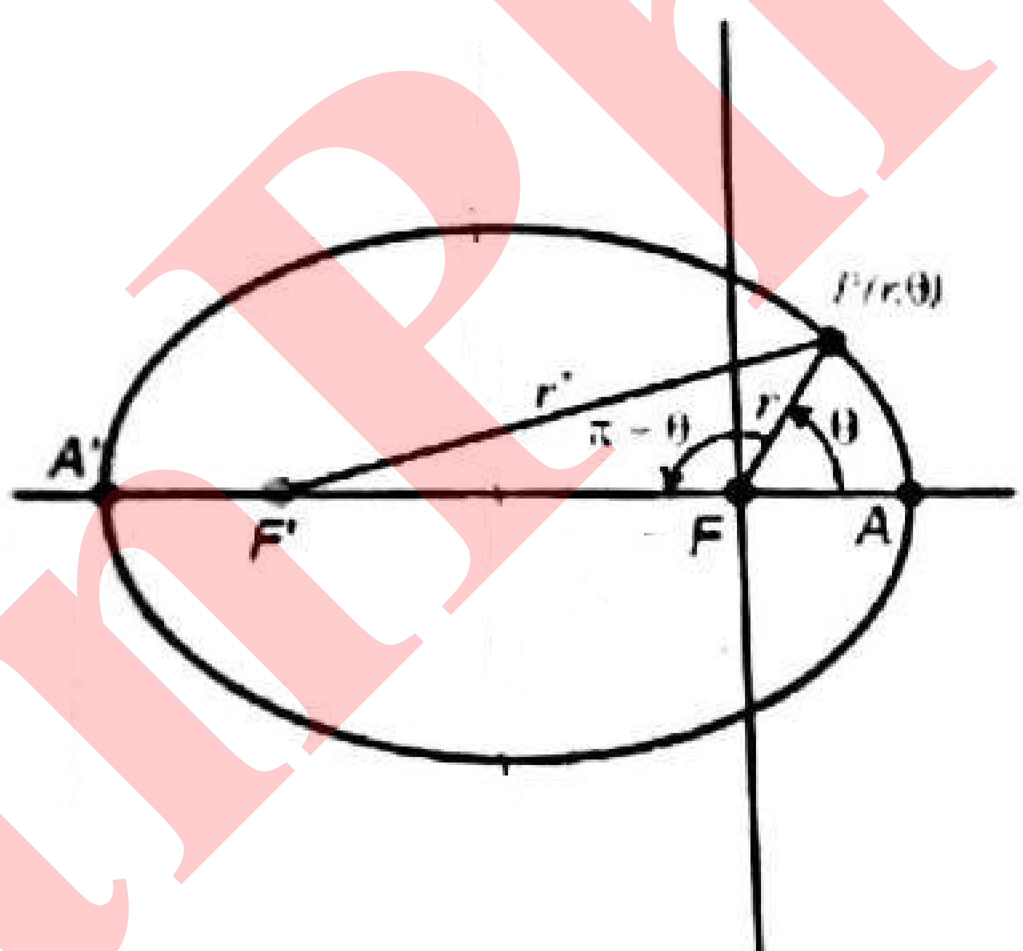
همچنین می دانیم که بین نیم قطر بزرگ، کوچک و خروج از مرکز بیضی (e) رابطه ی $b^2=a^2(1-e^2)$ برقرار است.



- حرکت بسته ی یک جسم تحت اثر نیرویی مرکزی و به فرم عکس مجذوری ($\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$) به صورت یک بیضی خواهد بود که مرکز نیرو منبطق بر یکی از کانون های بیضی خواهد بود. معادله این بیضی در دستگاه مختصات منطبق بر کانون بیضی را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

که در آن θ زاویه ی بین بردار مکان نقطه بر روی بیضی و محور نیم قطر بزرگ بیضی(محور x) است



موفق باشید

باسمه‌تعالی   فیزیک تئوری نهایی   مدت: ۱۲۰ دقیقه   ۱۲/۶/۹

دکتر سعادت

۸– ذرات ماکروسکوپی کوچک وقتی درون مایعی غوطه‌ور باشند حرکت تصادفی دارند که ناشی از برخورد مولکول‌های مایع به آن‌ها است. این مسئله اولین بار توسط *براون* مشاهده و توسط *لانژون* فرمول‌بندی شد. یک ذره‌ی ماکروسکوپی کوچک کروی به شعاع a و جرم m غوطه‌ور در مایعی با گرانروی μ را در نظر بگیرید. لانژون نیروی وارد بر ذره را دو قسمت کرد: قسمت منظم که ناشی از مقاومت مایع در مقابل حرکت ذره است، $-6\pi a\mu\vec{v}(t)$، که در آن $\vec{v}(t)$ بردار سرعت لحظه‌ای ذره است و قسمتی که دارای افت و خیز است، $\vec{\beta}(t)m$، و متوسطاش صفر است، $\overline{\vec{\beta}(t)} = \vec{0}$. تابع توزیع احتمال در این حرکت تصادفی به متغیرهای t، $\vec{r}$ و $\vec{v}$ بستگی دارد و میانگین گیری‌ها با آن انجام می‌شود. فرض کنید وابستگی به سرعت، ماکسولی است. همچنین افت و خیزهای $\vec{v}$ و $\vec{\beta}$ از هم مستقل‌اند یعنی $\overline{\vec{v}\cdot\vec{\beta}} = \bar{\vec{v}}\cdot\bar{\vec{\beta}}$. دما را T در نظر بگیرید.

آ) قانون دوم نیوتون را برای ذره به جرم m بنویسید. (۱ نمره)

ب) $\vec{v}(t)$ را بر حسب سرعت اولیه ذره، $\vec{v}_{۰}$، به دست آورید. (۱ نمره)

پ) $\overline{r^۲}(t)$ را به دست آورید که $r^۲ = \vec{r}\cdot\vec{r}$. فرض کنید $r^۲(۰) = r_{۰}^۲$. (۴ نمره)

ت) با توجه به جوابی که در قسمت ب) به دست آورده‌اید $\vec{v}(t)$ را به دست آورید. (۲ نمره)

راهنمایی: برای تابعی مانند $f(t,t')$:

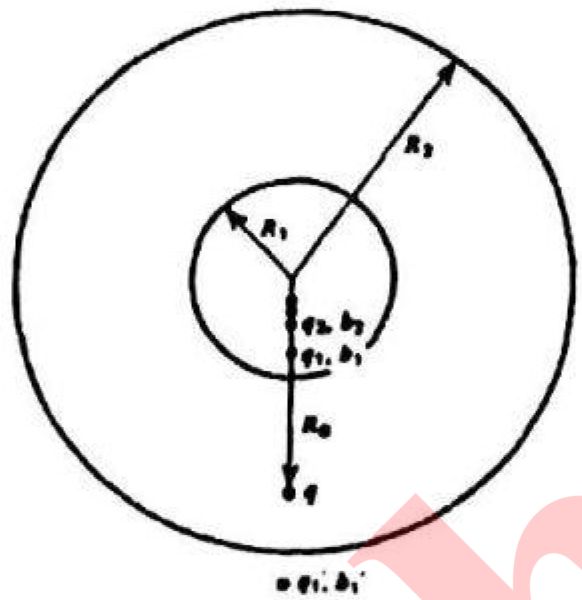
$$\frac{d}{dt}\int_{۰}^{t} f(t,t')\vec{\beta}(t')dt' = f(t,t)\vec{\beta}(t) + \int_{۰}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial t}f(t,t')\right]\vec{\beta}(t')dt'$$

ث) فرض کنید $\vec{\beta}(t)$ دارای این خاصیت است که

$$\int_{۰}^{t}\overline{\vec{\beta}(t')\cdot\vec{\beta}(t'')}f(t',t'')dt'' = f(t',t'), \quad ۰ < t', t'' < t$$

$\overline{\vec{v}(t_۱)\cdot\vec{v}(t_۲)}$ را به دست آورید. (۲ نمره)

مسئله ی ۹) مطابق شکل (۱) بار نقطه ای q بین دو کره ی رسانای هم مرکز قرار دارد. کره ها به زمین متصل اند (یعنی پتانسیل صفر دارند) و شعاع آنها R_1 و R_2 است و فاصله ی بار q از مرکز کره ها R_0 است به طوری که $R_1 < R_0 < R_2$. برای این که شرایط مرزی روی دو کره برآورده شود باید بی نهایت بار تصویری در هر دو کره در نظر بگیریم تا پتانسیل روی دو کره صفر شود.



شکل (۱)

اگر بار تصویری n ام در کره ی کوچک تر را با q_n و با فاصله ی b_n از مرکز کره ها، و بار تصویری n ام در کره ی بیرونی را با q'_n و با فاصله ی b'_n از مرکز کره ها باشد، داریم

$$q_{n+1} = -\frac{R_1}{b'_n} q'_n \ , \quad q'_{n+1} = -\frac{R_2}{b_n} q_n$$

$$b_{n+1} = \frac{R_1{}^2}{b'_n} \ , \quad b'_{n+1} = \frac{R_2{}^2}{b_n}$$

که در آن $q'_0 = q_0 = q$ و $b'_0 = b_0 = R_0$ بگیرید.

آ) از رابطه های بالا به رابطه های زیر می توان رسید.

$$q_{n+1} - \alpha q_{n-1} = 0$$

$$b_{n+1} - \beta b_{n-1} = 0$$

مقدارهای α و β را به دست آورید.

ب) جواب های $q_n = A\lambda^n$ و $b_n = B\gamma^n$ را در نظر بگیرید. اگر این جواب ها، معادله های بخش (آ) را برآورده کنند، دو مقدار برای λ (λ_1, λ_2)، و دو مقدار برای γ (γ_1, γ_2) به دست می آید. مقدارهای λ_1 ، λ_2 ، γ_1 ، و γ_2 را به دست آورید.

ج) با گرفتن ترکیب خطی جواب ها برای q_n و b_n به صورت $q_n = A_1\lambda_1{}^n + A_2\lambda_2{}^n$ و $b_n = B_1\gamma_1{}^n + B_2\gamma_2{}^n$ ، دامنه های A_1 ، A_2 ، B_1 ، و B_2 را بر حسب R_1 ، R_2 ، R_0 و q به دست آورید.

د) از روی مقدارهای به دست آمده در بخش (ج)، q_n ها و b_n ها را بر حسب R_1 ، R_2 ، R_0 و q به دست آورید.

ه) بار کل القا شده روی کره ی داخلی با شعاع R_1 را به ساده ترین شکل ممکن به دست آورید.

و) با توجه به قسمت های قبل مقدارهای q'_n و b'_n را به دست آورید.

ز) بار کل القا شده روی کره ی بیرونی با شعاع R_2 را به دست آورید.

ح) حال فرض کنید مطابق شکل (۲) دو صفحه ی رسانای طویل موازی هم اند و به زمین متصل اند. بار نقطه ای q با فاصله ی a از رسانای پایینی و با فاصله ی b از رسانای بالایی است. با توجه به مقدارهای به دست آمده در قسمت های قبل، بار کل القا شده روی دو صفحه ی رسانا را بر حسب a و b و q به دست آورید.

شکل (۲)