کاردینال (3) توان

① نکته: فرض کنید A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد. در اینصورت تعداد همهٔ توابع از A به B برابر است با m^n.

$$\underbrace{m\ m \cdots m}_{\text{تا } n}$$

② تعریف: به ازای هر دو مجموعهٔ A, B ، تعریف می کنیم

$$B^A = \{ f : f : A \xrightarrow{\text{تابع}} B \}$$

③ تعریف (توان برای کاردینال ها): اگر $b = card B$ و $a = card A$ ، تعریف می کنیم.

$$b^a = card(B^A)$$

④ نکته: تعریف توان کاردینال ها، خوش تعریف است.

اثبات: فرض کنید $a = card(A) = card(X)$ و $b = card(B) = card(Y)$.
در اینصورت بنا به تعریف $b^a = card(B^A)$ و $b^a = card(Y^X)$. پس باید ثابت کنیم که $B^A \sim Y^X$. فرض کنید g و h تناظر یک به یک باشند. تابع ψ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, dashed, "\psi(f)"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\psi : B^A \to Y^X$$
$$\psi(f) = h \circ f \circ g^{-1}$$
به ازای هر $f : A \xrightarrow{\text{تابع}} B$

ψ یک به یک است: اگر $\psi(f) = \psi(f')$ جاییکه $f, f' : A \xrightarrow{\text{تابع}} B$ ، باید ثابت کنیم $f = f'$.

از $\psi(f) = \psi(f')$ داریم $h \circ f \circ g^{-1} = h \circ f' \circ g^{-1}$ با ترکیب دو طرف از راست و چپ با g و h^{-1} ، داریم $f = f'$.

ψ پوشا است: فرض کنید $f' : X \to Y$ یک تابع باشد. قرار دهید $f = h^{-1} \circ f' \circ g$
در اینصورت

$$\psi(f) = h \circ (h^{-1} \circ f' \circ g) \circ g^{-1} = f'$$

۵) نکته: به‌ازای هر مجموعهٔ A داریم، $Card(P(A)) = 2^{card(A)}$

حل: تعریف کنید

$$\psi : P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$$

$$\psi(D) = \chi_D \quad (\text{تابع مشخصهٔ مجموعهٔ } D =)$$

ψ یک به یک است:

اگر $\psi(D) = \psi(D')$ آنگاه $\chi_D = \chi_{D'}$، پس به‌ازای هر $x \in A$ داریم:

$\chi_{D'}(x) = 1$ اگر و تنها اگر $\chi_D(x) = 1$.

پس $x \in D'$ اگر و تنها اگر $x \in D$. پس $D = D'$

ψ پوشا است:

فرض کنید $f : A \xrightarrow{\text{تابع}} \{0,1\}$. قرار دهیم $E = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$

داریم $\chi_E = f$. (چرا؟)

۶) قضیه: به‌ازای اعداد اصلی a، x، y داریم: $a^x a^y = a^{x+y}$

اثبات: فرض کنید A، X، Y مجموعه‌هایی مجزا باشند به‌طوری که $a = Card(A)$ و $x = Card(X)$ و $y = Card(Y)$.

تعریف کنید

$$\psi : A^X \times A^Y \longrightarrow A^{X \cup Y}$$

$$\psi(f,g) = f \cup g$$

ψ یک به یک و پوشاست. (تمرین).

۷ قضیه: به‌ازای اعداد اصلی x، y و z داریم $(z^y)^x = z^{y\cdot x}$

اثبات: فرض کنید $x=\text{card}(X)$ ، $y=\text{card}(Y)$ و $z=\text{card}(Z)$.

قرار دهید $\psi : Z^{Y\times X} \longrightarrow (Z^Y)^X$ جاییکه :

$$\psi(f) = e_f$$

$$f^a : Y \longrightarrow Z \qquad f^a(b) = f(b,a)$$

و

$$e_f : X \longrightarrow Z^Y \qquad e_f(a) = f^a$$

ψ یک به یک است: به‌ازای هر $f_1, f_2 : Y\times X \longrightarrow Z$ داریم:

$$\psi(f_1) = \psi(f_2) \Longrightarrow e_{f_1} = e_{f_2} \Rightarrow \forall a\in X : f_1^a = f_2^a \Longrightarrow$$

$$\forall a\in X\ \forall b\in Y : f_1^a(b) = f_2^a(b) \Rightarrow \forall a\in X\ \forall b\in Y\ f_1(b,a) = f_2(b,a)$$

$$\Longrightarrow f_1 = f_2$$

ψ پوشاست: فرض کنید $e : X \xrightarrow{\text{تابع}} Z^Y$ (تابعی دلخواه باشد). قرار دهید

$$e(a) = e_a$$

$$f : Y\times X \longrightarrow Z \qquad f(b,a) = e_a(b)$$

ثابت می‌کنیم $\psi(f) \overset{?}{=} e$. برای این منظور توجه کنید که به‌ازای هر $a\in X$ داریم

$$\psi(f)(a) = e_f(a) = f^a$$

همچنین برای هر $b\in Y$ داریم

$$f^a : Y \longrightarrow Z \qquad f^a(b) = f(b,a) = e_a(b)$$

پس $f^a = e(a) = e_a$. یعنی $\psi(f)(a) = e(a)$ به‌ازای هر $a\in X$

پس $\psi(f) = e$.

۸) قضیه: به ازای اعداد اصلی α، β، γ داریم $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$

اثبات: فرض کنید $\alpha = Card(A)$ و $\beta = Card(B)$ و $\gamma = Card(C)$ قرار دهید

$$\psi : (A \times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$$

$$\psi(f) = (P_A \circ f \,,\, P_B \circ f)$$

جایی که اگر $f : C \to A \times B$ و $c \in C$ و $f(c) = (a, b)$ آنگاه

$(P_A \circ f)(c) = P_A(a, b) = a$. به همین ترتیب درمورد P_B.

ψ یک به یک است:

$$\psi(f_1) = \psi(f_2) \Rightarrow (P_A \circ f_1 \,,\, P_B \circ f_1) = (P_A \circ f_2 \,,\, P_B \circ f_2)$$

$$\Rightarrow P_A \circ f_1 = P_A \circ f_2 \,,\, P_B \circ f_1 = P_B \circ f_2$$

پس به ازای $c \in C$، اگر $f_1(c) = (a, b)$ و $f_2(c) = (a', b')$ داریم:

$$a' = (P_A \circ f_2)(c) = (P_A \circ f_1)(c) = a$$

یعنی $a = a'$. به همین ترتیب $b = b'$، پس $f_1 = f_2$

ψ پوشا است:

فرض کنید $(g, h) \in A^C \times B^C$. تعریف کنید

$$f : C \longrightarrow A \times B$$
$$f(c) = (g(c), h(c))$$

دراینصورت ثابت می‌کنیم

$$\psi(f) = (P_A \circ f \,,\, P_B \circ f) \overset{?}{=} (g, h)$$

توجه کنید که به ازای هر $c \in C$،

$$(P_A \circ f)(c) = P_A(f(c)) = P_A(g(c), h(c)) = g(c)$$

پس $P_A \circ f = g$. به همین ترتیب $P_B \circ f = h$.