فصل ۱ـ آمار و احتمال

درس۱ شمارش

درس۲ احتمال

درس۳ آمار

درس ۱

شمارش

فعالیت

۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت دربارهٔ روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می‌تواند یکی از ۳۰ کتاب روان‌شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب کرده و مطالعه کند و مجموعاً : ۵۵ =... +... راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (علیها السلام) است او می‌تواند به‌صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده‌روی) یا با پرداخت هزینه (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. ایشان برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همهٔ حالت‌های ممکن که او می‌تواند به‌صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود را در یک مجموعه بنویسید : $A=${پیاده‌روی , ... , ... , ... , ... ,....} شما برای حل هر دو قسمت از قاعده یا اصلی استفاده کردید که به اصل جمع معروف است و به‌صورت زیر بیان می‌شود.

اصل جمع

اگر عملی را بتوان به m طریق و عمل دیگری را بتوان به n طریق انجام داد، به‌طوری‌که این دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

مثال : شما به چند طریق می‌توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس از بین چهار خودکار آبی، قرمز، سبز و سیاه و ۵ مداد با رنگ‌های متمایز و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های متمایز، انتخاب کنید.

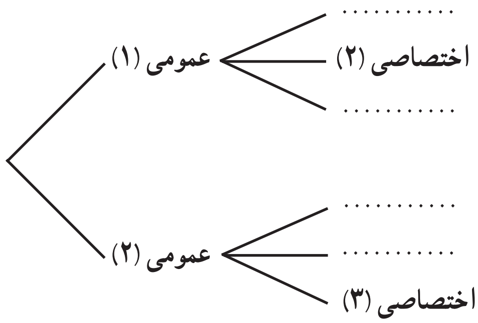
حل : در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده که فقط یکی از این ۱۲ شیء می‌تواند انتخاب شود، لذا طبق اصل جمع داریم :

تعداد انتخاب‌ها =۵+۴+۳=۱۲

فعالیت

فرض کنید یک دانشجو می‌خواهد ۱ درس عمومی از بین ۲ درس عمومی ارائه شده و ۱ درس اختصاصی از بین سه درس اختصاصی ارائه شده انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند ۱ واحد درس عمومی و ۱ واحد درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟

با کامل کردن نمودار مقابل به سؤال بالا پاسخ دهید :



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی..... راه انتخاب وجود دارد پس در کل به .... =.... × .... طریق این کار امکان‌پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام پذیرد، طوری‌که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

مثال : مدیرعامل یک شرکت جهت تصمیم‌گیری دربارهٔ توسعهٔ شرکت، ۱۵ نفر از سهام‌داران و هیئت امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند که ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر آنها در گروه B قرار می‌گیرند و اعضای گروه A می‌بایست راجع به نتایج مساعد احتمالی و اعضای گروه B باید دربارهٔ نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۱۵ نفر راجع به تصمیمش مشورت بگیرد.

ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجهٔ تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

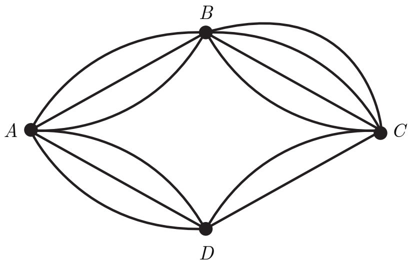
حل :

الف) از اصل جمع استفاده می‌کنیم زیرا مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A «یا» یک نفر از گروه B را به ۱۵=۸+۷ طریق انتخاب کند.

ب) در این حالت مدیرعامل می‌تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند و به ازای هر انتخاب از A به ۸ طریق می‌تواند یک نفر از گروه B را انتخاب کند و لذا طبق اصل ضرب به ۵۶=۸×۷ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل روبه‌رو بین چهار شهر A، B، C و D راه‌هایی وجود دارد، مشخص کنید که به چند طریق می‌توان :



الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت کرد؟ از A به B سه راه وجود دارد از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C، چهار راه موجود است بنابراین طبق اصل ضرب به . . . . = ... × . . . . طریق می‌توان از A به C (از طریق B) مسافرت کرد.

ب) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

برای مسافرت از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \to B \to C$ «یا» . . . $\to$ . . . $\to$ A را انتخاب کرد (اصل. . .) بنابراین تعداد راه‌های مسافرت از A به C از طریق شهر D + تعداد راه‌های مسافرت از A به C از طریق شهر B = تعداد راه‌های مسافرت از A به C

=۳×۴+۳ × . . .= . . .

پ) از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می‌توان یکی از دو مسیر . . . $B \to C \to$ «یا» . . . $\to$ . . . $\to B$ را انتخاب کرد پس داریم :

تعداد راه‌های مسافرت از B به D = ۴× . . . + . . . × . . . =۱۷

نماد فاکتوریل

همان‌طور که برای ضرب یک عدد مانند a در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $a\times a=a^{۲}$. برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل (!) استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ به تعداد ۶!=۱×۲×۳×۴×۵×۶ عدد ۶ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت.

قرارداد : برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به‌صورت ۱=!۰ و ۱=!۱ تعریف می‌کنیم.

مثال : حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) ۴!×۲=(۴×۳×۲×۱)×۲=۲۴×۲=۴۸

ب) $\frac{۵!}{۳!}=\frac{۵\times۴\times\overbrace{(۳\times۲\times۱)}^{۳!}}{\underbrace{(۳\times۲\times۱)}_{۳!}}=۵\times۴=۲۰$

پ) $\frac{۱۰!}{۷!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}}=۷۲۰$

ت) $\frac{۳!\times۵!\times۰!}{۷!\times۱!}=\frac{\cancel{۶}\times\cancel{۵!}\times۱}{۷\times\cancel{۶}\times\cancel{۵!}\times۱}=\frac{۱}{۷}$

جایگشت

فرض کنید چهار شیء متمایز a، b، c و d مفروض باشند، آرایش یا حالت $abcd$ از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک جایگشت ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می‌شود. در حالت کلّی هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم.

مسئله : ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر است با $n!$.

حل : اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل صفحهٔ بعد) برای مکان اول از چپ (یا از راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $(n-1)$ انتخاب داریم و . . . و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب کل حالت‌ها برابر است با، $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1=n!$.

$\underline{n}\quad \underline{n-1}\quad \underline{n-2}\quad \underline{\ldots}\quad \underline{2}\quad \underline{1}$

مثال : اگر افراد A و B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است.

۳	۲	۱	
A یا B یا C	یکی از ۲ نفر باقی‌مانده	۱ نفر باقی‌مانده	۳×۲×۱=۶ ←

$ABC-ACB-BAC-BCA-CAB-CBA$

(اول شخص B، بعد C و آخر A سخنرانی کرده‌اند)

مثال : با ارقام ۲ و ۷ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

تعداد انتخاب‌ها ← ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ←   تعداد اعداد ۵ رقمی =۵×۴×۳×۲×۱=!۵

کار در کلاس

ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ مفروض‌اند، با این ارقام :

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟

تعداد انتخاب‌ها ← ۵ (۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵)   ۵   . . . .   ۳   . . .   اصل ضرب ⟵ ۵×!۵=۶۰۰

(توجه دارید که صفر سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود و در مکان دوم از سمت چپ صفر می‌تواند قرار بگیرد و فقط رقمی که سمت چپ قرار گرفته، از انتخاب‌ها حذف می‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد می‌توان نوشت؟

تعداد انتخاب‌ها ←   ۴   ۴   . . . .   ۲   . . . (۱ یا ۳ یا ۵)   ⟵ ۴×۴× . . .×۲× . . .=۲۸۸

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج می‌توان نوشت؟

روش اول : تعداد ۵ رقمی‌های فرد − تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

$= ۶۰۰ - \cdots = \cdots$

روش دوم : اعداد زوج و ۵ رقمی که با این ارقام می‌توان ساخت یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴ که جدا محاسبه کرده و بنابر اصل جمع آنها را جمع می‌کنیم :

الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \quad \underline{۵} \quad \underline{\cdots} \quad \underline{۳} \quad \underline{\cdots} \quad \underset{\text{صفر}}{\underline{۱}} \quad \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \quad ۵! = \cdots$$

ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \quad \underline{۴} \quad \underline{\cdots} \quad \underline{\cdots\cdot} \quad \underline{۲} \quad \underset{\text{۲ یا ۴}}{\underline{۲}} \quad \longrightarrow \quad ۴ \times \cdots \times \cdots \times ۲ \times ۲ = ۱۹۲$$

$۳۱۲ = ۱۹۲ + ۱۲۰ =$ تعداد ۵ رقمی‌های زوج

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ می‌توان نوشت؟

۵ رقمی‌هایی که به ۵ ختم می‌شوند + ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند = تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \quad \underline{\cdots} \quad \underline{۴} \quad \underline{\cdots} \quad \underline{\cdots} \quad \underset{\text{صفر}}{\underline{۱}} \quad \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \quad \cdots! = \cdots$$

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \quad \underline{۴} \quad \underline{\cdots} \quad \underline{\cdots} \quad \underline{\cdots} \quad \underset{۵}{\underline{۱}} \quad \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \quad ۴ \times \cdots \times \cdots \times \cdots \times ۱ = \cdots$$

$۲۱۶ = \cdots + \cdots =$ تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵

جایگشت‌های r تایی از n شیء (انتخاب r شیء از n شیء)

فعالیت

فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی که با ارقام ۱ تا ۷ می‌توان نوشت را حساب کنیم در این صورت داریم : (تکرار ارقام مجاز نیست)

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \quad \underline{۷} \quad \underline{۶} \quad \underline{۵} \quad \underline{۴} \quad \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \quad ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴$$

$$۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = \frac{۷!}{۳!} = \frac{۷!}{(۷-۴)!}$$

(توجه دارید که با جابه‌جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می‌شود و به عبارت دیگر در این جایگشت‌ها جابه‌جاییِ ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۱. به چند طریق می‌توان سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز انتخاب کرده و در یک ردیف بچینیم؟

تعداد انتخاب‌ها $\leftarrow$ $\underline{۵}$ $\underline{\cdots}$ $\underline{\cdots}$ $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ $۵\times\cdots\times\cdots=\cdots$

از طرفی : $\dfrac{۵!}{(۵-۳)!}=\cdots$

۲. در حالت کلّی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n $(r\leq n)$ که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد برابر است

با : $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

تعداد انتخاب‌ها $\leftarrow$ $\underline{n}$ $\underline{n-۱}$ $\underline{\cdots}$ $\cdots$ $\underline{(n-r+۲)}$ $\underline{(n-r+۱)}$

$\xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}}$ $n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۲)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$$=\frac{n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱)\times(\ldots\ldots\ldots)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

نمادگذاری : برای تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) از نماد $p(n,r)$ استفاده می‌کنیم یعنی،

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست)

حل : در واقع باید سه رقم را از بین ۷ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جابه‌جایی آنها پس از انتخاب عدد جدید می‌سازد و اهمیت دارد.

روش اول: تعداد اعداد سه رقمی $=p(۷,۳)=\dfrac{۷!}{(۷-۳)!}=\dfrac{۷!}{۴!}=\dfrac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}=۲۱۰$

روش دوم: $\underline{۷}$ $\underline{۶}$ $\underline{۵}$ $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ $۷\times۶\times۵=۲۱۰$

ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که جابه‌جایی اشیا اهمیت ندارد)

فرض کنید بخواهیم سه رقم از بین ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ انتخاب کرده و با آنها یک مجموعهٔ سه عضوی تشکیل دهیم، با توجه به تعریف مجموعه که جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی تولید نمی‌کند و چون سه رقم انتخاب شده، !۳ جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد) لذا برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۴ رقم را بر ۶=!۳ تقسیم کنیم.

$$۴ = \frac{۴!}{۱!\times ۳!} = \frac{p(۴,۳)}{۳!} = \text{تعداد مجموعه‌های سه عضوی}$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۴	۱,۲,۶	۱,۴,۶	۲,۴,۶
جایگشت‌های سه رقم انتخاب شده	۱۲۴	۱۲۶	۱۴۶	۲۴۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۶۴
	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۴۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_۱=\{۱,۲,۴\}$	$A_۲=\{۱,۲,۶\}$	$A_۳=\{۱,۴,۶\}$	$A_۴=\{۲,۴,۶\}$

$$۴ = \frac{۲۴}{۶} = \text{تعداد مجموعه‌های سه عضوی}$$

ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء که جابه‌جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد را با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان داده و از دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{p(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال : به چند طریق می‌توان سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کرده و به دوستمان هدیه کنیم؟

حل : در هدیه دادن ترتیب مهم نیست لذا از ترکیب استفاده می‌کنیم،

$$\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!\times ۴!} = \frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۳!\times ۴!} = ۳۵$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۹ عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست)

روش اول: $\underline{\cdots}\ \underline{۸}\ \underline{\cdots}\ \underline{\cdots}\ \underline{۵}\ \longrightarrow\ \cdots\times ۸\times \cdots\times \cdots\times ۵$

روش دوم: $p(۹,\cdots) = \frac{۹!}{(۹-\cdots)!} = \cdots$

۲. به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم ۶ نفره برای والیبال تشکیل داد؟
در ساختن تیم، جابه‌جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی‌کند بنابراین از ترکیب استفاده می‌کنیم،

$$\text{تعداد تیم‌های ۶ نفره}=\binom{۹}{۶}=\frac{۹!}{۶!\times \dots}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times \dots}{۶!\times \dots}=۸۴$$

۳. مجموعهٔ ۸ عضوی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد؟ هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود فقط یک زیرمجموعهٔ سه عضوی می‌سازد (در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا اهمیت ندارد) بنابراین داریم :

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی}=\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{\dots\times\dots}=\frac{۸\times ۷\times ۶\times \dots}{\dots\times\dots}=۵۶$$

۴. در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی وجود دارد، به چند طریق می‌توان سه مهره از این جعبه خارج کرد؟
در انتخاب مهره‌های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهرهٔ قرمز و ۱ مهرهٔ آبی خارج شود اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شوند در هر صورت ۲ قرمز و ۱ آبی خارج شده است) و لذا داریم،

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره}=\binom{۹}{\dots}=\frac{۹!}{۳!\times \dots}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times \dots}{۳!\times \dots}=۸۴$$

تمرین

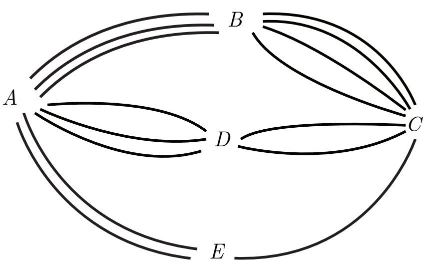
۱. می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم، به چند طریق می‌توان این دانش‌آموز را انتخاب کرد؟

۲. بین ۵ شهر A، B، C، D، E مطابق شکل زیر راه‌هایی وجود دارد که همگی دو طرفه هستند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان :

الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

ب) از شهر A به شهر C مسافرت و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

پ) از شهر D و بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



۳. با حروف کلمهٔ «ولایت» و بدون تکرار حروف : (با معنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

۴. در یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، بازی‌ها به‌صورت رفت و برگشت انجام می‌شود، اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام خواهد شد؟

۵. یک کارخانه تولید اتومبیل، اتومبیل‌هایی در ۷ رنگ، ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلوداشبورد تولید می‌کند، یک خریدار برای خرید یک اتومبیل چند انتخاب دارد؟

۶. مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}$ مفروض است، الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج می‌توان ساخت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟ پ) مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد؟ ت) مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد مشخص کنید الف) چه تعداد مثلث با این دوازده نقطه می‌توان تشکیل داد؟ ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم، مشخص کنید به چند طریق می‌توان این تیم را تشکیل داد هرگاه بخواهیم :

الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایهٔ دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایهٔ یازدهم باشند.

۹. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به‌صورت $(۳^{۲}+۴\times۳+۳\times۲)$ باشد؟

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌های یک‌طرفه از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۲ طریق از شهر A به E مسافرت کرد.