به نام خدا

نام و نام‌خانوادگی: شماره دانشجویی:

امتحان میان‌ترم درس: معادلات دیفرانسیل تاریخ: ۱۳۹۶/۰۹/۰۴ مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه

در جدول زیر چیزی ننویسید.

سوال ۱	سوال ۲	سوال ۳	سوال ۴	سوال ۵	سوال ۶	سوال ۷	جمع
۱۲	۱۲	۱۶	۱۵	۱۵	۱۶	۱۴	۱۰۰

سوال ۱: معادله دیفرانسیل دسته منحنی زیر را پیدا کنید. $y = (c_1 + c_2 x)e^x$

حل. پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = c_1 e^x + c_2 x e^x \\ y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x \\ y'' = c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x \end{cases}$$

از معادلات دوم و سوم دستگاه داریم: $y'' - 2y' = -c_1 e^x - c_2 x e^x$

طرف راست عبارت برابر $-y$ می‌باشد و جواب مطلوب: $y'' - 2y' + y = 0$

سوال ۲: نوع، مرتبه، درجه و خطی یا غیرخطی بودن معادلات زیر را مشخص کنید.

الف- $x^3 y'' + y'^4 - 4x = 0$

معادله دیفرانسیل، مرتبه ۲، درجه اول و غیرخطی.

ب- $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} - 4x = 0$

معادله دیفرانسیل، مرتبه ۲، خطی، بدون درجه.

سوال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = (x+y)^2$ را بیابید.

حل: از نکته مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک‌پذیر استفاده نموده و با تغییر متغیر داریم:

$$u(x) = x + y \Rightarrow u' = 1 + y' \xrightarrow[\text{خواهیم داشت:}]{\text{با جایگذاری در معادله}} u' - 1 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int dx \Rightarrow \tan^{-1} u = x + c \Rightarrow u = \tan(x+c)$$

$$\xrightarrow[\text{با توجه به اینکه}]{u=x+y} x + y = \tan(x+c)$$

سوال ۴: معادله دیفرانسیل همگن $y' = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$ را حل کنید.

حل: معادله را به فرم زیر می‌نویسیم

$$(x + \sqrt{xy})dy - ydx = 0$$

معادله همگن می‌باشد.

$$(x + \sqrt{x^2 v})(vdx + xdv) - vxdx = 0$$

طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم

$$(1+\sqrt{v})(vdx+xdv)-vdx=0 \Rightarrow v\sqrt{v}dx+x(1+\sqrt{v})dv=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{1+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}=0 \Rightarrow \int\frac{dx}{x}+\int\frac{1+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}=c \Rightarrow \ln x-2v^{-\frac{1}{2}}+\ln v=c$$
$$\Rightarrow \ln vx=c+2v^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln y=c+2\sqrt{\frac{x}{y}}$$

سوال ۵: در معادله دیفرانسیل همراه با شرط کمکی داده شده زیر حاصل $y(1)$ را بیابید.

$$\begin{cases} y'+2y=x^2+x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه معادله از نوع خطی مرتبه اول است، لذا خواهیم داشت:

$$P(x)=2, \qquad Q(x)=x^2+x$$
$$y(x)=e^{-\int 2dx}\Big[\int(x^2+x)e^{\int 2dx}+c\Big] \Rightarrow y(x)=e^{-2x}\Big[\int(x^2+x)e^{2x}dx+c\Big]$$

برای محاسبه انتگرال فوق از روش جز به جز خواهیم داشت:

مشتق		انتگرال
x^2+x	$+$	e^2x
$2x+1$	$-$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2	$+$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0		$\frac{1}{8}e^{2x}$

$$\int(x^2+x)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x}-\frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}$$
$$\Rightarrow y(x)=e^{-2x}\Big[\frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x}-\frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c\Big]$$
$$\Rightarrow y(x)=\frac{x^2+x}{2}-\frac{2x+1}{4}+\frac{1}{4}+ce^{-2x}$$

حال با اعمال $y(0)=1$ داریم:

$$y(0)=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow y(x)=\frac{x^2}{2}+e^{-2x} \Rightarrow y(1)=\frac{1}{2}+e^{-2}$$

سوال ۶: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. $\frac{dy}{dx}-y=xy^2$

حل: بدیهی است معادله فوق به ازای $n=2$ از نوع برنولی است. لذا طرفین را بر y^2 تقسیم می‌کنیم:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-y^{-1}=x$$

تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$u = y^{1-2} = y^{-1}, \qquad \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} + u = -x \Rightarrow P(x) = 1, Q(x) = -x$$
$$\Rightarrow g(x) = \int P(x)dx = \int 1dx = x \Rightarrow$$
$$u = e^{-g(x)}\Big[\int Q(x)e^{g(x)}dx + c\Big] = e^{-x}\Big[\int -xe^x dx + c\Big] = e^{-x}\big[(1-x)e^x + c\big]$$
$$\Rightarrow u = 1 - x + ce^{-x} \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - x + ce^{-x}$$

سوال ۷: مقادیر a و b چگونه باشد تا معادله دیفرانسیل $(x^2 + \frac{1}{y} + by^2)dx + axy^{-2}dy = 0$ کامل باشد.

حل: شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 + \frac{1}{y} + by^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + 2by \\ Q(x,y) = axy^{-2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = ay^{-2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{y^2} + 2by = ay^{-2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$