به نام او

مرحلهٔ دوم سی‌امین المپیاد ریاضی کشور

دوشنبه، ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) دایرهٔ C_1 و نقطهٔ O روی آن مفروض است. دایرهٔ C_2 به مرکز O، C_1 را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند. C_3 دایره‌ای است که در نقطهٔ R بر C_2 مماس خارج و در نقطهٔ S بر C_1 مماس داخل است و فرض کنید خط RS از نقطهٔ Q می‌گذرد. محل برخورد دوم PR و OR با C_1 را به ترتیب X و Y می‌نامیم. ثابت کنید QX با SY موازی است.

۲) فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ۳ و... n را دور یک دایره قرار داد به شکلی که هر عدد مقسوم‌علیهی از مجموعِ دو عددِ مجاورش باشد؟

۳) ثابت کنید اگر t عددی طبیعی باشد عدد طبیعی $n > 1$ وجود دارد که نسبت به t اول است و هیچ‌کدام از اعدادِ

$$n + t ،n^2 + t ،n^3 + t \text{ و...}$$

توان کامل نیستند. (دو عدد نسبت به هم اول هستند اگر تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت آن دو، یک باشد و به عدد طبیعی a توان کامل گفته می‌شود اگر اعداد طبیعی b و m موجود باشند که $m \geq 2$ و $a = b^m$.)

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحلهٔ دوم سی‌امین المپیاد ریاضی کشور

سه‌شنبه، ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۱ | **روز دوم** | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) الف) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی A_1، A_2، A_3 و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعیِ n، مجموعِ اعضای A_n برابر $n + 1391$ باشد؟

ب) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی A_1، A_2، A_3 و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعیِ n، مجموعِ اعضای A_n برابر $n^2 + 1391$ باشد؟

۵) چندجمله‌ایِ درجهٔ دوی $x^2 + ax + b$، با ضرایب حقیقی، را در نظر بگیرید. می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای این‌که بتوان آن را در اعداد حقیقی تجزیه کرد این است که دلتای آن، یعنی $a^2 - 4b$، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. توجه کنید که دلتا نیز یک چندجمله‌ای با متغیره‌های a و b است. نشان دهید چیزی مشابه دلتا برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ چهار وجود ندارد: ثابت کنید چندجمله‌ایِ چهار متغیرهٔ $P(a,b,c,d)$ با خاصیت زیر وجود ندارد:

> چندجمله‌ای درجهٔ چهار $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ قابل تجزیه به حاصل‌ضرب چهار چندجمله‌ایِ درجهٔ یک باشد اگر و تنها اگر $P(a,b,c,d) \geq 0$.

۶) دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D، E و F به ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB مماس است. قرینهٔ نقاط F و E را به ترتیب نسبت به B و C، نقاط T و S می‌نامیم. ثابت کنید مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ATS درون یا روی دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC قرار دارد.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

آدرس وب‌گاه معاونت دانش‌پژوهان جوان: www.ysc.ac.ir