



educo.ir

دانلود سوالات آزمون‌های مختلف



سوالات و پاسخ

مرحله دوم

پنجمین المپیاد

نجوم و اختر فیزیک

ویرایش و پاسخ: کامبیز خالقی

تذکرات پیش از آزمون:

- ۱- ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:
- ۲- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
- ۳- در زیر خط چین بالای پاسخنامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه‌ای ننویسید.
- ۴- معرفی نامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع‌آوری نماید.
- ۵- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد، مجاز است.
- ۶- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و آلماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- ۷- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می‌شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.

تکثیر این سوالات تنها بدون دریافت وجه و فقط برای افزایش سطح علمی دانش آموزان بلا مانع است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

| | | |
|---|---------------------------|--------------|
| $6 / 67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ | ثابت جهانی گرانش | G |
| $5 / 67 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ | ثابت استفان بولتزمن | σ |
| $6 / 63 \times 10^{-34} Js$ | ثابت پلانک | h |
| $3 \times 10^8 ms^{-1}$ | سرعت نور | c |
| $365 / 26 days$ | سال نجومی | |
| $3 / 0.9 \times 10^{16} m$ | پارسک | pc |
| $1 / 50 \times 10^{11} m$ | واحد نجومی | Au |
| $9 / 46 \times 10^{15} m$ | سال نوری | Ly |
| $6 / 96 \times 10^8 m$ | شعاع خورشید | R_{\odot} |
| $6 / 38 \times 10^6 m$ | شعاع زمین | R_{\oplus} |
| $7 / 15 \times 10^7 m$ | شعاع مشتری در استوا | |
| $1 / 74 \times 10^6 m$ | شعاع ماه | |
| $3 / 84 \times 10^8 m$ | شعاع مداری ماه | |
| $1 / 99 \times 10^{30} kg$ | جرم خورشید | M_{\odot} |
| $5 / 97 \times 10^{22} kg$ | جرم زمین | M_{\oplus} |
| $1 / 90 \times 10^{27} kg$ | جرم مشتری | |
| $5777 K$ | دمای خورشید | T_{\odot} |
| $3 / 85 \times 10^{26} W$ | درخشندگی خورشید | L_{\odot} |
| $1 / 37 \times 10^3 W m^{-2}$ | ثابت خورشیدی | |
| $4 / 72$ | قدر مطلق بولومتريک خورشید | |
| $-26 / 8$ | قدر ظاهری خورشید | m_{\odot} |
| $-13 / 7$ | قدر ظاهری ماه بدر | |
| $10^{10} years$ | عمر خورشید | |
| $70 Km s^{-1} Mpc^{-1}$ | ثابت هابل | H |

(۱) **IRYSC.COM** با فروپاشی α در هسته پلوتونیوم ^{238}Pu (نیمه عمر $7/87$ سال، جرم هسته $238/05$)، هسته اورانیوم ^{234}U به وجود می‌آید. در این فرآیند مقدار $49/5 MeV$ انرژی آزاد می‌شود. در مولدهای موسوم به رادیوگرمایی، از انرژی گرمایی فرآیند برای تولید انرژی استفاده می‌شود. فضاپیمای *Voyager 2*، که در تاریخ ۳۰ مرداد ۱۳۵۶ به فضا پرتاب شد، در مسیر خود از نزدیکی ۴ سیاره، از جمله سیاره زحل در فاصله $9/5 AU$ از خورشید، در تاریخ ۵ شهریور ۱۳۵۸ عبور کرد. منبع تغذیه آن یک مولد رادیو گرمایی با بازدهی $0.5/5\%$ بود که $4/5 kg$ پلوتونیوم ^{238}Pu به همراه داشت. هم دوره با این فضاپیما، ایستگاه فضایی *Skylab* (سال‌های $1357-1352$) بود که برای تغذیه انرژی آن پنل‌های خورشیدی با مساحت $730 m^2$ و توان $10/5 kW$ طراحی شده بودند اما در هنگام پرتاب آسیب دیدند. اگر در فضاپیمای *Voyager 2* نیز برای تولید انرژی از پنل‌های خورشیدی همانند ایستگاه فضایی *Skylab* استفاده می‌شد، به گونه‌ای که مقدار انرژی آن برابر با مولد رادیوگرمایی آن باشد، چه مساحتی برای این پنل‌ها باید در نظر گرفته می‌شد؟

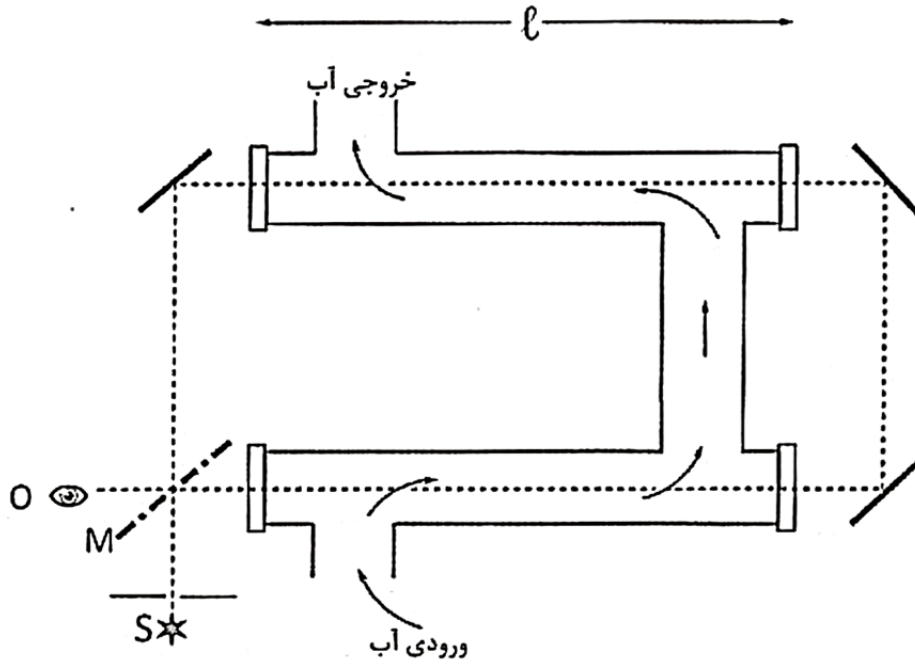
(۲) **IRYSC.COM** رصد و اندازه‌گیری سرعت‌های چرخشی ستاره‌ها به دور مرکز کهکشان‌های مارپیچی نشان می‌دهد که در فاصله‌های زیاد چند کیلو پارسی، از مرکز کهکشان داریم: $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = V_{const}$. فرض کنید که در کهکشان‌های مارپیچی، نسبت جرم به درخشندگی و همچنین نسبت درخشندگی به سطح مقدار ثابتی است. رابطه‌ی زیر را با فرض توزیع کروی و متقارن برای ستاره‌ها و قانون جاذبه‌ی نیوتنی بدست آورید.

$$M = -10 \log V_{const} + Const$$

(M قدر مطلق کهکشان است.)

(۳) **IRYSC.COM** کوتوله‌ی سفید ستاره‌ای است که جرم آن از مرتبه‌ی جرم خورشید، و شعاع آن از مرتبه‌ی شعاع زمین است. (الف) فرض کنید یک کوتوله‌ی سفید از تحول ستاره‌ای مثل خورشید ساخته شده باشد. و فرض کنید طی این تحول ماده‌ی مجاور سطح این ستاره یک رسانای بسیار خوب است. چنان که هر مدار فرضی که بگیریم، نیروی محرکه‌ی الکتروموتوری در آن مدار صفر است. شار مغناطیسی که از یک مدار فرضی می‌گذرد را در نظر بگیرید، انقباض مدار همراه با ستاره را دنبال کنید، و از آنجا شدت میدان مغناطیسی در سطح ستاره (B) را وقتی شعاع ستاره در حال انقباض (r) است، حساب کنید. (ب) با استفاده از اینکه شدت میدان مغناطیسی در سطح خورشید $2 \times 10^{-4} T$ است، شدت میدان مغناطیسی در سطح یک کوتوله‌ی سفید را تخمین بزنید.

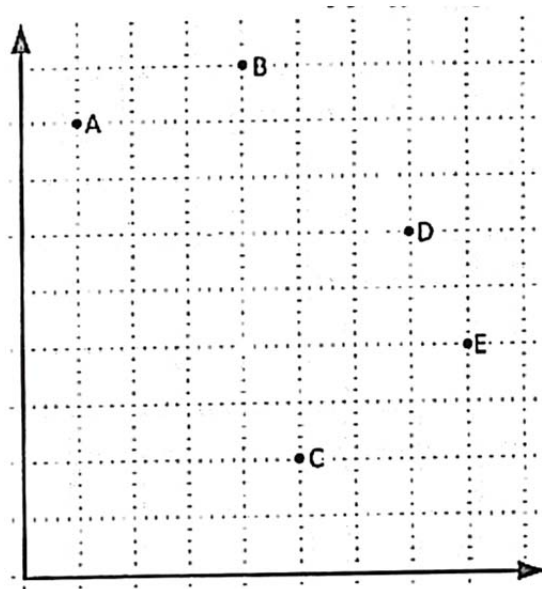
(۴) **IRYSC.COM** در سال ۱۸۵۱، فیزو سرعت نور را در محیط متحرک به وسیله‌ی تداخل سنجی که طرح آن را در شکل زیر می‌بینید، مورد بررسی قرار داد. نوری با طول موج λ از منبع S به وسیله‌ی آینه‌ی M به دو شعاع تقسیم می‌شود. شعاع‌ها به دور تداخل سنج در دو جهت مختلف حرکت می‌کنند و در تلسکوپ ناظر O که شکل فریز را می‌بینید با هم ترکیب می‌شوند. دو بازوی تداخل سنج لوله‌هایی پر از آب به طول l هستند که به صفحه‌هایی از شیشه‌ی مسطح منتهی می‌شوند. آب در لوله‌ها جاری است، به طوری که یکی از شعاع‌های نوری در جهت جریان آب و دیگری در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند. پدون در نظر گرفتن اثرات نسبیتی جمع سرعت‌ها، جابه‌جایی فریز وقتی آب با سرعت v جریان دارد چقدر است؟



شکل زیر پنج نقطه از مدار جرمی آسمانی را نشان می‌دهد که مختصات نقاط آن به صورت زیر است. (۵) **IRYSC.COM**

$$A : (1, 8) \quad B : (4, 9) \quad C : (5, 2) \quad D : (7, 6) \quad E : (8, 4)$$

این مدار کدام یک از مقاطع مخروطی است؟ مشخصات مدار را محاسبه کنید.



6) مدار جسم A که به دلیل گرانش جسم B دور B می‌گردد، بیضی است پس جسم B در یکی از کانون‌های این بیضی قرار دارد و معادله‌ی مدار به صورت

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

است، که در آن a نیم قطر بزرگ بیضی، ε خروج از مرکز بیضی، r فاصله‌ی A با B و θ زاویه‌ی بردار واصل B به A با بردار واصل B به D (حیض مدار A) است.

جسم A را کره‌ی کوچکی در نظر بگیرید که به دور خودش هم می‌چرخد. محور این چرخش بر مدار A عمود است، جهت چرخش همان جهت گردش مداری A است، دوره‌ی چرخش با دوره‌ی مداری برابر است و سرعت چرخش ثابت است. در این صورت اگر خروج از مرکز مدار صفر می‌بود، از B فقط نیمی از A دیده می‌شد. فرض کنید خروج از مرکز مدار بسیار کوچک‌تر از یک است و وابستگی زاویه θ با زمان (t) به صورت زیر است، که در آن صفر t از حیض مدار محاسبه می‌شود. (l اندازه حرکت زاویه‌ای است).

$$t = \frac{1}{\lambda}(\theta - 2\varepsilon \sin \theta) \quad , \quad \lambda = \frac{l}{ma^2(1 - \varepsilon^2)^2}$$

حالا B چه کسری از A را می‌بیند؟

7) هواپیمایی در ارتفاع 4000 متری از سطح زمین در نقطه‌ای با عرض جغرافیایی 60° شمالی، با سرعت 200 km/h نسبت به سطح زمین به سمت شرق در حال پرواز است. از دید او ستاره‌ی A با افق مماس می‌شود. ستاره‌ی B که 6 ساعت جلوتر از A است و میل آن 18° کمتر از میل ستاره‌ی A است، چند ساعت بعد، از دید خلبان غروب می‌کند؟

(۱) **IRYSC.COM** با توجه به صورت سوال، در واپاشی هر اتم، مقدار $5/49$ میلیون الکترون ولت انرژی آزاد می‌شود. حال با توجه به جرم اتمی و عدد اتمی هسته‌ی اتم؛ میزان انرژی آزاد شده به ازای هر واحد جرم را چنین بدست می‌آوریم:

$$n = \frac{\Delta E}{\Delta m} \Rightarrow n = \frac{5/49}{238/0.5} = 2/2 \times 10^{12} \text{ } j/kg$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$m = m_0 e^{-\lambda t} \quad *$$

در این رابطه t مدت زمان، m_0 جرم اولیه و λ ثابتی است که برای تعیین نیمه‌عمر از آن می‌شود. رابطه‌ی فوق را می‌توان بر حسب λ چنین مرتب کرد:

$$\lambda = -\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau}$$

از جاگذاری رابطه‌ی اخیر در عبارت * خواهیم داشت:

$$m = m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t}$$

برای بدست آوردن سرعت مصرف m بر حسب زمان، از این عبارت مشتق می‌گیریم که آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t}$$

از طرف دیگر می‌دانیم که:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta m} \times \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

پس برای بازده P ، می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = n \times \left(\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t} \right) \times Ra$$

که در آن Ra بازده مولد است. از طرفی توان ایستگاه فضایی باید با توان فضاپیما برابر باشد پس می‌توانیم چنین بنویسیم (در این عبارت P' توان ایستگاه و S' مساحت ایستگاه است).

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P' \times \left(\frac{1}{d} \right)^2 \times \left(\frac{S}{S'} \right) = n \times \left(\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t} \right) \times Ra$$

با مرتب کردن این عبارت بر حسب S خواهیم داشت:

$$S = n \times \left(\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t} \right) \times Ra \times S' \times d^2 \times \frac{1}{P'}$$

از طرف دیگر، اختلاف زمان را چنین بدست می‌آوریم:

$$\Delta t = 1358 / 6 / 5 - 1356 / 5 / 30$$

که حاصل آن، برابر ۲ سال و ۶ روز می‌شود.

با جاگذاری این مدت زمان در رابطه‌ی آخر؛ مقدار مساحت فضاپیما برابر مقدار تقریبی ۸۴۰ مترمربع بدست خواهد آمد.

(۲) IRYSC.COM طبق صورت سوال می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$L \propto M \quad , \quad L \propto R^{\gamma} \quad , \quad V^{\gamma} \propto \frac{M}{R}$$

در عبارت بالا: L درخشندگی، M جرم، R شعاع کهکشان و V دارای یک مقدار ثابت است.

پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\left. \begin{aligned} L &= cte \times M \\ L &= cte \times R^{\gamma} \Rightarrow \sqrt{L} = cte \times R \\ V^{\gamma} &= cte \times \frac{M}{R} \Rightarrow \frac{M}{R} = \frac{V^{\gamma}}{cte} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{L} = cte \times \frac{M}{R} \left\{ \Rightarrow \sqrt{L} = cte \times V^{\gamma} \Rightarrow L = V^{2\gamma} \times cte \right.$$

با جایگذاری تساوی اخیر در معادله‌ی مشهور ذیل داریم:

$$M = -\gamma / \Delta \log L + Const \Rightarrow$$

$$M = -\gamma / \Delta \log (V^{2\gamma} \times cte) + Const = -\gamma \log V + Const$$

(۳) IRYSC.COM برای شار عبوری از سطح دلخواه A داریم:

$$\varphi = \int \vec{B} \times d\vec{A}$$

می‌دانیم $\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} = 0$. از این رابطه φ (همان شار مغناطیسی) دارای مقداری ثابت است. B هم مقدار ثابتی دارد؛ پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\varphi = \varepsilon \pi r^{\gamma} B \Rightarrow B \times r^{\gamma} = B_0 \times r_0^{\gamma} \Rightarrow B = B_0 \times \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\gamma}$$

(ب)

$$B = B_0 \times \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\gamma} = B_0 \times \left(\frac{r_{Sun}}{r_{White dwarf}} \right)^{\gamma} = B_0 \times \left(\frac{r_{Sun}}{r_{Earth}} \right)^{\gamma} = \gamma / \varepsilon T$$

(۴) IRYSC.COM

$$\left. \begin{aligned} \Delta t &= \gamma l \left(\frac{1}{\frac{c}{n} - v} - \frac{1}{\frac{c}{n} + v} \right) = \frac{\gamma l n^{\gamma} v}{c^{\gamma}} \\ c\Delta t &= \Delta x \\ \Delta x &= N \times \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = \frac{\gamma l n^{\gamma} v}{c} \left\{ \Rightarrow N = \frac{\gamma l n^{\gamma} v}{c\lambda} \right.$$

در این سوال c سرعت نور و n ضریب شکست آب و N تعداد تناوب موج است.

۵) IRYSC.COM می دانیم که صورت کلی معادله‌ی مقاطع مخروطی، به صورت زیر است:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

مختصات ۵ تا از نقاط واقع بر روی این مقطع مخروطی را داریم. از طرف دیگر برای حل این دستگاه به یک معادله‌ی دیگر هم نیاز است. در این راه حل، از معادله‌ی گذرنده از دو نقطه‌ی A و B که به صورت زیر است، استفاده می‌کنیم.

$$3y - x - 23 = 0$$

با حل عددی این دستگاه، مقادیر ذیل بدست خواهند آمد:

$$a = 508, \quad b = 382, \quad c = 578, \quad d = -7828, \quad e = -6814, \quad f = 32760$$

حال که معادله‌ی منحنی گذرنده از این ۵ نقطه را بدست آورده‌ایم باید نوع این مقطع مخروطی را نیز مشخص کنیم. برای این کار باید کل منحنی را به قدری دوران دهیم که معادله، به صورت متعارف و کلی معادله‌ی مقاطع مخروطی در بیاید، مقدار این دوران مطلوب از رابطه‌ی ذیل بدست خواهد آمد:

$$\tan 2\theta = \frac{c}{a-b} = \frac{578}{508-382} \Rightarrow \theta = 128 / 8^\circ$$

معادله‌ی دوران یافته با استفاده از ماتریس تبدیل ذیل بدست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

با حل این ماتریس داریم:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

با جاگذاری و حل این معادله خواهیم داشت:

$$\frac{(x' - 1/33)^2}{25/46} + \frac{(y' + 6/99)^2}{5/13} = 1$$

از مقایسه این عبارت با صورت کلی مقاطع مخروطی داریم:

$$a \cong 5$$

$$e \cong 0/89$$

از آنجا که خروج از مرکز این منحنی، کوچک‌تر از یک است؛ مقطع مخروطی مورد اشاره، بیضی است.

۶) IRYSC.COM طبق صورت سؤال، لحظه‌ی صفر را زمانی در نظر می‌گیریم که جسم اول در حوض مدار خود قرار گرفته باشد. اگر مدار دایره‌ای بود (خروج از مرکز صفر بود) ناظری که روی جسم A ، در لحظه‌ی صفر جسم B را در سمت‌الراس خود مشاهده می‌کرد؛ همواره و بعد از گذشت زمان، مختصات سمتی- ارتفاعی جسم B را بدون تغییر می‌دید. اما با توجه به صورت سؤال، مدار جسم بیضی است. پس طبق روابط پیش‌فرض در صورت سؤال، می‌توانیم چنین بنویسیم:

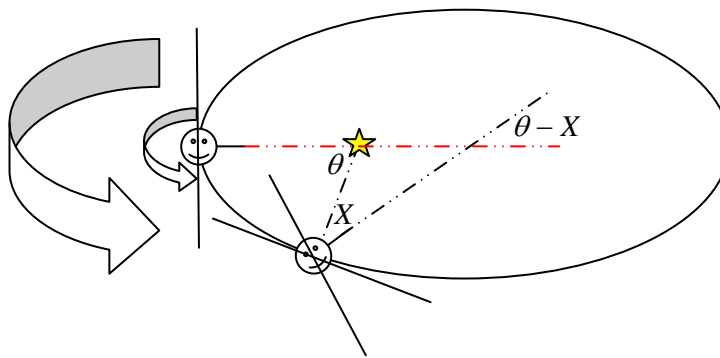
$$t = \frac{1}{\lambda}(\theta - re \sin \theta) \Rightarrow \lambda t = (\theta - re \sin \theta)$$

از طرف دیگر، در صورت مسئله داشتیم:

$$\lambda = \frac{l}{ma^2(1-e^2)^2}$$

بعد از گذشت این مدت زمان، جسم A هم تحت تأثیر گردش وضعی اش، کمی حول محور خود دوران کرده است. مقدار این دوران بر حسب دوره تناوب وضعی P و مدت زمان t ، بدین سان محاسبه می شود. این زاویه در شکل با امتداد دادن محل قرار گیری ناظر و با خطوط خط چین سیاه، مشخص شده است.

$$X = \frac{2\pi}{P} t$$



مقدار مطلوب، زاویه‌ی میان دو خط سیاه رنگی است که بخش قابل مشاهده‌ی سطح سیاره در طی زمان را نشان می دهد. با استفاده از روش های هندسه‌ی مسطحه، این زاویه برابر $\theta - X$ بدست می آید. از این پس این زاویه را Y می نامیم. از طرف دیگر، طبق قانون سوم کپلر می دانستیم:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm}$$

پس خواهیم داشت:

$$l = \frac{2\pi ma^2 \sqrt{1-e^2}}{P}$$

بنابراین زاویه Y چنین بدست می آید:

$$Y = 2e \sin \theta$$

و حداکثر مقدار Y برابر $2e$ (یک بار در قسمت شرقی و بار دیگر در قسمت غربی مدار) خواهد بود. پس در کل تناوب، تنها کسری از آن دیده می شود.

$$n = \frac{\pi + 2e}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{2e}{\pi}$$

(۷) IRYSC.COM از آنجا که در صورت سؤال، سرعت هواپیما از نقطه‌ای بر سطح زمین سنجیده می‌شود، باید سرعت گردش وضعی زمین را هم اعمال کنیم:

$$\omega = \frac{v_{airplane} + v_{earth} \cos \varphi}{R_{earth} + h} = 0.294 \frac{rad}{h}$$

هواپیما در ارتفاع ۴ کیلومتری از سطح زمین پرواز می‌کند، بنابراین، میزان افق منفی ناظر واقع در هواپیما را این چنین بدست می‌آوریم:

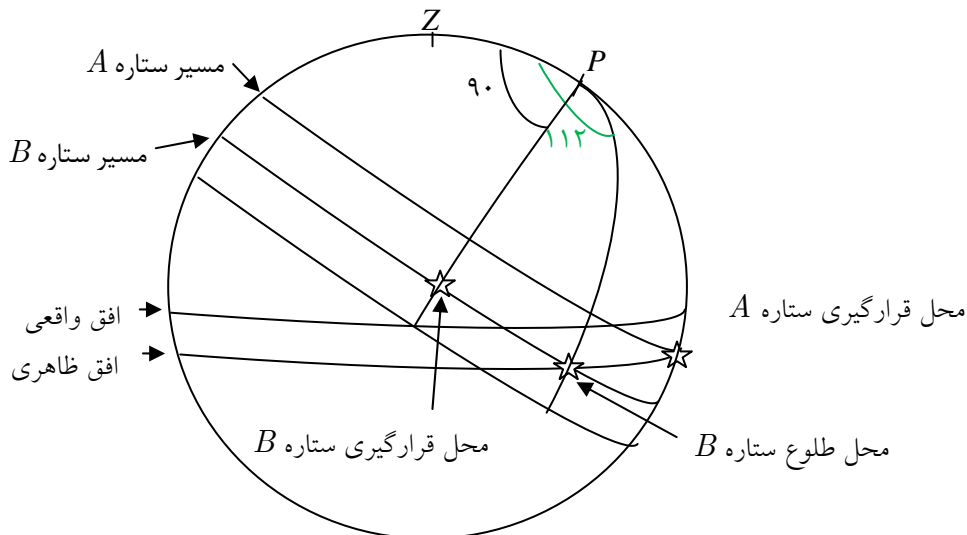
$$a = \cos^{-1} \left(\frac{r_{earth}}{r_{earth} + h_{airplane}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{6400}{6404} \right) = 2.02$$

منظور سوال از بیان این نکته که ستاره با افق مماس می‌شود، این است که ستاره -تنها- با افق مماس می‌شود و غروب نمی‌کند. با دانستن این نکته می‌توانیم میل ستاره‌ی A را چنین برآورد کنیم:

$$\delta_A = 90 - \phi - a = 28^\circ, \quad \delta_B = \delta_A - 18 \Rightarrow \delta_B = 10^\circ$$

زاویه‌ی ساعتی ستاره B در هنگام طلوع این چنین بدست می‌آید:

$$\cos 92 = \cos 30 \cos 80 + \sin 30 \sin 80 \cos H \Rightarrow H = 112^\circ$$



توجه: کمان سبز رنگ در پشت کره است.

حال می‌بینیم که ستاره‌ی B برای رسیدن به نقطه غروب در پشت کره، باید کمانی به طول $112 + 90$ درجه که برابر است با 202 درجه را طی کند. از ابتدای راه حل به یاد داریم که هواپیما در هر ساعت 0.294 رادیان را به دور مرکز زمین می‌پیماید. پس با نوشتن یک تناسب ساده برای پیمودن کمان 202 درجه‌ای، پاسخ مطلوب بدست می‌آید:

$$0.294 \text{ رادیان}$$

$$1 \text{ ساعت}$$

$$3.52 \text{ رادیان}$$

$$x \text{ ساعت}$$

$$x \approx 12h$$