دیفرانسیل

فصل صفر یادآوری مفاهیم پایه

جلسه‌ی اول: اعداد حقیقی و خواص آن

خواص اعداد حقیقی و بسط

تعریف: **مجموعه‌ی اعداد حقیقی**

مجموعه‌ی R با دو عمل $+$ و $\times$ که دارای ۱۲ خاصیت زیر است را مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌نامیم.

بسته بودن جمع	۱) $\forall x,y\in R \qquad x+y\in R$
بسته بودن ضرب	۲) $\forall x,y\in R \qquad x.y\in R$
جابه‌جایی جمع	۳) $x+y=y+x$
جابه‌جایی ضرب	۴) $x.y=y.x$
شرکت‌پذیری جمع	۵) $x+(y+z)=(x+y)+z$
شرکت‌پذیری ضرب	۶) $x.(y.z)=(x.y).z$
عضو خنثی جمع	۷) $\exists ۰\in R \qquad x+۰=x$
عضو خنثی ضرب	۸) $\exists ۱\in R \qquad x\times ۱=x$
عضو قرینه	۹) $\exists(-x)\in R \qquad x+(-x)=۰$
عضو وارون	۱۰) $\exists x^{-۱}\in R \qquad x.x^{-۱}=۱ \qquad (x\neq ۰)$
پخشی	۱۱) $x.(y+z)=x.y+x.z$
	۱۲) اصل تمامیت در R برقرار است.

این ۱۲ حکم را اصل موضوع (اصل) و یا بنداشت می‌نامیم.

ویژگی‌های اعداد حقیقی

اعداد حقیقی دارای خواص بسیاری است که بعضی از این خواص عبارتند از:

۱- $a\times ۰=۰$

۲- $۰<a<۱\xrightarrow{n\in N}۰<a^n<۱$

۳- اگر برای هر عدد مثبت r نامساوی $۰\le x<r$ برقرار باشد، آن‌گاه $x=۰$.

۴- بین هر دو عدد حقیقی متمایز بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

بسط اعشاری اعداد گویا

فرض کنید a و b دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند. مجموعه‌ی اعداد اول را به دو زیرمجموعه $A=\{۲,۵\}$ و $B=\{۳,۷,۱۱,۱۳,...\}$ افراز می‌کنیم. اگر در تجزیه به عوامل اول b فقط ۲ یا ۵ باشد کسر $\frac{a}{b}$ یک عدد اعشاری پایان‌پذیر است مثل $\frac{۳}{۵}=۰/۶$.

اگر در تجزیه عوامل اول b نه ۲ باشد و نه ۵ آن‌گاه کسر $\frac{a}{b}$ متناوب ساده است. مثل $\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳...=۰/\overline{۳}$

و اگر در تجزیه به عوامل اول b از هر دو مجموعه‌ی A و B عضوی موجود باشد آن‌گاه $\frac{a}{b}$ برابر عدد اعشاری متناوب مرکب است. مثل $\frac{۱}{۶}=۰/۱۶۶۶...=۰/۱\overline{۶}$

نکته ی ۱: **عدد اعشاری** $۰/a_۱a_۲...a_m\overline{b_۱b_۲...b_n}$ **برابر است با:**

$$\frac{a_۱a_۲...a_mb_۱b_۲...b_n-a_۱a_۲...a_m}{\underbrace{۹۹...۹}_{n\ \text{تا}}\underbrace{۰۰...۰}_{m\ \text{تا}}}$$

نامساوی‌ها نامعادلات تعیین‌علامت

نامساوی‌ها

برای هر عدد حقیقی x و y دقیقاً یکی از سه حالت زیر برقرار است:

$x < y$ یا $x = y$ یا $x > y$

خواص نامساوی‌ها

۱) اگر $a < b$ و $b < c$ آن‌گاه $a < c$

۲) اگر $a \le b$ و $b \le a$ آن‌گاه $a = b$

۳) اگر $a < b$ آن‌گاه $a + c < b + c$ و برعکس

۴) اگر $a < b$ و $c < d$ آن‌گاه $a + c < b + d$

۵) اگر $a < b$ و $c < ۰$ آن‌گاه $ac > bc$ و برعکس

۶) اگر $a < b$ و $c > ۰$ آن‌گاه $ac < bd$ و برعکس

۷) اگر $۰ < a < b$ و $۰ < c < d$ آن‌گاه $ac < bd$

۸) اگر a و b هم‌علامت باشند آن‌گاه $ab > ۰$ و برعکس

۹) اگر a و b مختلف‌العلامت باشند آن‌گاه $ab < ۰$ و برعکس

۱۰) اگر $a < b$ و a و b هم‌علامت باشند آن‌گاه $\frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$

۱۱) اگر $a < b$ و a و b هم‌علامت نباشند آن‌گاه $\frac{۱}{a} < \frac{۱}{b}$

۱۲) اگر $a < b$ و n عدد طبیعی فرد باشد آن‌گاه $a^n < b^n$ و $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

۱۳) اگر $۰ < a < b$ و n عدد طبیعی باشد آن‌گاه $a^n < b^n$

۱۴) اگر $۰ < a < ۱$ آن‌گاه $۰ < a^n < ۱$ و برعکس $(n \in N)$

۱۵) اگر $۰ < a < ۱$ و $n < m$ آن‌گاه $a^n > a^m$

۱۶) اگر $a > ۱$ و $n < m$ آن‌گاه $a^n < a^m$

۱۷) اگر $a < b < ۰$ و n عدد طبیعی زوج باشد آن‌گاه $a^n > b^n$

تعیین‌علامت

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax + b$	a	۰ مخالف علامت	a	ق علامت

درجه اول

x		α		β	
$ax^۲ + bx + c$	a	موافق علامت	a	مخالف علامت	a	ق علامت

درجه دوم $(\Delta > ۰)$

x		α	
$ax^۲ + bx + c$	a	موافق علامت	a	موافق علامت

درجه دوم $(\Delta = ۰)$

x	
$ax^۲ + bx + c$	a موافق علامت ۰

درجه دوم $(\Delta < ۰)$

نامساوی‌های مهم

۱- اگر $a, b \ge ۰$ آنگاه $a + b \ge ۲\sqrt{ab}$ و اگر $a, b \le ۰$ آنگاه $a + b \le -۲\sqrt{ab}$ در حالت $a = b$ تساوی برقرار است.

۲- برای هر a و b و x داریم: $-\sqrt{a^۲ + b^۲} \le a\sin x \pm b\cos x \le \sqrt{a^۲ + b^۲}$

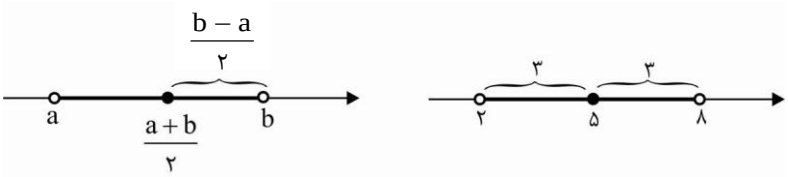
۳- برای هر a و b و x و y داریم: $(ax+by)^۲ \le (a^۲+b^۲)(x^۲+y^۲)$

همسایگی متقارن. (بازه متقارن)

بازه‌ی باز $(a-r,a+r)$ را یک همسایگی متقارن a به شعاع r می‌نامیم. این بازه مجموعه نقاطی است که در دو طرف a و حداکثر به فاصله‌ی r از a قرار دارند.

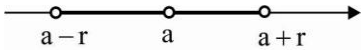
نکته ی ۲: همسایگی متقارن a به شعاع r همان مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-a|<r$ است.

نکته ی ۳: هر بازه‌ی باز (a,b) یک همسایگی متقارن به مرکز $\frac{a+b}{۲}$ و شعاع $\frac{b-a}{۲}$ می‌باشد. در واقع بازه‌ی (a,b) معادله است با مجموعه جواب $\left|x-\frac{a+b}{۲}\right|<\frac{b-a}{۲}$.



همسایگی متقارن محذوف

مجموعه‌ی $(a-r,a+r)-\{a\}$ را یک همسایگی متقارن محذوف a به شعاع r می‌نامیم. در واقع فقط عدد a را از همسایگی متقارن a به شعاع r حذف کرده‌ایم.



نکته ی ۴:همسایگی متقارن محذوف a به شعاع r را می‌توان به صورت‌های زیر نیز نمایش داد:

$(a-r,a)\cup(a,a+r)$ و $۰<|x-a|<r$

جلسه‌ی دوم: قدرمطلق و جزءصحیح

قدرمطلق

تعریف: قدرمطلق

قدرمطلق x را به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌کنند:

۱) $|x|=\begin{cases} x & x\ge ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ ۲) $|x|=\sqrt{x^۲}$ ۳) $|x|=\operatorname{sgn}(x).x$

خواص قدرمطلق

۱- برای هر x، $|x|\ge ۰$

۲- برای هر x، $|x|=|-x|$

۳- اگر $|x|=|y|$ آن‌گاه $x=\pm y$ و یا اگر $|x|=a$ و $a>۰$ آن‌گاه $x=\pm a$

۴- برای هر x و y حقیقی، $|x+y|\le|x|+|y|$ و $|x-y|\le|x|+|y|$

۵- برای هر x و y حقیقی، $|x-y|\ge|x|-|y|$ و یا $|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$

۶- $|x.y|=|x|.|y|$

۷- با فرض $y\ne ۰$، $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

۸- اگر $a>۰$، $|x|<a$ آن‌گاه $-a<x<a$ و یا $x^۲<a^۲$

۹- اگر $a>۰$، $|x|>a$ آن‌گاه $x>a$ و $x<-a$ و یا $x^۲>a^۲$

۱۰- اگر $|x-a|<r$ آن‌گاه $a-r<x<a+r$

۱۱- برای هر x، $-|x| \le x \le |x|$

نکته ی ۵:اگر $|x+y|=|x|+|y|$ **آن‌گاه** x **و** y **هم‌علامت و یا صفرند یعنی** $xy \ge 0$ **و برعکس.**

و اگر $|x+y|<|x|+|y|$ **آن‌گاه** $xy<0$.

بررسی نمودارهای معروف قدرمطلق.

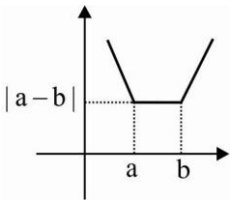
۱- نمودار $y=|f(x)|$.

برای رسم این تابع ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت از نمودار که زیر محور xهاست را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.

۲- نمودار $y=f(|x|)$

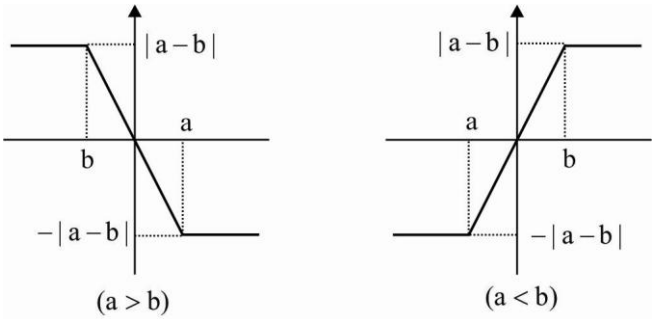
ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت از منحنی که سمت چپ محور yهاست را حذف کرده و به جای آن قرینه‌ی سمت راست محور yها را رسم می‌کنیم.

۳- نمودار $y=|x-a|+|x-b|$.



۴- نمودار $y=|x-a|-|x-b|$.

نمودار این تابع به یکی از دو صورت زیر است.



۵- نمودار $|x|+|y|=k$.

نمودار این رابطه یک مربع است به قطر ۲k به طوری که قطرهای مربع بر محورها منطبق است و مرکز مربع بر مبدأ مختصات قرار دارد.

نکته ی ۶:در حالت کلی برای رسم تابع $y=k_1|x-a_1|+k_2|x-a_2|+...+k_n|x-a_n|$ **ابتدا نقاط به طول** $x=a_1$ **و** $x=a_2$ **و** $x=a_n$... **را روی منحنی پیدا می‌کنیم و این نقاط را به هم وصل می‌کنیم. در پایان آخرین نقطه (از سمت راست) خطی با شیب** $k_1+k_2+...+k_n$ **و قبل از اولین نقطه خطی با شیب** $-(k_1+k_2+...+k_n)$ **رسم می‌کنیم.**

این تابع حتماً یا می‌نیمم دارد و یا ماکزیمم که برابر مقدار تابع در یکی از ریشه‌های آن است.

جزء صحیح

تعریف: **اگر** n **عددی صحیح و** $n \le x < n+1$ **آن‌گاه** $[x]=n$

نکته ی ۷: اگر n **جزءصحیح** x **و** p **قسمت اعشاری** x **باشد. آن‌گاه** $0 \le P < 1$

نکته ی ۸: خواص جزءصحیح

۱) $0 \le x-[x] < 1$

۲) $[x+n]=[x]+n$ $\quad n \in Z$

۳) $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$

۴) $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$

۵) $x<y \Rightarrow [x]\le[y]$ و یا $[x]<[y] \Rightarrow x<y$

رسم تابع جزءصحیح

برای رسم تابع $y=[f(x)]$ ابتدا سعی می‌کنیم با توجه به محدوده‌ی x، تابع f(x) را بین دو عدد صحیح متوالی n و $n+1$ قرار دهیم و سپس از آنجا به جای $[f(x)]$ عدد n را جایگزین کنیم.

رسم $y=[f(x)]$

ابتدا منحنی تابع f(x) را رسم می‌کنیم. سپس خطوط افقی

$\ldots, y=-2, y=-1, y=0, y=1, y=2, \ldots$

را رسم می‌کنیم. آن قسمتی از منحنی که بین دو خط متوالی $y=n$ و $y=n+1$ محدود است را روی خط $y=n$ تصویر می‌کنیم (بجز نقاطی که روی خط $y=n+1$ می‌باشند) بدین ترتیب نمودار $y=[f(x)]$ به دست می‌آید.

فصل ۱ دنباله‌ها

جلسه‌ی سوم مفهوم دنباله

تعریف دنباله

تابع a(n) را یک دنباله می‌نامیم هرگاه دامنه‌ی آن اعداد طبیعی و برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. $(a: N \to R)$

دنباله را به صورت $\{a_n\}$ یا $\{a_n\}_{n=1}$ یا $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ نشان می‌دهند.

نمایش دنباله

دنباله را به دو صورت نمایش می‌دهند.

الف) نمایش محوری: در این روش جمله‌های دنباله را روی یک محور نشان می‌دهیم.

ب) نمایش دکارتی: در این روش دنباله را همانند یک تابع در دستگاه مختصات دکارتی نمایش می‌دهیم.

دنباله‌ی بازگشتی

دنباله‌ای است که بین هر جمله و جملات ماقبل آن رابطه برقرار است.

$a, aq, aq^2, \ldots$ $\qquad a_{n+1}=q.a_n, a_1=a$

$1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$ $\qquad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ ,\ a_1=a_2=1$ (دنباله‌ی فیبوناتچی)

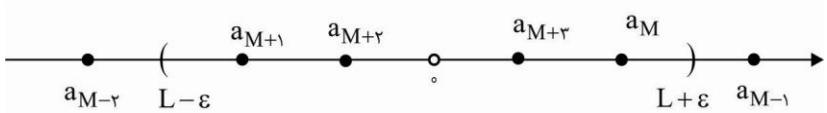
جلسه‌ی چهارم: همگرایی دنباله‌ها

تعریف همگرایی

دنباله‌ی $\{a_n\}$ را به عدد حقیقی L همگرا گوئیم هرگاه برای هر همسایگی متقارن L به شعاع دلخواه ε عدد طبیعی مانند M یافت شود که تمام جملات دنباله از شماره‌ی M به بعد، درون این همسایگی جای گیرند. به زبان ریاضی a_n را به L همگرا گوئیم هرگاه:

$\forall \varepsilon>0\ \exists M\in N\ n\ge M \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$

در این صورت گوئیم حد a_n برابر L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ دنباله‌ای که همگرا نباشد را واگرا گوئیم.



حد دنباله

قوانین محاسبه‌ی حد دنباله‌ها

با توجه به اینکه دنباله یک نوع تابع است پس قوانین حاکم بر حد توابع در $+\infty$ در مورد دنباله‌ها نیز صادق است فقط باید دقت نمود

که دامنه‌ی دنباله اعداد طبیعی است. مهم‌ترین این خواص را بصورت نکته بیان می‌کنیم.

نکته ی ۹: حد یک دنباله‌ی همگرا منحصر به فرد است.

نکته ی ۱۰: اگر a_n همگرا به L باشد $(\lim_{n\to\infty} a_n = L)$ و $a_n \geq 0$ آنگاه $L \geq 0$ ولی عکس این مطلب درست نیست.

نکته ی ۱۱: دنباله‌ی ثابت $a_n = c$ به عدد c همگراست.

نکته ی ۱۲: اعمال بین دنباله‌ها، اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ آنگاه:

الف) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L$ **ب)** $\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = L_1 . L_2$

ج) $\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{L_1}{L_2} (L_2 \neq 0)$ **د)** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L_1} (L_1 \neq 0)$

هـ) $\lim_{n\to\infty} ka_n = kL_1$ **و)** $\lim_{n\to\infty} (a_n)^k = L_1^k$

نکته ی ۱۳: اگر a_n همگرا و b_n واگرا باشد آن‌گاه $a_n \pm b_n$ و $\frac{b_n}{a_n}$ نیز واگراست. ولی در مورد همگرایی یا واگرایی $a_n . b_n$ و .. حرفی نمی‌توان زد.

نکته ی ۱۴: اگر a_n و b_n هر دو واگرا باشند، در مورد همگرایی یا واگرایی هیچ کدام از دنباله‌های $a_n \pm b_n$، $a_n . b_n$، $\frac{a_n}{b_n}$ و $\frac{b_n}{a_n}$ حرفی نمی‌توان زد.

نکته ی ۱۵: حاصل $\lim_{n\to\infty} \frac{an^k + bn^{k-1} + \ldots}{a'n^k + b'n^{k-1} + \ldots}$ برابر است با $\frac{a}{a'}$ اگر درجه صورت از مخرج کم‌تر باشد آنگاه دنباله همگرا به صفر و اگر درجه صورت از مخرج بیش‌تر باشد دنباله واگراست.

نکته ی ۱۶: حد دنباله‌ی $\sqrt[k]{an^k + bn^{k-1} + \ldots}$ با حد دنباله‌ی $\sqrt[k]{a}(n + \frac{b}{ak})$ برابر است. (اگر a منفی باشد k نمی‌تواند زوج باشد.)

نکته ی ۱۷: اگر $|a| < 1$ $(-1 < a < 1)$ آنگاه دنباله‌ی $\{a^n\}$ همگراست به صفر ولی اگر $|a| > 1$ آنگاه $\{a^n\}$ واگراست. در حالت $a = 1$ دنباله همگرا به یک و در حالت $a = -1$ واگراست.

نکته ی ۱۸: اگر a_n همگرا به L باشد آنگاه a_{n+1} و a_{n-1} نیز همگرا به L می‌باشند در حالت کلی اگر k عدد ثابت و a_n همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k}$$

نکته ی ۱۹: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه به جای توابع $\sin a_n$، $\tan a_n$، $\sin^{-1} a_n$ و $\tan^{-1} a_n$ در محاسبه‌ی حد می‌توان خود a_n را جایگزین کرد.

نکته ی ۲۰: (قضیه فشار یا ساندویچ) اگر برای $n \geq M$ داشته باشیم. $a_n \leq c_n \leq b_n$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

جلسه‌ی پنجم: کرانداری و یکنوایی دنباله‌ها

کرانداری

دنباله کراندر از بالا

اگر عدد حقیقی مانند M یافت شود که برای هر عدد طبیعی $a_n \leq M, n$ باشد آنگاه دنباله‌ی a_n را از بالا کراندار می‌نامیم.

دنباله کراندر از پایین

اگر عدد حقیقی مانند m یافت شود که برای هر عدد طبیعی $a_n \geq m, n$ باشد آنگاه دنباله‌ی a_n را از پایین کراندار می‌نامیم.

دنباله کراندار

دنباله‌ی a_n را کراندار گوئیم هرگاه هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد. در واقع a_n کراندار است هرگاه همواره بین دو عدد حقیقی قرار گیرد.

نکته ی ۲۱: هر دنباله همگرا کراندار است. ولی عکس این مطلب درست نیست.

نکته ی ۲۲: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ دنباله‌ی a_n بی‌کران است.

نکته ی ۲۳: اگر تمام جملات a_n مثبت باشد آنگاه a_n از پایین کراندار است (زیرا همواره $0 < a_n$ است.)

نکته ی ۲۴: دنباله‌های معکوس مثلثاتی همگی کراندارند.

یکنوایی

دنباله‌ی صعودی

اگر برای هر n، $a_{n+1} \geq a_n$ باشد دنباله‌ی a_n را صعودی می‌نامیم.

دنباله‌ی نزولی

اگر برای هر n، $a_{n+1} \leq a_n$ باشد دنباله‌ی a_n را نزولی می‌نامیم.

دنباله‌ی یکنوا

دنباله‌ی a_n را یکنوا می‌نامیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

دنباله‌ی اکیداً صعودی

دنباله‌ی a_n را اکیداً صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر n، $a_{n+1} > a_n$ باشد. در واقع جملات باید مرتباً زیاد شوند.

دنباله‌ی اکیداً نزولی

دنباله‌ی a_n را اکیداً نزولی می‌نامیم هرگاه برای هر n، $a_{n+1} < a_n$ باشد.

دنباله‌ی اکیداً یکنوا.

دنباله‌ی a_n را اکیداً یکنوا می‌نامیم هرگاه یا اکیداً صعودی و یا کیداً نزولی باشد.

روش‌های تشخیص یکنوایی

روش اول: تعریف صعودی بودن یعنی $a_n \leq a_{n+1}$ را می‌نویسیم و نامساوی را ساده می‌کنیم با فرض برگشت‌پذیر بودن نامساوی‌ها اگر:

الف) به رابطه‌ی بدیهی برسیم دنباله صعودی است (مانند $n \geq -1$)

ب) به تناقض برسیم دنباله نزولی است. (مانند $n < 1$)

ج) به رابطه‌ی مشروط برسیم دنباله یکنوا نیست. (مانند $n \geq 5$)

نکته ی ۲۵: اگر $a_n > 0$ و $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ آنگاه a_n صعودی است.

اگر $a_{n+1} - a_n > 0$ آنگاه a_n صعودی است.

روش دوم: تابع $y = f(x)$ را در بازه‌ی $[1, +\infty)$ در نظر بگیرید. اگر $f'(x) \geq 0$ آنگاه تابع f و در نتیجه دنباله‌ی $a_n = f(n)$ صعودی است. بطور مشابه اگر $f'(x) \leq 0$ آنگاه تابع f و در نتیجه دنباله‌ی $a_n = f(n)$ نزولی است.

روش سوم: در این روش از این نکته استفاده می‌کنیم که اگر f و g هر دو صعودی و یا هر دو نزولی باشد آنگاه fog و gof صعودی است. ولی اگر f صعودی و g نزولی (یا برعکس) باشد آنگاه fog و gof نزولی است.

جلسه‌ی ششم: اصل تمامیت، عدد نپر

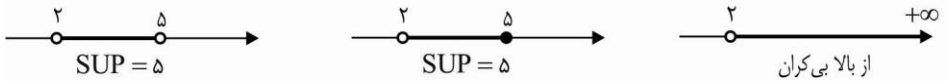
کرانداری مجموعه‌ها

کران‌بالا:

مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی R را از بالا کران‌دار گوئیم هرگاه عدد حقیقی مانند a یافت شود که از هر عضو A بزرگ‌تر یا مساوی باشد.

سوپریمم:

کوچک‌ترین کران بالای مجموعه‌ی کران‌دار از بالای A را سوپریمم A می‌نامیم.



اصل تمامیت

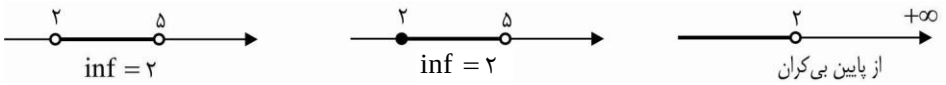
هر زیرمجموعه‌ی ناتهی و کران‌دار از بالا از R دارای کوچک‌ترین کران بالا (سوپریمم) است.

کران پایین

مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی R را از پایین کران‌دار گوئیم هرگاه عدد حقیقی مانند b یافت شود که از هر عضو Aکوچک‌تر یا مساوی باشد.

اینفیمم

بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه‌ی کران‌دار از پایین A را اینفیمم A می‌نامیم.



نکته ی ۲۶: مجموعه‌ی ناتهی A را کران‌دار گوییم هرگاه هم از پایین و هم‌ارز بالا کران‌دار باشد.

نکته ی ۲۷: رابطه‌ی یکنوایی و کرانداری

هر دنباله‌ی یکنوای کراندار همگراست. در واقع اگر a_n نزولی و از پایین کراندار باشد حتماً همگراست. همچنین اگر a_n صعودی و کراندار از بالا باشد آنگاه حتماً همگراست.

نکته ی ۲۸: اگر a_n یکنوا و واگرا باشد حتماً بی‌کران است.

مثال ۱:

عدد پنر

نکته ی ۲۹: دنباله‌ی $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ صعودی و کراندار است.

نکته ی ۳۰: دنباله‌ی $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ همگراست به e یعنی $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

(e عددی است ثابت و گنگ که مقدار تقریبی آن ۲/۷۱۸۳ می‌باشد.)

نکته ی ۳۱: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ و $a_n \neq 1$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{(a_n-1)b_n}$$

نکته ی ۳۲: در حالت کلی اگر $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ و در یک همسایگی a تابع f مخالف یک باشد آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{(f(x)-1)g(x)}$$

فصل ۲: حد پیوستگی مجانب

جلسه‌ی هفتم: مفهوم حد، حد چپ و راست، حد و دنباله، قضیه‌های حد

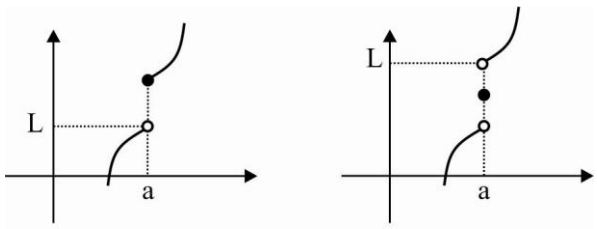
فرض کنید D زیرمجموعه‌ی R و دامنه‌ی f باشد گوییم حد f در نقطه‌ی a برابر L است هرگاه وقتی x (عضو D) به a میل می‌کند f(x) به L میل کند و می‌نویسیم: $\lim_{x\to a} f(x) = L$

نکته ی ۳۳: وقتی می‌گوییم «x به a میل می‌کند.» فرض بر این است که f در همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) a تعریف شده باشد (ما در مورد توابعی که در هیچ همسایگی چپ و راست a تعریف شده نیست بحث نمی‌کنیم.)

حد راست و حد چپ

گوییم حد راست f در a برابر L است هرگاه وقتی x عضو دامنه از مقادیر بیش‌تر از a به a میل کند آن‌گاه f(x) به L میل کند به طور مشابه حد چپ تعریف می‌گردد.

به نمودارهای زیر توجه کنید و دقت کنید که مقدار f(x) در نقطه‌ی $x = a$ تأثیری در حد f در نقطه‌ی $x = a$ ندارد.



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

نکته ی ۳۴: فرض کنید f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. شرط لازم و کافی برای آن که تابع f در نقطه‌ی a حد داشته باشد آن است که در این نقطه حد چپ و حد راست هر دو موجود و برابر باشند.

نکته ی ۳۵: اگر f یک تابع پیوسته و $f(a)\in Z$ آنگاه تابع $y=[f(x)]$ در نقطه‌ی $x=a$ حد ندارد مگر آن که $x=a$ یک نقطه‌ی ماکسیمم و یا مینیمم f باشد (فرض کنید f در هیچ بازه‌ای برابر تابع ثابت نیست.)

نکته ی ۳۶: فرض کنید f در بازه‌ی باز I شامل a پیوسته باشد در این صورت:

$$\lim_{x\to a^{\pm}}[f(x)]=\begin{cases}[f(a)^{\pm}] & \text{در } f \text{ بر } I \text{ تساوی کاملی دوعضو.}\\ [f(a)^{\mp}] & \text{در } f \text{ بر } I \text{ تساوی کاملی وزن.}\\ [f(a)^{+}] & \text{در } f \text{ بر } x=a \text{ در ادامه بسن ممینیم.}\\ [f(a)^{-}] & \text{در } f \text{ بر } x=a \text{ در ادامه بسن ممیسکام.}\end{cases}$$

تذکر: تابع هوی‌ساید $H(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ **و تابع علامت** $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ **در نقطه‌ی ۰ حد ندارند. تابع دیریکله** $D(x)=\begin{cases}0 & \text{ویکا}\\ 1 & \text{ننگ}\end{cases}$ **در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.**

قضیه‌های حد

قضیه‌ی ۱

برای تابع $f(x)=k$ داریم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k$

قضیه‌ی ۲

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ آن‌گاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=KL_1$ $\qquad$ ب) $\lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(x)=L_1\pm L_2$

ج) $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=L_1.L_2$ $\qquad$ د) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\frac{L_1}{L_2}\ (L_2\neq 0)$

(f و g دارای دامنه یکسانند.)

قضیه‌ی ۳

اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$

قضیه‌ی ۴

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $n\in N$ آن‌گاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a} f^n(x)=L^n$

ب) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$ (اگر n زوج باشد، باید $L\geq 0$ فرض می‌شود.)

قضیه‌ی ۵

اگر f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده و کران‌دار (محدود) و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ باشد آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)=0$.

قضیه‌ی ۶

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a برابر تابع ثابت صفر باشد و اگر a در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x).g(x)=0$ اصطلاحاً می‌گوییم صفر مطلق ضربدر هر تابع تعریف شده (حتی ∞) صفر است.

قضیه‌ی ۷

قضیه‌ی فشردگی: اگردر یک همسایگی a رابطه‌ی $g(x)\le f(x)\le h(x)$ برقرار باشد آن‌گاه با فرض $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$.

آن‌گاه: $\lim_{x\to a} f(x)=L$

حد و دنباله

تعریف: **فرض کنید D دامنه‌ی f باشد. گوییم حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ برابر L است هرگاه بای هر دنباله‌ی دلخواه a_n از عضوهای D که به عدد a همگراست $(a_n\neq a)$ دنباله‌ی $f(a_n)$ به L همگرا باشد.**

به زبان ریاضی اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ $(a_n\neq a)$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L$.

به طور مشابه حد چپ و راست به کمک دنباله‌ها تعریف می‌گردد.

نکته ی ۳۷:اگر برای هر دنباله‌ی a_n همگرا به $(a_n\neq a)a$ دنباله‌ی $f(a_n)$ به L همگرا باشد آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)=L$. (قید کلمه‌ی هر الزامی است.)

نکته ی ۳۸:اگر دو دنباله‌ی a_n و b_n هر دو به a همگرا باشند و $a_n\neq a$ و $b_n\neq a$ ولی $f(a_n)$ و $f(b_n)$ به دو عدد مختلف همگرا باشند آن‌گاه $f(x)$ در نقطه‌ی a حد ندارد.

نکته ی ۳۹: اگر دنباله‌ی a_n به عدد a همگرا باشد $(a_n\neq a)$ ولی دنباله‌ی $f(a_n)$ واگرا باشد آن‌گاه تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a حد ندارد.

جلسه‌ی هشتم: محاسبه‌ی حد در نقطه (رفع ابهام)

روش اول محاسبه‌ی حد. (حذف عامل ابهام)

در این روش معمولاً صورت و مخرج کسر را به عاملی که باعث صفر (و یا ∞) شدن صورت و مخرج شده است، تجزیه کرده و سپس این عامل را حذف می‌کنیم.

روش دوم محاسبه‌ی حد (روش هوپیتال)

قضیه‌ی هوپیتال

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف a مشتق‌پذیر و g' در هر نقطه از این همسایگی مخالف صفر باشد. در این صورت اگر $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ به زبان «خودمونی» برای محاسبه‌ی حد کسر $\frac{f}{g}$ در حالت $\frac{0}{0}$ به طور جداگانه از f و g مشتق گرفته و حد $\frac{f'}{g'}$ را محاسبه می‌کنیم.

روش سوم محاسبه حد (هم‌ارزی)

چندجمله‌ای f را هم‌ارز تابع g در نقطه‌ی a می‌نامیم هرگاه:

$$f(a)=g(a)\ ,\ f'(a)=g'(a)\ ,\ f''(a)=g''(a),...$$

هر چه تعداد این تساوی‌ها بیش‌تر شود نمودار توابع f و g انطباق بیش‌تری دارند.

در محاسبه‌ی حد می‌توان بجای g از هم‌ارز آن f استفاده نمود.

هم‌ارزی‌های مهم

مهم‌ترین هم‌ارزی‌هایی که ما معمولاً با آن‌ها سروکار داریم (به جز هم‌ارزی ∞) عبارتند از:

۱) اگر $u\to 0$ آن‌گاه sinu، tanu، $\sin^{-1}u$ و $\tan^{-1}u$ هم‌ارزند با u.

۲) اگر $u \to ۰$ آن‌گاه $\cos u \sim ۱ - \frac{u^۲}{۲}$ و یا $۱ - \cos u \sim \frac{u^۲}{۲}$

۳) اگر $u \to ۰$ آن‌گاه $\sqrt[n]{۱+u} \sim ۱ + \frac{۱}{n}u$

۴) اگر f و g هر دو به سمت ۱ میل کنند آن‌گاه $f - g \sim \frac{f^n - g^n}{n}$ که در آن n عددی است طبیعی.

۵) اگر $x \to ۰$ آن‌گاه $ax^n + bx^{n-۱} + \ldots + cx^m$ هم‌ارز است با cx^m (قضیه‌ی کم‌توان).

نکته ی ۴۰: در عباراتی نظیر $x - \sin x$ ، $x - \tan x$ ، $\sin x - \tan x$ و .... می‌توان از هم‌ارزی‌های زیر استفاده نمود. ولی پیشنهاد ما این است که در این حالت‌ها از روش هوپیتال استفاده کنید.

$$\sin x \sim x - \frac{x^۳}{۶} \qquad \sin^{-۱} x \sim x + \frac{x^۳}{۶}$$

$$\tan x \sim x + \frac{x^۳}{۳} \qquad \tan^{-۱} x \sim x - \frac{x^۳}{۳}$$

جلسه‌ی نهم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

حد بی‌نهایت

تعریف: فرض کنید D دامنه‌ی تابع f باشد گوییم حد تابع f در نقطه‌ی $x = a$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ هرگاه برای هر دنباله از نقاط D مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n \neq a$ داشته باشیم:

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$$

نکته ی ۴۱: اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L > ۰$ و $\lim_{x \to a} g(x) = ۰$ و g در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آن‌گاه:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

حد در بی‌نهایت

تعریف: فرض کنید f در بازه‌ای مانند $(c, +\infty)$ تعریف شده باشد.

گوییم حد تابع f وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ هرگاه:

برای هر دنباله از نقاط بازه $(c, +\infty)$ مانند $\{x_n\}$، واگرا به $+\infty$، دنباله $\{f(x_n)\}$ به L همگرا باشد.

تذکر: شرط لازم برای بحث در مورد حد f در $+\infty$ آن است که عددی حقیقی مانند a یافت شود بطوری که f در بازه‌ی $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد.

محاسبه‌ی حد در بی‌نهایت

برای محاسبه‌ی حد در بی‌نهایت از هم‌ارزی‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱- وقتی $x \to \pm\infty$ چندجمله‌ای $ax^n + bx^{n-۱} + \ldots$ هم‌ارز است با ax^n یعنی در بی‌نهایت بزرگ‌ترین توان مهم است.

نتیجه: با توجه به هم‌ارزی بالا می‌توان گفت $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-۱} + \ldots}{a'x^m + b'x^{m-۱} + \ldots} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n}{a'x^m}$

۲- وقتی $x \to \pm\infty$ آن‌گاه $[x]$ با x هم‌ارز است.

۳- وقتی $x \to \pm\infty$ می‌توان از هم‌ارزی‌های زیر استفاده نمود:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-۱} + \ldots} \sim \sqrt[n]{a}\,|x + \frac{b}{an}| \quad \text{n زوج}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-۱} + \ldots} \sim \sqrt[n]{a}(x + \frac{b}{an}) \quad \text{n فرد}$$

جلسه‌ی دهم: مجانب‌ها

مجانب قائم

تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی محذوف چپ یا راست a تعریف شده باشد در این صورت خط $x=a$ را مجانب قائم f می‌نامیم هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ یا $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ و یا $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$.

نکته ی ۴۲: برای یافتن مجانب‌های قائم یک تابع ابتدا ضابطه‌ی آن را ساده می‌کنیم و سپس مجانب‌ها را می‌یابیم در واقع اگر حالت $\frac{0}{0}$ اتفاق افتاد ابتدا رفع ابهام می‌کنیم و سپس در صورتی که حد f بی‌نهایت شد آن‌گاه مجانب قائم بدست می‌آید.

مجانب افقی

تعریف: خط $y=b$ را مجانب افقی تابع f می‌نامیم هرگاه $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.

شرط لازم برای داشتن مجانب افقی آن است که عددی مانند M یافت می‌شود که برای هر $x>M$ و یا برای هر $x<-M$ تابع f تعریف شده باشد.

مجانب مایل

تعریف: فرض کنید وقتی $x\to\pm\infty$ آنگاه $f(x)\to\pm\infty$ در این صورت خط $y=mx+h$ را مجانب مایل منحنی $f(x)$ می‌نامیم هرگاه $\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)-mx-h|=0$ باشد $(m\neq 0)$

نکته ی ۴۳: اگر $f(x)=ax+b+g(x)$ و $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=c$ آنگاه خط $y=ax+b+c$ مجانب مایل f است.

نکته ی ۴۴: اگر $f(x)=\frac{ax^{n+1}+bx^n+\dots}{a'x^n+b'x^{n-1}+\dots}$ آنگاه خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج همان مجانب مایل منحنی است. دقت کنید که درجه‌ی صورت دقیقاً یک واحد از درجه‌ی مخرج بیش‌تر است.

نکته ی ۴۵: برای یافتن مجانب‌های مایل تابع $f(x)=ax+b\pm\sqrt[n]{a'x^n+b'x^{n-1}+\dots}$ از هم‌ارزی رادیکال در بی‌نهایت استفاده می‌کنیم.

نکته ی ۴۶: اگر $y=mx+h$ مجانب مایل منحنی $y=f(x)$ باشد آنگاه:

$$h=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx) \quad , \quad m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

در واقع در حالت کلی برای یافتن شیب مجانب مایل ابتدا ضابطه‌ی تابع را بر x تقسیم می‌کنیم و سپس از آن حد می‌گیریم. $(m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x})$ و در نهایت پس از یافتن m، از رابطه‌ی $h=\lim_{x\to\infty}(y-mx)$ مقدار h را بدست می‌آوریم.

جلسه‌ی یازدهم پیوستگی

پیوستگی

تعریف: ۱- تابع f را در نقطه‌ی $x=a$ $(a\in D_f)$ پیوسته گوئیم هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ به بیان دیگر تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است اگر در a تعریف شده و حد آن در نقطه‌ی a برابر $f(a)$ باشد.

نکته ی ۴۷: فرض کنید D دامنه f و $a\in D$، f در نقطه‌ی a پیوسته است. هرگاه برای هر دنباله از نقاط D مانند $\{x_n\}$ که به a همگراست دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ به $f(a)$ همگرا باشد.

تعریف: ۲- اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ گوئیم f در x=a پیوستگی راست دارد و اگر $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ گوئیم f در $x=a$ پیوستگی چپ دارد.

تذکر: اگر **f** در همسایگی **a** تعریف شده باشد آن‌گاه تابع **f** وقتی در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است که هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد.

تعریف: ۳- فرض کنید دامنه‌ی f بصورت (a,b) باشد گوئیم تابع f در بازه‌ی (a,b) پیوسته است هرگاه در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.

تعریف: **۴- فرض کنید دامنه‌ی f بصورت $[a,b]$ باشد تابع f را در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته گوئیم هرگاه در a پیوستگی راست، در b پیوستگی چپ و در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.**

تذکر: بطور مشابه پیوستگی f با دامنه‌های $(a,b]$ و $[a,b)$ تعریف می‌شود.

نقطه‌ی c متعلق به دامنه‌ی f را یک نقطه درونی دامنه می‌نامیم. هرگاه این نقطه به بازه‌ی بازی واقع در دامنه تعلق داشته باشد.

اگر c نقطه‌ی درونی نباشد آن را نقطه‌ی انتهایی دامنه می‌نامیم.

تذکر: اگر c یک نقطه‌ی انتهایی چپ (راست) دامنه‌ی f باشد، گوییم f در c پیوسته است. هرگاه در c از راست (چپ) پیوسته باشد.

نکته ی ۴۸: **فرض کنید f در بازه‌ی باز شامل a پیوسته باشد با فرض صحیح بودن $f(a)$ تابع $y=[f(x)]$ در نقطه‌ی $x=a$ ناپیوسته است مگر $f(a)$ یک مقدار مینیمم نسبی f باشد (اگر $f(a)$ صحیح نباشد تابع $y=[f(x)]$ در a پیوسته است.)**

نکته ی ۴۹: **اگر f در بازه‌ی باز I شامل a پیوسته و $f(a)\in Z$ آنگاه در مورد پیوستگی تابع $g(x)=[f(x)]$ در $x=a$ چهار حالت وجود دارد. (f در هیچ زیربازه‌ای از I ثابت نیست.)**

$$\begin{cases} \text{g در a فقط پیوسته از راست} \rightarrow \text{f در I صعودی اکید} \\ \text{g در a فقط پیوسته از چپ} \rightarrow \text{f در I نزولی اکید} \\ \text{g در a نه از راست پیوسته نه از چپ} \rightarrow \text{f در a ماکسیمم نسبی} \\ \text{g در a هم پیوسته از راست هم چپ} \rightarrow \text{f در a مینیمم نسبی} \end{cases}$$

توابع خاص

تابع دیریکله $D(x)=\begin{cases} 1 & x\in Q \\ 0 & x\notin Q \end{cases}$ در R و توابع علامت $sgn(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ و هوی‌ساید

$H(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ ناپیوسته‌اند.

قضیه‌های پیوستگی

قضیه‌ی (۱): **اگر توابع f و g با دامنه‌ی یکسان در a پیوسته باشند آنگاه $f\pm g$ و $f.g$ نیز در a پیوسته‌اند و با فرض $g(x)\neq 0$ تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a پیوسته است.**

نکته ی ۵۰: **اگر f در a پیوسته و g در a ناپیوسته باشد آنگاه $f\pm g$ و $\frac{g}{f}$ نیز در a ناپیوسته است ولی در مورد $f.g$ و $\frac{f}{g}$ حرفی نمی‌توان زد. (f و g دامنه‌ی یکسان دارند.)**

تذکر: اگر f و g هر دو در a ناپیوسته باشند آنگاه در مورد پیوستگی توابع $f\pm g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ حرفی نمی‌توان زد.

قضیه‌ی (۲): **اگر f در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد آنگاه برای هر عدد طبیعی فرد n تابع $y=\sqrt[n]{f}$ نیز در این بازه پیوسته است. همچنین اگر n زوج باشد نیز، با فرض $f\geq 0$، تابع $y=\sqrt[n]{f}$ در این بازه پیوسته است.**

نتیجه: اگر f در نقطه‌ی a پیوست و در یک همسایگی آن نامنفی باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(a)}$$

قضیه‌ی (۳): **اگر $\lim_{x\to a} g(x)=b$ و تابع f در نقطه‌ی b پیوسته باشد آنگاه:**

$$\lim_{x\to a} fog(x)=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(b)$$

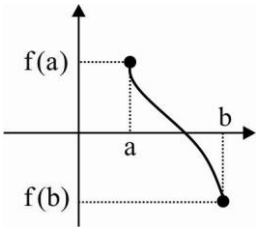
اصطلاحاً گوئیم «حد از تابع پیوسته عبور می‌کند.»

قضیه‌ی (٤): **اگر تابع g در نقطه‌ی a و تابع f در نقطه‌ی $g(a)$ پیوسته باشد آنگاه تابع fog در نقطه‌ی a پیوسته است.**

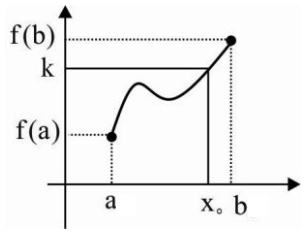
قضیه بولتزانو:

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ (یعنی $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامت باشند) آنگاه f در بازه‌ی (a,b) حداقل یک ریشه دارد.

در صورت یکنوا اکید بودن f، دقیقاً یک ریشه دارد. البته در ین حالت عکس قضیه هم درست است.



نکته ی ۵۱: هر چندجمله‌ای درجه فرد حداقل یک ریشه دارد. قضیه‌ی مقدار میانی



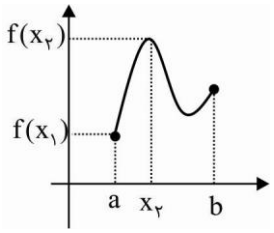
فرض کنید تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. اگر k بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه عددی مانند x_0 در بازه‌ی $[a,b]$ وجود دارد بطوری که $f(x_0)=k$ به عبارت دیگر هر خط افقی $y=k$ منحنی f را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

قضیه‌ی تابع معکوس

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید باشد آنگاه تابع f^{-1} روی بازه‌ی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و صعودی اکید است. (بنابراین برد تابع f برابر است با $[f(a),f(b)]$).

بطور مشابه این قضیه در مورد توابع پیوسته و نزولی اکید بیان می‌شود.

قضیه‌ی ماکسیمم و مینیمم



اگر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه در این بازه حتماً مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق دارد. به بیان دیگر اعدادی مانند x_1 و x_2 در این بازه یافت می‌شوند بطوری که برای هر x از این بازه $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$ باشد.

فصل سوم: *I*. مشتق

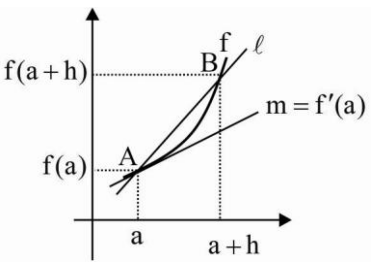
جلسه‌ی دوازدهم: تعریف مشتق چپ و راست مشتق‌پذیری

مفهوم مشتق

فرض کندی تابع f در همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته باشد گوییم f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است و مقدار این حد را که با $f'(a)$ نشان می‌دهیم، مشتق تابع f در نقطه‌ی a می‌نامیم. بنابراین:

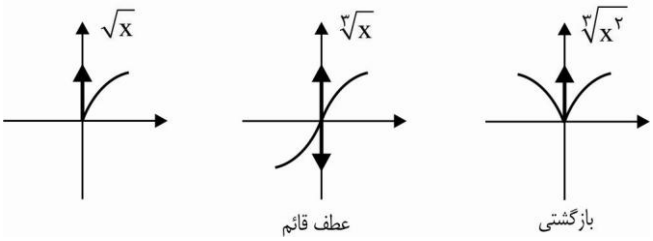
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تعبیر هندسی



با توجه به شکل مقابل حاصل $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ برابر شیب خط ℓ است. وقتی B به سمت A حرکت می‌کند h به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین $f'(a)$ حالت حدی خطوطی است که از A و B می‌گذرد وقتی که B به سمت A حرکت می‌کند این حالت حدی را شیب مماس بر منحنی در نقطه‌ی A می‌نامیم.

نکته ی ۵۲:اگر f در a پیوسته و $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{}\right|=+\infty$ آنگاه خط $x=a$ را خط مماس قائم بر f می‌نامیم. مانند $x=0$ در توابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x}$ و $\sqrt[3]{x^2}$



نکته ی ۵۳:با تغییر متغیر $x=a+h$ می‌توان مشتق را به صورت زیر نیز تعریف نمود:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکته ی ۵۴:اگر g در a پیوسته و $f(a)=0$ و $y=f(x)g(x)$ آنگاه $y'(a)=f'(a)g(a)$ (فقط از عامل صفرکننده مشتق می‌گیریم.)

مشتق چپ و راست

فرض کنید تابع f در بازه‌ی $[a,b)$ تعریف شده باشد. در این صورت اگر $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد گوییم f در a از راست مشتق‌پذیر است و مقدار این حد را که مشتق راست f در نقطه‌ی a می‌نامیم با نماد $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم.

می‌توان ثابت کرد:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

بطور مشابه اگر f در بازه‌ی $(b,a]$ تعریف شده باشد، مشتق چپ تابع f در نقطه‌ی a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{یا} \qquad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق‌پذیری

قضیه‌ی (۵): اگر تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است.

در واقع پیوستگی تابع f در نقطه‌ی a شرط لازم برای مشتق‌پذیری f در این نقطه است.

نکته ی ۵۵: اگر f در نقطه‌ی a ناپیوسته باشد آنگاه در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

نکته ی ۵۶: فرض کنید f در R پیوسته باشد. اگر f(a) یک عددصحیح باشد آنگاه تابع $y=[f(x)]$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق‌ناپذیر است مگر آنکه این نقطه یک نقطه‌ی مینیمم نسبی f باشد. اگر f(a) صحیح نباشد آنگاه تابع $y=[f(x)]$ در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است.

نکته ی ۵۷:فرض کنید f در بازه‌ی باز I شامل a مشتق‌پذیر باشد. در این صورت اگر $f(a)=0$ آنگاه شرط مشتق‌پذیر بودن $y=|f(x)|$ در نقطه‌ی a آن است که $f'(a)=0$ باشد.

در حالت خاص اگر g چندجمله‌ای و $g(a)\neq 0$ باشد آنگاه شرط مشتق‌پذیر بودن $y=\left|(x-a)^n g(x)\right|$ در نقطه‌ی $x=a$ آن است که $n>1$ باشد. تابع $y=\sqrt[n]{f(x)}$ در ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی کم‌تر از n، مشتق‌ناپذیر است.

نکته ی ۵۸:اگر m فرد و $n<m$ باشد تابع $y=\sqrt[m]{(x-a)^n}$ در $x=a$ مشتق‌ناپذیر است. اگر n زوج باشد $x=a$ نقطه‌ی بازگشتی و اگر n فرد باشد $x=a$ عطف قائم است. در هر دو حالت $x=a$ خط مماس قائم بر تابع است.

نکته ی ۵۹:تابع علامت و هوی‌ساید در $x=0$ مشتق‌ناپذیرند.

تابع دیریکله $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in Q \\ h(x) & x\notin Q \end{cases}$ در نقاطی که $g=h$ و $g'=h'$ مشتق‌پذیر است. (g و h مشتق‌پذیرند.)

تعریف دیگر مشتق

تعریف: فرض کنید f در همسایگی a تعریف شده باشد در این صورت:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته ی ۶۰: اگر f در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$$

جلسه‌ی سیزدهم: تابع مشتق، قاعده‌ی زنجیره‌ای

تابع مشتق

تعریف: فرض کنید تابع f در تمام نقاط بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد. در این صورت تابع مشتق f را روی I به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y'=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

در واقع $f'(x)$ مقدار مشتق f را در تمام نقاط I خواهد داد.

قضیه‌ی (۶): فرض کنید توابع f و g در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشند و k عددی ثابت باشد در این صورت:

الف) $(kf)'(a)=kf'(a)$ ب) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ج) $(f.g)'(a)=f'(a)\quad g(a)+g'(a)f(a)$ د) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^{2}(a)}$

فرمول‌های مشتق

فرض کنید u تابعی از x باشد. در نقاطی که f(x) مشتق‌پذیر است می‌توان فرمول‌های زیر را بیان نمود:

۱) $f(x)=k$ (ثابت) $\Rightarrow f'(x)=0$

۲) $f(x)=u^{n}\Rightarrow f'(x)=nu'u^{n-1}$

۳) $f(x)=\sin u\Rightarrow f'(x)=u'\cos u$

۴) $f(x)=\cos u\Rightarrow f'(x)=-u'\sin u$

۵) $f(x)=\tan u\Rightarrow f'(x)=u'(1+\tan^{2}u)\qquad (u\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$

۶) $f(x)=\cot u\Rightarrow f'(x)=-u'(1+\cot^{2}u)\qquad (u\neq k\pi)$

۷) $f(x)=\sin^{-1}u\Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}\quad -1<u<1$

۸) $f(x)=\cos^{-1}u\Rightarrow f'(x)=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^{2}}}\quad -1<u<1$

۹) $f(x)=\tan^{-1}u\Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{1+u^{2}}$

۱۰) $f(x)=\cot^{-1}u\Rightarrow f'(x)=\frac{-u'}{1+u^{2}}$

۱۱) $f(x)=|u|\Rightarrow f'(x)=\frac{u'u}{|u|}=\begin{cases}u' & u>0\\ -u' & u<0\end{cases}$

۱۲) $f(x)=[u]\Rightarrow f'(x)=0$ (در نقاط مشتق‌پذیر)

۱۳) $f(x)=\sqrt[m]{u^{n}}\Rightarrow f'(x)=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

۱۴) $f(x)=e^{u}\Rightarrow f'(x)=u'e^{u}$

۱۵) $f(x)=Lnu\Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{u}$

قاعده‌ی زنجیره‌ای

قضیه‌ی مشتق تابع مرکب

فرض کنید تابع g در نقطه‌ی a و تابع f در نقطه‌ی $g(a)$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت تابع $F(x)=fog(x)$ نیز در a مشتق‌پذیر است و مشتق آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$F'(a)=(fog)'(a)=g'(a).f'(g(a))$$

به بیان دیگر اگر u تابعی از x باشد آنگاه مشتق تابع $f(u)$ بر حسب x از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$(f(u))'=u'f'(u)$$

نکته ی ۶۱:فرض کنید تابع f در هر نقطه مشتق‌پذیر باشد در اینصورت اگر تابع f زوج باشد آنگاه f' فرد است و اگر f فرد باشد آنگاه f' زوج است.

قرارداد

اگر $y=f(x)$ آنگاه مشتق تابع f نسبت به x را با نمادهای $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{df}{dx}$ و f'_x و یا y'_x نمایش می‌دهیم.

نکته ی ۶۲:اگر f تابعی از u و u تابعی از x باشد آنگاه:

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\times\frac{du}{dx} \text{ و یا } f'_x=f'_u.u'_x$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

فرمول‌ها:

۱) $(e^u)'=u'e^u$ (حالت خاص: $(e^x)'=e^x$)

۲) $(Lnu)'=\frac{u'}{u}$ (حالت خاص: $(Lnx)'=\frac{1}{x}$)

۳) $e^h\sim 1+h$ و $Ln(1+h)\sim h$ (وقتی $h\to 0$)

نکته ی ۶۳: برای محاسبه‌ی مشتق $y=f^g$ ابتدا از طرفین Ln می‌گیریم و سپس از دو طرف تساوی بدست آمده مشتق می‌گیریم.

جلسه‌ی چهاردهم: مشتق ضمنی، مراتب بالاتر و معکوس

مشتق ضمنی

اگر تابع $y=f(x)$ به طور ضمنی به صورت $F(x,y)=0$ بیان شده باشد، آن‌گاه با توجه به قضیه‌های مشتق و فرمول‌های مشتق به خصوص فرمول $(y^n)'=ny'y^{n-1}$ می‌توان y' را به دست آورد.

نکته ی ۶۴:اگر تابع $y=f(x)$ در رابطه‌ی $F(x,y)=0$ صدق کند آن‌گاه می‌توان ثابت کرد $f'(x)=y'=\frac{F'_x}{F'_y}$ که منظور ما از F'_x آن است که از رابطه‌ی $F(x,y)$ با ثابت فرض کردن y، نسبت به x مشتق بگیریم.

مشتق مراتب بالاتر

اگر تابع $f'(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه مشتق آن را با نماد $f''(a)$ نمایش می‌دهیم و به آن مشتق دوم f در نقطه‌ی a می‌گوییم در واقع

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

به طور مشابه مشتق مرتبه سوم و .... و nام تعریف می‌شود. مشتق nام را با نماد $f^{(n)}$ نشان می‌دهیم. پس $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$

نکته ی ۶۵: مشتق تابع زوج، فرد و مشتق تابع فرد، زوج است.

نکته ی ۶۶: اگر $h(x)=(x-a)^n f(x)$ آن‌گاه برای محاسبه‌ی مشتق مرتبه nام تابع h فقط از عامل $(x-a)^n$، n بار مشتق می‌گیریم. یعنی $h^{(n)}(a)=n!f(a)$.

نکته ی ۶۷: اگر $f(x)=\sin ax$ آن‌گاه $f^{(n)}(x)=a^n\sin(ax+\frac{n\pi}{۲})$ و به طور مشابه اگر $f(x)=\cos ax$ آن‌گاه $f^{(n)}(x)=a^n\cos(ax+\frac{n\pi}{۲})$.

نکته ی ۶۸: اگر $f(x)=\frac{۱}{x-a}$ آن‌گاه $f^{(n)}(x)=\frac{(-۱)^n n!}{(x-a)^{n+۱}}$.

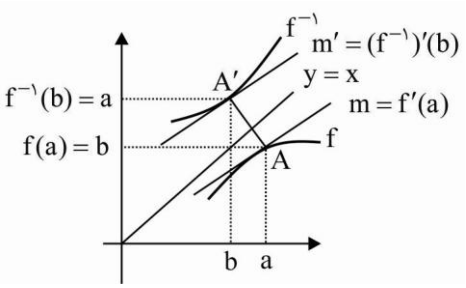
نکته ی ۶۹: برای محاسبه‌ی مشتق مراتب بالاتر یک رابطه ضمنی، از دو طرف تساوی به طور متوالی مشتق می‌گیریم (از فرمول $-\frac{F'_x}{F'_y}$ استفاده نمی‌کنیم مگر برای y')

مشتق تابع معکوس

فرض کنید تابع f در همسایگی نقطه‌ی a پیوسته و یک به یک باشد. اگر $f'(a)$ موجود و مخالف صفر و $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}$ در نقطه‌ی b مشتق‌پذیر بوده و در ضمن

$$(f^{-۱})'(b)=\frac{۱}{f'(a)}$$

به بیان دیگر مشتق تابع f در نقطه‌ی $A(a,b)$ و مشتق معکوس f یعنی $f^{-۱}$ در نقطه‌ی $A'(b,a)$ معکوس یک‌دیگرند.

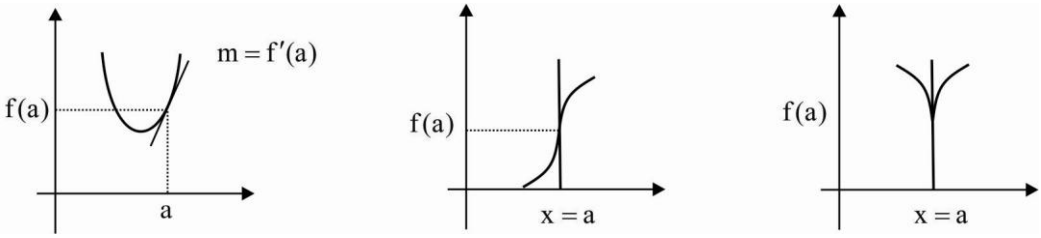


جلسه‌ی پانزدهم: خطوط مماس و قائم

خط مماس و قائم

فرض کنید تابع f در یک همسایگی a تعریف شده و در این نقطه پیوسته باشد. اگر $f'(a)$ موجود باشد آنگاه خطی که از نقطه $(a,f(a))$ با شیب $f'(a)$ می‌گذرد را خط مماس بر منحنی در نقطه f می‌نامیم. همچنین هرگاه $|f'(a)|$ برابر $+\infty$ باشد خط $x=a$ را خط مماس قائم بر منحنی f می‌نامیم. (تعریف خط مماس، خط مماس قائم را در برنمی‌گیرد.)

بنابراین مقدار مشتق تابع f در هر نقطه همان شیب خط مماس بر منحنی f در آن نقطه می‌باشد.



تذکر: اگر دامنه‌ی f بصورت $[a,b]$ باشد آن‌گاه تعریف خط مماس قائم با توجه به پیوستگی f در نقاط انتهایی a و b، طوری تعمیم می‌دهیم که نقاط انتهایی را در بربگیرد. به طور مثال خط $x=۱$ خط مماس قائم بر $y=\sqrt{x-۱}$ است.

تعریف: خط قائم: فرض کنید تابع f در یک همسایگی a تعریف شده و در این نقطه پیوسته باشد. اگر $f'(a)$ موجود باشد آن‌گاه خطی که از نقطه $(a,f(a))$ با شیب $\frac{-۱}{f'(a)}$ می‌گذرد را خط قائم بر منحنی f در نقطه a می‌نامیم.

نکته ی ۷۰: شرط لازم و کافی برای آنکه منحنی‌های f و g در نقطه a بر یک‌دیگر مماس باشند آن است که دستگاه $\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$ جواب داشته باشد به عبارت دیگر معادله حاصل از تقاطع f و g و همچنین مشتق این معادله باید صفر باشد یعنی $f(x)-g(x)=0$ و $f'(x)-g'(x)=0$.

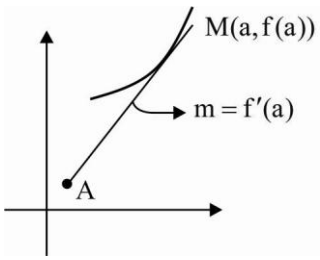
نکته ی ۷۱: اگر معادله‌ی حاصل از تقاطع f و g درجه دوم باشد آنگاه شرط مماس بودن f و g آن است که معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف داشته باشد یعنی $\Delta=0$ باشد.

نکته ی ۷۲: اگر $f(x)=0$ در $x=a$ ریشه‌ی مکرر از مرتبه‌ی ۲ یا بیش‌تر داشته باشد آن‌گاه نمودار $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$ بر محور xها مماس است. $(g(a)\neq 0)$

در واقع با فرض $f(a)=f'(a)=0$ نمودار $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$ بر محور xها مماس است. در حالت خاص اگر f درجه ۲ باشد شرط مماس بودن و $\frac{f}{g}$ در $x=a$ بر محور xها آن است که $f(x)=k(x-a)^2$ باشد.

نکته ی ۷۳: شرط مماس بودن خط $y=mx+h$ در $x=a$ بر منحنی $y=f(x)$ آن است که $x=a$ ریشه‌ی مکرر حداقل از مرتبه‌ی ۲ معادله‌ی $f(x)=mx+h$ باشد.

رسم مماس بر منحنی از نقطه خارج از منحنی



روش اول. نقطه تماس را $M(a,f(a))$ در نظر می‌گیریم. معادله خط مماس بر نمودار f در نقطه M بصورت زیر است:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

این خط باید از نقطه‌ی A بگذرد پس مختصات نقطه A را در معادله‌ی خط مماس جایگزین می‌کنیم. از این معادله مقدار a و از آنجا معادله خط مماس بدست می‌آید.

روش دوم: معادله‌ی تمام خطوطی که از نقطه A می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

حالا شرط مماس بودن این خط بر منحنی f را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} y=mx-mx_0+y_0 \\ y=f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=mx-mx_0+y_0 \\ f'(x)=m \end{cases}$$

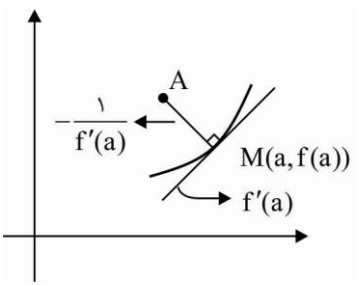
از حل دستگاه فوق m و سپس معادله خط مماس بدست می‌آید.

دقت کنید که اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه دوم باشد آن‌گاه برای بدست آوردن m کافی است ابتدا دو معادله را قطع دهیم یعنی $f(x)=mx-mx_0+y_0$ را بنویسیم. و سپس Δ را مساوی صفر قرار دهیم.

تذکر: می‌توان ثابت کرد خط هادی سهمی مکان هندسی نقاطی است که می‌توان از آن نقاط دو خط مماس عمود بر هم بر سهمی رسم نمود.

زاویه‌ی بین دو منحنی

زاویه‌ی بین خطوط مماس بر منحنی‌های f و g در نقطه تقاطع آن‌ها را زاویه بین دو منحنی می‌نامیم. زاویه‌ی بین دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 از فرمول $\alpha=\operatorname{Arctan}^{-1}\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ به دست می‌آید.



رسم قائم بر منحنی از نقطه‌ی خارج از منحنی

برای یافتن معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=f(x)$ از نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ خارج منحنی، ابتدا پای عمود را $M(a,f(a))$ در نظر می‌گیریم.

شیب خط قائم در این نقطه برابر $-\frac{1}{f'(a)}$ است. حال معادله‌ی خط قائم (AM) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

حال مختصات نقطه‌ی A را در این معادله جایگزین می‌کنیم.

$$y_0-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x_0-a)$$

از این رابطه a و سپس معادله‌ی خط بدست می‌آید.

نکته ی ۷۴:از نقطه‌ی A روی محور سهمی (درون سهمی) به شرطی می‌توان سه عمود بر سهمی رسم نمود که فاصله‌ی آن از رأس از دو برابر فاصله‌ی کانون تا رأس ($2|a|$) بیش‌تر باشد.

نقاط زاویه‌دار (گوشه‌ای) و بازگشت

فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده و در نقطه‌ی a پیوسته باشد. در این صورت:

الف) اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو موجود ولی نابرابر باشند (و یا یکی از این دو موجود و دیگری بی‌نهایت باشد) آن‌گاه این نقطه را زاویه‌دار یا گوشه‌ای می‌نامیم مانند: $y=|\sin x|$

در این حالت تابع f در نقطه‌ی $x=a$ دو خط مماس دارد. (خط مماس واحد ندارد.)

ب) اگر $f'_-(a)=-f'_+(a)=\pm\infty$ آن‌گاه نقطه‌ی a را نقطه‌ی بازگشتی می‌نامیم. مانند: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

در این حالت خط $x=a$ خط مماس قائم است.

تذکر: اگر f در R مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه $y=|f(x)|$ در نقطه‌ی $x=a$ با شرط $f(a)=0$ و $f'(a)\neq 0$ زاویه‌دار است. (مانند $y=|x-a|$) همچنین اگر m فرد و $n<m$ زوج باشد. آن‌گاه نقطه‌ی $x=a$ در تابع $y=\sqrt[m]{(x-a)^n}$ بازگشتی است.

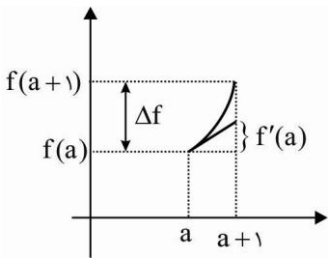
جلسه‌ی شانزدهم: آهنگ تغییر و کمیت‌های وابسته

آهنگ تغییر

فرض کنید تابع f در نقطه‌ی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت $f'(a)$ را آهنگ تغییر f در نقطه‌ی $x=a$ می‌نامیم.

نکته ی ۷۵:آهنگ متوسط تغییر f از $x=x_1$ تا $x=x_2$ برابر است با: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

نکته ی ۷۶:آهنگ تغییر f در نقطه‌ی a یعنی $f'(a)$ تقریباً برابر است با میزان تغییر f در نقطه‌ی a زمانی که متغیر آن یک واحد تغییر می‌کند.



$$f'(a)\cong f(a+1)-f(a)=\Delta f$$

کمیت‌های وابسته

اگر متغیرهای x و y هر دو تابعی از t (زمان) باشند آن‌گاه طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$y'_t=y'_x.x'_t \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt} \quad \text{یا} \quad y'(t)=y'(x).x'(t)$$

اگر y=f(x) تابعی از x باشد آن‌گاه $y'_t=f'(x).x'_t$

و اگر $F(x,y)=0$ رابطه‌ای ضمنی باشد آن‌گاه $y'_t=(-\frac{F'_x}{F'_y}).x'_t$.

$(y'_t)x'_t$ را آهنگ تغییر مؤلفه‌ی x (مؤلفه‌ی y) و یا سرعت مؤلفه‌ی x (مؤلفه‌ی y) می‌نامیم.

فصل ۳: *II*. کاربرد مشتق

جلسه‌ی هفدهم: نقاط بحرانی و اکسترمم سراسری

تعریف: نقطه‌ی بحرانی

نقطه‌ی درونی $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c) = ۰$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نکته ی ۷۷:اگر f روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد آنگاه نقاط انتهایی $x = a$ و $x = b$ نقاط بحرانی f محسوب نمی‌شوند.

نکته ی ۷۸:نقاط ناپیوستگی تابع f در صورتی که نقاط درونی دامنه‌ی f باشد، نقاط بحرانی‌اند.

نکته ی ۷۹: ریشه‌های داخل قدرمطلق بحرانی‌اند (در صورتی که نقطه درون دامنه باشند.)

اکسترمم سراسری (مطلق)

تعریف: اکسترمم مطلق (سراسری)

نقطه‌ی $x = x_۰ \in D_f$ را نقطه‌ی ماکزیمم (سراسری) تابع f می‌نامیم هرگاه:

$$\forall x \in D_f \qquad f(x) \le f(x_۰)$$

$f(x_۰)$ را ماکزیمم (مطلق) (سراسری) f می‌نامیم.

بطور مشابه نقطه‌ی $x = x_۰ \in D_f$ را نقطه‌ی می‌نیمم (مطلق) (سراسری) تابع f می‌نامیم هرگاه:

$$\forall x \in D_f \qquad f(x_۰) \le f(x)$$

$f(x_۰)$ را می‌نیمم (مطلق) (سراسری) f می‌نامیم.

در حالت کلی نقطه‌ی $x = x_۰$ را یک نقطه‌ی اکسترمم (مطلق) (سراسری) f می‌نامیم هرگاه نقطه‌ی ماکزیمم (مطلق) یا نقطه‌ی می‌نیمم (مطلق) f باشد.

چگونگی تعیین اکسترمم‌های مطلق

در ابتدای این بحث توجه شما را به قضیه‌ی زیر جلب می‌کنیم.

قضیه‌ی (۷): اگر $x = c$ درون دامنه و یک نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c) = ۰$ است.

نتیجه: هر نقطه‌ی اکسترمم سراسری f (که یک نقطه‌ی درونی دامنه‌ی f است) یک نقطه بحرانی است.

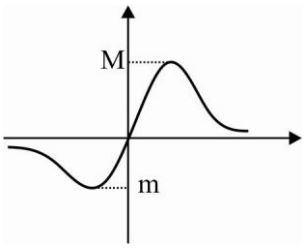
تذکر: شرط مشتق‌پذیر بودن و یا پیوسته بودن تابع f در نقطه‌ی اکسترمم مطلق نه لازم است و نه کافی

نکته ی ۸۰:تابع f اگر روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد حتماً در این بازه هم ماکزیمم (مطلق) دارد و هم می‌نیمم (مطلق).

نتیجه: برای تعیین اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازه‌ی $[a,b]$، ابتدا تمام نقاط بحرانی داخل بازه‌ی (a,b) را بدست می‌آوریم و سپس مقادیر f در آن نقاط و $f(a)$ و $f(b)$ را با یک‌دیگر مقایسه می‌کنیم. آنکه از همه بزرگ‌تر است همان ماکزیمم مطلق و آنکه از همه کوچک‌تر است همان می‌نیمم مطلق است.

برد تابع

نکته ی ۸۱:اگر m و M به ترتیب می‌نیمم و ماکزیمم (مطلق) تابع پیوسته‌ی f باشند آنگاه برد f برابر $[m,M]$ است. مانند شکل زیر.



نکته ی ۸۲:یکی از روش‌های یافتن اکسترمم‌های مطلق، رسم شکل و یا استدلال است. (بخصوص در توابع ناپیوسته)

نکته ی ۸۳:برای محاسبه‌ی ماکسیمم و می‌نیمم یک تابع، از نامساوی‌ها نیز می‌توان کمک گرفت. مانند:

۱) $|a + \frac{۱}{a}| \ge ۲ \qquad (a \ne ۰)$

۲) $|a + b| \ge ۲\sqrt{ab} \qquad ab \ge ۰$

۳) $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^۲ + b^۲}$

۴) $(ax + by)^۲ \le (a^۲ + b^۲)(x^۲ + y^۲)$

جلسه‌ی هجدهم: بهینه‌سازی

بهینه‌سازی

در فرآیند بهینه‌سازی ما بدنبال ماکزیمم یا می‌نیمم یک عبارت هستیم. در این فرآیند به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- معلوم‌ها و مجهول‌های مسأله را شناسایی کرده و مجهول‌ها را اسم‌گذاری می‌کنیم.

۲- عبارتی که می‌خواهیم ماکزیمم یا می‌نیمم گردد را به عنوان تابعی از بقیه متغیرها می‌نویسیم. (معادله‌ی اولیه)

۳- معمولاً تعداد متغیرها بیش‌تر از یکی است. (اکثر اوقات دو متغیر داریم) سعی می‌کنیم بین متغیرها رابطه برقرار کنیم. (معادله ثانویه)

۴- در نهایت عبارتی که قرار است می‌نیمم یا ماکزیمم گردد را بصورت تابعی از یک متغیر نوشته و پس از تعیین تمام نقاط بحرانی آن، کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار آن را تعیین می‌کنیم.

نکته ی ۸۴:اگر مجموع دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی ماکزیمم است که با هم برابر باشند.

همچنین اگر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد مجموع آن‌ها زمانی می‌نیمم است که با هم برابر باشند. به زبان ریاضی

$$x+y=k \xrightarrow{x=y=\frac{k}{۲}} \max(xy)=\frac{k^{۲}}{۴}$$

$$xy=k \xrightarrow{x=y=\sqrt{k}} \min(x+y)=۲\sqrt{k}$$

جلسه‌ی نوزدهم: یکنوایی

تابع صعودی اکید

تابع f را روی بازه‌ی I صعودی اکید گوئیم هرگاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از این بازه که $x_۱ < x_۲$ باشد نتیجه بگیریم $f(x_۱) < f(x_۲)$ است. (در واقع با افزایش x، مقدار y افزایش یابد.)

تابع نزولی اکید

تابع f را روی بازه‌ی I نزولی اکید گوئیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in I$ که $x_۱ < x_۲$ آنگاه $f(x_۱) > f(x_۲)$ (در واقع با افزایش x، مقدار y کاهش یابد.)

تابع یکنوا اکید

تابع f را روی بازه‌ی I یکنوای اکید گوئیم هرگاه صعودی اکید یا نزولی اکید باشد.

تابع صعودی

تابع f روی بازه‌ی I صعودی است هرگاه:

$$\forall x_۱, x_۲ \in I \qquad x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \le f(x_۲)$$

تابع نزولی

تابع f روی بازه‌ی I نزولی است هرگاه:

$$\forall x_۱, x_۲ \in I \qquad x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲)$$

تابع یکنوا

تابع f را روی بازه‌ی I یکنوا گوئیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

تذکر: تابعی که صعودی اکید (نزولی اکید) باشد صعودی (نزولی) نیز می‌باشد.

قضیه‌ی (۸): **فرض کنید f در بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد در این صورت:**

الف) اگر برای هر $x \in I$، $f'(x) > ۰$ آنگاه f روی I صعودی اکید است.

ب) اگر برای هر $x \in I$، $f'(x) < ۰$ آنگاه f روی I نزولی اکید است.

نکته ی ۸۵: اگر روی بازه‌ی I، $f'(x) \geq 0$ آنگاه f به شرطی صعودی اکید است که صفرهای مشتق متناهی و یا نامتناهی شمارش‌پذیر باشد. (در واقع f در هیچ بازه‌ای ثابت نباشد.)

نکته ی ۸۶: اگر تابع f روی بازه‌های (a,b) و (b,c) صعودی (نزولی) باشد و f در نقطه‌ی b پیوسته باشد آنگاه f در بازه‌ی (a,c) صعودی (نزولی) است.

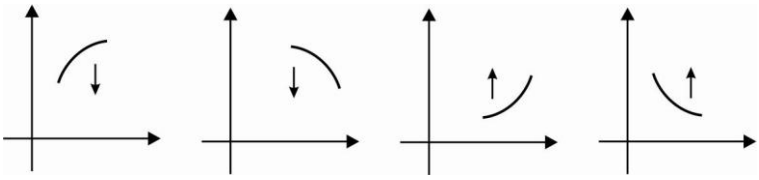
نکته ی ۸۷: اگر $x=c$ مجانب قائم تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی (a,b) باشد آنگاه f در این بازه یکنوا نیست.

نکته ی ۸۸: اگر f و g هر دو نزولی و یا هر دو صعودی باشند آنگاه fog صعودی است و اگر یکی از دو تابع f و g نزولی و دیگری صعودی باشد آنگاه fog نزولی است. (با در نظر گرفتن شرایط دامنه و برد f و g)

جلسه‌ی بیستم: تقعر و عطف

تقعر

تعریف: اگر f' روی بازه‌ی (a,b) صعودی اکید باشد گوئیم تقعر (گودی) نمودار f رو به بالا و اگر f' نزولی اکید باشد گوئیم تقعر (گودی) نمودار f رو به پایین است.



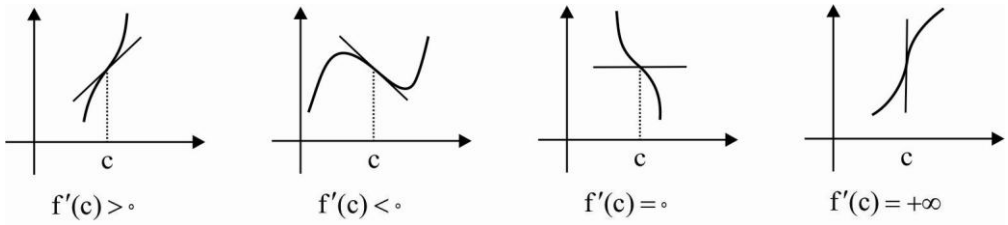
با توجه به نمودارهای بالا می‌توان به نکته‌ی زیر رسید.

نکته ی ۸۹: اگر تقعر نمودار f در بازه ی I رو به بالا باشد آنگاه خطوط مماس بر منحنی در هر نقطه از این بازه زیر منحنی است و برعکس. همچنین تقعر f در بازه‌ی I رو به پایین است اگر و فقط اگر در هر نقطه از این بازه خط مماس بر منحنی بالای منحنی باشد.

قضیه‌ی (۹): اگر f'' در بازه‌ی (a,b) موجود و همواره مثبت (منفی) باشد آنگاه جهت تقعر f روی این بازه رو به بالا (پایین) است.

نقطه عطف

تعریف: نقطه‌ی $(c,f(c))$ را نقطه‌ی عطف تابع f می‌نامیم هرگاه اولاً نمودار f در این نقطه خط مماس (و یا خط مماس قائم) داشته باشد ثانیاً جهت تقعر نمودار f در این نقطه عوض شود.



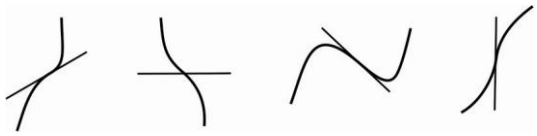
تذکر: دقت کنید که در نقطه‌ی عطف باید خط مماس و یا خط مماس قائم وجود داشته باشد یعنی یا $f'(c)$ یک عدد حقیقی باشد (f مشتق‌پذیر باشد) و یا با فرض پیوسته بودن f در نقطه‌ی c رابطه‌ی $f'_+(c)=f'_-(c)=\pm\infty$ برقرار باشد.

قضیه‌ی (۱۰): اگر $x=c$ یک نقطه‌ی بحرانی f' باشد (یعنی $f''(c)=0$ و یا $f''(c)$ موجود نباشد) و f'' در این نقطه تغییر علامت دهد آن‌گاه نقطه‌ی $x=c$ نقطه‌ی عطف تابع f است.

نکته ی ۹۰: اگر f'' در نقطه‌ی c موجود و این نقطه یک نقطه‌ی عطف باشد آن‌گاه $f''(c)=0$ است.

نکته ی ۹۱: لزومی ندارد نقطه‌ی عطف f، یک نقطه بحرانی f' باشد مانند $x=0$ در $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

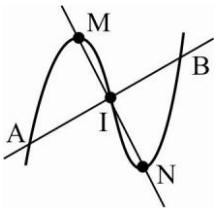
نکته ی ۹۲: در نقطه‌ی عطف خط مماس بر منحنی از منحنی عبور می‌کند. به بیان دیگر در یک طرف نقطه‌ی عطف منحنی بالای خط مماس و در طرف دیگر نقطه ی عطف منحنی زیر خط مماس است.



نکته ی ۹۳: در تابع دو بار مشتق‌پذیر f، نقطه اکسترمم نسبی f'، نقطه عطف f است. در حالت خاص ریشه‌ی مضاعف f' نقطه‌ی عطف f است.

نکته ی ۹۴: مجانب قائم مضاعف f' نقطه‌ی عطف f است. (f پیوسته)

نکته ی ۹۵: در چندجمله‌ای درجه سوم، نقطه‌ی عطف، مرکز تقارن منحنی است. بنابراین می‌توان گفت:



الف) نقطه‌ی عطف وسط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است پس $MI = IN$ و یا:

$$x_I = \frac{x_{min} + x_{max}}{۲} \quad \text{و} \quad y_I = \frac{y_{min} + y_{max}}{۲}$$

ب) هر خط دلخواه که از I بگذرد و منحنی را در نقاط A و B قطع کند آنگاه $AI = IB$ است و برعکس.

ج) خطی که از نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی منحنی عبور کند از نقطه‌ی عطف نیز عبور می‌کند.

نکته ی ۹۶: ۱- اگر $f(x) = (x-a)^n g(x)$ و $n \geq ۳$ فرد باشد آنگاه $x = a$ نقطه‌ی عطف تابع f است.

۲- اگر m و n فرد و $m > n$ آنگاه در تابع $f(x) = \sqrt[m]{(x-a)^n g(x)}$ نقطه‌ی $(x = a)$ نقطه‌ی عطف تابع f است $(g(a) \neq ۰)$

جلسه‌ی بیست و یکم: اکسترمم موضعی (نسبی)

اکسترمم موضعی

تعریف:

فرض کنید D دامنه‌ی f و $c \in D$ در این صورت:

$f(c)$ را یک مقدار ماکسیمم (می‌نیمم) نسبی تابع f می‌نامیم هرگاه در یک همسایگی c از دامنه مقدار $f(c)$ بیش‌ترین (کم‌ترین) مقدار تابع باشد (منظور از همسایگی، برای نقاط درونی دامنه، همسایگی دوطرفه و برای ابتدا و انتهای بازه‌های بسته، همسایگی یک‌طرفه است.)

تذکر: $f(c)$ را یک مقدار اکسترمم نسبی می‌نامیم هرگاه یا مقدار ماکسیمم نسبی و یا مقدار می‌نیمم نسبی باشد. (c را نقطه‌ی اکسترمم نسبی می‌نامیم.)

نکته ی ۹۷: اگر $D_f = [a,b]$ آن‌گاه a و b نقاط اکسترمم نسبی می‌باشند البته اگر در تعریف صدق کنند.

نکته ی ۹۸: در توابع ناپیوسته برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی از رسم کمک می‌گیریم و یا از تعریف به طور مستقیم کمک می‌گیریم. (حتی در توابع پیوسته‌ای که $x = c$ ریشه‌ی تابع است نیز برای تعیین نوع اکسترمم از تعریف استفاده می‌کنیم.)

آزمون مشتق اول

نکته ی ۹۹: هر نقطه اکسترمم مطلق یک نقطه اکسترمم نسبی است به شرط آنکه تابع در هسایگی چپ یا راست (یا هر دو) آن نقطه تعریف شده باشد.

نکته ی ۱۰۰: هر نقطه اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی است (بجز اول و آخر بازه)

نکته ی ۱۰۱: اگر f مشتق‌پذیر و در c اکسترمم نسبی داشته باشد آن‌گاه $f'(c) = ۰$ است.

نکته ی ۱۰۲: (آزمون مشتق اول)

فرض کنید f در بازه (a,b) پیوسته و $c \in (a,b)$ یک نقطه بحرانی f و f بر این بازه مشتق‌پذیر (به جز احتمالاً در c) باشد. در این صورت طبق جدول رفتار تابع (تعیین‌علامت f') نقاط اکسترمم نسبی بدست می‌آیند.

x	a		c		b
f'		$+$	$\|$	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

x	a		c		b
f'		$-$	$\|$	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

x	a		c		b
f'		$+$	$\|$	$+$	
f		اکسترمم نیست			

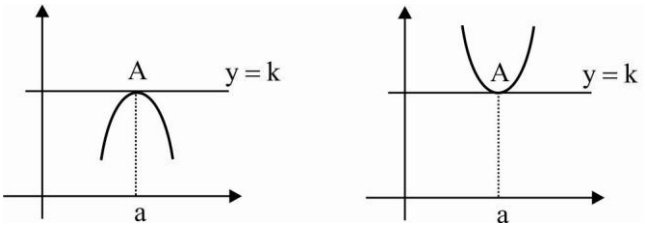
نتیجه: برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی توابع پیوسته و مشتق‌پذیر (به جز احتمالاً در نقطه‌ی بحرانی که می‌تواند مشتق‌ناپذیر باشد) ابتدا تمام نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم و سپس f' را تعیین‌علامت می‌کنیم. اگر f' در نقطه‌ای بحرانی تغییر علامت دهد آن نقطه یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی است در غیر اینصورت اکسترمم نسبی نیست.

نکته ی ۱۰۳: ریشه‌ی مضاعف مشتق اول نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست. (زیرا y' تغییرعلامت نمی‌دهد.)

قضیه‌ی (۱۱): (آزمون مشتق دوم)
اگر $f'(c)$ و $f''(c)$ هر دو موجود و $f'(c)=0$ باشد آن‌گاه اگر $f''(c)$ مثبت باشد f در c می‌نیمم نسبی و اگر $f''(c)$ منفی باشد f در c ماکزیمم نسبی است.

نکته ی ۱۰۴: فرض کنید $A(a,b)$ یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد و f و g در نقطه‌ی A مشتق‌پذیر و $g'(a)\neq 0$ در این صورت $b=\frac{f(a)}{g(a)}$ و $b=\frac{f'(a)}{g'(a)}$
به زبان غیر ریاضی مختصات اکسترمم نسبی علاوه بر خود تابع، در هوپیتال تابع نیز صدق می‌کند.

نکته ی ۱۰۵: اگر نقطه‌ی $A(a,k)$ یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f باشد آن‌گاه منحنی f در نقطه‌ی A بر خط $y=k$ مماس است.

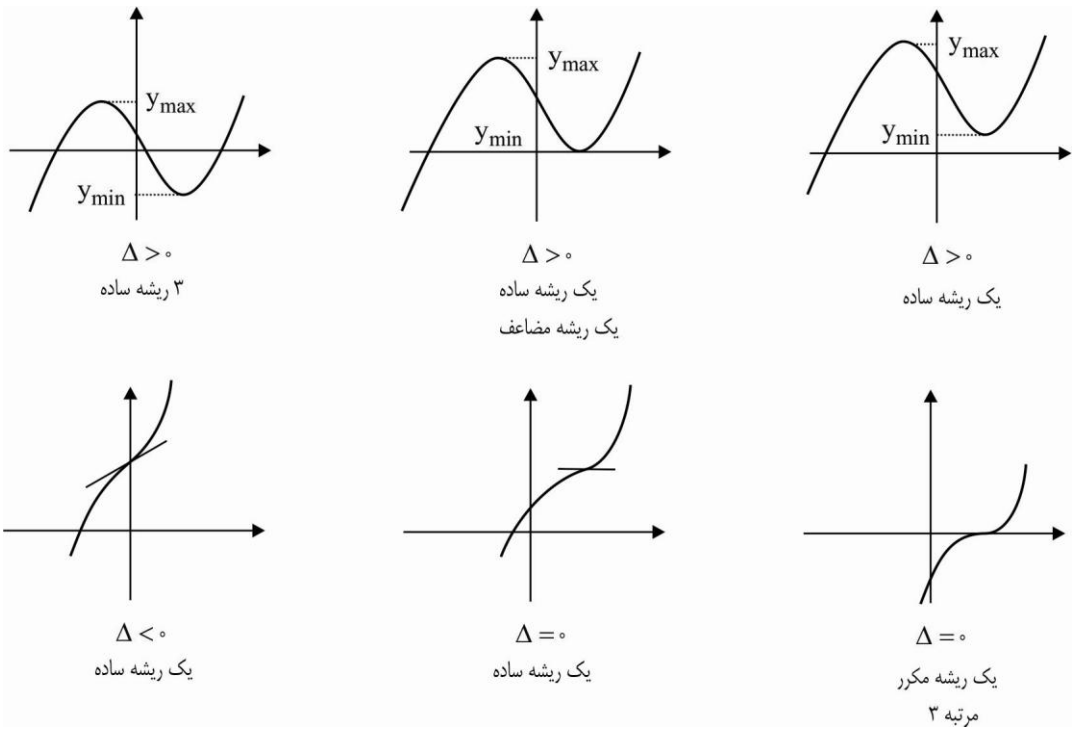


نتیجه: برای محاسبه عرض نقاط اکسترمم نسبی (بدون استفاده از مشتق) در توابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ پس از طرفین وسطین کردن $k=\frac{f(x)}{g(x)}$ به معادله‌ی $kg(x)-f(x)=0$ می‌رسیم. حال با اعمال شرط وجود ریشه‌ی مضاعف، مقادیر k (که همان عرض‌های اکسترمم نسبی است) بدست می‌آیند. (اگر $kg(x)-f(x)=0$ درجه ۲ بود $\Delta=0$ و در غیر اینصورت از $kg'(x)-f'(x)=0$ استفاده می‌کنیم.)

نکته ی ۱۰۶: در تابع $y=(x-a)^n g(x)$ اگر n زوج باشد آنگاه $x=a$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی است. (g تابعی است که در یک همسایگی a پیوسته و $g(a)\neq 0$ است) اگر $g(a)>0$ آنگاه این نقطه می‌نیمم نسبی و اگر $g(a)<0$، این نقطه ماکزیمم نسبی است. (درواقع نقطه اکسترمم روی محور xهاست.)

تذکر: اگر **m** فرد و **n** زوج و $m>n$ آنگاه نکته‌ی قبل برای تابع $y=\sqrt[m]{(x-a)^n g(x)}$ نیز صحیح است. (در وقع نقاط بازگشت، نقاط اکسترمم نسبی‌اند.)

نکته ی ۱۰۷: در مورد تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم ۶ حالت وجود دارد.



جلسه‌ی بیست و دوم: رابطه‌ی بین نمودار f و f'

رابطه‌ی f و f'

فرض کنید f در بازه‌ی باز (a,b) شامل نقطه‌ی c پیوسته و به جز احتمالاً در c در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد در این صورت در بازه‌ی (a,b) رفتار f به کمک علامت f' و یکنوایی f' (علامت f'') تعیین می‌گردد. به طور مثال:

x	a		b
f'	علامت	+	
f'	یکنوایی	نزولی	
f			

x	a		b
f'	علامت	+	
f'	یکنوایی	صعودی	
f			

x	a	c	b
f'	علامت	+ ۰	+
f'	یکنوایی	نزولی	صعودی
f			

x	a	c	b
f'	علامت	+ ۰	+
f'	یکنوایی	صعودی	صعودی
f			

x	a		b
f'	علامت	− ۰	+
f'	یکنوایی	نزولی	
f			

x	a		b
f'	علامت	+ ۰	−
f'	یکنوایی	صعودی	
f			

x	a	c	b
f'	علامت	+ ∞	+
f'	یکنوایی	صعودی	صعودی
f			

x	a	c	b
f' علامت	+	|	+
f' یکنوایی	نزولی		ودی
f			

x	a	c	b
f' علامت	+	∞	−
f' یکنوایی	صعودی	|	ی
f			

نکته ی ۱۰۸: نقطه‌ی اکسترمم نسبی f' نقطه‌ی عطف f است. (f' پیوسته)

نکته ی ۱۰۹: نقطه‌ی اکسترمم نسبی f ریشه‌های f' است. (f مشتق‌پذیر)

نکته ی ۱۱۰: اگر f مجانب مایل (افقی) داشته باشد f' مجانب افقی (افقی $y=0$) دارد. (f نوسانی نیست.)

جلسه‌ی بیست و سوم: نمودار

بررسی تستی نمودارها

توابع پارامتردار

برای حل تست‌های مربوط به نمودار باید به نکات زیر دقت کرد.

۱- دامنه‌ی تابع را با دامنه‌ی نمودار مقایسه کنید.

۲- مجانب‌ها را بررسی کنید. مثلاً علامت تابع را در همسایگی چپ و راست مجانب‌های قائم، شیب مجانب‌های مایل (از نظر مثبت یا منفی بودن)، عرض از مبدأ در مجانب مایل و .... را در نظر بگیرید.

۳- دوره‌ی تناوب در توابع متناوب را بدست آورید.

۴- اگر نقطه‌ی $A(a,b)$ در نمودار تابع مشتق‌پذیر **f** یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد آنگاه هر دو معادله‌ی $f(a)=b$ و $f'(a)=0$ را تشکیل دهید. (در توابع کسری می‌توانید (با حفظ شرایط) مختصات **A** را در هوپیتال تابع جایگزین کنید.)

۵- اگر نمودار تابع مشتق‌پذیر **f** بر محور **x**ها مماس بود شرایط وجود ریشه‌ی مضاعف در معادله‌ی $f(x)=0$ را بررسی کنید. بخصوص اگر $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ باشد کافی است شرط وجود ریشه‌ی مضاعف را در معادله‌ی $g(x)=0$ بررسی کنیم.

۶- اگر در توابع مشتق‌پذیر کسری فقط عرض نقطه‌ی اکسترمم نسبی داده شده باشد بجای **y** عرض نقطه‌ی اکسترمم نسبی را قرار می‌دهیم و پس از طرفین و وسطین کردن، شرط ریشه‌ی مضاعف را در معادله‌ی بدست آمده بررسی می‌کنیم.

۷- محل برخورد با محورها را دقت کنید.

بررسی نمودارهای خاص

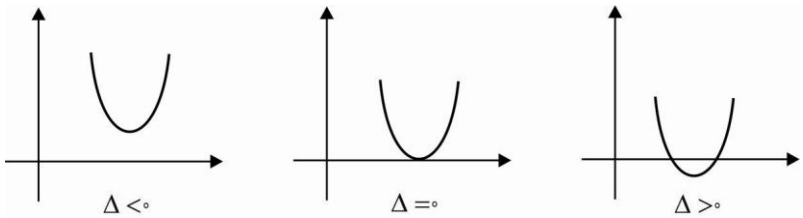
در این قسمت نمودار چند تابع خاص را بررسی می‌کنیم.

الف) تابع $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

خواص این تابع عبارتند از:

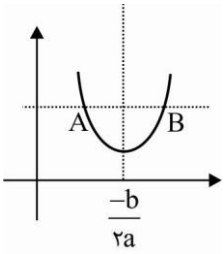
۱- اگر $a>0$ سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ سهمی رو به پائین است.

۲- اگر $\Delta>0$، $\Delta<0$ و یا $\Delta=0$ باشد آنگاه معادله‌ی $y=0$ به ترتیب، دو ریشه‌ی حقیقی متمایز، فاقد ریشه و یک ریشه‌ی مضاعف دارد.



۳- خط $x=\frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی است و لذا اگر خطی موازی محور xها سهمی را در نقاط A و B قطع کند آنگاه طول رأس

سهمی (طول اکسترمم نسبی) برابر است با: $\frac{x_A + x_B}{۲}$



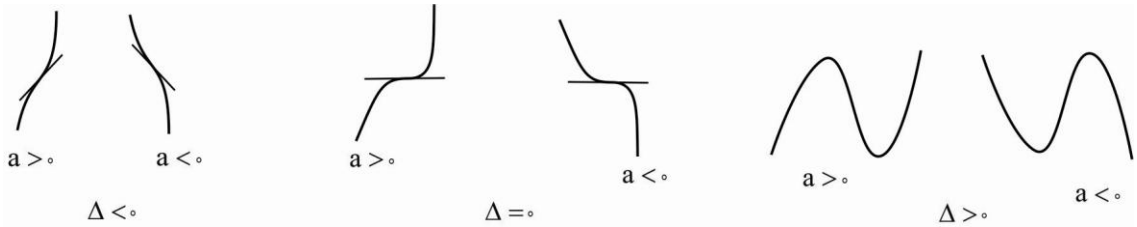
۴- می‌نیمم و یا ماکزیمم سهمی (عرض نقطه‌ی اکسترمم) برابر است با: $\frac{-\Delta}{۴a}$

ب) تابع $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d \quad (a \neq ۰)$

خواص این تابع عبارتند از:

۱- برد این تابع R است.

۲- با توجه به Δ ی مشتق، نمودار این تابع سه حالت دارد:



۳- منحنی این تابع همواره عطفی به طول $-\frac{b}{۳a}$ دارد.

۴- نقطه‌ی عطف این تابع مرکز تقارن منحنی است. (در مورد خواص نقطه‌ی عطف تابع درجه‌ی سوم در جلسه‌ی قبل مفصل بحث کردیم.)

ج) تابع $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}) \quad (c \neq ۰)$

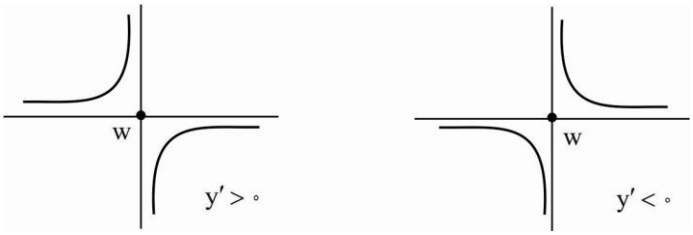
اگر $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ آنگاه نمودار تابع این خط افقی با یک نقطه‌ی توخالی خواهد بود. در این قسمت ما حالتی را بررسی می‌کنیم که $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ که در این حالت این تابع را هموگرافیک می‌نامیم. خواص تابع هموگرافیک بصورت زیر است:

۱- مشتق این تابع بصورت $y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^۲} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^۲}$ می‌باشد.

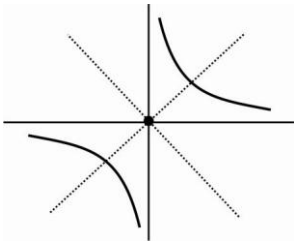
۲- نمودار این تابع مجانب قائم $(x = -\frac{d}{c})$ و یک مجانب افقی $(y = \frac{a}{c})$ دارد.

۳- محل برخورد مجانب‌ها یعنی نقطه‌ی $W(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ مرکز تقارن منحنی است.

۴- در هر دو طرف مجانب قائم نمودار تابع یا همواره صعودی اکید است و یا نزولی اکید. بنابراین نمودار تابع هموگرافیک به یکی از دو صورت زیر است:



۵- نیمساز بین مجانب‌ها، محورهای تقارن‌اند. پس خطوطی با شیب ± ۱ که از مرکز تقارن عبور می‌کنند محورهای تقارن‌اند.

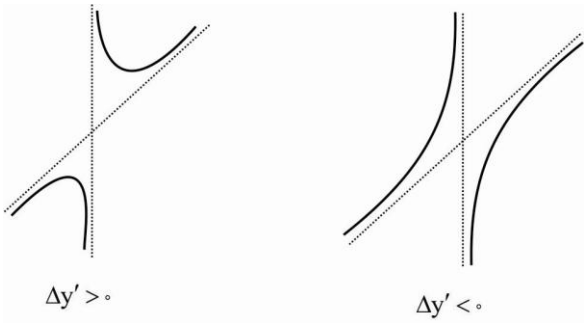


۶- محل برخورد محور تقارن با منحنی، کم‌ترین فاصله را تا مرکز تقارن دارد.

۷- هر تابع هموگرافیک را می‌توان به صورت $y=\frac{Ax+B}{x+D}$ نشان داد.

د) تابع $(aA\neq 0)\ y=\frac{ax^2+bx+c}{Ax+B}$

در حالت کلی نمودار این تابع به یکی از دو صورت زیر است. (شیب مجانب مایل منفی هم می‌تواند باشد.)



اگر $\Delta y'=0$ باشد نمودار تابع به صورت یک خط مایل با یک نقطه توخالی روی آن است.

رسم نمودار

برای رسم نمودار به طور تشریحی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- تعیین دامنه ۲- تعیین مجانب‌ها ۳- تعیین نقاط بحرانی

۳- رسم جدول رفتار تابع ۴- در صورت لزوم تعیین تقعر و نقاط عطف

۵- تعیین نقاط برخورد با محورها ۶- در صورت لزوم تعیین دوره تناوب

فصل چهارم: انتگرال

جلسه‌ی بیست و چهارم: انتگرال نامعین

تابع اولیه

تعریف: **اگر برای هر** $x\in[a,b]$ **رابطه‌ی** $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ **برقرار باشد آن‌گاه** F **را تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع** f **می‌نامیم و با نماد** $\int f(x)dx$ **نمایش می‌دهیم.**

به عبارتی اگر $F'(x)=f(x)$ آن‌گاه F را تابع اولیه‌ی f می‌نامیم:

نتیجه: با فرض ثابت بودن c **داریم:** $F'(x)=f(x)\leftrightarrow\int f(x)dx=F(x)+c$

ویژگی‌های انتگرال نامعین

با توجه به خاص مشتق می‌توان ثابت کرد:

۱) $\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$

۲) $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

فرمول‌های انتگرال نامعین

۱) $\int dx = x + c$

۲) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

۳) $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + c$

۴) $\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$

۵) $\int (1 + \tan^2 kx) dx = \frac{1}{k} \tan kx + c$

۶) $\int (1 + \cot^2 kx) dx = -\frac{1}{k} \cot kx + c$

۷) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

۸) $\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

۹) $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$

۱۰) $\int \frac{1}{x} dx = Ln|x| + c$

نکته ی ۱۱۱:

۱) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$

۲) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

۳) $\int \tan kx dx = -\frac{1}{k} Ln|\cos kx| + c$

۴) $\int \cot kx dx = \frac{1}{4} Ln|\sin kx|$

جلسه‌ی بیست و پنجم: مجموع بالا و پایین

نماد Σ.

برای راحتی کار مجموع $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ را به صورت $\sum_{k=1}^{n} a_k$ نمایش می‌دهیم. (مجموع a_k، k از ۱ تا n)

خواص سیگما:

۱) $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (عدد ثابت c از Σ بیرون می‌آید.)

۲) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

۳) $\sum_{k=1}^{n} c = n.c$

۴) (تغییر اندیس) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$

۶) قاعده‌ی تلسکوپی (ادغام) $\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(k+1) = f(1) - f(n+1)$

نکته ی ۱۱۲: ۱) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

۲) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

۳) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$

روش مستطیل برای محاسبه مساحت

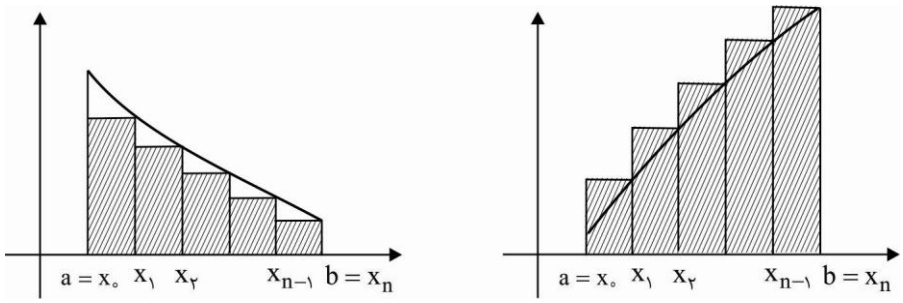
فرض کنید $f(x)\geq 0$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد این بازه را به n زیر بازه جزء به طور منظم افراز می‌کنیم به طوری که

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$(n+1)$ نقطه تقسیم باشند. طول بازه‌ها را مساوی می‌گیریم پس $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ بر روی بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ مستطیلی با عرض Δx و ارتفاع $f(x_i)$ می‌سازیم (یعنی با انتهای هر بازه یک مستطیل می‌سازیم.) مجموع این مساحت‌ها را تشکیل می‌دهیم.

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

بدیهی است S_n تقریبی از مساحت تحت f و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$ است.



مجموع بالا و پایین

تعریف:

فرض کنید تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. این بازه را به n زیر بازه‌ی جزء با طول مساوی افراز می‌کنیم. (گوییم به بازه‌های جزء بطور منظم افراز کرده‌ایم) بطوری که $(n+1)$ نقطه x_0 و x_1 و .... و x_n دارای خواص زیر باشند.

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \\ x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

حال فرض کنید ℓ_i طول نقطه‌ی می‌نیمم مطلق بازه‌ی iام و u_i طول نقطه‌ی ماکزیمم مطلق بازه‌ی iام باشد (منظور از بازه‌ی iام بازه‌ی $[x_{i-1}, x_i]$ می‌باشد.) در این صورت حاصل:

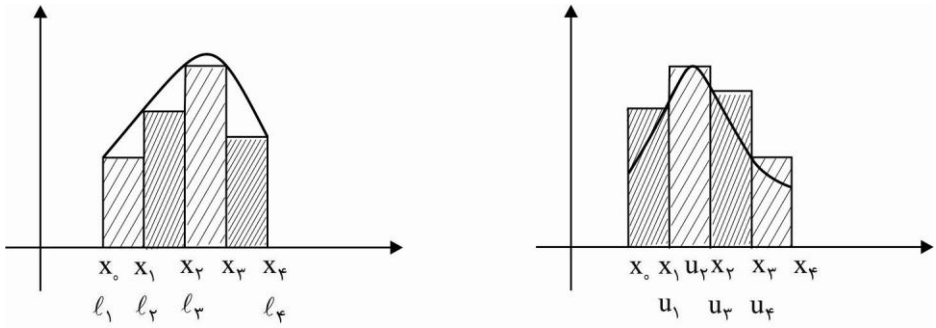
$$L_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\ell_i)\Delta x = (f(\ell_1) + f(\ell_2) + \ldots + f(\ell_n))\Delta x$$

را مجموع پایین و حاصل

$$U_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x = (f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_n))\Delta x$$

را مجموع بالای f روی بازه‌ی $[a,b]$ می‌نامیم.

در شکل‌های زیر مجموع مساحت‌های مستطیل‌های هاشورخورده همان $L_n(f)$ و $U_n(f)$ می‌باشند.



اگر $f \geq ۰$ آن‌گاه $U_n(f)$ (و یا $L_n(f)$) مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی است که عرض آن‌ها برابر Δx و طول آن‌ها برابر ماکزیمم مطلق (و یا می‌نیمم مطلق) تابع f در آن بازه‌هاست.

نکته ی ۱۱۳: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته نباشد ولی برای هر یک از زیر بازه‌ها مقادیر ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق وجود داشته باشد باز هم $U_n(f)$ و $L_n(f)$ مانند قبل تعریف می‌گردد.

تذکر: برای محاسبه‌ی U_n و L_n می‌توان از SUP و یا inf هر بازه (در صورت عدم وجود ماکزیمم و می‌نیمم) استفاده کرد.

نکته ی ۱۱۴: اگر f روی بازه‌ی $[a,b]$ یک تابع پیوسته و یکنوا باشد آن‌گاه:

$$U_n(f) - L_n(f) = |f(b) - f(a)|\,\Delta x = |f(b) - f(a)| \times \frac{b-a}{n}$$

نکته ی ۱۱۵: اگر f در بازه $[a,b]$ نامنفی و پیوسته باشد آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ همان مساحت محدود به f، محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ است.

نکته ی ۱۱۶: اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید باشد آنگاه:

$$U_n = \sum_{i=۱}^{n} f(a + i\Delta x).\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$L_n = \sum_{i=۱}^{n} f(a + (i-۱)\Delta x).\Delta x$$

جلسه‌ی بیست و ششم: انتگرال معین و ویژگی‌های آن

انتگرال معین

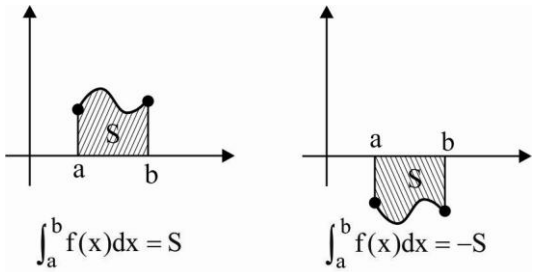
تعریف:

اگر در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ حد مجموع بالا و پایین تابع f وقتی $n\to\infty$ هر دو موجود و برابر باشند گوییم تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و مقدار این حد مشترک را انتگرال معین f بر این بازه نامیده و با $\int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهیم. به بیان ریاضی تعریف انتگرال معین بصورت زیر است:

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)=\lim_{n\to\infty} U_n(f)=\int_a^b f(x)dx$$

نکته ی ۱۱۷:اگر تابع نامنفی f در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه حاصل $\int_a^b f(x)dx$ همان مساحت محدود به نمودار f و محور xها و محدود به دو خط $x=a$ و $x=b$ است.

همچنین اگر f منفی باشد آن‌گاه حاصل $\int_a^b f(x)dx$ برابر قرینه‌ی اندازه‌ی مساحت بین f و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$ است.



ویژگی‌های انتگرال معین

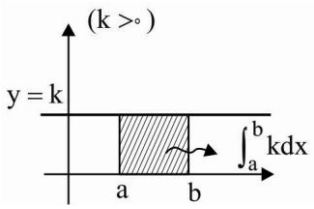
قضیه‌ی (۱۲): اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد انتگرال‌پذیر است.

نکته ی ۱۱۸:اگر f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ کراندار و بجز در تعداد محدودی نقطه در مابقی نقاط پیوسته باشد آن‌گاه انتگرال‌پذیر است.

نتیجه: اگر توابع f و g در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ به جز در تعداد محدودی نقطه در مابقی نقاط برابر باشند آن‌گاه به شرط انتگرال‌پذیری یکی، دیگری نیز انتگرال‌پذیر است.

قرارداد: اگر $a>b$ آن‌گاه تعریف می‌کنیم $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ و همچنین تعریف می‌کنیم $\int_a^a f(x)dx=0$

قضیه‌ی (۱۳): اگر k ثابت باشد آن‌گاه داریم:



$$\int_a^b kdx=k(b-a)$$

قضیه‌ی (۱٤): با فرض ثابت بودن k و انتگرال‌پذیر بودن f داریم:

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

قضیه‌ی (۱۵): اگر f و g هر دو در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند آن‌گاه:

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

قضیه‌ی (۱٦): اگر f در بازه‌ی بسته‌ای شامل a و b و c انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

نکته ی ۱۱۹: اگر f در بازه‌ی $[-a,a]$ پیوسته و فرد باشد آن‌گاه:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰$$

و اگر f زوج باشد آن‌گاه:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۲\int_{۰}^{a} f(x)dx$$

قضیه‌ی (۱۷): اگر توابع f و g روی بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند و برای هر x از این بازه $f(x) \le g(x)$ باشد آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

نتیجه: با فرض انتگرال‌پذیر بودن f روی بازه‌ی $[a,b]$ داریم:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

قضیه‌ی (۱۸): اگر f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و m و M به ترتیب می‌نیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع f روی این بازه باشند آن‌گاه:

$$m \le \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

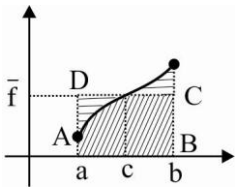
نتیجه: بدون محاسبه‌ی $A = \int_a^b f(x)dx$ می‌توان گفت که $m(b-a) \le A \le M(b-a)$ یعنی $m(b-a)$ و $M(b-a)$ کران‌های پایین و بالای $\int_a^b f(x)dx$ می‌باشند.

قضیه مقدار میانگین

مقدار متوسط تابع

فرض کنید تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت حاصل $\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ را مقدار متوسط (میانگین) تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ می‌نامیم.

قضیه‌ی (۱۹): (قضیه‌ی مقدار میانگین در انتگرال‌ها) اگر f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد آن‌گاه عددی مانند c در بازه‌ی $[a,b]$ یافت می‌شود بطوری که:



$$f(c) = \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

تذکر: با توجه به قضیه‌ی قبل، مقدار متوسط تابع پیوسته‌ی **f** بین **m** و **M** قرار دارد. مساحت مستطیلی که یک ضلع آن $b-a$ و ضلع دیگر آن $f(c)$ است برابر مساحت زیر منحنی **f** در بازه‌ی $[a,b]$ است.

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx = \bar{f}_{۰}(b-a)$$

جلسه‌ی بست و هفتم: قضیه‌ی بنیادی

قضیه‌ی بنیادی قسمت اول

فرض کنید f روی بازه‌ی I شامل a پیوسته باشد. اگر $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ آن‌گاه F روی I مشتق‌پذیر است و $F'(x) = f(x)$ می‌باشد.

نکته ی ۱۲۰: اگر u تابعی از x باشد $F(x) = \int_a^u f(t)dt$ آن‌گاه $F'(x) = u'f(u)$

نکته ی ۱۲۱: فرض کنید u و v هر دو تابعی از x باشند. در این صورت اگر $F(x) = \int_v^u f(t)dt$ آن‌گاه $F'(x) = u'f(u) - v'f(v)$ علت این مطلب آن است که $\int_v^u f(t)dt = \int_a^u f(t)dt - \int_a^v f(t)dt$

قضیه‌ی بنیادی قسمت دوم

اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و F یک تابع اولیه‌ی f باشد (یعنی $F'(x)=f(x)$ و یا $F(x)=\int f(x)dx$) آن‌گاه

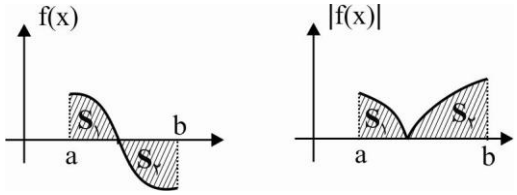
$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

تذکر: عبارت $F(b)-F(a)$ را بصورت $F(x)\Big|_a^b$ می‌نویسیم.

جلسه‌ی بست و هشتم: مساحت

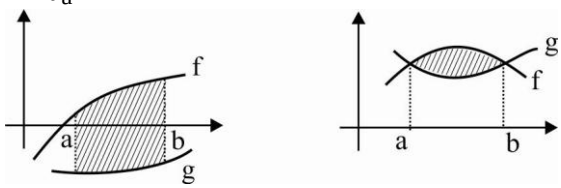
محاسبه مساحت

نکته ی ۱۲۲: فرض کنید تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت مساحت بین منحنی f و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$ برابر است با: $\int_a^b |f(x)|dx$



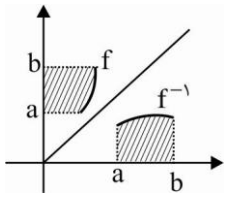
نکته ی ۱۲۳: اگر توابع f و g روی بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و $f(x)\ge g(x)$ باشد آن‌گاه مساحت بین f و g از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

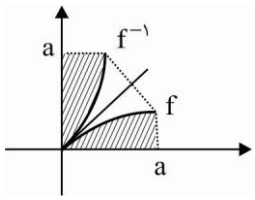


اگر a و b ذکر نشود کافی است حدود انتگرال را نقاط برخورد ابتدایی و انتهایی در نظر بگیریم.

نکته ی ۱۲۴: مساحت محدود به تابع پیوسته و معکوس‌پذیر f با محور yها و خطوط $y=a$ و $y=b$ برابر است با مساحت محدود به f^{-1} و محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$



نکته ی ۱۲۵:مساحت دو ناحیه هاشورزده‌ی شکل مقابل برابر است.



تذکر: در حالت کلی اگر f روی بازه‌ی $[0,a]$ اکیداً صعودی و پیوسته باشد آن‌گاه:

$$\int_0^a f(x)dx = af(a)-\int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx$$

نکته ی ۱۲۶:با فرض انتگرال‌پذیر بودن f در بازه‌ی $[0,1]$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

ریاضیات پایه

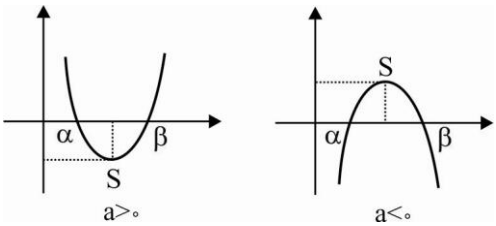
فصل پنجم: محاسبات جبری

جلسه‌ی بیست و نهم و سی ام: معادله‌ی درجه دوم، معادلات و نامعادلات

معادلات درجه ۲

ریشه‌یابی

تابع درجه‌ی دوم $y=f(x)=ax^{۲}+bx+c$ را در نظر بگیرید $(a\neq ۰)$ نمودار این تابع یک سهمی می‌باشد. نمودار این سهمی به یکی از دو صورت زیر است:



مختصات رأس سهمی $S=(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$

نکته ی ۱۲۷: می‌نیمم تابع درجه‌ی دوم در حالت $a>۰$ و یا ماکزیمم تابع درجه‌ی دوم در حالت $a<۰$ برابر است با: $-\frac{\Delta}{۴a}$ $(\Delta=b^{۲}-۴ac)$

نکته ی ۱۲۸: خط $y=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن سهمی می‌باشد.

نکته ی ۱۲۹: ۱) اگر $\Delta<۰$ معادله جواب ندارد.

۲) اگر $\Delta=۰$ معادله ریشه مضاعف $x_{۱}=x_{۲}=-\frac{b}{۲a}$ دارد.

۳) گر $\Delta>۰$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد $x_{۱},x_{۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$

نکته ی ۱۳۰: اگر a و c مختلف‌العلامت باشند آن‌گاه معادله حتماً دو ریشه دارد.

نکته ی ۱۳۱: **در معادهی $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+b+c=0$ آن‌گاه یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است. همچنین اگر $a+c=b$ آن‌گاه یکی از ریشه‌ها ۱- و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.**

روابط بین ریشه‌ها و ضرائب معادله‌ی درجه‌ی دوم

فرض کنید α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند در این صورت دو رابطه‌ی بسیار مهم زیر برقرار است.

مجموع ریشه‌ها $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

ضرب ریشه‌ها $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

نکته ی ۱۳۲: **اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند آن‌گاه:**

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

نکته ی ۱۳۳: $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$ و $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

نوشتن معادله درجه‌ی دوم با داشتن S و P

فرض کنید α و β دو عدد حقیقی باشند بطوری که $\alpha+\beta=S$ و $\alpha.\beta=P$ در این صورت معادله‌ی درجه‌ی دومی که α و β ریشه‌های آن باشند عبارت است از:

$$x^2-Sx+P=0$$

معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ مفروض است. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله‌ی د اده شده باشد عبارت است از: $cx^2+bx+a=0$

(جای a و c عوض شده است.)

در حالت کلی در یک چندجمله‌ای اگر به جای x، $\frac{1}{x}$ را قرار دهیم ریشه‌های معادله‌ی جدید عکس ریشه‌های معادله‌ی قبلی است.

نمودار سهمی

اگر $a>0$ نمودار $y=ax^2+bx+c$ رو به بالا و $a<0$ نمودار سهمی رو به پایین است. علامت Δ، S و P چگونگی برخورد نمودار سهمی با محور xها و همچنین نواحی که نمودار از آن‌ها عبور می‌کند را تعیین می‌کند. (البته مقدار c نیز چنین خاصیتی دارد.)

معادلات و نامعادلات

مباحث تکمیلی معادلات

معادله ممکن است یک چندجمله‌ای درجه اول و دوم و .... باشد و یا ممکن است با ساده کردن و یا تغییر متغیر به معادله درجه اول و دوم صحیح است.

معادلات گنگ و گویا

برای یافتن تعداد ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ می‌توان منحنی‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را به طور جداگانه در یک دستگاه رسم کرد و سپس تعداد نقاط برخورد آن‌ها را پیدا نمود.

برای حل نامعادلات نیز همینگونه رفتار می‌کنیم.

برای حل معادلات گنگ علاوه بر توجه کردن به دامنه در مواقعی که دو طرف تساوی را به توان زوج می‌رسانید به هم علامت بودن دو طرف تساوی هم توجه کنید.

تعیین‌علامت

جدول تعیین‌علامت $ax+b$ و $ax^{۲}+bx+c$ به صورت زیر است:

x		α	
$ax+b$	a	مخالف a	ق

x		α		
$ax^{۲}+bx+c$	a	موافق ق	a	ق

$\Delta=۰$

x		α		β		
$ax^{۲}+bx+c$	a	موافق ق	a	فاخم	۰	a	ق

$\Delta>۰$

x		α	
$ax^{۲}+bx+c$	a	همواره موافق ق	

$\Delta<۰$

نکته ی ۱۳۴: به شرطی $ax^{۲}+bx+c$ همواره مثبت (منفی) است که $\Delta<۰$ و $a>۰$ $(a<۰)$ باشد.

جلسه‌ی سی و یکم و سی و دوم: قدر مطلق و جزء صحیح

جلسه‌ی سی و سوم: بخش‌پذیری و بسط

بخش‌پذیری

باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای *P(x)* بر $x-a$.

قضیه‌ی (۲۰): فرض کنید $P(x)$ و $G(x)$ دو چندجمله‌ای باشند. در این صورت چندجمله‌ای منحصر به فرد $Q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند بقسمی که درجه R از درجه G کمتر است و:

$$P(x)=G(x).Q(x)+R(x)$$

نکته ی ۱۳۵: اگر مقسوم ($P(x)$) از درجه‌ی n و مقسوم‌علیه ($G(x)$) از درجه‌ی m باشد آن‌گاه خارج‌قسمت ($Q(x)$) از درجه‌ی $n-m$ و باقی‌مانده ($R(x)$) حداکثر از درجه‌ی $m-۱$ می‌باشد.

نکته ی ۱۳۶: باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $P(a)$.

بنابراین $P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است. اگر $P(a)=۰$.

نکته ی ۱۳۷: برای بدست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^n-a فرض می‌کنیم $x^n=y$ و $P(x)$ را بر حسب $x^n=y$ مرتب می‌کنیم حال کافی است در عبارت $P(x)$ بجای y عدد a را جایگزین کنیم یعنی $P(y=a)$ را بیابیم.

نکته ی ۱۳۸: عبارت x^n-a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

اگر n فرد باشد عبارت x^n+a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است.

همچنین اگر n زوج باشد عبارت x^n-a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است.

بسط دوجمله‌ای

با فرض طبیعی بودن n رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$(a+b)^n=\binom{n}{۰}a^nb^۰+\binom{n}{۱}a^{n-۱}b^۱+\dots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\dots+\binom{n}{n}a^۰b^n=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

ویژگی‌های بسط

۱- ضرایب از دو طرف برابرند. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

۲- تعداد جملات $n+۱$ است.

۳- اگر $a=b=۱$ را جایگزین کنیم مجموع ضرایب بدست می‌آید در واقع:

۱) $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$

۲) $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}=\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\dots$

فصل ششم: تابع

جلسه‌ی سی و چهارم: تابع، دامنه و برد

تعریف: **رابطه‌ای که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشد را تابع می‌نامیم.**

نکته ی ۱۳۹: **برای بررسی تابع بودن رابطه‌ی f فرض می‌کنیم (x_1,y_1) و (x_2,y_2) دو زوج مرتب از f باشند آن‌گاه با فرض $x_1=x_2$ اگر ثابت شود $y_1=y_2$ آن‌گاه f تابع است در غیر این صورت تابع نیست. این بدان معنی است که باید برای هر x یک و فقط یک y بدست آید.**

تعریف دامنه و برد

تعریف: **مجموعه‌ی مؤلفه‌های اول تابع را دامنه‌ی تابع می‌نامیم و با D نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم تابع را برد تابع می‌نامیم و با R نشان می‌دهیم.**

اگر f رابطه‌ای از A به B با فرض اینکه A دامنه‌ی تابع باشد می‌نویسیم.

$$f:A\to B$$
$$y=f(x)$$

در این حالت مجموعه‌ی B را هم‌دامنه می‌نامیم. بدیهی است برد تابع زیرمجموعه‌ای از B است.

قرارداد: اگر تابع f در R تعریف شده باشد یعنی دامنه و برد آن زیرمجموعه‌ی R باشد به آن تابع حقیقی می‌گوییم.

تعیین دامنه‌ی یک تابع

نکته ی ۱۴۰: **الف) اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد آن‌گاه دامنه‌ی آن R است.**

ب) دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ همان دامنه‌ی $g(x)$ است. بجز مقادیری که $g(x)=0$ می‌شود.

ج) اگر فرجه‌ی رادیکال $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ فرد باشد آن‌گاه $D_f=D_g$ یعنی برای تعیین دامنه‌ی f کافی است دامنه‌ی g را تعیین کنیم.

د) اگر فرجه‌ی رادیکال $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ زوج باشد آن‌گاه دامنه‌ی f آن قسمتی از دامنه‌ی g است که در شرط $g(x)\ge 0$ صدق می‌کند. به بیان دیگر برای تعیین دامنه‌ی f می‌بایست شرط $g(x)\ge 0$ را بررسی کنیم.

هـ) دامنه‌ی توابع $y=\sin f(x)$ و $y=\cos f(x)$ همان دامنه‌ی f می‌باشد.

و) دامنه‌ی تابع $y=\tan f(x)$ عبارت است از $D_f-\{x\,|\,f(x)=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

ز) دامنه‌ی تابع $y=\cot f(x)$ عبارت است از $D_f-\{x\,|\,f(x)=k\pi\}$

ح) دامنه‌ی تابع $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$ زیرمجموعه‌ای از $D_f\cap D_g$ است. که در سه شرط $f(x)>0$، $g(x)>0$ و $g(x)\ne 1$ صدق می‌کند.

ط) دامنه‌ی توابع $y=\sin^{-1}f(x)$ و $y=\cos^{-1}f(x)$ زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی f است که در شرط $-1\le f(x)\le 1$ صدق می‌کند.

ی) دامنه‌ی توابع $y=\tan^{-1}f(x)$ و $y=\cot^{-1}f(x)$ همان دامنه‌ی f می‌باشد.

روش‌های تعیین برد یک تابع.

روش اول: روش معمول در محاسبه‌ی برد آن است که در ضابطه‌ی تابع، مقدار x را بر حسب y بدست آوریم و سپس از آنجا شرط وجود جواب برای x را بنویسیم. در این حالت محدوده‌ی قابل قبول برای y بدست می‌آید.

روش دوم: اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و M و m به ترتیب ماکسیمم و می‌نیمم f باشند برد تابع همان بازه‌ی $[m,M]$ است.

تذکر: اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید (نزولی اکید) باشد آن‌گاه برد تابع برابر بازه $[f(a),f(b)]$ ($[f(b),f(a)]$) می‌باشد.

روش سوم: برای محاسبه‌ی برد برخی توابع می‌توان از نامساوی‌ها نیز سود برد. بعضی از نامساوی‌های معروف عبارتند از:

۱) $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

۲) $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$

۳) $-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\sin x \pm b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$

۴) $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$

۵) $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$ (x_1 و x_2 نامنفی‌اند.)

نکته ی ۱۴۱: برای محاسبه‌ی برد یک تابع چندضابطه‌ای، ابتدا برد هر یک از ضابطه‌ها را بطور مستقل بدست آورده و سپس بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

نکته ی ۱۴۲: دامنه‌ی تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ عبارت است از $R - \{-\frac{d}{c}\}$ و برد آن برابر است با: $R - \{\frac{a}{c}\}$

تساوی دو تابع

دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به شرطی مساویند که دو شرط زیر برقرار باشد:

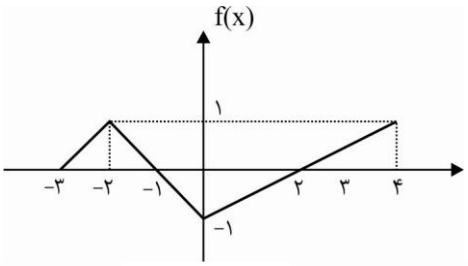
الف) دامنه‌ی هر دو یکسان باشد یعنی $D_f = D_g$

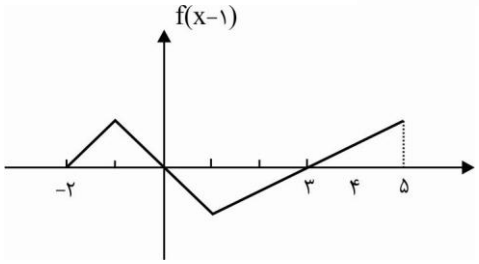
ب) به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک دارای ضابطه‌های یکسانی باشند یعنی $f(x) = g(x)$

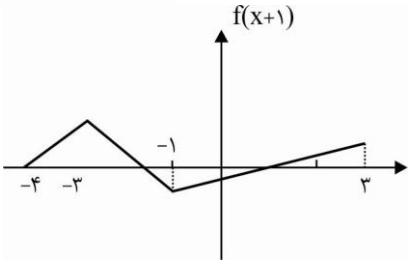
جلسه‌ی سی و پنجم: رسم تابع، اعمال بین توابع

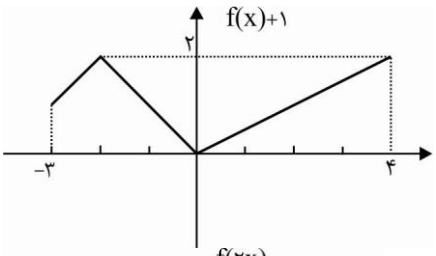
رسم

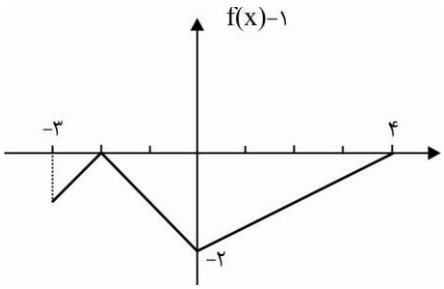
نمودار $y = f(x)$ را در نظر بگیرید. نمودارهای زیر حاصل می‌شوند.

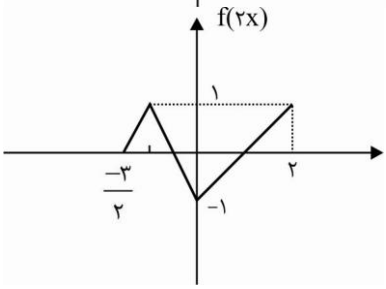


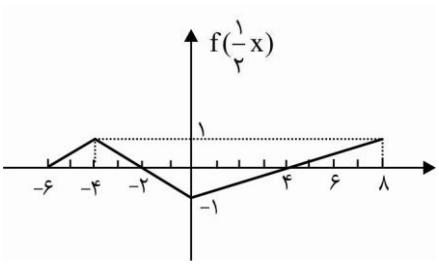


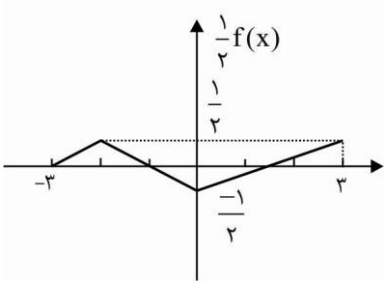


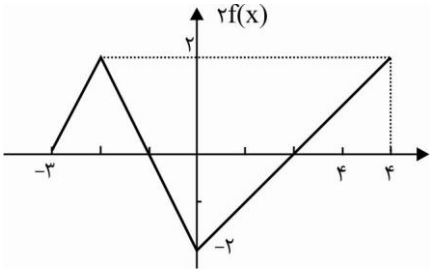


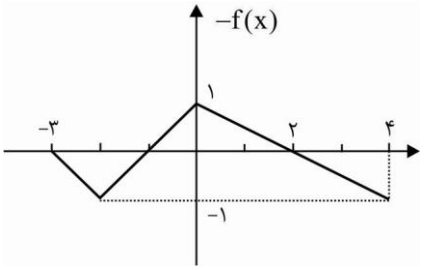


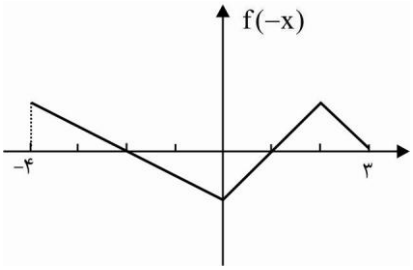


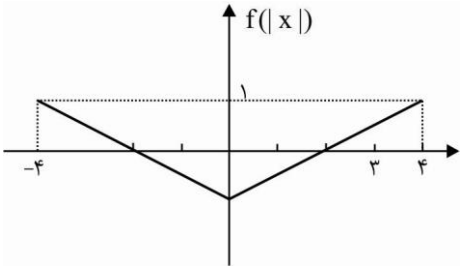


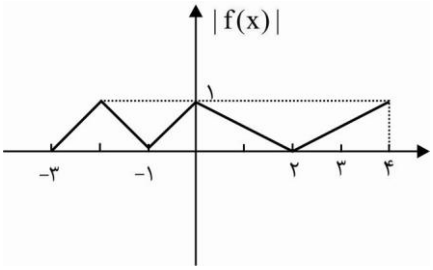












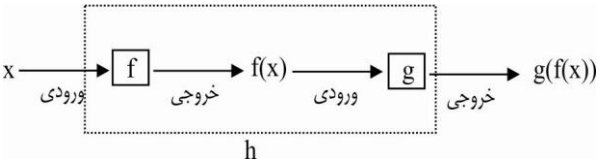
اعمال بین توابع

چهار عمل اصلی

توابع f و g را در نظر بگیرید فرض کنید $(a,b)\in f$ و $(a,c)\in g$ در این صورت منظور ما از $f+g$ تابعی است که زوج مرتب $(a,b+c)$ را شامل می‌شود. منظور از چهار عمل اصلی بر روی توابع انجام چهار عمل اصلی بر روی yهای زوج مرتب‌هایی است که xهای یکسانی دارند بشرطی که در حالت $\frac{f}{g}$، تقسیم بر صفر را استثناء کنیم.

تذکر: منظور ما از kf این است که k را در اعضای برد f ضرب کنیم.

ترکیب دو تابع



نتیجه:

۱) $gof(x)=g(f(x))$

۲) $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

۳) $R_{gof}\subset R_g$

نکته ی ۱۴۳: اگر $(a,b)\in f$ و $(b,c)\in g$ آن‌گاه $(a,c)\in gof$.

نکته ی ۱۴۴: در حالت کلی fog و gof برابر نیستند ولی می‌توان ثابت کرد: $(fog)oh=fo(goh)$

جلسه‌ی سی و ششم: توابع زوج و فرد و یک به یک و تابع معکوس

توابع زوج و فرد

تعریف: فرض کنید برای هر $x \in D_f$ همواره $-x \in D_f$ باشد (یعنی دامنه‌ی f نسبت به مبدأ متقارن باشد) در این صورت اگر $f(-x)=f(x)$ باشد تابع f را زوج و اگر $f(-x)=-f(x)$ باشد تابع f را فرد می‌نامیم.

ویژگی‌های توابع زوج و فرد

نکته ی ۱۴۵: اگر $f(x)$ فرد باشد و $0 \in D_f$ آن‌گاه $f(0)=0$

نکته ی ۱۴۶: تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. پس نقطه‌ی $O(0,0)$ مرکز تقارن توابع فرد است.

نکته ی ۱۴۷: تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است. پس خط $x=0$ محور تقارن توابع زوج است.

نکته ی ۱۴۸: هر تابع با دامنه‌ی متقارن را می‌توان بصورت منحصر به فردی بصورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت. این فرم نوشتن بصورت زیر است:

$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{قسمت زوج}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{قسمت فرد}}$$

نکته ی ۱۴۹: تنها تابعی که هم زوج است و هم فرد تابع ثابت $f(x)=y=0$ است.

نکته ی ۱۵۰: اگر حداقل یکی از توابع حقیقی f یا g زوج و دیگری فرد باشد آن‌گاه fog و gof زوج است. ولی اگر هر دو تابع f و g فرد باشند آن‌گاه fog و gof فرد است.

تابع یک به یک

تعریف: تابع f را یک‌به یک گوئیم هرگاه هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های دوم برابر نداشته باشد. به بیان دیگر yهای برابر نداشته باشد.

بیان ریاضی: تابع $y=f(x)$ یک به یک است هرگاه از فرض $f(x_1)=f(x_2)$ بتوان نتیجه گرفت $x_1=x_2$.

نمودار تابع یک به یک: اگر f یک به یک باشد آن‌گاه هر خط موازی محور xها نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌نند.

نکته ی ۱۵۱: اگر تابع f پیوسته و یک به یک باشد حتماً اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی است.

نکته ی ۱۵۲: اگر تابع f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد یک به یک است.

تذکر: عکس مطلب بالا درست نیست.

نکته ی ۱۵۳: تابع چند ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{cases}$ به شرطی یک به یک است که اولاً تمام ضابطه‌ها یعنی g_1، g_2، ... و g_n یک به یک باشند. ثانیاً بردهای هیچ دو ضابطه‌ای از ضابطه‌های f اشتراکی نداشته باشند.

نکته ی ۱۵۴: تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به شرطی یک به یک است که $ad-bc \neq 0$ و یا $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ باشد.

تابع معکوس

تعریف: اگر تابع f یک به یک باشد. آن‌گاه اگر جای x و y را عوض کنیم تابع جدیدی بدست می‌آید که به آن تابع معکوس f می‌گوئیم و با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم.

نمونه‌ی یافتن معکوس یک تابع

فرض کنید تابع $y=f(x)$ یک به یک باشد برای یافتن معکوس f ابتدا x را بر حسب y بدست می‌آوریم و در نهایت جای x و y را عوض می‌کنیم.

نکته ی ۱۵۵: اگر f^{-1} معکوس تابع f باشد آن‌گاه $D_{f^{-1}}=R_f$ و $R_{f^{-1}}=D_f$

نکته ی ۱۵۶: $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$ و $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$ به بیان دیگر نمودار f و f^{-1} نسبت بـه نیمسـاز $y=x$ قرینه‌اند.

نکته ی ۱۵۷: اگر f^{-1} معکوس f باشد آن‌گاه:

$$\begin{cases} fof^{-1}(x)=x & x\in D_{f^{-1}} \\ f^{-1}of(x)=x & x\in D_f \end{cases}$$

در واقع ترکیب هر تابع با معکوس خود تابع همانی است.

برعکس اگر $fog(x)=x$ و $gof(x)=x$ آن‌گاه f و g معکوس یک‌دیگرند.

نقاط برخورد f و f^{-1}

الف) نقاط برخورد f و f^{-1} نسبت به y=x متقارند.

ب) اگر f نیمساز $y=x$ را در نقطه (a,a) قطع کند تابع f^{-1} نیز در همین نقطه f را قطع می‌کند.

ج) اگر f صعودی اکید باشد جواب معادله‌ی $f(x)=x$ همان طول نقاط برخورد f و f^{-1} است. در واقـع f و f^{-1} فقـط روی $y=x$ متقاطع‌اند.

د) اگر f نزولی اکید باشد ممکن است بعضی از نقاط برخورد f و f^{-1} بیرون نیمساز $y=x$ باشد.

نکته ی ۱۵۸: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

جلسه‌ی سی و هفتم: دوره تناوب

تابع متناوب

تعریف: هرگاه برای هر $x\in D_f$، $x\pm T$ نیز عضوی از D_f باشد و $f(x+T)=f(x)$ آن‌گاه تابع f را متناوب و T را یک دوره‌ی تناوب f می‌نامیم. $(T\neq 0)$

دوره‌ی تناوب اصلی: کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب مثبت را (در صورت وجود) دوره‌ی تناوب اصلی می‌نامیم.

قضیه‌ی (۲۱): در مورد دوره‌ی تناوب اصلی توابع معروف می‌توان گفت:

الف) دوره‌ی تناوب اصلی توابع $\cot^k(ax)$، $\tan^k(ax)$، $\cos^{2k}(ax)$ و $\sin^{2k}(ax)$ برابر است با $T=\frac{\pi}{|a|}$

ب) دوره‌ی تناوب اصلی توابع $\cos^{2k+1}(ax)$، $\sin^{2k+1}(ax)$ برابر است با $T=\frac{2\pi}{|a|}$

ج) دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=[mx]+[-mx]$ برابر است با $T=\frac{1}{|m|}$

د) دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=mx-[mx]$ برابر است با $T=\frac{1}{|m|}$

هـ) دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=(-1)^{[ax]}$ برابر است با $T=\frac{2}{|a|}$.

نکته ی ۱۵۹: تابع ثابت متناوب است ولی دوره تناوب اصلی ندارد.

نکته ی ۱۶۰: همچنین دوره‌ی تناوب اصلی توابع $y=|\sin ax|+|\cos ax|$ و $y=|\tan ax|+|\cot ax|$ برابر $\frac{\pi}{2|a|}$ است.

فصل نهم: مثلثات

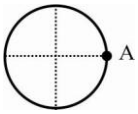
جلسه‌ی سی و هشتم: اتحادهای مثلثاتی مقدماتی

مفاهیم اولیه

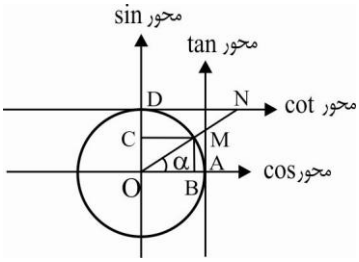
تعریف: واحدهای زاویه: اگر محیط دایره را ۳۶۰ قسمت کنیم هر قسمت را یک درجه می‌نامیم زاویه‌ی مرکزی روبرو به کمانی که طول آن با شعاع دایره برابر است را یک رادیان می‌نامیم.

نکته ی ۱۶۱: اگر زاویه‌ی α برابر D درجه و R رادیان باشد آن‌گاه $\frac{D}{۳۶۰} = \frac{R}{۲\pi}$

نکته ی ۱۶۲: دایره‌ی مثلثاتی دایره‌ای است به شعاع واحد و جهت‌دار به طوری که جهت مثبت آن خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است و A مبدأ کمان‌هاست.



نسبت‌های مثلثاتی

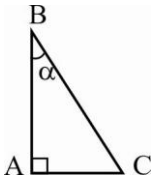


$\sin\alpha = OC$

$\cos\alpha = OB$

$\tan\alpha = AM$

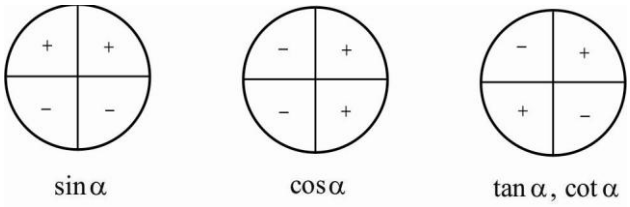
$\cot\alpha = DN$



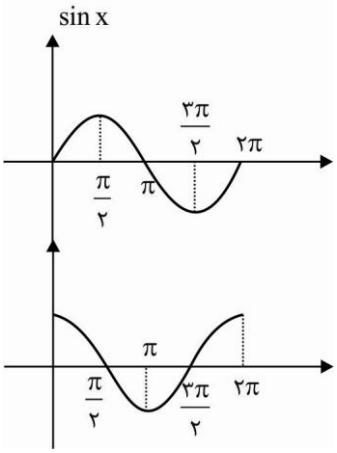
$\sin\alpha = \frac{AC}{BC}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$

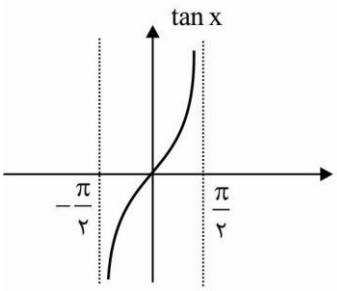
$\tan\alpha = \frac{AC}{AB}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \frac{AB}{AC}$

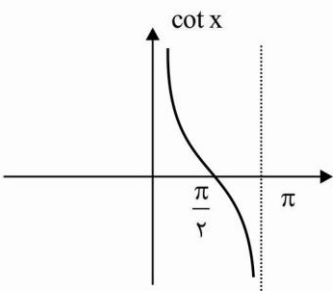
نکته ی ۱۶۳:



نکته ی ۱۶۴: نمودار توابع مثلثاتی در یک دوره تناوب به صورت زیر است:







نکته ی ۱۶۵:

x بر حسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
x بر حسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sinx	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cosx	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tanx	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰
cotx	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞

فرمول‌های تبدیل نسبت‌های مثلثاتی

در حالت کلی برای محاسبه‌ی نسبت مثلثاتی $k\frac{\pi}{۲} \pm x$ ابتدا تا حد امکان مضارب ۲π را از $k\frac{\pi}{۲}$ کم می‌کنیم اگر مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$ باقی بماند نسبت‌ها عوض می‌شوند. (sin به cos و برعکس. همچنین tan به cot و برعکس) ولی اگر مضرب π بماند نسبت‌ها عوض نمی‌شوند. حال برای تشخیص علامت کافی است x را حاده فرض کنیم و بعد ببینیم $n\frac{\pi}{۲} \pm x$ در کدام ناحیه قرار می‌گیرد و علامت آن نسبت در آن ناحیه را به عنوان علامت جواب در نظر می‌گیریم.

فرمول‌های مثلثاتی

الف) فرمول‌های اصلی

۱) $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$

۲) $\tan x . \cot x = ۱$

۳) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

۴) $۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$

۵) $۱ + \cot^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x}$

کاربرد مثلثات در هندسی

در مثلث ABC روابط زیر برقرار است:

۱) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$

۲) $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$

۳) $S = \frac{۱}{۲} bc \sin A$

۴) $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

جلسه‌ی سی و نهم: اتحادهای مثلثاتی

ب) فرمول‌های نسبت‌های مثلثاتی $a \pm b$

۱) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

۲) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

۳) $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{۱ \mp \tan a \tan b}$

نکته ی ۱۶۶:

۱) $\sin x + \cos x = \sqrt{۲} \sin(x + \frac{\pi}{۴})$

۲) $\sin x - \cos x = \sqrt{۲} \sin(x - \frac{\pi}{۴})$

ج) فرمول‌های نسبت‌های مثلثاتی $2a$:

۱) $\sin 2a = 2\sin a\cos a$

۲) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

۳) $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

نتیجه:

۱) $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ ۲) $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

۳) $\cos 2a = \dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$ ۴) $\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$

د) فرمول‌های نسبت‌های مثلثاتی $3a$

۱) $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

۲) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

هـ) فرمول‌های تبدیل جمع به ضرب و برعکس

۱) $\sin a \pm \sin b = 2\sin\dfrac{a\pm b}{2}\cos\dfrac{a\mp b}{2}$

۲) $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$

۳) $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

۴) $\tan a \pm \tan b = \dfrac{\sin(a\pm b)}{\cos a\cos b}$

۵) $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

۶) $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$

۷) $\sin a\sin b = -\dfrac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$

جلسه‌ی چهلم: معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

تمام معادلات مثلثاتی به یکی از سه حالت زیر تبدیل خواهد شد.

حالت اول: اگر $\sin x = \sin\alpha$ باشد آن‌گاه کلیه‌ی جواب‌ها به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi + \pi - \alpha$.

نکته ی ۱۶۷: حالت‌های خاص

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}$

حالت دوم: اگر $\cos x = \cos\alpha$ باشد آن‌گاه کلیه‌ی جواب‌ها به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند.

نکته ی ۱۶۸: حالت های خاص

$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$

حالت سوم: اگر $\tan x = \tan\alpha$ و یا $\cot x = \cot\alpha$، آن‌گاه کلیه‌ی جواب‌ها به صورت $x = k\pi + \alpha$ می‌باشند.

حل معادله‌ی $a\sin x + b\cos x = c$

روش اول: دو طرف را بر a تقسیم می‌کنیم و $\frac{b}{a}$ را برابر $\tan\theta$ می‌گیریم.

روش دوم: دو طرف را بر $\sqrt{a^2+b^2}$ تقسیم می‌کنیم و $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ را برابر $\cos\theta$ و $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ را برابر $\sin\theta$ می‌گیریم.

روش سوم: از اتحادهای $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ و $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ کمک می‌گیریم.

نکته ی ۱۶۹:شرط وجود جواب معادله‌ی $a\sin x + b\cos x = c$ **آن است کـه** $|c| \le \sqrt{a^2+b^2}$ **در حالـت تسـاوی، معادلـه ریشـه‌ی مضاعف دارد.**

حل معادله‌ی $a\tan x + b\cot x = c$

دو طرف را در tanx ضرب می‌کنیم.

نکته ی ۱۷۰: شرط وجود جواب معادله‌ی $a\tan x + b\cot x = c$ **آن است که** $c^2 \ge 4ab$ **باشد. در حالت تساوی معادله ریشـه‌ی مضاعف دارد.**

نکته ی ۱۷۱:فرمول‌های مربوط به نامساوی‌های مثلثاتی

۱) $|\tan x + \cot x| \ge 2 \qquad (ab > 0 \Rightarrow |a\tan x + b\cot x| \ge 2\sqrt{ab})$

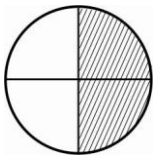
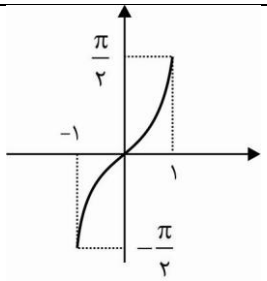
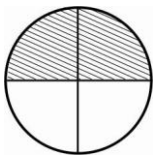
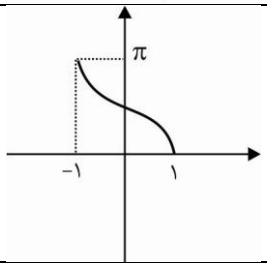
۲) $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$

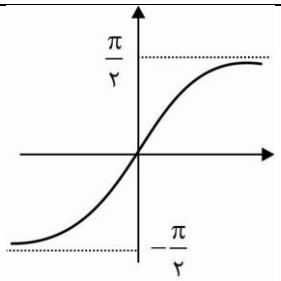
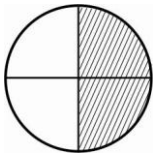
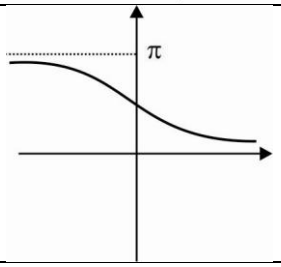
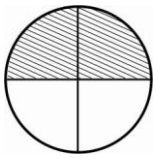
نامساوی اول زمانی به تساوی تبدیل می‌شود که $\tan x = \cot x = \pm 1$ **(در حالت کلی** $a\tan x = b\cot x$ **) و نامساوی دوم زمانی به تساوی تبدیل می‌شود که** $\frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$

جلسه‌ی چهل و یکم: معکوس مثلثاتی

معکوس مثلثاتی

تعریف و نمودار معکوس مثلثاتی: جدول زیر خلاصه‌ای از مفاهیم اولیه معکوس مثلثاتی است:

	خروجی تابع در دایره	نمودار	دامنه و برد	تابع
فرد و در مبدأ بر y=x مماس $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$			$-1 \le x \le 1$ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = \sin^{-1}x$
نه زوج و نه فرد $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$			$-1 \le x \le 1$ $0 \le y \le \pi$	$y = \cos^{-1}x$

$y = \tan^{-1} x$	$x \in R$ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$			فرد و در مبدأ بر $y = x$ مماس $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
$y = \cot^{-1} x$	$x \in R$ $0 < y < \pi$			نه زوج و نه فرد $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$

ویژگی مهم

۱- منظور از $\sin^{-1} x$ ($\tan^{-1} x$) یعنی زاویه‌ای در ربع اول یا چهارم که سینوس (تانژانت) آن برابر x است.

$\sin^{-1} x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = x \qquad -1 \le x \le 1, -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1} x = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = x \qquad x \in R\ ,\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

۲- منظور از $\cos^{-1} x$ $(\cot^{-1} x)$ یعنی زاویه‌ای در ربع اول و دوم که کسینوس (کتانژانت) آن برابر x است.

$\cos^{-1} x = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = x \qquad -1 \le x \le 1\ ,\ 0 \le \alpha \le \pi$

$\cot^{-1} x = \alpha \Rightarrow \cot\alpha = x \qquad x \in R\ ,\ 0 < \alpha < \pi$

نتیجه:

۱) $|x| \le \frac{\pi}{2}$ $\quad \sin^{-1}\sin x = x$ ۲) $|x| < \frac{\pi}{2}$ $\quad \tan^{-1}\tan x = x$

۳) $0 \le x \le \pi$ $\quad \cos^{-1}\cos x = x$ ۴) $0 < x < \pi$ $\quad \cot^{-1}\cot x = x$

ویژگی‌های تکمیلی

۱) $(|x| \le 1)$ $\quad \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ۲) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

۳) $(x > 0)$ $\quad \tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ۴) $(x > 0)$ $\quad \tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1} x$

۵) $\sin\cos^{-1} x = \cos\sin^{-1} x = \sqrt{1 - x^2}$

فصل هفتم: دنباله‌های حسابی و هندسی

جلسه‌ی چهل و دوم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله‌ی حسابی

تعریف: این دنباله به صورت $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots$ می‌باشد. (d قدرنسبت است.)

نکته ی ۱۷۲: جمله‌ی عمومی $a_n = a_1 + (n-1)d$

نکته ی ۱۷۳: مجموع n جمله‌ی اول $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ و یا $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

نکته ی ۱۷۴: $d = a_n - a_{n-1}$ و $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n > 1)$

نکته ی ۱۷۵: **اگر a جمله اول و b جمله آخر یک دنباله حسابی با قدرنسبت d باشد آن‌گاه تعداد جملات این دنباله از رابطه** $n=\frac{b-a}{d}+1$ **بدست می‌آید.**

واسطه‌ی حسابی:

اگر a و b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله حسابی باشند آن‌گاه b را واسطه‌ی حسابی و یا میانگین حسابی a و c می‌نامیم. بدیهی است که $b=\frac{a+c}{2}$.

به بیان دیگر اگر x و y و z سه جمله از دنباله حسابی با فاصله‌ی یکسان باشند آن‌گاه: $y=\frac{x+z}{2}$

درج واسطه حسابی:

دو عدد a و b مفروض است. اگر m واسطه‌ی حسابی بین این دو عدد قرار دهیم به یک دنباله حسابی با $m+2$ جمله می‌رسیم قدرنسبت این دنباله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$d=\frac{b-a}{m+1}$$

دنباله‌ی هندسی

تعریف: **این دنباله به صورت** $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots$ **می‌باشد. (q قدرنسبت است.)**

نکته ی ۱۷۶: **جمله‌ی عمومی** $a_n=a_1q^{n-1}$

نکته ی ۱۷۷: **مجموع n جمله‌ی اول** $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

نکته ی ۱۷۸: $q=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ **و** $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n>1)$

واسطه‌ی هندسی:

اگر a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی باشند، b را واسطه‌ی هندسی (میانگین هندسی) دو عدد a و c می‌نامیم. بدیهی است که $b^2=ac$ و یا $b=\pm\sqrt{ac}$

به بیان دیگر اگر x و y و z سه جمله از دنباله هندسی با فاصله‌ی یکسان باشند آن‌گاه: $y^2=xz$.

درج واسطه‌های هندسی:

دو عدد a و b مفروض‌اند اگر m واسطه‌ی هندسی بین این دو عدد درج کنیم به یک دنباله هندسی با $m+2$ جمله می‌رسیم در این صورت قدرنسبت این دنباله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

(اگر m فرد باشد $q=\pm\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$)

نکته ی ۱۷۹: **اگر قدرنسبت یک دنباله هندسی در شرط** $|q|<1$ **صدق کند آن‌گاه حد مجموع جملات این دنباله (مجموع جملات از اول تا بی‌نهایت) برابر است با:** $\frac{a}{1-q}$

فصل ۸: توابع‌نمایی و لگاریتمی

جلسه‌ی چهل و سوم: تابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی

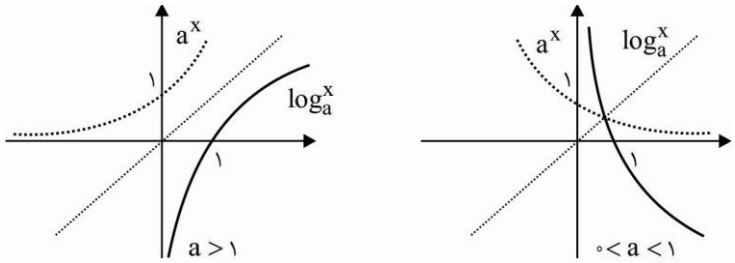
تعریف: **با فرض** $a>0$ **تابع** $y=a^x$ **را نمایی می‌نامیم.**

تابع لگاریتمی

تعریف: تابع $y = a^x$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ یک به یک و معکوس‌پذیر است. معکوس این تابع را به صورت $y = \log_a^x$ نشان می‌دهیم، بنابراین: $y = \log_a^x \Leftrightarrow a^y = x$

نکته ی ۱۸۰: تابع $y = \log_a^x$ به شرطی تعریف شده است که $x > 0$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد. در ضمن برد این تابع R می‌باشد.

نکته ی ۱۸۱: نمودار تابع $y = \log_a^x$



نکته ی ۱۸۲: اگر $a > 1$ تابع $\log_a^x$ صعودی اکید و اگر $0 < a < 1$ تابع $\log_a^x$ نزولی اکید است.

۱) $a > 1$ ۲) $0 < a < 1$

۱) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a^{x_1} < \log_a^{x_2}$ ۱) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a^{x_1} > \log_a^{x_2}$

۲) $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a^x < 0$ ۲) $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a^x > 0$

۳) $1 < x \Leftrightarrow \log_a^x > 0$ ۳) $x > 1 \Leftrightarrow \log_a^x < 0$

۴) $\log_a^x < b \Leftrightarrow x < a^b$ ۴) $\log_a^x < b \Leftrightarrow x > a^b$

خواص تابع لگاریتم

مهم‌ترین خواص لگاریتم عبارت است از:

۱) $\log_a^1 = 0$ ۲) $\log_a^a = 1$ ۳) $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$ ۴) $\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$

۵) $\log_a^{x^n} = n \log_a^x$ ۶) $\log_{a^n}^x = \frac{1}{n} \log_a^x$ ۷) $\log_y^x = \frac{\log_a^x}{\log_a^y}$ ۸) $a^{\log_a^x} = x$

نکته ی ۱۸۳: اگر n یک عدد طبعی باشد آن‌گاه تعداد ارقام n برابر است با $[\log n] + 1$

نکته ی ۱۸۴: اگر a یک عدد اعشاری کم‌تر از یک باشد، تعداد صفرهای بلافاصله بعد از ممیز از رابطه‌ی $\left|[\log n] + 1\right|$ به دست می‌آید.