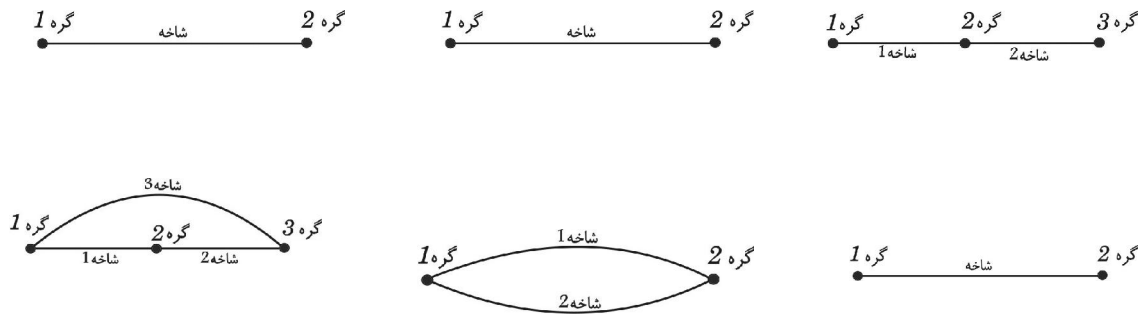
یک گراف شبکه مجموعه ای از گره‌ها و شاخه‌ها با این شرایط که هر شاخه در انتهای خود به یک گره وصل شود تعریف می‌شود.

2- اصطلاحات و تعاریف :

در این بخش برخی تعاریف و اصطلاحاتی را که در نظریه گراف استفاده می‌گردد معرفی می‌نماییم.

شاخه *:* یک شاخه خطی است که نمایش دهنده یک عنصر شبکه و یا ترکیبی از عناصر وصل شده بین دو نقطه است. شاخه هیچ گونه اطلاعاتی راجع به نوع عنصر در اختیار قرار نمی‌دهد.

گره *:* هر نقطه انتهایی یک خط و یا یک نقطه مجزا را گره نامند. یک گره گاهی یک اتصال نیز نامیده می‌شود. بنابراین یک گره در اتصال دو شاخه و یا انتهای هر شاخه جدا وجود دارد. به طور عمومی یک شاخه ممکن است نمایش یک عنصر شبکه از قبیل مقاومت R، سلف L و یا خازن C و یا هر عنصر دیگر مداری باشد. همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد یک شاخه ممکن است نمایش ترکیبی از این عناصر باشد. شکل (2-1) انعطاف پذیری در



شکل (1-1). مثال‌هایی از شاخه‌ها و گره‌ها

انتخاب یک شاخه را نمایش می‌دهد. برای مثال ترکیب موازی RC را می‌توان به عنوان یک شاخه متصل بین دو گره شکل (2-1) دانست و یا شاخه های موازی شکل (2-1-د) را به عنوان دو شاخه موازی فرض کرد.

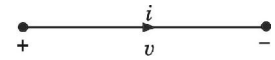
به طور مشابه اتصال سری شکل (2-1-ج) و (2-1-چ) را می‌توان دوشاخه و یا یک شاخه در نظر گرفت. همین طور شکل‌های (2-1-ع) و (1-1-ف) انعطاف پذیری در انتخاب شاخه‌ها و گره‌ها را بدون در نظر گرفتن عناصر شبکه نشان می‌دهد.

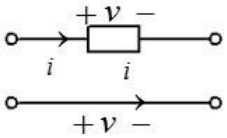
شاخه تعمیم یافته : هر گاه یک عنصر (مقاومت، خازن، سلف و ...) با یک منبع ولتاژ سری و کل آن‌ها باید یک منبع جریان موازی شود شاخه حاصله یک شاخه تعمیم یافته خواهد شد و گراف این مجموعه در شکل نشان داده شده است. از این گراف به عنوان یک گراف قراردادی در ادامه و در بحث تحلیل شبکه های الکتریکی استفاده خواهیم کرد.

2-1 گراف جهت دار یا دیگراف :

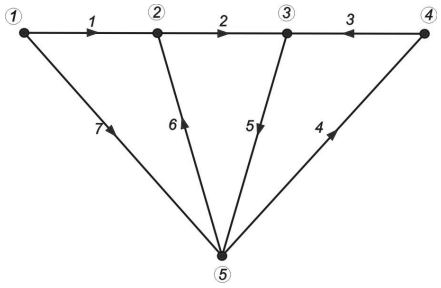
در تحلیل و آنالیز یک شبکه باید شاخه‌ها و گره های یک گراف را شماره گذاری نماییم. یک *گراف جهت دار و یا سودار است اگر تمام گره‌ها و شاخه های آن به طور دلخواه شماره گذاری و جهت گذاری شوند*. به منظور جهت گذاری یک گراف ابتدا باید یک جهت مثبت قراردادی برای تمام جریان‌ها و ولتاژهای شاخه‌ها قرارداد کنیم.

جهت قراردادی برای یک شاخه گراف همان جهت قراردادی ولتاژ و جریان یک عنصر است و جریان ورودی به یک عنصر وارد پلاریته مثبت ولتاژ دو سر عنصر می‌گردد. این قرارداد برای ولتاژ و جریان یک شاخه نیز برقرار است. شکل (2-4) ارتباط بین جهت شاخه و ولتاژ جریان یک المان و گراف آن را نشان می‌دهد.





شکل (2-4) . ارتباط بین جهت شاخه و جهت ولتاژ و جهت عنصر (الف) عنصر (ب) گراف جهت دار



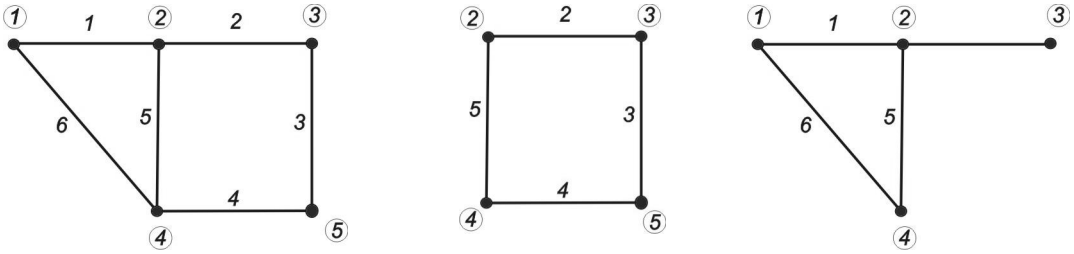
شکل (2-5) . شبکه و گراف جهت دار آن (الـف) شـبکه (ب) گـراف جهـت دار

شکل (2-5-الف) یک شبکه با جهت‌های قراردادی و شکل (2-5-ب) گراف جهت دار آن با گره های 1 تا 5 و شاخه های 1 تا 7 نشان می‌دهد.

2-2 زیرگراف :

یک گراف g_1 زیرگراف گراف g است اگر هر گره از g_1 یک گره از g و هر شاخه از g_1 یک شاخه از g باشد. به بیانی دیگر یک زیرگراف g_1 از گراف g مجموعه ای از شاخه‌ها و گره‌هاست که این شاخه‌ها و گره‌ها در g هم وجود دارد.

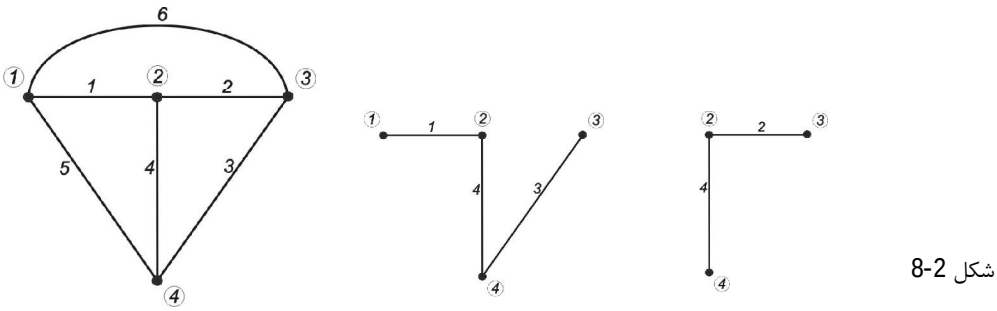
بنابراین برای یک گراف g می‌توان زیر گراف g_1 را با حذف برخی شاخه‌ها و گره های g به دست آورد. شکل (2-7) پنج زیرگراف g_5, g_4, g_3, g_2, g_1 را نشان می‌دهد.



شکل 2-7. زیر گراف‌های g_1, g_2 گراف g

2-3 مسیر :

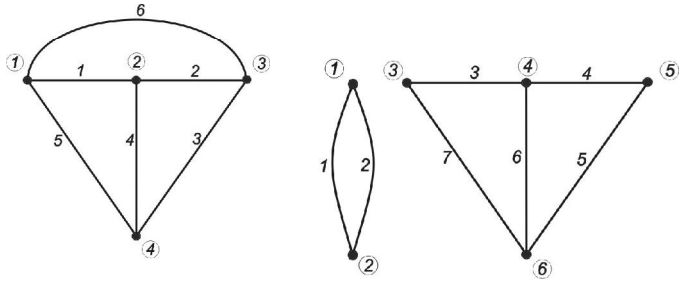
برای یک گراف g، مجموعه ای از شاخه‌هایی که برای رسیدن از یک گره به گره باید بپیماییم مسیر نامیده می‌شودد.



شکل 2-8

2-4 گراف پیوسته :

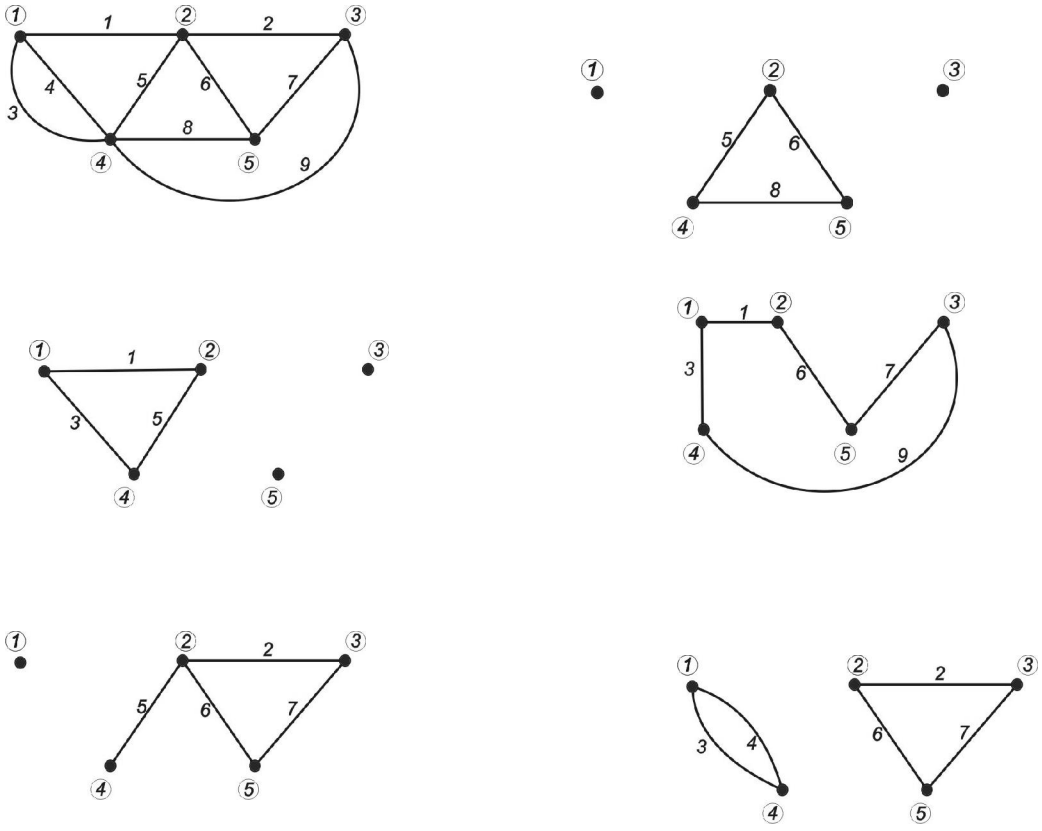
گرافی را پیوسته گویند اگر حداقل یک مسیر از شاخه‌ها بین هر دو جفت گره از گراف وجود داشته باشد. بنابراین در یک گراف پیوسته هر گره در مسیر عبوری شاخه‌ها از گره های دیگر قرار دارد. برای آنکه یک گراف پیوسته باشد لازم نیست که هر گره مستقیماً با یک شاخه به هر گره دیگر وصل شده باشد بلکه تنها شرط آن این است که حداقل یک مسیر بین هر دو گره از گراف وجود داشته باشد. با این قرارداد حتی یک گراف شامل یک گره نیز، پیوسته است.



شکل 2-9 . (الف) گراف پیوسته، (ب) گراف.

2-5 تعریف حلقه :

مجموعه ای از گره های یک گراف را در نظر بگیرید، فرض کنید از گره n_1 از گراف حرکت کنیم و پس از عبور از مجموعه ای از شاخه‌ها به همان گره باز گردیم، در صورتی که از هر شاخه بیش از یک بار عبور نکنیم از همه گره‌ها به جزء گره n_1 فقط یک بار عبور کرده‌ایم این چنین مجموعه ای از شاخه‌ها *حلقه* نامیده می‌شود، به عنوان مثال شکل (2-12-الف) را در نظر بگیرید.



شکل 2-12 . مثال‌هایی از حلقه

2-6 درخت (Tree) :

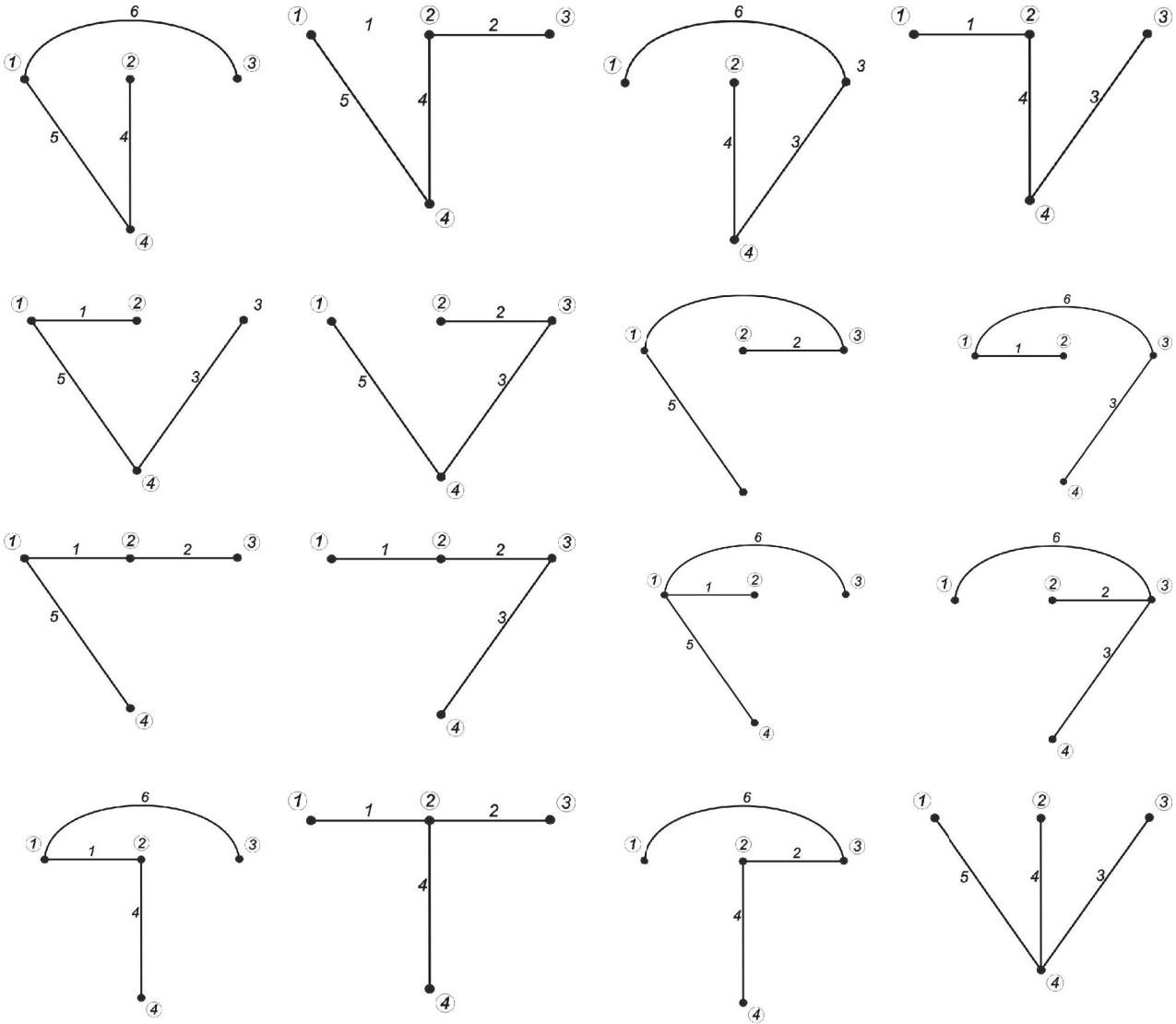
مجموعه ای از شاخه های یک گراف پیوسته که به تمام گره های گراف متصل باشند و تشکیل هیچ حلقه ای را ندهند یک درخت از گراف گویند، به بیان دیگر می‌توان گفت یک درخت از یک گراف پیوسته زیرگرافی پیوسته با خواص زیر است.

الف) درخت T *شامل تمام گره های* g *باشد.*

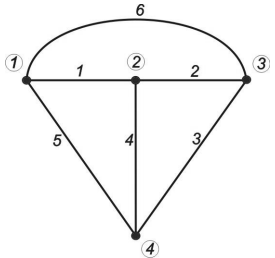
ب) تمام گره‌ها توسط شاخه های درخت به هم متصل هستند و از این رو درخت T یک زیرگراف پیوسته است.

ج) درخت T شامل هیچ حلقه ای نیست.

به شاخه های یک درخت ترکه نیز گفته می‌شود. به زیرگراف متشکل از شاخه های باقیمانده گراف g (شاخه های غیر از شاخه های درخت) مکمل درخت و به شاخه های این مکمل، لینک $(Link)$ و یا وتر $(chord)$ گویند. ذکر این نکته ضروری است که هر گراف ساده دارای درخت‌های متعددی است. به عنوان مثال گراف شکل (2-13) دارای 16 درخت است که در شکل (2-14) نمایش داده شده است.



شکل 2-14. درخت‌های گراف 2-13



شکل 2-13. گراف g

2-7 ارتباط بین شاخه های درخت و گره‌ها

تعداد شاخه های درخت یکی کمتر از تعداد کل گره های گراف است بنابراین در صورتی که تعداد کل گره‌ها را n_t بنامیم آنگاه :

1 - تعداد کل گره‌ها= تعداد شاخه های درخت

$$\text{تعداد شاخه های درخت} \quad = \quad n_t - 1 \tag{4-2}$$

همچنین در صورتی که تعداد کل شاخه های گراف g را b و n را به صورت $n = n_t - 1$ تعریف کنیم: داریم:

$$\text{تعداد شاخه های لینک} \quad + \quad \text{تعداد شاخه های درخت} \quad = \quad \text{تعداد کل شاخه های گراف}$$

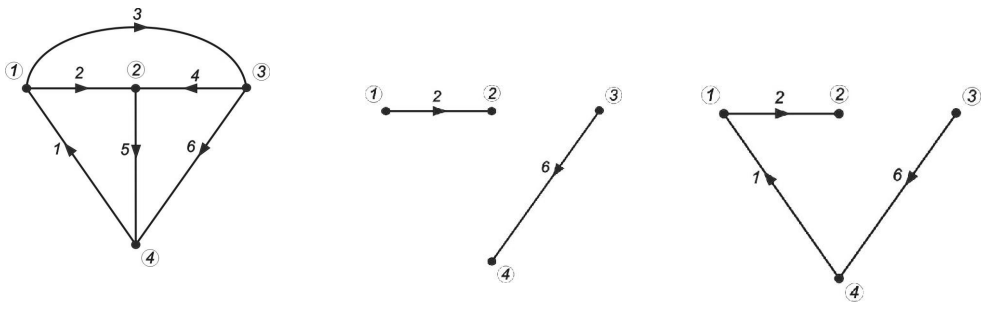
$$\text{تعداد شاخه های لینک} \quad + \quad b = (n_t - 1)$$

با توجه به رابطه فوق

$$\text{تعداد شاخه های لینک} \quad = \quad b - (n_t - 1) = b - n \tag{5-2}$$

2-8 کات ست (*cut* set)

می‌توان با برداشتن شاخه های خاصی از یک گراف پیوسته آن‌را به دو بخش مجزا تقسیم نمود. تعریف کات ست ارتباط تنگاتنگی با این خاصیت دارد. گراف شکل (2-15-لف) را در نظر بگیرید با برداشتن شاخه های ۴،۳،1 و 5 گراف به دو بخش مجزا مطابق شکل (2-15-ب) که هر بخش پیوسته می‌باشد، تقسیم می‌گردد.



شکل 2-15

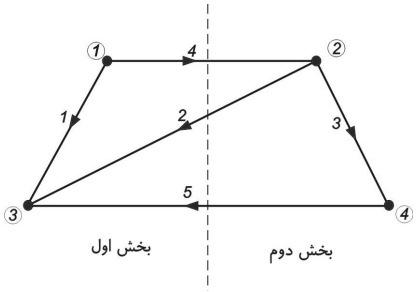
حال در صورتی که یکی از شاخه های برداشته شده مثلاً شاخه 1 را در شکل (15-ب) جایگزین نماییم شکل (15-ج) که گرافی پیوسته است به دست می‌آید به همین ترتیب اگر به جای شاخه 1 شاخه ۴،3 یا 5 را در شکل (15- ب) جایگزین نماییم به ترتیب شکل‌های (15-د)، (15-ر) و (15-س) که همگی گراف‌های پیوسته ای هستند حاصل می‌گردد. مجموعه شاخه های {5، 4، 3، 1 }را کات ست گراف پیوسته (15-الف) می‌نامند. تعریف زیر تعریف کامل کات ست است.

یک کات ست مجموعه ای از حداقل شاخه های یک گراف پیوسته است که اولاً با برداشتن همگی آن‌ها گراف دقیقه به دو بخش مجزا از هم تبدیل شود و ثانیاً اینکه با افزودن هر یک از آن‌ها به گراف به دو بخش مجزا تقسیم شده، گرافی پیوسته حاصل گردد.

به بیانی دیگر شرط دوم را چنین می‌توان بیان نمود که اگر همه‌ی شاخه های مجموعه کات ست به جز یکی قطع گردند، گراف حاصل پیوسته باقی بماند.

2-9 نمایش کات ست و جهت آن در یک گراف :

همان طور که قبلاً بیان شد یک کات ست گراف را به دو بخش مجزا تقسیم می‌کند. در شکل (2-16) خط چین گذرنده از مجموعه شاخه های کات ست {2،5، 4} گراف را برش می‌دهد. جهت کات ست را می‌توان از بخش اول به بخش دوم و یا به عکس در نظر گرفت.

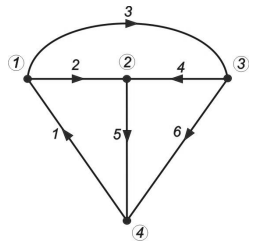


شکل 2-16

مثال 2-1:

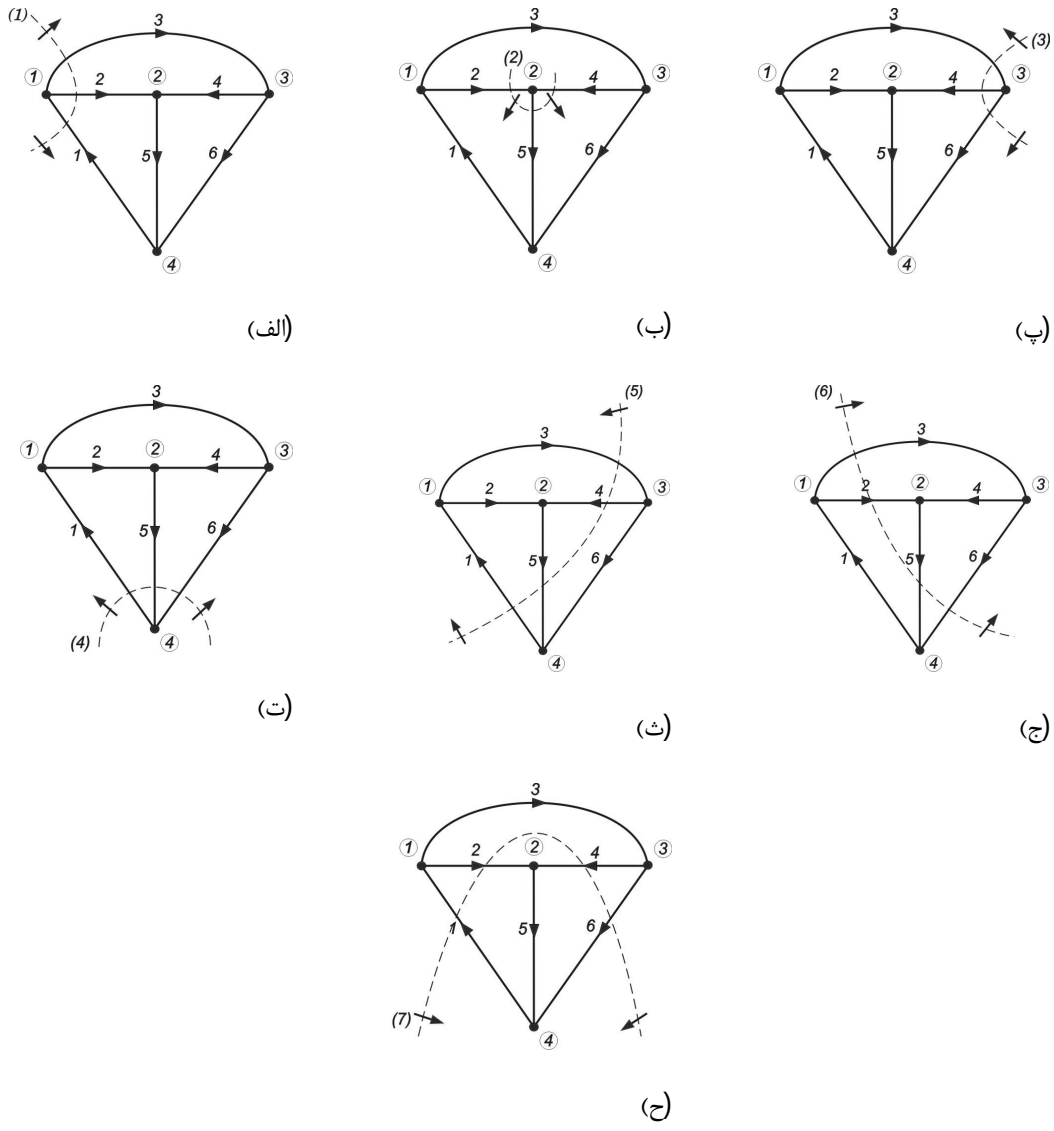
مجموعه کات ست‌های موجود در گراف شکل (2-17) را تعیین نمایید.

حل:



شکل 2-17 برای مثال 2-1

شکل (2-18) کات ست‌های ممکن را نشان می‌دهد.



شکل 2-18 کات ست‌های مختلف گـراف 2-

(الف) کات ست شماره (1) با شاخه های {3، 1،2}

(ب) کات ست شماره (2) با شاخه های {5، 2،4}

(پ) کات ست شماره (3) با شاخه های {3،4،6}

(ت) کات ست شماره (4) با شاخه های {6، 5، 1}

(ث) کات ست شماره (5) با شاخه های {5، 4، 3، 1}

(ج) کات ست شماره (6) با شاخه های {6، 5، 3، 2 }

(ح) کات ست شماره (7) با شاخه های {6، 4، 2، 1}