

کلاس کنکور

آکادمی کنکور دانشگاه تهرانی ها

شماره تلفن : 021-88683915

آدرس:

تهران - سعادت آباد - بلوار فرهنگ - کوی فرهنگ -
شهرک نیایش - خیابان 12 متری محمدی - پلاک 7

اولین

موسسه ی

کنکوری
کشور

با کادر

رتبه های تک
رقمی

و دو رقمی
کنکور

مشاوره ی حضوری ، تلفنی و آنلاین با دانشجویان دانشگاه تهران

و صنعتی شریف



اگر دو بار از رابطه‌ی (۱) مشتق بگیریم، رابطه‌ی بین شتاب‌ها بدست خواهد آمد

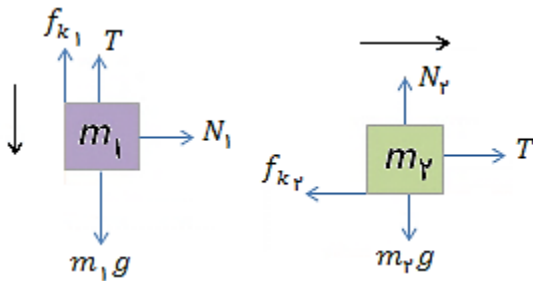
$$\ddot{x}_3 - \ddot{x}_2 + \ddot{y}_1 = 0 \quad (2)$$

همچنین مطابق شکل ۲ داریم

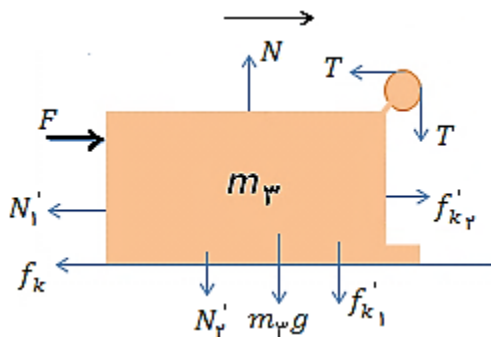
$$x_3 = x_1 \Rightarrow \ddot{x}_3 = \ddot{x}_1 \quad (3)$$

رسم نیروهای وارد بر سه جسم

در حالت کلی نیروهای زیر بر این سه جسم وارد می‌شود.



شکل ۳



شکل ۴

- فرض کردیم که دو جسم m_2 و m_3 به سمت راست حرکت می‌کنند و جسم m_1 به سمت پایین.

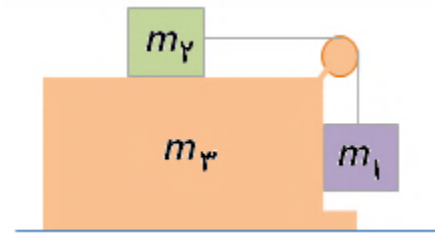
- نیروی F یک نیروی خارجی است که ممکن است به واگن وارد شود.

استفاده از قیدها در حل مسائل دینامیک

دو جسم متصل بر روی واگن

مقدمه: در بعضی از مسائل پیچیده‌ی دینامیک، به علت حرکت اجسام بر روی هم، استفاده از قیدها حل مساله را تا حد زیادی آسان می‌کند.

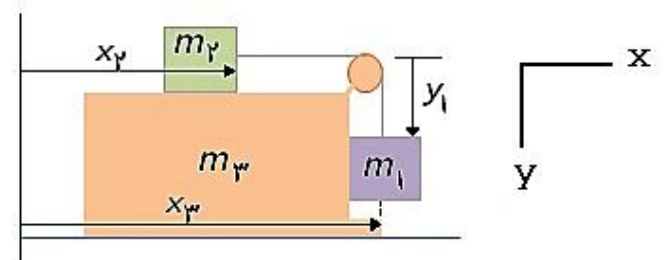
دو جسم متصل بر روی واگن: دو جسم m_1 و m_2 مطابق شکل بر روی واگن m_3 قرار دارند.



شکل ۱

دو جسم m_2 و m_3 (واگن) در امتداد افقی حرکت می‌کنند. جسم m_1 هم در راستای قائم حرکت می‌کند. در ضمن جسم m_1 در امتداد افقی به همراه جسم m_3 (واگن) حرکت می‌کند.

این مجموعه به هر طریقی حرکت کند، بین شتاب سه جسم ارتباط خاصی وجود دارد. مطابق شکل محورهای مختصات را در نظر می‌گیریم.



شکل ۲

طول طناب (ℓ) را بر حسب مختصات اجسام به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم

$$\ell = x_3 - x_2 + y_1 \quad (1)$$

الف) بین سطوح اصطکاک نباشد

اگر بین سطوح اصطکاک نباشد، از قانون دوم خواهیم داشت

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 \ddot{y}_1 \\ T = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{m_1}{m_2} (g - \ddot{y}_1) \quad (۵)$$

اگر نتیجه‌ی بالا را در رابطه‌ی (۲) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{m_2 + m_1} (m_1 g - m_2 \ddot{x}_2) \quad (۶)$$

ب) بین سطوح اصطکاک باشد

با فرض اینکه بین سطوح اصطکاک باشد، از قانون دوم نیوتون خواهیم داشت

$$\begin{cases} m_1 g - T \mp f_{k1} = m_1 \ddot{y}_1 \\ N_1 = m_1 \ddot{x}_1 \\ T \mp f_{k2} = m_2 \ddot{x}_2 \\ N_2 = m_2 g \end{cases} \quad (۷)$$

$$\rightarrow \ddot{y}_1 = g - \frac{m_2}{m_1} \ddot{x}_2 \mp \frac{\mu_2 m_2}{m_1} g \mp \mu_1 \ddot{x}_1 \quad (۸)$$

از ترکیب رابطه‌ی (۸) با دو رابطه‌ی (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$\ddot{y}_1 = g \left(\frac{m_1 \mp \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \right) - \ddot{x}_2 \left(\frac{m_2 \pm \mu_1 m_1}{m_1 + m_2} \right) \quad (۹)$$

- در روابط (۷) و (۸)، اگر جسم m_1 در حال پایین رفتن باشد،

علامت بالایی $\mp$ و $\pm$ را در نظر می‌گیریم و در صورتی که جسم

m_1 در حال بالا رفتن باشد، علامت پایینی آنها را.

۱ در شکل ۱ شتاب حرکت واگن چقدر باشد تا جسم

$m_1 = 10 \text{ kg}$ با سرعت ثابت پایین بیاید؟ $m_2 = 4 \text{ kg}$ و

ضریب اصطکاک بین سطوح ۰٫۲ است.

✓ اگر جسم m_1 با سرعت ثابت پایین بیاید، شتاب آن در

امتداد قائم صفر است؛ یعنی $\ddot{y}_1 = 0$. حال از رابطه‌ی (۹) خواهیم داشت

$$0 = g \left(\frac{m_1 - \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \right) - \ddot{x}_2 \left(\frac{m_2 + \mu_1 m_1}{m_1 + m_2} \right) \rightarrow$$

$$\ddot{x}_2 = g \left(\frac{m_1 - \mu_2 m_2}{m_2 + \mu_1 m_1} \right) \rightarrow$$

$$\ddot{x}_2 = 10 \times \left(\frac{10 - 0.2 \times 4}{4 + 0.2 \times 10} \right) = \boxed{\frac{92}{6} \text{ m/s}^2}$$

۲ در شکل ۱ از اصطکاک صرف‌نظر شده است و واگن با

شتاب ثابت a در امتداد افق در حرکت است ($m_1 = m_2$).

الف) چقدر باشد تا جسم m_2 بر روی واگن نلغزد؟

ب) اگر شتاب واگن 8 m/s^2 باشد، شتاب سقوط جسم m_1

چقدر است؟

ج) اگر شتاب واگن 12 m/s^2 باشد، جسم m_1 با چه شتابی و

در چه جهتی حرکت می‌کند؟

چ) واگن با چه شتابی حرکت کند تا جسم m_2 با شتاب 2 m/s^2

به سمت چپ حرکت کند؟

✓ الف) اگر جسم m_2 بر روی واگن ساکن باشد، جسم m_1

نیز در راستای قائم حرکتی نخواهد داشت؛ یعنی $\ddot{y}_1 = 0$

است. حال از رابطه‌ی (۹) داریم

$$\ddot{x}_2 = g = a = \boxed{10 \text{ m/s}^2}$$

ب) از رابطه‌ی (۶) خواهیم داشت

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{2}(g - 8) = \boxed{1 \text{ m/s}^2}$$

ج) دوباره از رابطه‌ی (۶) داریم

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{2}(g - 12) = \boxed{-1 \text{ m/s}^2}$$

چون ما در امتداد قائم رو به پایین را مثبت گرفته‌ایم، جسم m_1 در این حالت شتاب رو به بالا دارد.

چ) چون در امتداد افق به سمت راست را مثبت گرفته‌ایم، در رابطه‌ی (۵) به جای $\ddot{x}_2$ عدد ۲- قرار می‌دهیم

$$-2 = (g - \ddot{y}_1) \rightarrow \ddot{y}_1 = 12 \text{ m/s}^2$$

حال از رابطه‌ی (۶) داریم

$$12 = \frac{1}{2}(g - \ddot{x}_3) \rightarrow \boxed{\ddot{x}_3 = -14 \text{ m/s}^2}$$

یعنی شتاب واگن هم باید به سمت چپ باشد.

۳  فرض کنید نیروی خارجی F مطابق شکل ۴ به واگن وارد می‌شود و سطوح بدون اصطکاک است.

الف) نیروی F چقدر باشد تا جسم m_1 با شتاب 2 m/s^2 بالا رود؟

ب) نیروی عمودی وارد بر سطح افقی توسط واگن چقدر است؟
($m_1 = m_2 = m_3 = 10 \text{ kg}$).

✓ الف) از رابطه‌ی (۶) شتاب واگن برابر است با

$$-2 = \frac{1}{2}(g - \ddot{x}_3) \rightarrow \ddot{x}_3 = 14 \text{ m/s}^2$$

از قانون دوم نیوتون برای واگن داریم

$$F - T - N_1' = m_3 \ddot{x}_3$$

از طرف داریم

$$\begin{cases} T = m_1 g - m_1 \ddot{y}_1 \\ N_1' = m_1 \ddot{x}_1 = m_1 \ddot{x}_3 \end{cases}$$

پس سرانجام خواهیم داشت

$$F - m_1 g + m_1 \ddot{y}_1 - m_1 \ddot{x}_3 = m_3 \ddot{x}_3$$

$$\rightarrow F = (m_3 + m_1) \ddot{x}_3 + m_1 (g - \ddot{y}_1)$$

$$\rightarrow \boxed{F = 400 \text{ N}}$$

ب) با توجه به شکل ۴ داریم

$$N = N_2' + T + m_3 g$$

از طرفی داریم

$$\begin{cases} T = m_1 g - m_1 \ddot{y}_1 \\ N_2' = m_2 g \end{cases}$$

پس در کل داریم

$$N = (m_2 + m_1 + m_3)g - m_1 \ddot{y}_1 = \boxed{320 \text{ N}}$$

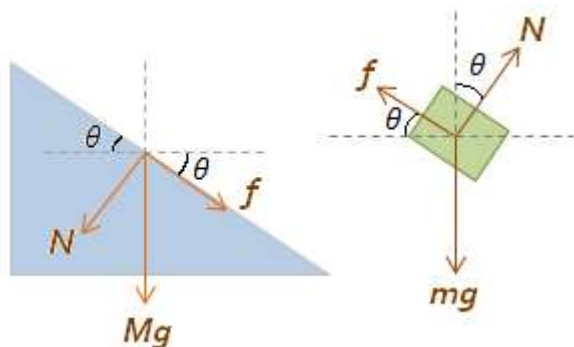
مطابق شکل ما می‌توانیم بنویسیم

$$\tan \theta = \frac{h - y}{x - X} \quad (1)$$

و همین قید موجود در این مساله است. اگر از رابطه‌ی (۱) دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم، رابطه‌ی بین شتاب این دو جسم بدست خواهد آمد

$$\ddot{x} - \ddot{X} = -\ddot{y} \cot \theta \quad (2)$$

اکنون برای مشخص کردن شتاب دو جسم بر اساس کمیت‌های موجود در مساله، نیروهای وارد بر دو جسم را در نظر گرفته و از قانون دوم نیوتون کمک می‌گیریم.



با تجزیه‌ی این نیروها در راستای محورها، قانون دوم نیوتون را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{cases} N \sin \theta - f \cos \theta = m\ddot{x} \\ N \cos \theta + f \sin \theta - mg = m\ddot{y} \\ f \cos \theta - N \sin \theta = M\ddot{X} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N(\sin \theta - \mu \cos \theta) = m\ddot{x} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(\cos \theta + \mu \sin \theta) - mg = m\ddot{y} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(\mu \cos \theta - \sin \theta) = M\ddot{X} & (5) \end{cases}$$

از دو رابطه‌ی (۳) و (۵) داریم

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M} \ddot{x} \quad (6)$$

و از رابطه‌ی (۳) و (۴) خواهیم داشت

$$\ddot{y} = \ddot{x} \frac{\cos \theta + \mu \sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta} - g \quad (7)$$

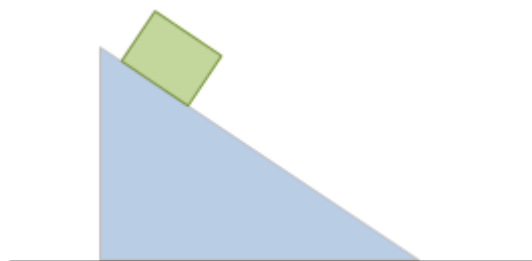
حال از سه رابطه‌ی (۲)، (۶) و (۷) خواهیم داشت

مکعب و گوه

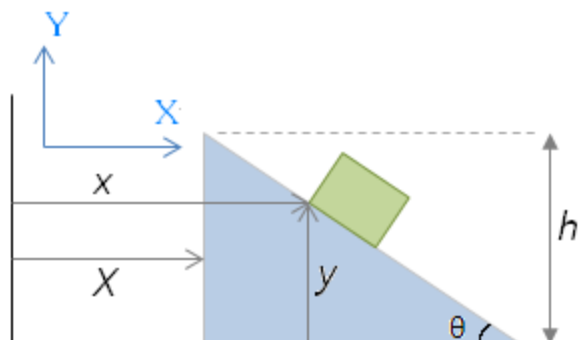
مقدمه: در این نوشته قصد بررسی شرایط حرکت جسم مکعبی m بر روی یک گوه (سطح شیبدار) را داریم.

چگونه: در صورتی که به هنگام سر خوردن یا بالا رفتن مکعب بر روی گوه، گوه نیز حرکت کند، تعیین شتاب این دو جسم کمی سخت خواهد شد. در چنین مسئله‌ای، انتخاب درست محورهای مختصات و رسم درست نیروها در رسیدن به پاسخ سوال اهمیت اساسی دارد.

🧨 مطابق شکل مکعبی به جرم m را بر روی گوه‌ای به جرم M رها می‌کنیم. شتاب گوه و مکعب را پیدا کنید. فرض کنید گوه با سطح اصطکاکی ندارد و ضریب اصطکاک بین مکعب و گوه μ است طوری که $\tan \theta > \mu$ است.



✅ ابتدا محورهای مختصات را مطابق شکل در نظر می‌گیریم.



همانند سوال قبل، مطابق شکل ما می‌توانیم بنویسیم

$$\tan \theta = \frac{h - y}{x - X} \quad (10)$$

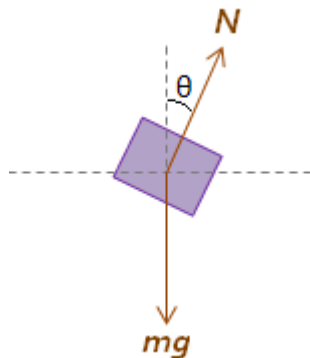
اگر از رابطه‌ی (۱۰) دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم، رابطه‌ی بین شتاب‌ها بدست خواهد آمد

$$\ddot{x} - \ddot{X} = -\ddot{y} \cot \theta \quad (11)$$

و چون $\ddot{X} = A$ است، خواهیم داشت

$$\ddot{x} - A = -\ddot{y} \cot \theta \quad (12)$$

حال نیروهای وارد بر مکعب را رسم می‌کنیم و آنها را در صورت نیاز بر روی محورهای مختصات تجزیه می‌کنیم.



حال قانون دوم نیوتون را بر روی دو محور برای مکعب می‌نویسیم

$$\begin{cases} N \sin \theta = m\ddot{x} \\ N \cos \theta - mg = m\ddot{y} \end{cases} \quad (13)$$

$$(14)$$

از سه رابطه‌ی (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) خواهیم داشت

$$\ddot{x} = A \sin^2 \theta + g \sin \theta \cos \theta \quad (15)$$

حال از دو رابطه‌ی (۱۲) و (۱۵) داریم

$$\ddot{y} = A \sin \theta \cos \theta - g \sin^2 \theta \quad (16)$$

از رابطه‌ی (۱۵) داریم $\ddot{x} > 0$ و از رابطه‌ی (۱۶) هم داریم

$$\begin{cases} \ddot{y} = 0 & \text{if } A = g \tan \theta \\ \ddot{y} < 0 & \text{if } A < g \tan \theta \\ \ddot{y} > 0 & \text{if } A > g \tan \theta \end{cases} \quad (17)$$

$$\ddot{x} = \frac{g \cot \theta}{1 + \frac{m}{M} + \cot \theta \left(\frac{\cos \theta + \mu \sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta} \right)} \quad (8)$$

به همین ترتیب از دو رابطه‌ی (۷) و (۸) خواهیم داشت

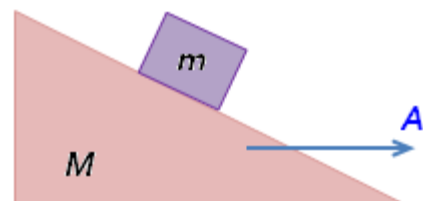
$$\ddot{y} = g \left(\frac{\cot \theta \left(\frac{\cos \theta + \mu \sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta} \right)}{1 + \frac{m}{M} + \cot \theta \left(\frac{\cos \theta + \mu \sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta} \right)} - 1 \right) \quad (9)$$

در رابطه‌ی (۸)، $\ddot{x} > 0$ است و در رابطه‌ی (۹)، $\ddot{y} < 0$ است. به عبارتی مکعب در امتداد افق به سمت راست و در امتداد قائم به سمت پایین شتاب می‌گیرد.

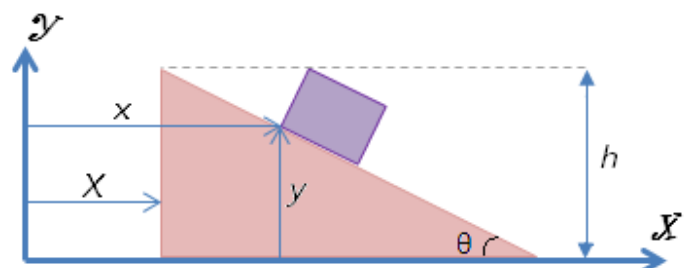
در حالت خاص، اگر $\mu=0$ ، $\theta=\pi/4$ و $M=m$ باشد، $\ddot{y} = -\frac{2g}{3}$ و $\ddot{x} = \frac{g}{3}$ خواهد بود.

شرط $\tan \theta > \mu$ برای آن است که مطمئن شویم با رها کردن مکعب بر روی گوه، مکعب رو به پایین سُر خواهد خورد. با سُر خوردن مکعب رو به پایین، گوه به سمت چپ حرکت خواهد کرد.

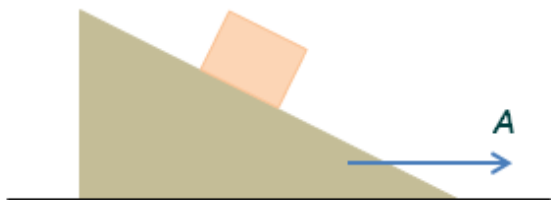
۲ مطابق شکل مکعبی به جرم m بر روی گوه‌ای به جرم M قرار دارد و گوه دارای شتاب رو به راست A می‌باشد. شتاب مکعب را حساب کنید. فرض کنید تمامی سطوح بدون اصطکاک هستند.



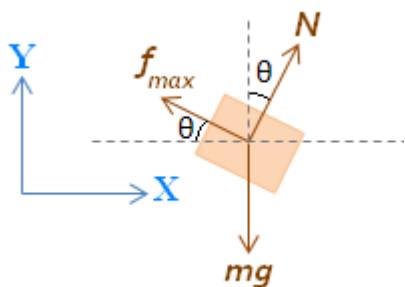
ابتدا محورهای مختصات را مانند شکل در نظر می‌گیریم. ✓



🧨 ۴ مطابق شکل مکعبی به جرم m بر روی گوه‌ای به جرم M و دارای اصطکاک قرار دارد و گوه دارای شتاب A به راست است. مکعب چگونه حرکت خواهد کرد؟



✓ با شرط $\tan\theta > \mu_s$ ، مکعب با قرار گرفتن بر روی گوه رو به پایین خواهد لغزید. گوه را می‌توان با آنچنان شتابی به سمت راست حرکت داد که مکعب بر روی آن ساکن بماند. این مقدار شتاب دارای حداقل و حداکثر مقداری است. حداقل این شتاب موقعی است که مکعب بر روی گوه در آستانه‌ی حرکت به سمت پایین قرار دارد و نیروی اصطکاک سکون ماکزیمم به سمت بالای گوه به مکعب وارد می‌شود. محورهای مختصات و نیروهای وارد بر مکعب مانند شکل زیر است



مکعب در امتداد محور Y حرکتی ندارد و در امتداد محور X با شتاب ثابت A حرکت می‌کند. از قانون دوم نیوتون در امتداد این دو محور داریم

$$N \cos \theta + f_{\max} \sin \theta = mg \quad (21)$$

$$N \sin \theta - f_{\max} \cos \theta = mA_{\min} \quad (22)$$

از دو رابطه‌ی اخیر داریم

$$A_{\min} = g \frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \quad (23)$$

به عبارتی اگر مکعب و گوه از حالت سکون شروع به حرکت کنند، مکعب در امتداد محور X پیوسته به سمت راست حرکت خواهد کرد. اما در امتداد قائم با توجه به مقدار شتاب گوه، ممکن است سه حالت پیش بیاید:

۱- مکعب در امتداد قائم حرکت نداشته باشد ($\ddot{y} = 0$)

۲- مکعب در امتداد قائم پایین بیاید ($\ddot{y} < 0$)

۳- یا اینکه مکعب در امتداد قائم بالا رود ($\ddot{y} > 0$)

🧨 ۳ اگر در سوال ۲، گوه دارای شتاب A به چپ باشد، شتاب مکعب را حساب کرد؟
✓ در این صورت شتاب گوه $-A$ خواهد بود و روابط (۱۵) و (۱۶) به شکل زیر درخواهند آمد

$$\begin{cases} \ddot{x} = -A \sin^2 \theta + g \sin \theta \cos \theta \\ \ddot{y} = -A \sin \theta \cos \theta - g \sin^2 \theta \end{cases} \quad (18)$$

$$(19)$$

این بار از رابطه‌ی (۱۹) داریم $\ddot{y} < 0$ و از رابطه‌ی (۱۸) داریم

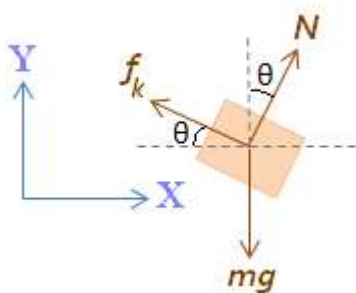
$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 & \text{if } A = g \cot \theta \\ \ddot{x} < 0 & \text{if } A > g \cot \theta \\ \ddot{x} > 0 & \text{if } A < g \cot \theta \end{cases} \quad (20)$$

به عبارتی اگر مکعب و گوه از حالت سکون شروع به حرکت کنند، مکعب در امتداد محور Y پیوسته به سمت پایین حرکت خواهد کرد؛ یعنی مکعب بر روی گوه رو به پایین سر خواهد خورد. اما در امتداد محور X با توجه به مقدار شتاب گوه، ممکن است سه حالت پیش بیاید:

۱- مکعب در امتداد افق ساکن باشد ($\ddot{x} = 0$)

۲- مکعب در امتداد افق به سمت چپ برود ($\ddot{x} < 0$)

۳- یا اینکه مکعب در امتداد افق به سمت راست برود ($\ddot{x} > 0$)



$$\ddot{x} + A = -\ddot{y} \cot \theta \quad (27)$$

$$N \sin \theta - N \mu_k \cos \theta = m \ddot{x} \quad (28)$$

$$N \cos \theta + N \mu_k \sin \theta - mg = m \ddot{y} \quad (29)$$

از این سه رابطه بدست می‌آید

$$\ddot{x} = (g - A \tan \theta)(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \cos \theta \quad (30)$$

و نیز

$$\ddot{y} = -A \sin \theta (\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - g \sin \theta (\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \quad (31)$$

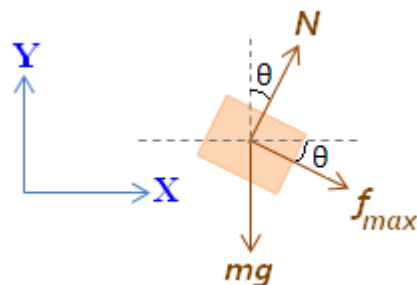
که اگر $\mu_k = 0$ باشد، رابطه‌ی (۳۰) به رابطه‌ی (۱۸) و رابطه‌ی (۳۱) به رابطه‌ی (۱۹) تبدیل می‌شود.

و اما اگر $\tan \theta < \mu_s$ برقرار باشد، مکعب تا زمانی که گوه با شتابی کمتر از $A_{\max}$ حرکت می‌کند، بر روی گوه ساکن خواهد بود. مقدار $A_{\max}$ از روشی مشابه سوال ۴ برابر است با

$$A_{\max} = g \frac{\mu_s \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \quad (32)$$

به ازای $A > A_{\max}$ ، مکعب رو به پایین سُر خواهد خورد.

به ازای $A < A_{\min}$ ، مکعب بر روی گوه رو به پایین خواهد لغزید. مقدار بیشینه‌ی شتاب گوه هم موقعی است که مکعب ساکن بر روی گوه، در آستانه‌ی حرکت به سمت بالای گوه قرار می‌گیرد. در این حالت نیروهای وارد بر گوه به صورت زیر خواهد بود



از قانون دوم نیوتون در امتداد محورهای مختصات خواهیم داشت

$$\begin{cases} N \cos \theta - f_{\max} \sin \theta = mg & (24) \\ N \sin \theta + f_{\max} \cos \theta = mA_{\max} & (25) \end{cases}$$

از دو رابطه‌ی اخیر داریم

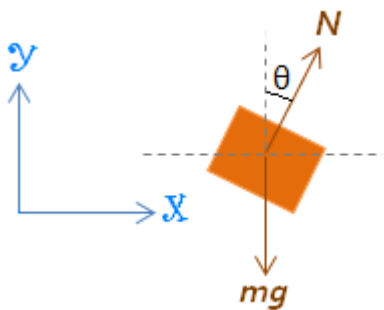
$$A_{\max} = g \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} \quad (26)$$

به ازای $A > A_{\max}$ ، مکعب بر روی گوه رو به بالا خواهد لغزید.

اگر شرط $\tan \theta < \mu_s$ برقرار باشد، در آن صورت با رها کردن مکعب بر روی گوه، مکعب حرکتی نخواهد داشت. با شتاب گرفتن گوه و رسیدن شتاب آن به حداکثر مقداری که از رابطه‌ی (۲۶) بدست می‌آید، مکعب در آستانه‌ی حرکت رو به بالا قرار خواهد گرفت.

🧨 اگر در سوال ۴، گوه دارای شتاب رو به چپ A باشد، حرکت مکعب چگونه خواهد بود؟

✓ با شرط $\tan \theta > \mu_s$ ، مکعب بر روی گوه رو به پایین سُر خواهد خورد. با در نظر گرفتن محورهای مختصات و نیروهای وارد بر مکعب و استفاده از معادله‌ی قیدی رابطه‌ی (۲)، سه رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت



از روابط (۳۵)، (۳۶) و (۳۷) خواهیم داشت

$$\ddot{x} = (A + g) \sin \theta \cos \theta \quad (38)$$

و از دو رابطه‌ی (۳۵) و (۳۸) خواهیم داشت

$$\ddot{y} = A \cos^2 \theta - g \sin^2 \theta \quad (39)$$

از رابطه‌ی (۳۸) داریم $\ddot{x} > 0$ به همین صورت از رابطه‌ی (۳۹)

نتیجه می‌شود که

$$\begin{cases} \ddot{y} = 0 & \text{if } A = g \tan^2 \theta \\ \ddot{y} < 0 & \text{if } A < g \tan^2 \theta \\ \ddot{y} > 0 & \text{if } A > g \tan^2 \theta \end{cases} \quad (40)$$

🧨 اگر در سوال قبل، گوه دارای شتاب رو به پایین A باشد،

شتاب مکعب چگونه خواهد بود؟

✅ در این صورت شتاب گوه در راستای محور Y برابر -A خواهد

بود. برای شتاب مکعب خواهیم داشت

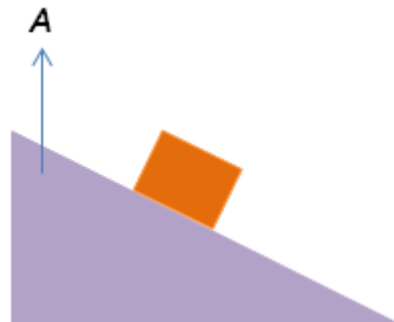
$$\ddot{x} = (g - A) \sin \theta \cos \theta \quad (41)$$

و نیز

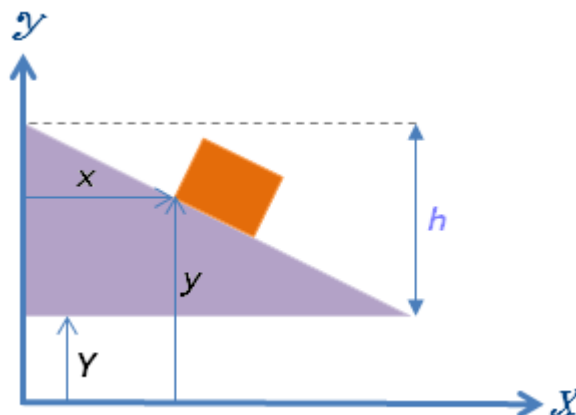
$$\ddot{y} = -(A \cos^2 \theta + g \sin^2 \theta) \quad (42)$$

نکته اینجاست که دو رابطه‌ی (۴۱) و (۴۲) به ازای $A < g$ برقرار هستند. اگر شتاب رو به پایین گوه بیشتر از g باشد، مکعب از سطح گوه جدا خواهد شد.

🧨 مطابق شکل مکعبی به جرم m بر روی گوه‌ای به جرم M قرار دارد و گوه با شتاب رو به بالای A (مثلاً در داخل یک آسانسور) حرکت می‌کند. شتاب مکعب را حساب کنید. تمامی سطوح بدون اصطکاک هستند.



✅ ابتدا محورهای مختصات را مانند شکل در نظر می‌گیریم.



با توجه به شکل بالا می‌توان نوشت

$$\tan \theta = \frac{h + Y - y}{x} \quad (33)$$

اگر از رابطه‌ی بالا دو بار مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\ddot{Y} - \ddot{y} = \ddot{x} \tan \theta \quad (34)$$

رابطه‌ی (۳۴) رابطه‌ی بین شتاب‌ها و همان قید موجود در مساله است. در این مساله $\ddot{Y} = A$ است؛ پس

$$A - \ddot{y} = \ddot{x} \tan \theta \quad (35)$$

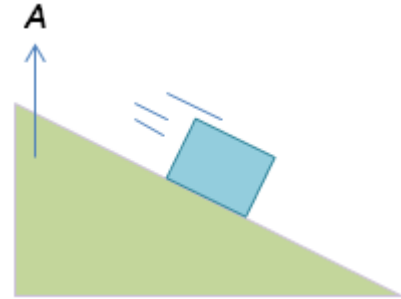
اکنون سراغ قانون دوم نیوتون و نیروهای وارد بر مکعب می‌رویم.

با توجه به نیروهای وارد بر مکعب خواهیم داشت

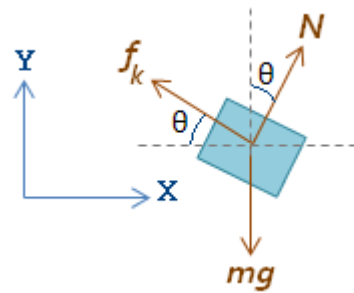
$$\begin{cases} N \sin \theta = m \ddot{x} \\ N \cos \theta - mg = m \ddot{y} \end{cases} \quad (36)$$

$$(37)$$

🧨 مطابق شکل مکعبی به جرم m بر روی گوه‌ای به جرم M و دارای اصطکاک به سمت پایین گوه سر می‌خورد. گوه با شتاب A (مثلاً در داخل یک آسانسور) حرکت می‌کند. شتاب مکعب را حساب کنید.



✓ شرایط مساله همانند سوال ۶ است با این تفاوت که به مکعب نیروی اصطکاک هم وارد می‌شود.



از قانون دوم نیوتون خواهیم داشت

$$\begin{cases} N \sin \theta - f_k \cos \theta = m\ddot{x} & (43) \\ N \cos \theta + f_k \sin \theta - mg = m\ddot{y} & (44) \end{cases}$$

از دو رابطه‌ی اخیر و رابطه‌ی (۳۵) خواهیم داشت

$$\ddot{x} = (A + g)(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \cos \theta \quad (45)$$

از رابطه‌ی (۴۵) و (۳۵) خواهیم داشت

$$\ddot{y} = A(\cos^2 \theta + \mu_k \cos \theta \sin \theta) - g(\sin^2 \theta - \mu_k \cos \theta \sin \theta) \quad (46)$$

اگر $\mu_k = 0$ باشد، دو رابطه‌ی (۴۵) و (۴۶) به دو رابطه‌ی (۳۸) و (۳۹) تبدیل خواهند شد.

