فصل ۳

معادلات حالت

۳-۱ قضیه اساسی نظریه گراف

برای اینکه این قضیه را توسعه دهیم لازم است معنی آنچه را که درخت می‌نامند، به دقت روشن کنیم. فرض کنید که g یک گراف متصل به هم بوده و T یک زیرگراف g باشد. T یک درخت از گراف متصل به هم g گفته می‌شود چنانچه: ۱- T یک زیرگراف متصل به هم باشد، ۲- T شامل تمام گره‌های g باشد و ۳- T شامل هیچ حلقه‌ای نباشد [۱]. گراف متصل به هم g و یک درخت T از آن داده شده‌اند. شاخه‌های T را شاخه درخت نامیده و شاخه‌هایی از g را که در T نباشند را لینک می‌نامند [۱].

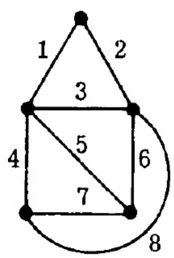
معمولا یک گراف تعداد زیادی درخت دارد. در شکل ۳-۱ چند درخت از یک گراف متصل به هم g را نشان داده‌ایم. برای درک بهتر تعریف فوق، چند زیرگراف (از همان گراف g) را که درخت‌های g نمی‌باشند، در شکل ۳-۲ نشان داده‌ایم. برای تاکید این حقیقت که گراف‌های پیچیده دارای تعداد زیادی درخت می‌باشند، به خاطر بسپارید که اگر گرافی دارای n_t گره بوده و هرجفت گره آن را یک شاخه به هم وصل کند، در این صورت این گراف دارای $n_t^{n_t-۲}$ درخت می‌باشد. اینگونه گراف‌ها، برای $n_t = ۵$، ۱۲۵ درخت و برای $n_t = ۱۰$، $۱۰^۸$ درخت دارند [۱].

در زیر، خواص حلقه‌ها، کات‌ست‌ها و درخت‌ها را به هم ارتباط داده‌ایم [۱].

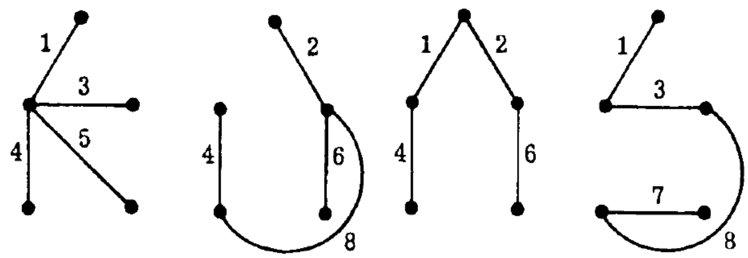
گراف متصل به هم g با n_t گره و b شاخه و یک درخت T از g داده شده‌اند [۱]:

۱- میان هر جفت گره از g مسیر یکتایی در روی درخت وجود دارد.

۲- $n_t - ۱$ شاخه درخت (یعنی تعداد گره‌های مستقل یا n) و $b - n_t + ۱$ (یعنی تعداد مش‌ها یا

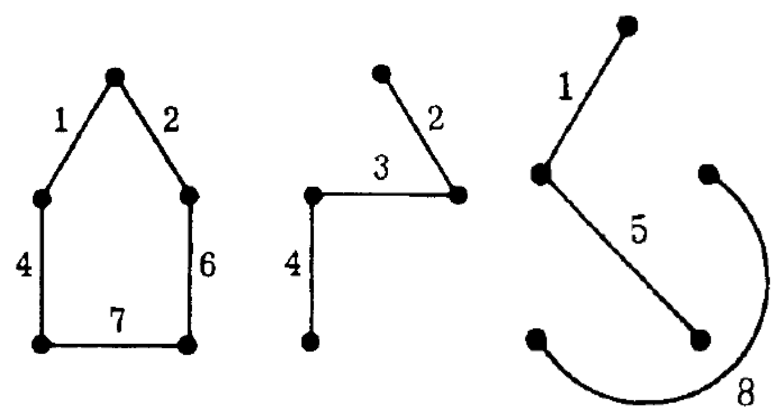


(الف) گراف g



(ه) درخت $T_۴$ (د) درخت $T_۳$ (ج) درخت $T_۲$ (ب) درخت $T_۱$

شکل ۳-۱: مثال‌هایی از درخت‌های گراف g



(الف) خاصیت ۱ را نقض می‌کند. (ب) خاصیت ۲ را نقض می‌کند. (ج) خاصیت ۳ را نقض می‌کند.

شکل ۳-۲: مثال‌هایی از زیرگراف‌های g که درخت نیستند.

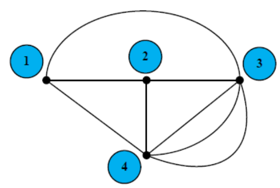
l) لینک وجود دارند.

۳- هر لینک T و مسیر یکتای میان گره‌های دوسر آن در روی درخت، حلقه یکتایی تشکیل می‌دهد

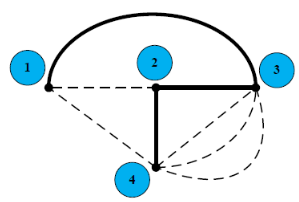
(این حلقه را حلقه اساسی متناظر با لینک گویند).

۴- هر شاخه درخت T همراه با بعضی از لینک‌ها، کات‌ست یکتایی از g را تعریف می‌کند. این کات‌ست را کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه درخت گویند. به عبارت دیگر به تعداد شاخه‌های درخت کات‌ست اساسی داریم.

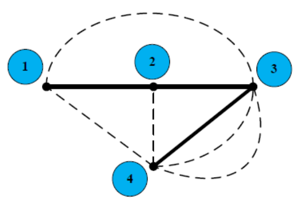
مثال ۳-۱ گراف شکل ۳-۳ را در نظر بگیرید. سه درخت نمونه برای آن رسم شده است، که در آن شاخه‌های درخت با خطوط توپر و شاخه‌های لینک با خطچین مشخص شده‌اند. حلقه‌ها و کات‌ست‌های اساسی مربوط به این درخت‌ها را رسم کنید.



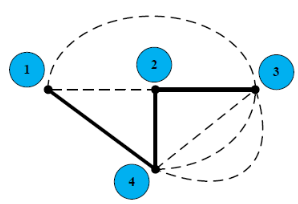
(الف) گراف g



(ب) درخت $T_۱$



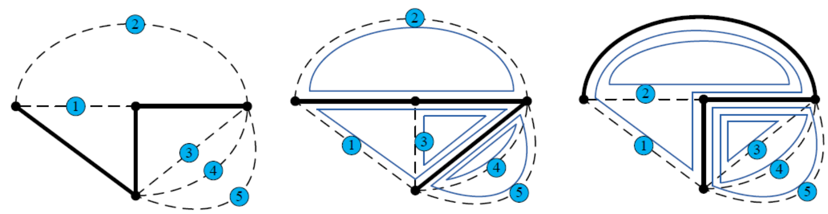
(ج) درخت $T_۲$



(د) درخت $T_۳$

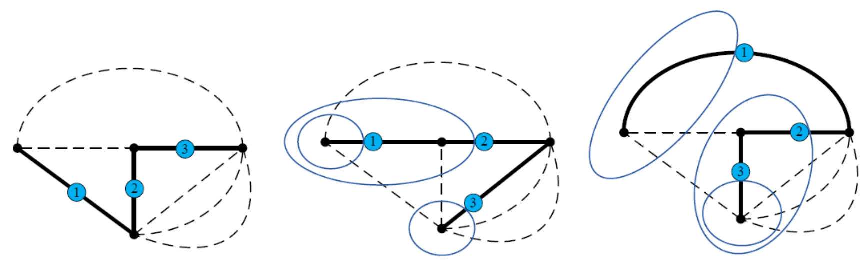
شکل ۳-۳: گراف و درخت‌های مربوط به آن

حل: حلقه‌های اساسی مربوط به سه درخت مثال ۳-۱ در شکل ۳-۴ رسم شده است. همچنین، کات‌ست‌های اساسی مربوط به این سه درخت در شکل ۳-۵ رسم شده‌اند.



(الف) حلقه‌های اساسی درخت T_1 (ب) حلقه‌های اساسی درخت T_2 (ج) حلقه‌های اساسی درخت T_3

شکل ۳-۴: حلقه‌های اساسی مربوط به درخت‌های مثال ۳-۱



(الف) کات‌ست‌های اساسی درخت T_1 (ب) کات‌ست‌های اساسی درخت T_2 (ج) کات‌ست‌های اساسی درخت T_3

شکل ۳-۵: کات‌ست‌های اساسی مربوط به درخت‌های مثال ۳-۱

۳-۲ مقدمه معادلات حالت

وقتی معادلات دیفرانسیل یک شبکه فشرده به صورت زیر نوشته می‌شوند [۱]:

$$\dot{x} = f(x, w, t) \qquad (۳-۱)$$

که در آنجا، x یک بردار مثلا با n مولفه و w نشان‌دهنده دسته ورودی‌ها و t نمایشگر زمان است، گویند معادلات به صورت حالت بوده و x نشان‌دهنده حالت شبکه است. برای نوشتن معادلات به صورت فوق، سه دلیل اساسی وجود دارد:

۱- از لحاظ برنامه‌نویسی برای کامپیوترهای آنالوگ یا دیجیتال، این شکل بسیار مناسب است.

۲- تعمیم تجزیه و تحلیل به شبکه‌های غیرخطی و یا تغییرپذیر با زمان، کاملا راحت است (در حالی که چنین تعمیمی در مورد تجزیه و تحلیل حلقه، مش، کات‌ست یا گره راحت نمی‌باشد).

۳- تعدادی از مفاهیم نظریه‌ای سیستم‌های، در این شکل، به راحتی قابل به کار بردن در شبکه می‌باشند.

اکنون می‌خواهیم تعریف دقیق مفهوم حالت را بیان کنیم.
دسته‌ای از داده‌ها را وقتی می‌توان به عنوان حالت یک شبکه تلقی کرد که در دو شرط زیر صدق کنند [۱]:

۱- برای هر زمان دلخواه، مانند t_1 و شکل‌موج‌های ورودی (که از زمان t_1 به بعد مشخص می‌شوند)، حالت را در هر زمان دلخواه $t > t_1$ به طور یکتا مشخص می‌کنند.

۲- حالت در زمان t و ورودی‌ها در این زمان (گاهی هم پاره‌ای از مشتق‌های آن‌ها) مقدار هر متغیر شبکه را در زمان t به طور یکتا مشخص می‌کنند.

حالت را به عنوان یک بردار تصور کرده، مولفه‌های آن را متغیرهای حالت می‌نامیم.
در مورد شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، چنانچه معادلات حالت را بتوان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bw(t) \tag{۳-۲}$$

در این صورت، بردار x خاصیت ۱ را خود به خود برآورده می‌کند. به طریق مشابه، به محض این که بتوان خروجی y را به صورت زیر نوشت:

$$y(t) = c^T x(t) + dw \tag{۳-۳}$$

خاصیت ۲ خود به خود برآورده می‌شود [۱].
در برخی مراجع معادلات حالت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{۳-۴}$$

بنابراین معادلات حالت و معادلات خروجی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x}_{n\times 1}(t) = A_{m\times n}x_{n\times 1}(t) + B_{n\times m}u_{m\times 1}(t) \\ y_{l\times 1}(t) = C_{l\times n}x_{n\times 1}(t) + D_{l\times m}u_{m\times 1}(t) \end{cases} \tag{۳-۵}$$

در مجموعه معادلات بالا، n متغیر حالت، m متغیر ورودی و l متغیر خروجی به ترتیب در بردارهای $x(t)$، $u(t)$ و $y(t)$ قرار گرفته‌اند. اگر فرض کنیم که شبکه مورد بررسی دارای یک ورودی و یک

خروجی است ($m = l = ۱$)، معادلات حالت و معادله خروجی به صورت زیر حاصل خواهند شد:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x_۱}(t) \\ \dot{x_۱}(t) \\ \vdots \\ \dot{x_n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۱(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} c_۱ & c_۲ & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۱(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \end{bmatrix} u(t) \end{cases} \quad (۳-۶)$$

نکته

تحت شرایط کلی، حالت یک شبکه مداری دلخواه بوسیله ولتاژهای خازن‌ها (یا در مدارهای غیرخطی بار خازن‌ها) و جریان‌های سلف‌های مدار (یا در مدارهای غیرخطی شار سلف‌ها) مشخص می‌گردد.

سلف: $\begin{cases} v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ \phi_L(t) = Li_L(t) \end{cases}$

خازن: $\begin{cases} i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ q_C(t) = Cv_C(t) \end{cases}$

x همان بردار حالت است که شامل عناصر مستقل ذخیره‌کننده انرژی می‌شود. مثلا [؟]:

$$x = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

پس طبیعتا $\dot{x}$ هم مشتق زمانی این بردار است؛ یعنی [؟]:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix}$$

A را ماتریس ضرایب حالت می‌گوییم، W بردار منابع (شامل ورودی‌ها) بوده و B را ماتریس ضرایب ورودی‌ها می‌نامیم [؟].

در حالت ورودی صفر، معادلات حالت به صورت رابطه زیر می‌شود:

$$\dot{x} = Ax$$

که پاسخ آن اینگونه می‌شود:

$$x(t) = e^{At}x_\circ$$

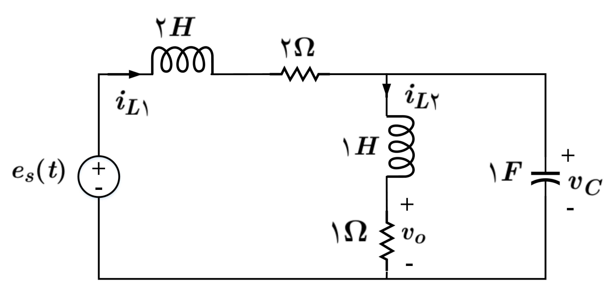
در رابطه اخیر، $x_\circ$ بردار حالت اولیه است و e^{At} را ماتریس انتقال حالت می‌نامیم. یعنی با داشتن ماتریس ضرایب حالت A و در نتیجه معلوم بودن ماتریس انتقال حالت، می‌توانیم از هر حالت اولیه‌ای، به بردار حالت در زمان t برسیم. یعنی پاسخ مدار معلوم می‌شود [؟].

پس از تعیین متغیرهای حالت، نوشتن معادلات حالت یک شبکه مستلزم یافتن ماتریس‌های A، B، C و D است، که مراحل تعیین آن‌ها به صورت گام به گام در مثال زیر تشریح شده است.

نکته

در یک مدار، هر سیگنالی به صورت یک ترکیب خطی از متغیرهای حالت و ورودی‌ها قابل بیان است [؟].

مثال ۳-۲ معادلات حالت مدار شکل ۳-۶ را به صورت ماتریسی بدست آورید.

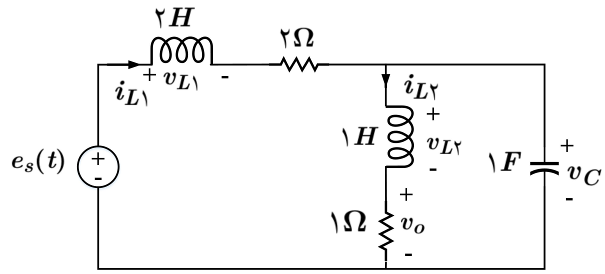


شکل ۳-۶: شکل مدار مثال ۳-۲

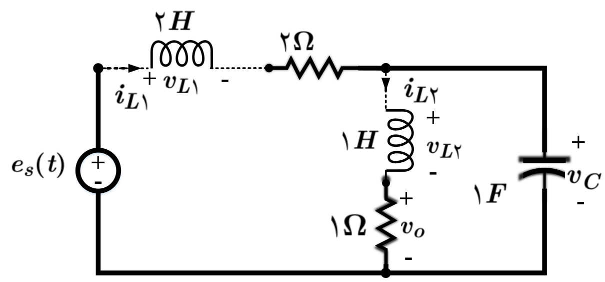
حل: مراحل زیر را باید طی کنیم:

گام ۱: ولتاژ و جریان تمام سلف‌ها و خازن‌های مدار را بر طبق جهت‌های قراردادی روی شکل معین می‌کنیم. شکل ۳-۷ حاصل خواهد شد.

گام ۲: گره‌های مدار را در روی شکل مشخص کرده و سپس درختی را انتخاب می‌کنیم که تمام خازن‌ها را در برداشته و هیچ سلفی را شامل نشود. در این مرحله بهتر است در صورت امکان منابع ولتاژ را برروی درخت و منابع جریان را برروی لینک در نظر بگیریم. با انجام این مرحله، شکل ۳-۸ حاصل خواهد شد.



شکل ۳-۷: شکل مدار مثال ۳-۲ که در آن ولتاژ و جریان‌ها مشخص شده است.



شکل ۳-۸: درخت در نظر گرفته شده برای مثال ۳-۲

گام ۳: جریان سلف‌های لینک و ولتاژ خازن‌های درخت را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌کنیم. درواقع بردار متغیرهای حالت $x(t)$، متغیرهای ورودی $u(t)$ و متغیرهای خروجی $y(t)$ در این مدار عبارتند از:

$$x = \begin{bmatrix} i_{L۱} \\ i_{L۲} \\ v_C \end{bmatrix}, \quad u = e_s(t), \quad y = v_o$$

بنابراین منظور از نوشتن معادلات حالت برای مدار فوق، یافتن ماتریس‌های A، B، C و D زیر است:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{di_{L۱}}{dt} \\ \frac{di_{L۲}}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} — & — & — \\ — & — & — \\ — & — & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L۱} \\ i_{L۲} \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} — \\ — \\ — \end{bmatrix} e_s$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \Rightarrow v_o = \begin{bmatrix} — & — & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L۱} \\ i_{L۲} \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} — \end{bmatrix} e_s$$

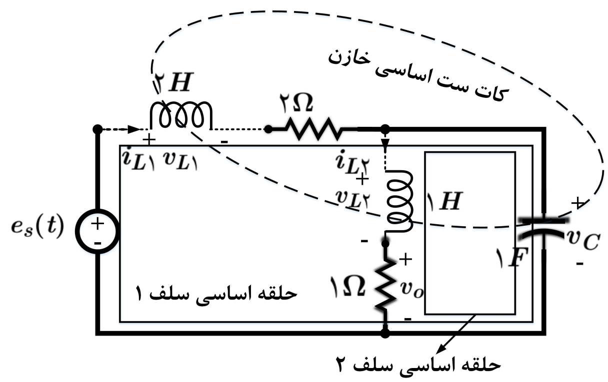
گام ۴: کات‌ست اساسی هر خازن را یافته و معادله KCL مربوط به آن را می‌نویسیم. همچنین

حلقه اساسی هر سلف لینک را یافته و معادله KVL مربوط به آن را نیز می‌نویسیم. شکل ۳-۹ کات‌ست و حلقه‌های اساسی را نشان می‌دهد. معادلات مربوطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{KCL}: -i_{L1} + i_{L2} + i_C = 0$$

$$\text{KVL1}: -e_s + v_{L1} + 2i_{L1} + v_C = 0$$

$$\text{KVL2}: v_C - v_o - v_{L2} = 0$$



شکل ۳-۹: کات‌ست‌ها و حلقه‌های اساسی مثال ۳-۲

این مجموعه معادلات باید فقط از متغیرهای جریان و ولتاژ سلف‌ها و خازن‌ها و متغیرهای ورودی تشکیل شده باشندو سایر متغیرها، متغیرهای اضافی هستند و باید برحسب متغیرهای مجاز جایگذاری شوند. در این مثال متغیرهای مجاز عبارتند از:

$$i_{L1}, i_{L2}, i_C, v_{L1}, v_{L2}, v_C, e_s$$

در مجموعه معادلات فوق فقط متغیر v_o اضافی است که با توجه به شکل مقدار آن برابر با $v_o = i_{L2}$ قرار داده می‌شود.

گام ۵: از روابط ولتاژ-جریان سلف و خازن استفاده کرده و متغیرهای جریان خازن و متغیرهای ولتاژ سلف را با معادلات زیر جایگزین می‌کنیم:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{dv_C}{dt}$$
$$v_{L1} = L1\frac{di_{L1}}{dt} = 2\frac{di_{L1}}{dt}$$
$$v_{L2} = L_2\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{di_{L2}}{dt}$$

گام ۶: معادلات را طوری ساده و مرتب می‌کنیم که مشتق متغیرهای حالت برحسب متغیرهای حالت (v_C, i_{L1}, i_{L2}) و ورودی (e_s) بدست آیند.

$$\begin{cases} -i_{L1} + i_{L2} + \dfrac{dv_C}{dt} = 0 \\ -e_s + 2\dfrac{di_{L1}}{dt} + 2i_{L1} + v_C = 0 \\ v_C - i_{L2} - \dfrac{di_{L2}}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = i_{L1} - i_{L2} \\ \dfrac{di_{L1}}{dt} = -i_{L1} - \dfrac{1}{2}v_C + \dfrac{1}{2}e_s \\ \dfrac{di_{L2}}{dt} = v_C - i_{L2} \end{cases}$$

گام ۷: متغیر خروجی (v_o) را نیز برحسب متغیرهای حالت و ورودی بدست می‌آوریم.

$$v_o = i_{L2}$$

گام ۸: معادلات حالت و معادله خروجی را به فرم ماتریسی بیان شده در گام ۳ می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_{L1}}{dt} \\ \dfrac{di_{L2}}{dt} \\ \dfrac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0/5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_s, \quad v_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} e_s$$

نکته

- حلقه‌ای که تنها از خازن و منابع ولتاژ مستقل تشکیل شده باشد را حلقه خازنی گویند.
- کات‌ستی که تنها از سلف‌ها و منابع جریان مستقل تشکیل شده باشد را کات‌ست سلفی گویند.
- برای یک مدار خطی بدون منبع وابسته، تعداد متغیرهای حالت برابر است با:

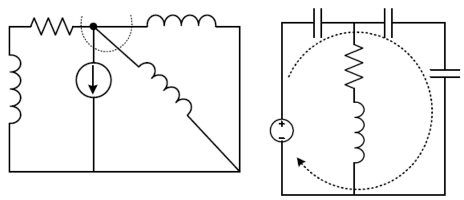
تعداد کل سلف‌ها + تعداد کل خازن‌ها= تعداد متغیرهای حالت مدار

تعداد کات‌ست‌های سلفی − تعداد حلقه خازنی −

در شکل ۳-۱۰ مثالی از حلقه خازنی و کات‌ست سلفی نشان داده شده است.

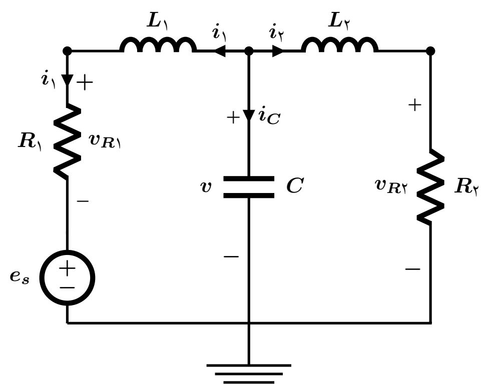
مثال ۳-۳ با یافتن ماتریس‌های A و B، معادلات حالت را برای مدار شکل ۳-۱۱ به صورت $\dot{x} = Ax + bw$، که در آن w ماتریس ورودی‌های مدار می‌باشد، بدست آورید [۱].

درختی را انتخاب می‌کنیم که تمام خازن‌ها را در برداشته و هیچ سلفی را شامل نباشد. چنین درختی در شکل ۳-۱۲ با نقطه‌چین کردن شاخه‌های درخت مشخص شده است.

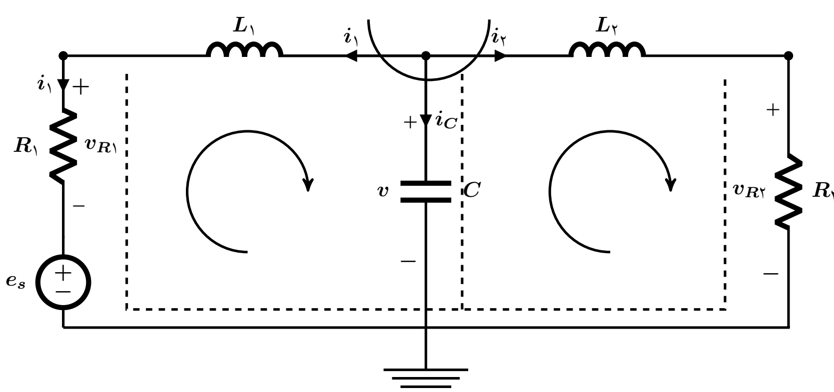


(الف) حلقه خازنی (ب) کات‌ست سلفی

شکل ۳-۱۰: حلقه خازنی و کات‌ست سلفی



شکل ۳-۱۱: مدار مثال ۳-۳



شکل ۳-۱۲: درخت، کات‌ست و حلقه‌های اساسی برای مثال ۳-۳

ولتاژهای خازن‌های شاخه‌های درخت و جریان‌های سلف‌های لینک‌ها را به عنوان متغیر حالت

در نظر می‌گیریم. به این ترتیب داریم:

$$x = \begin{bmatrix} v \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad w = e_s$$

برای هر خازن یک معادله کات‌ست اساسی بنویسید. توجه کنید که در این معادلات کات‌ست، تمام جریان‌های شاخه‌ها باید برحسب متغیرهای حالت باشند. برای کات‌ست خازنی که در شکل ۳-۱۲ مشخص شده است، داریم:

$$i_1 + i_2 + i_C = 0 \Rightarrow i_C = -i_1 - i_2 \Rightarrow C\frac{dv}{dt} = -i_1 - i_2$$

برای هر سلف، یک معادله حلقه اساسی بنویسید. توجه کنید که در این معادلات حلقه، تمام ولتاژهای شاخه‌ها (به جز منابع نابسته) باید برحسب متغیرهای حالت باشند. دو حلقه اساسی در شکل ۳-۱۲ مشخص شده‌اند. برای حلقه اساسی سلف L_1 داریم:

$$-e_s - v_{R1} - v_{L1} + v = 0 \Rightarrow v_{L1} = -v_{R1} - e_s + v \Rightarrow L_1\frac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 - e_s + v$$

همچنین برای حلقه اساسی سلف L_2 داریم:

$$-v + v_{L2} + v_{R2} = 0 \Rightarrow v_{L2} = -v_{R2} + v \Rightarrow L_2\frac{di_2}{dt} = -R_2 i_2 + v$$

بدین ترتیب، دستگاه معادلات حالت زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} C\dfrac{dv}{dt} = -i_1 - i_2 \\ L_1\dfrac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 - e_s + v \\ L_2\dfrac{di_2}{dt} = -R_2 i_2 + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{1}{C}i_1 - \dfrac{1}{C}i_2 \\ \dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{R_1}{L_1}i_1 + \dfrac{1}{L_1}v - \dfrac{1}{L_1}e_s \\ \dfrac{di_2}{dt} = -\dfrac{R_2}{L_2}i_2 + \dfrac{1}{L_2}v \end{cases}$$

چنانچه دستگاه معادلات فوق را به صورت ماتریسی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{di_1}{dt} \\ \dfrac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & 0 & -\dfrac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e_s$$