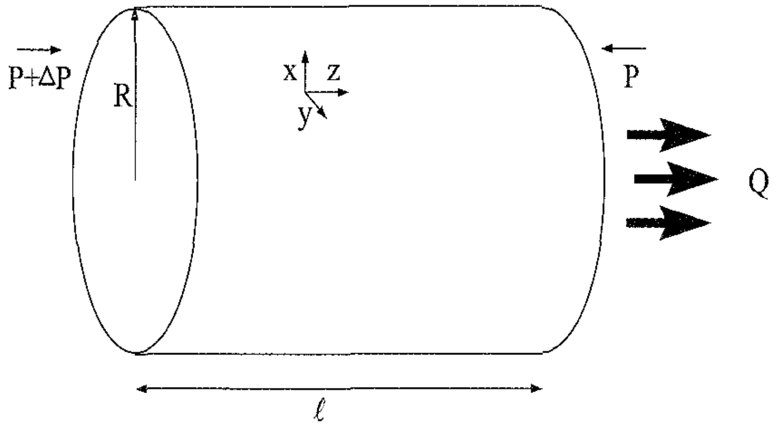
سؤال‌ها و پاسخ‌های پانزدهمین دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک

تابستان ۱۳۸۱

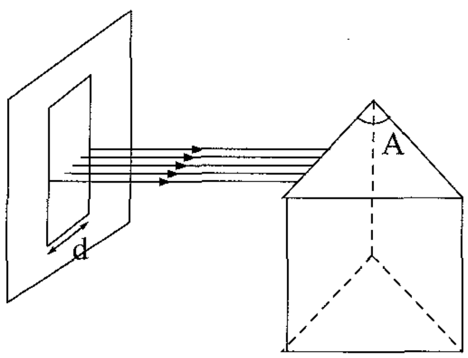
سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

وقت: ۲ ساعت

۱- رابطه پوازوی: از لوله‌ای به طول ℓ و شعاع R، با ایجاد اختلاف فشار ΔP در دو سر آن، مایعی را عبور می‌دهیم. گرانروی مایع، η است. حجم Q از مایع در واحد زمان از لوله خارج می‌شود. با تحلیل ابعادی Q را بر حسب $\eta, R, \ell, \Delta P$ به دست آورید.
توجه: در معادلات فیزیکی حاکم بر این پدیده، Z از X و Y مستقل است. همچنین به دلیل تقارن، Y,X را یک بُعد، مانند ℓ، بگیرید.



۲- الف) دسته پرتو موازیِ نور سفیدی از یک شکاف عمودی به ضخامت d و با زاویه تابش i_1 به یک منشور استوانه‌ای شیشه‌ای با زاویهٔ رأس A می‌تابد. (مسأله را دو بعدی فرض کنید). ضریب شکست شیشه برای رنگهای مختلف تفاوت دارد. اگر زاویهٔ انحراف پرتوی خروجی نسبت به پرتوی اولیه را D بنامیم، $\frac{dD}{dn}$ را بیابید.
(n: ضریب شکست)



ب) ضریب شکست شیشه را برای رنگهای مختلف را می‌توان با تقریب "کوشی" به شکل $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$ بیان کرد. با این فرض، $\frac{dD}{d\lambda}$ را بر حسب λ بیابید. (λ: طول موج نور)
ج) ضریب شکست شیشه برای نورهای بنفش و قرمز با طول موج‌های $400nm$ و $700nm$ به ترتیب 1.470 و 1.455 است.

نور زرد سدیم از دو رنگ زرد بسیار شبیه به یکدیگر و با طول موجهای $589.0nm$ و $589.6nm$ تشکیل شده است. فرض کنیم برای مشاهده، وسیله‌ای داریم که دقت تفکیک آن $0.01mm$ است. همچنین زاویهٔ رأس منشور شیشه‌ای A، 60^0، است و ضخامت شکاف را $2mm$ فرض می‌کنیم. اگر زاویه تابش، (i_1)، 60^0 و فاصله منشور از پرده $5m$ باشد، آیا منشور می‌تواند دو خط زرد سدیم را از یکدیگر تفکیک کند؟ (فرض کنید پرده بر پرتوی خروجی از منشور تقریبا عمود است.)

۳- دو جرم m و M، تحت میدان گرانشی‌شان دور هم می‌گردند. فاصله این دو جسم از هم R است. در نتیجه یک موج گرانشی تولید می‌شود که با سرعت نور (C) حرکت می‌کند.

الف) توان این موج گرانشی را با استفاده از تحلیل ابعادی به دست آورید.

فرض کنید $m << M$. در این صورت M تقریباً ساکن است و m دور آن می‌گردد.

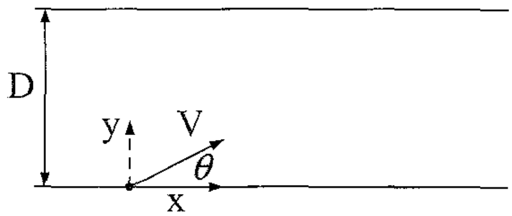
ب) با فرض اینکه توان موج با m^2 متناسب است، عبارت به دست آمده در بخش الف را ساده کنید.

ج) با فرض این که بستگی توان موج گرانشی به M، فقط از طریق دوره گردش m دور M است، T (دورهٔ گردش) با $M^{-\frac{1}{2}}$ متناسب است و توان با T^{-6} متناسب است. عبارت به دست آمده در بخش ب برای توان را ساده کنید.

د) فاصلهٔ زمین تا خورشید: $R = 150\times10^6 km$، جرم خورشید: $M = 2\times10^{30} kg$، جرم زمین: $m = 6\times10^{24} kg$، $C = 3\times10^8 \frac{m}{s}$ و $G = 6/7\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$ است.

مقدار عددی توان موج گرانشی حاصل از گردش زمین دور خورشید را تخمین بزنید.

۴- یک مسلسل، رو به دیواری به فاصله D قرار دارد و گلوله‌هایی با سرعت V شلیک می‌کند. در حین شلیک، این مسلسل با سرعت زاویه‌ای ثابت ω از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ می‌چرخد.



الف) اولین گلوله‌ای که به دیوار برخورد می‌کند، از چه زاویه‌ای شلیک شده است؟

ب) در حالت $\omega D << V$، این زاویه چقدر است؟

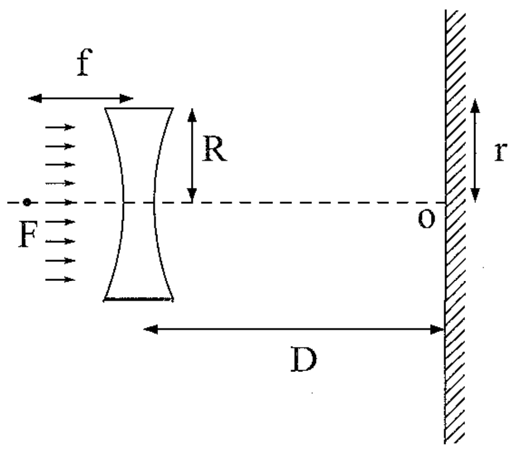
ج) با فرض وجود شتاب گرانش عمود بر صفحه $(\vec{g} = -g\hat{z})$، پس از شلیک کامل، چه شکلی روی دیوار (صفحهٔ $x - z$) ایجاد شده است؟

سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ۳ ساعت

۱- الف) فردی نزدیک بین، عینک خود را (عدسی واگرا) در یک روز آفتابی در دست می‌گیرد، و مشاهده می‌کند با این که شیشه عینکش تیره و یا فتوکرومیک نیست، سایه شیشه تیره است. آیا می‌توانید این پدیده را توضیح دهید؟

ب) فرض کنید یک عدسی واگرا به شعاع R و فاصله کانونی f را به صورت موازی با دیوار در فاصلهٔ D قرار داده‌ایم، و نور خورشید هم به صورت عمود به دیوار می‌تابد. اگر شدت (توان بر واحد سطح) نور خورشید، I_0 باشد، شدت نور روی دیوار را بر حسب فاصله از مرکز، r، بیابید، و نمودار آن را به طور دقیق رسم کنید.

(از تقریب پیرا محوری می‌توانید استفاده کنید.)



۲- یک ذره روی یک خم در فضای سه بُعدی حرکت می‌کند. در یک نقطه از مسیر، اندازه سرعت ذره v، شعاع انحنای مسیر R (انحنای مسیر $\frac{1}{R}$)، و تاب مسیر β است. بردارهای یکه مماس، قائم اصلی، و قائم دوم ($\hat{b}, \hat{n}, \hat{\tau}$) با بردار سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ می‌چرخند. بردار سرعت زاویه‌ای برداری است که جهت آن، جهت بردار یکه محور چرخش، و طول آن اندازه سرعت زاویه‌ای چرخش است. بردار $\vec{\omega}$ را بر حسب $\beta, R, v, \hat{b}, \hat{n}, \hat{\tau}$ به دست آورید.

۳- منبعی نقطه‌ای در $(0,2a)$ قرار دارد و محور y، محور آینه‌ای است که رأس آن در $(0,0)$ است. (مسئله دو بُعدی است.)

الف) معادله سطح این آینه (y بر حسب x) را تا مرتبهٔ x^2 به گونه‌ای به دست آورید که نور را در $(0,a)$ کاملاً جمع کند.

ب) کانون این سطح را با یافتن نقطه‌ای که پرتوهای موازی با محور آینه در آن کانونی می‌شوند بیابید.

ج) کانون را با استفاده از رابطه آینه‌های کروی بیابید.

۴- صفحه استوایی زمین را صفحه $x-y$ بگیرید. مبدا مختصات، مرکز زمین، و دستگاه مختصات نسبت به زمین ثابت است. در یک روز از سال، زاویه خط واصل زمین به خورشید با صفحه $x-y$ برابر α است. (α مثبت یعنی خورشید در نیمکره شمالی است). خورشید با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محور z می‌چرخد. دوره این چرخش یک روز است. فرض کنید در $t=0$، خورشید در صفحه $x-z$ است. (جهت محور $\hat{z}$ جهت قطب جنوب به قطب شمال زمین است.)

الف) بردار یکه جهت خورشید نسبت به زمین را بر حسب زمان به دست آورید.

ب) یک نقطه روی سطح زمین در صفحه $x-z$ در نظر بگیرید. عرض جغرافیایی این نقطه λ است. λ یعنی زاویه شعاع واصل این نقطه به مرکز زمین با صفحه استوا. (λ مثبت یعنی نقطه در نیمکره شمالی است.) بردار یکه شعاع واصل این نقطه به مرکز زمین را بنویسید.

ج) زمان طلوع و غروب خورشید در این روز سال و در این نقطه را به دست آورید.

سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه

۱- دو جرم m_1, m_2 تحت گرانش یکدیگر حول نقطه ثابت O می‌چرخند. نقطه O روی پاره خطی است که m_1, m_2 را به هم وصل می‌کند، و فاصله آن از m_1 و m_2، به ترتیب d_1 و d_2 است، که $m_1d_1 = m_2d_2$. d_1, d_2 ثابت‌اند، و m_1, m_2 و O روی صفحه ثابتی قرار دارند. نیروی گرانشی جرم m_1 وارد بر جرم m_2، $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}$ است. $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ مکان m_1 و m_2، و G مقداری ثابت است. جرم کوچک m در نقطه‌ای بیرون خط واصل m_1 و m_2 است. (می‌شود از اثر گرانشی m بر m_1, m_2 چشم پوشید.)

الف) مکان هندسی نقاطی را بیابید که اگر جرم m آنجا باشد، نیروی گرانشی وارد بر آن در راستای خط واصل m به O باشد.

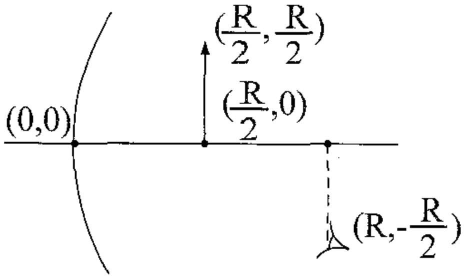
ب) نقاطی را پیدا کنید که اگر m آنجا باشد، مجموعه m_1, m_2 و m بتواند به طور صلب حرکت کند، یعنی فاصله سه جرم از هم ثابت بماند.

۲- جسمی روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع R با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حرکت می‌کند. C روی محور یک عدسی محدب به فاصله کانونی f قرار دارد و فاصله آن تا رأس عدسی x_0 است. محور عدسی یکی از قطرهای دایره است. x_0 و R به گونه‌ای هستند که جسم همواره در فاصله کانونی عدسی باقی می‌ماند. (به فاصله بین عدسی و صفحه کانونی، فاصله کانونی می‌گویند.)

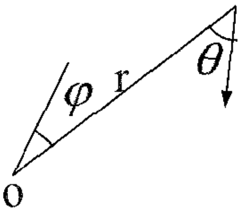
معادله مسیر تصویر این جسم را بیابید (به صورت غیر پارامتری). این معادله، معادله کدام یک از اشکال هندسی است؟

۳- یک آینه کروی مقعر واقعی (بدون تقریب پیرا محوری) به شعاع R موجود است. جسمی به طول $\frac{R}{2}$ عمود بر محور آینه و در فاصله $\frac{R}{2}$ از رأس آینه قرار دارد. ابتدای جسم در $\left(\frac{R}{2},0\right)$ و انتهای آن در $\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2}\right)$ است. ناظری در نقطه $\left(R,-\frac{R}{2}\right)$ قرار دارد.

بزرگی زاویه‌ای تصویری که ناظر می‌بیند چقدر است؟



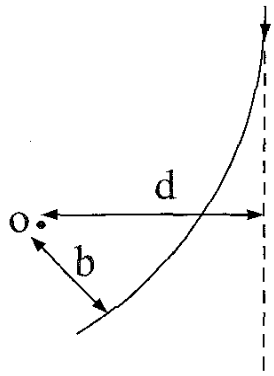
۴- یک محیط شفاف داریم که در آن $n=n(r)$ (r فاصله از مرکز است). زاویه مسیر نور با $\hat{r}$ را θ می‌نامیم.



الف) معادله $\theta(r)$ را بر حسب r به دست آورید و آن را حل کنید.

فرض کنید $n=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r_s}{r}\right)^2}}$ که r_s عددی ثابت است. فرض کنید d فاصله مرکز از امتداد اولیه نوری است و b کمترین فاصله مسیر نور از مبدا است.

ب) b را به صورت تابعی از d به دست آورده و کوچکترین مقدار d (که در آن b وجود دارد) را مشخص کنید.



راهنمایی: ممکن است انتگرال زیر مفید باشد.

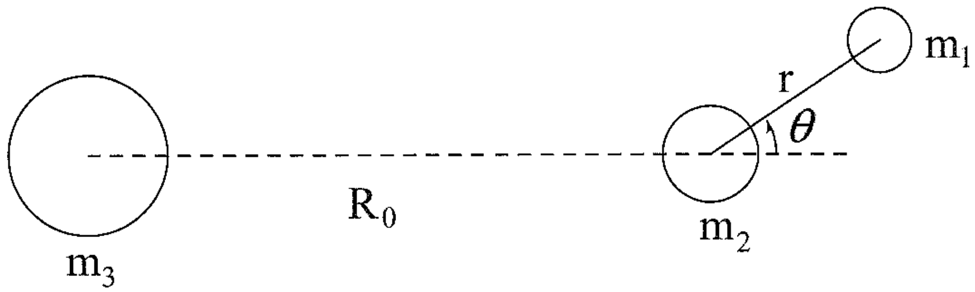
$$\int \frac{f'dx}{f} = \mathrm{Ln}(f) + C.$$

سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ۳ ساعت

۱- فنری به جرم M و ضریب سختی K و طول اولیه $2\pi R$ در نظر بگیرید. حال این فنر را از داخل حلقه صلبی به شعاع R عبور می‌دهیم، به طوری که دو سر فنر به هم وصل شوند. بردار عمود بر سطح حلقه موازی سطح زمین است، یعنی فنر تحت تأثیر جاذبه زمین قرار می‌گیرد و چگالی جرم بر واحد طول آن تغییر می‌کند.
هدف به دست آوردن چگالی جرم بر واحد طول فنر است. برای حل مساله، فنر جرم‌دار را به صورت N فنر و جرم که به طور سری به هم متصل شده‌اند، در نظر بگیرید. فرض کنید θ_n مقدار انحراف زاویه‌ای جرم nام از حالت طبیعی (بدون جاذبه) است.
الف) با نوشتن رابطه تعادل برای جرم nام رابطه‌ای بازگشتی بر حسب $R, K, g, N, M, \theta_{n-1}, \theta_{n+1}, \theta_n, n$ بنویسید.
حال فرض کنید که K خیلی بزرگ است و ما می‌خواهیم تا مرتبه یک نسبت به $\frac{1}{K}$ مساله را حل کنیم.
ب) برای رابطه‌ای که در قسمت «الف» به دست آورده‌اید تا مرتبه یک نسبت به $\frac{1}{K}$ جوابی به صورت $\theta_n = \beta \sin(\alpha n) + C$ پیشنهاد می‌کنیم که β, α, C مقادیری ثابت هستند. این مقادیر را بر حسب کمیات معلوم مساله به دست آورید. کمیات معلوم R, N, K, M, g هستند.
ج) با استفاده از قسمت «ب» و میل دادن $N \to \infty$ مقدار $\lambda = \frac{dm}{d\ell}$ که چگالی جرم بر واحد طول فنر است را به دست آورید.

۲- شخصی برای خواندن روزنامه از یک ذره بین (عدسی با فاصله کانونی f و قاب دایره‌ای به شعاع ℓ) استفاده می‌کند. اگر فاصله چشم تا روزنامه d باشد.
الف) ذره بین را در چه فاصله‌ای از روزنامه باید گرفت تا بخشی از روزنامه با شعاع R با بیشترین بزرگ نمایی ممکن دیده شود؟
ب) برای R, d, ℓ, f تخمین‌های مناسب بزنید و مقدار عددی قسمت الف را به دست آورید.

۳- الف) فرض کنید در فضا جرمی داریم، m_1، که در دایره‌ای به شعاع r_0 به دور جرم دیگر، m_2، که تقریباً ثابت است، می‌چرخد. اولاً چه شرطی باید داشته باشیم تا چنین حالتی پیش بیاید. ثانیاً $\theta(t)$ را برای جرم متحرک محاسبه کنید.



ب) حال می‌خواهیم تأثیر جرم دیگری، m_3 را که در فاصله R_0 نسبت به m_2 قرار دارد بر مسیر m_1 بیابیم. فرض کنید همچنان m_3, m_2 ثابت‌اند.

معادله دیفرانسیل مربوط به فاصله جرم‌های m_1 و m_2، r، را به طور تقریبی بیابید.

راهنمایی: جواب کلّی معادله $\ddot{x}+\omega_0^2 x = k-\alpha\cos\omega_1 t$ به صورت:

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{k}{\omega_0^2}+\frac{\alpha}{\omega_1^2-\omega_0^2}\cos\omega_1 t$$

و در حالتی که $\omega_1 \to \omega_0$ دامنه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

ج) آیا این مّدل، مُدل خوبی برای سیستم ماه و زمین و خورشید است؟ چرا؟

$m_1 = 7\times10^{22}\,\text{kg}$ $\qquad r_0 = 4\times10^4\,\text{km}$

$m_2 = 6\times10^{24}\,\text{kg}$ $\qquad R_0 = 1.5\times10^8\,\text{km}$

$m_3 = 2\times10^{30}\,\text{kg}$ $\qquad G = 6.7\times10^{-11}\,(\text{SI})$

۴- به طور تخمینی بگویید که حداقل چه مقدار انرژی نورانی در هر ثانیه به مردمک برسد تا ما بتوانیم جسمی مورد نظر را ببینیم.

نکته: ابعاد نوعی جسم مورد نظر و فاصله آن به نحوی است که تصویر آن بر روی تمام لکه زرد می‌افتد.

داده‌ها: قطر لکهٔ زرد: 2mm

سطح مقطع هر سلول حساس به نور: $0.07\mu\text{m}^2$

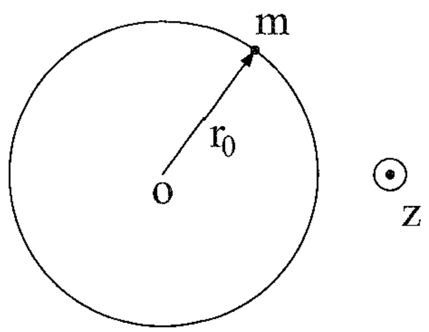
تعداد کل سلولهای حساس به نور در لکهٔ زرد: ۱۰ میلیون

هر سلول باید در هر ثانیه ۱۲ پیغام به مغز بفرستد. انرژی لازم برای هر پیغام هم 10ev و تنها ۱٪ نوری که به مردمک می‌رسد به شبکیه می‌رسد.

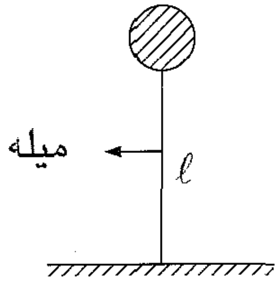
سؤال‌های امتحان پنجم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ٤ ساعت

۱- دو ستاره به جرم‌های m_1, m_2 تحت گرانش خودشان دور نقطه O می‌چرخند. نقطه O روی پاره خطی است که جرم‌های m_1, m_2 را به هم وصل می‌کند. فاصله m_1, m_2 از O، به ترتیب d_1 و d_2 است، که $m_1d_1 = m_2d_2$ و d_1 و d_2 ثابت‌اند.
سیاره‌ای به جرم m تحت گرانش این دو ستاره حرکت می‌کند. $m \ll m_1, m_2$، به طوری که می‌شود از اثر گرانشی سیاره بر ستاره‌ها چشم پوشید.
با فرض این که r (فاصله سیاره از O) خیلی بزرگ‌تر از d_1 و d_2 است، نیروی گرانشی وارد بر m را تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به d_1 و d_2 حساب کنید. این نیرو را بر حسب $\vec{r}$ (بردار مکان سیاره نسبت به O) و $\hat{n}$ (جهت عمود بر صفحه شامل مدارهای ستاره‌ها) به دست آورید.
راهنمایی: دوره حرکت ستاره‌ها خیلی کوچک‌تر از دوره حرکت سیاره است. بنابراین طی یک دوره حرکت ستاره‌ها می‌شود سیاره را ثابت گرفت.

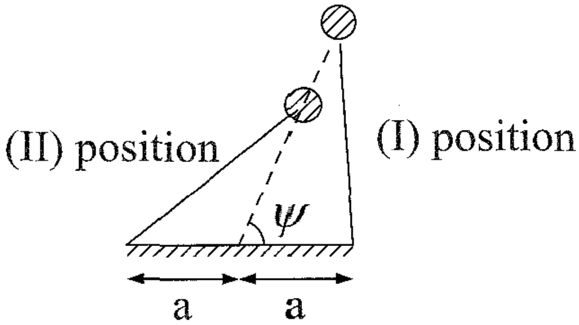
۲- میدان نیرویی به صورت $\vec{F} = \frac{\alpha m}{r^n}(\hat{z} \times \hat{v})$ در نظر بگیرید، که در آن r فاصله از مبدأ O است. جسمی به جرم m روی دایره‌ای به شعاع r_0 در حال چرخش است. شرطی روی n پیدا کنید که حرکت جسم حول شعاع r_0 پایدار باشد.



۳- آونگ معکوسی را مطابق شکل در نظر بگیرید. آونگ به زمین لولا شده است. اگر آونگ را کمی از حالت عمودی منحرف کنیم، سقوط می‌کند. ولی اگر تکیه‌گاه آونگ را با بسامد خاص، ω، به نوسان درآوریم می‌توان از سقوط آونگ جلوگیری کرد. یعنی حالت تعادل آونگ پایدار می‌شود. در این حالت حرکت آونگ به یک حرکت کم دامنه و کند تغییر و یک حرکت با دامنه خیلی کم و بسامد خیلی زیاد (یعنی $\sqrt{\frac{g}{\ell}} \ll \omega$) تقسیم می‌شود.



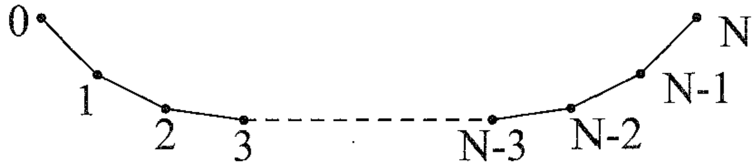
الف) در شکل زیر آونگ در دو وضعیت I و II مشخص شده است. وضعیت I و II مربوط به دو حالت انتهایی نوسان تکیه گاه است. متغیر ψ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
زاویه خطی که در دو حالت I و II سرِ آونگ‌ها را به هم وصل می‌کند با افق ψ است.

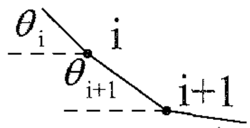


بنابراین زاویه آونگ با افق در طول زمان با $\psi(t)+\delta(t)$ مشخص می‌شود. به طوری که سرعت تغییرات δ خیلی بیشتر از تغییرات ψ است.
$\delta(t)$ را بر حسب ψ، a، ω، ℓ و t حساب کنید. $a \ll \ell$، و فرض کنید در یک تناوب حرکتِ تکیه‌گاه، ψ تغییر نمی‌کند.
ب) اگر در دستگاه متصل به تکیه‌گاهِ آونگ به حرکت آن نگاه کنیم، یک نیروی مجازی به آونگ وارد می‌شود. با فرض اینکه تغییرات ψ نسبت به تغییرات δ خیلی کند باشد، متوسط زمانی نیروی مماسی حاصل از نیروی مجازی را حساب کنید. متوسط زمانی نیروی مماس حاصل از وزن را نیز حساب کنید.
ج) شرطی روی ω پیدا کنید که حالت عمودی آونگ، حالت تعادل پایدار باشد.
راهنمایی: متوسط زمانی تابع $F(t)$ در زمان T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle F(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$$

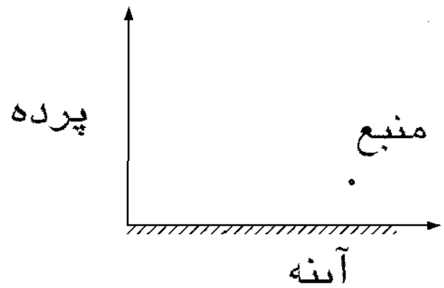
۴- $N+1$ جسم مشابه با جرم‌های مساوی را در فاصله‌های مساوی ℓ، روی طنابی به طول $N\ell$ مطابق شکل می‌بندیم، که با شماره‌های 0 تا N مشخص شده‌اند. جسم صفرم و جسم Nام را در ارتفاع یکسان و فاصله افقی D ثابت نگاه می‌داریم تا سیستم به تعادل برسد. اگر زاویه طناب سمت چپ یک جسم با افق را θ_i بنامیم، θ_i را بر حسب i بیابید. جواب شما می‌تواند حداکثر شامل یک ثابت اختیاری حساب نشده باشد، امّا معادلات کافی برای به دست آوردن آن را بنویسید.





۵- نیروی مغناطیسی، نیرویی است عمود بر سرعت که به صورت $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ تعریف می‌شود. که در آن $\vec{v}$ بردار سرعت، q بار جسم، و $\vec{B}$ بردار میدان مغناطیسی است. فرض کنید در میدان مغناطیسی $\vec{B} = B\hat{Z}$ (مقدار B ثابت است)، جسمی را با سرعت اولیه $\vec{v}_0 = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$ از مبدأ مختصات پرتاب می‌کنیم. اگر علاوه بر نیروی مغناطیسی، نیروی مقاومت هوا $\vec{F} = -\alpha\vec{V}$ نیز وارد شود، جسم در نقطه خاصی به سکون می‌رسد. آن نقطه را بیابید.

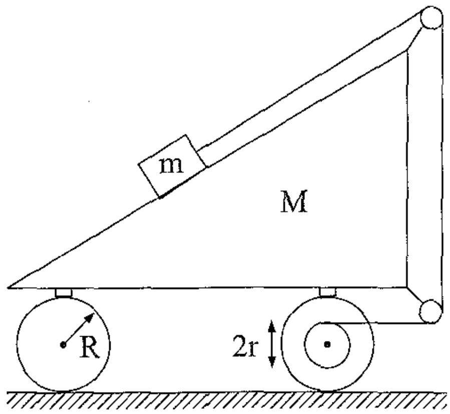
۶- آینه تختی عمود بر پرده‌ای موجود است. یک منبع نورانی با طول موج λ در نزدیکی آینه و در نقطه (x_0, y_0) قرار دارد.



الف) مکان اولین نوار روشن را بر حسب پارامترهای مساله بیابید.
ب) سرعت حرکت اولین نوار روشن را روی پرده بر حسب $\vec{v}$ (بردار سرعت منبع نور) و $\vec{r}$ و λ بیابید.

سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ۶ ساعت

۱- در شکل مقابل، کلیه سطوح بدون اصطکاک‌اند و می‌توان از جرم نخ و چرخ و قرقره‌ها چشم پوشی کرد. نخ متصل به جرم m توسط قرقره‌ها به دور محور (شعاع r) چرخ (شعاع R) پیچیده شده است. شتاب افقی دستگاه را بیابید. (چرخ‌ها دارای محور هستند و مرکز آنها نسبت به ارابه ساکن است).



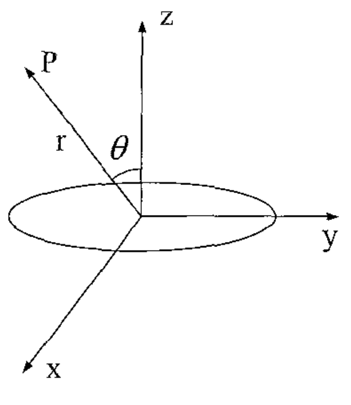
۲- نیروی گرانشی ماه در سطح زمین، بر شتاب موثر سقوط آزاد مثر است. تغییر شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین، حاصل از گرانش ماه را حساب کنید. فرض کنید زاویه جهت ماه نسبت به زمین، با بردار عمود بر سطح زمین θ است. نسبت مرتبه تغییر شتاب سقوط آزاد ناشی از ماه، نسبت به تغییر شتاب سقوط آزاد ناشی از چرخش زمین را تخمین بزنید.

جرم ماه را $10^{23}\mathrm{kg}$، فاصله زمین تا ماه را $4\times10^{8}\mathrm{m}$، و شعاع زمین را $6\times10^{6}\mathrm{m}$ بگیرید.

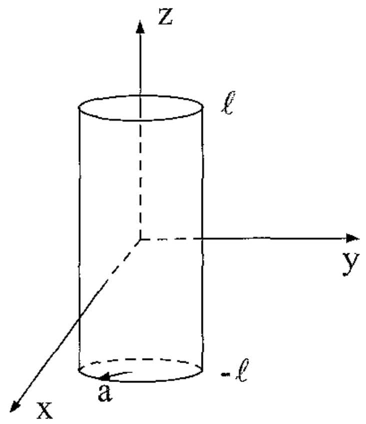
راهنمایی: توجه کنید که زمین دارد مثل یک جسم صلب در میدان گرانش ماه سقوط می‌کند.

۳- الف) حلقه‌ای به شعاع a و چگالی جرمی واحد طول λ داریم. پتانسیل گرانشی حلقه را در نقطه p به مختصات کروی $(r,\theta,0)$ محاسبه کنید.

محاسبات را تا مرتبه $\frac{a^3}{r^3}$ انجام دهید.



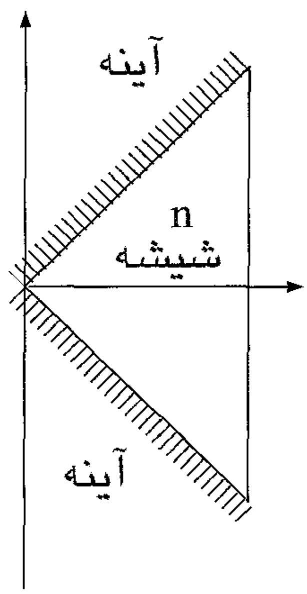
ب) پتانسیل گرانشی یک پوسته استوانه‌ای را که مطابق شکل، محورش موازی محور z است و از $z=-\ell$ تا $z=\ell$ امتداد دارد، روی نقطه‌ای در صفحه $z=0$، در فاصله d از محور استوانه پیدا کنید. جواب را به صورت انتگرالی نگه دارید. $a \ll d$ است که a شعاع استوانه است.



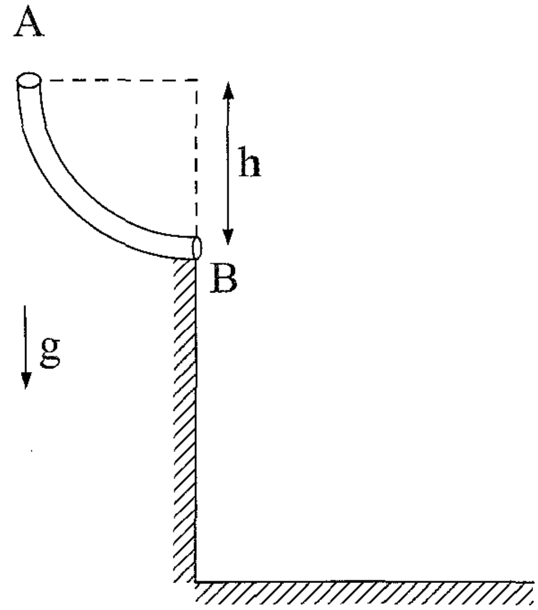
ج) کره‌ای به چگالی ρ داریم. در آن به موازات محور z، سوراخی به شعاع a ایجاد کرده‌ایم نقطه P در صفحه xy به فاصله d از محور سوراخ قرار دارد (روی صفحه استوایی کره). $\frac{a}{R}$ و $\frac{R}{d}$ هر دو خیلی کوچک هستند و هم مرتبه‌اند (R شعاع کره است). تصحیح پتانسیل گرانشی را در P، نسبت به حالت $a=0$، تا دومین مرتبه غیر صفر حساب کنید.

د) تصحیح سرعت مداری ماهواره‌ای را که در مداری به شعاع r_0، حول این کره در صفحه xy می‌چرخد، تا دومین مرتبه غیر صفر به دست آورید.

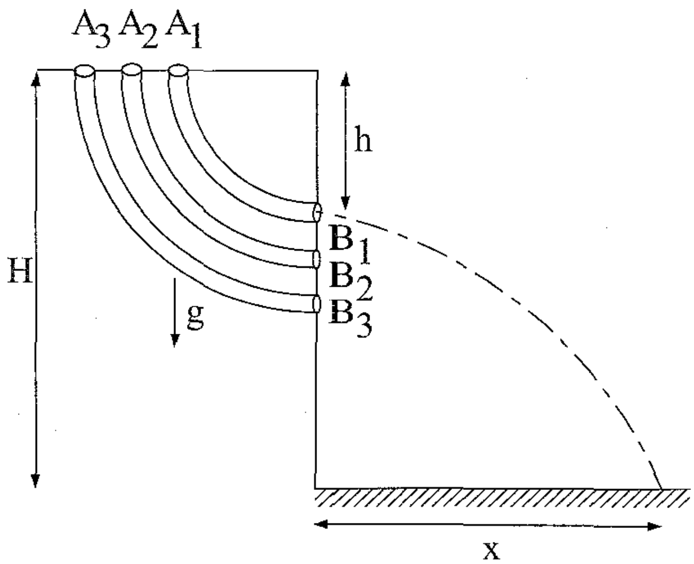
۴- یک مجموعه اپتیکی به شکل روبرو در نظر بگیرید. یک پرتو نورانی با رابطه $y=mx$ $(-1<m<1)$ به این مجموعه می‌تابانیم. معادله خط مسیر پرتو خروجی را بیابید.
مجموعه اپتیکی عبارتند از: دو آینه و یک گوه شیشه‌ای با زاویه رأس قائمه و ضریب شکست n.



۵- الف) گلوله‌ای روی مسیر AB بدون اصطکاک از حالت سکون رها می‌شود. فاصله قائم نقاط A و B، h است. سرعت گلوله هنگام خروج از نقطه B چقدر است. سرعت گلوله هنگام خروج از نقطه B، افقی است.

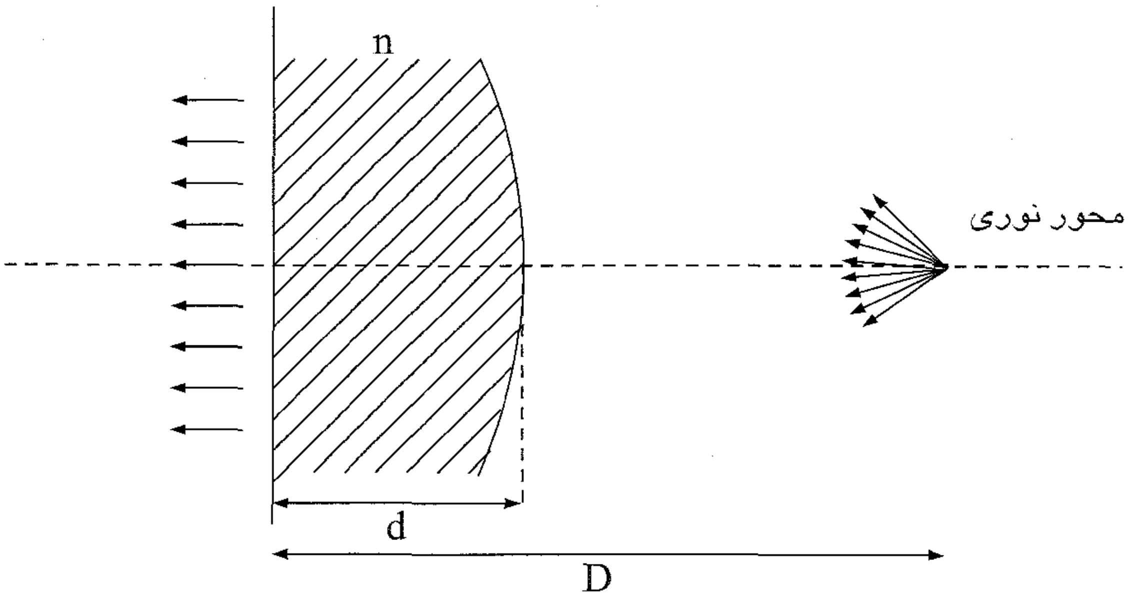


ب) حال گلوله‌هایی از نقاط A_1، A_2، A_3،... از حالت سکون رها می‌شوند. این نقاط در یک سطح افقی هستند. این گلوله‌ها از نقاط B_1، B_2، B_3،... خارج شده و پرتاب می‌شوند. سرعت گلوله‌ها هنگام خروج از مسیرشان در نقاط B_1، B_2، B_3،... افقی است. ارتفاع پرتابه (گلوله) از سطح زمین در نقطه‌ی x تابع h است. به ازای یک x معین بیشینه این ارتفاع را حساب نمایید. (به ازای هر x یک h وجود دارد که ارتفاع ماکسیمم می‌گردد.)

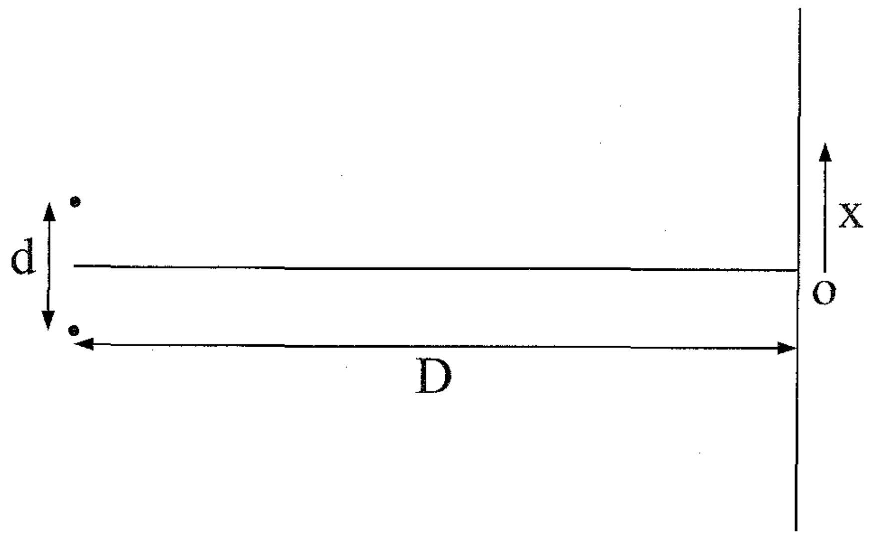


۶- می‌خواهیم یک عدسی با این مشخصات طراحی کنیم. عدسی حول محور نوری، تقارن محوری دارد. یک طرف آن تخت است و از جنسی با ضریب شکست n ساخته می‌شود. حداکثر ضخامت آن (یعنی ضخامت در راستای محور نوری) d است. معادله رویه دیگر این عدسی را به گونه‌ای بیابید که اگر یک

نقطه نورانی به فاصله‌ی D در سمت رویه غیر تخت عدسی قرار بگیرد، تمام پرتوهایی که به عدسی می‌رسند، در نهایت از طرف تخت، موازی خارج شوند.



۷- الف) یک خط نورانی یکنواخت با طول بی‌نهایت در نظر بگیرید. با توجه به قانون بقای انرژی و اینکه $I \propto E^2$ است، تابعیت E را با r بیابید. I شدت نور است.
ب) با دو خط نورانی با مشخصات فوق که در فاصله d از یکدیگر قرار دارند (مساله دو بعدی است)، یک دستگاه تداخل یانگ تشکیل داده‌ایم. پرده روی صفحه شامل این دو خط موازی و در فاصله‌ی D از آنها قرار دارد. (فرض کنید میدان مغناطیسی نور خارج شده در راستای $\hat{z}$، راستای عمود بر صفحه و به سمت داخل، است.)



با فرض اینکه x و d هم مرتبه هستند و D خیلی خیلی بزرگتر از آنهاست، شدت نور روی پرده را در فاصله‌ی x تا مرتبه دوم $\frac{x}{D}$ و $\frac{d}{D}$ محاسبه کنید. طول موج نور این منابع λ است.

۸- یک دوربین عکاسی با یک عدسی با فاصله کانونی f و قطر دهانه دوربین d تصویر نقطه نورانی در فاصله p_0 را روی فیلم عکاسی کاملا کانونی می‌کند. نقطه نورانی روی محور دوربین (عدسی) است. فاصله عدسی و دهانه، صفر است و فاصله عدسی تا فیلم ℓ است.
تصویر یک نقطه را در صورتی واضح می‌نامیم که قطر آن از یک عدد ثابت، d_0، کمتر باشد. حد بالا و حد پایین را برای p (فاصله نقطه نورانی از عدسی) به گونه‌ای تعیین کنید که تصویر واضح باشد.

۹- فاصله نزدیک‌ترین ستاره به خورشید تا خورشید، ۴ سال نوری است. فرض کنید فاصله ستاره‌ها در راه شیری از همین مرتبه است. توان متوسط ستاره‌ها از مرتبه توان خورشید است، و راه شیری را با کره‌ای به شعاع 10^4سال نوری و به مرکز زمین تقریب بزنید.
الف) توان بر واحد سطح حاصل از ستاره‌های راه شیری در سطح زمین، به توان بر واحد سطح حاصل از خورشید در سطح زمین را تخمین بزنید. تقریباً ۸ دقیقه طول می‌کشد تا نور خورشید به زمین برسد.
فاصله نزدیک‌ترین کهکشان به راه شیری 2×10^6 سال نوری است. فرض کنید فاصله کهکشانها از هم از همین مرتبه است و توان متوسط کهکشانها هم از مرتبه توان راه شیری است.
ب) توان بر واحد سطح حاصل از کهکشانهای دیگر در سطح زمین، نسبت به توان بر واحد سطح حاصل از ستاره‌های راه شیری (جز خورشید) در سطح زمین را تخمین بزنید.

پاسخ سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱- ابتدا بعد هر یک از کمیتهای مربوطه را تعیین می‌کنیم.

$$[\ell]=Z$$

$$[R]=R$$

$$Q=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow [Q]=ZR^{2}T^{-1}$$

$$F=\eta A\frac{dv}{dx}\Rightarrow MZT^{-2}=[\eta]RZZT^{-1}R^{-1}\Rightarrow [\eta]=MZ^{-1}T^{-1}$$

$$\Delta P=\frac{\Delta F}{S}\Rightarrow [\Delta P]=MZT^{-2}.R^{-2}\Rightarrow [P]=MZR^{-2}T^{-2}$$

کمیت بدون بعدی از این پارامترها می‌سازیم.

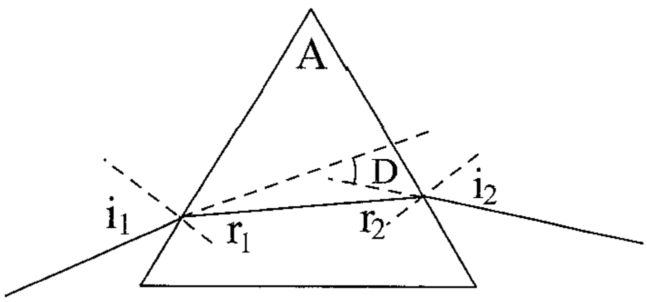
$$Q^{\alpha}\eta^{\beta}\Delta P^{\gamma}\ell^{\delta}R^{\theta}=1$$

$$\left(ZR^{2}T^{-1}\right)^{\alpha}\left(MZ^{-1}T^{-1}\right)^{\beta}\left(MZR^{-2}T^{-2}\right)^{\gamma}(Z)^{\delta}(R)^{\theta}=1$$

$$\begin{cases}\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta+\gamma+\delta=0\\ 2\alpha-2\gamma+\theta=0\\ -\alpha-\beta-2\gamma=0\end{cases}\Rightarrow \beta=-\gamma\ ,\ \alpha=-\gamma\ ,\ \delta=-\gamma\ ,\ \theta=4\gamma$$

$$\Rightarrow Q=C\frac{R^{4}\Delta P}{\eta\ell}$$

۲- الف) با توجه به نمادگذاری در شکل برای زاویهٔ انحراف D داریم.



$$D=i_1-r_1+i_2-r_2$$

همچنین زاویهٔ رأس در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$A=r_1+r_2$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$D=i_1+i_2-A$$

از قانون اسنل هم استفاده می‌نماییم.

$$\begin{cases}\sin i_1 = n\sin r_1 \\ \sin i_2 = n\sin r_2 = n\sin(A - r_1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin i_2 = n\left[\sin A\sqrt{1-\frac{\sin^2 i_1}{n^2}} - \cos A\frac{\sin i_1}{n}\right]$$

$$\Rightarrow i_2 = \sin^{-1}\left[\sin A\sqrt{n^2-\sin^2 i_1} - \cos A\sin i_1\right]$$

از این رو $\frac{dD}{dn}$ می‌شود.

$$\frac{dD}{dn} = \frac{d}{dn}\left(i_1 + i_2 - A\right) = \frac{di_2}{dn} = \frac{n\sin A}{\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin A\sqrt{n^2-\sin^2 i_1} - \cos A\sin i_1\right)^2}}$$

ب) به سادگی دیده می‌شود که

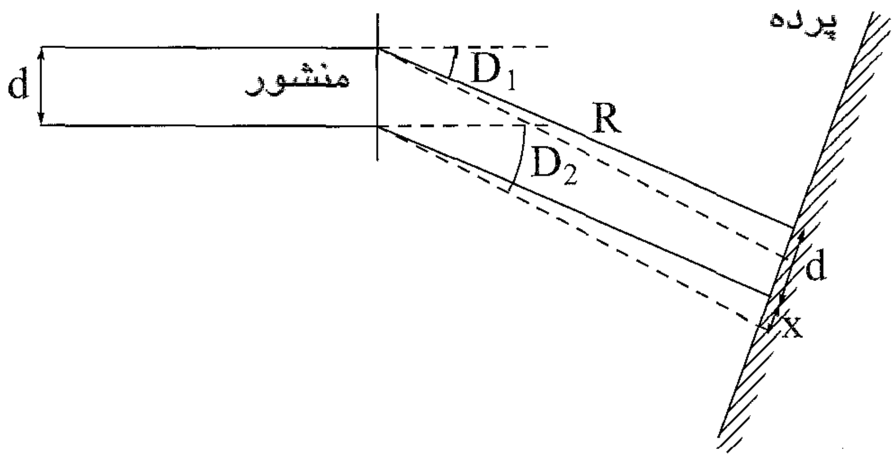
$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn}\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2b}{\lambda^3}\frac{\left(a+\frac{b}{\lambda^2}\right)\sin A}{\sqrt{\left(a+\frac{b}{\lambda^2}\right)^2-\sin^2 i_1}} \times \ldots$$

$$\ldots\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin A\sqrt{\left(a+\frac{b}{\lambda^2}\right)^2-\sin^2 i_1} - \cos A\sin i_1\right)^2}}$$

ج) با استفاده از اطلاعات مربوط به نور بنفش و قرمز، مقادیر a و b تعیین می‌شوند.

$$\begin{cases}1.470 = a + \frac{b}{(400\text{nm})^2} \\ 1.455 = a + \frac{b}{(700\text{nm})^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = 1.448 \\ b = 3.564\times10^3(\text{nm})^2\end{cases}$$

حال مطابق شکل زیر دو پرتو از لبه بالایی شکاف و دو پرتو از لبه پایینی شکاف در نظر می‌گیریم. (در این شکل پرتوی خروجی از منشور با عمود بر سطح پرده زاویه دارد که این زاویه کوچک فرض شده و محاسبات بر مبنای آن صورت گرفته است.)در هر لبه یک پرتو نور زرد با طول موج کوتاه و یکی را هم بلند می‌گیریم و خطوط پُر با هم موازی‌اند و خطوط خط چین هم موازی یکدیگرند.



دو پرتویی که از لبه بالایی شکاف گسیل شده، روی پرده به اندازه x از یکدیگر فاصله می‌گیرند. برای این که دو نور کاملا از هم تفکیک شوند، باید $x > d$ شود. بنابراین ابتدا x را محاسبه می‌کنیم. از قسمت (ب)، $\frac{\Delta D}{\Delta\lambda}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\left|\frac{\Delta D}{\Delta\lambda}\right| = 4.6\times10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{nm}}$$

که در آن از مقادیر داده شده در مساله و مقادیر محاسبه شده برای a و b استفاده کرده‌ایم. همچنین به جای λ مقدار متوسط 589.3nm را قرار داده‌ایم.

بنابراین تفاوت زاویهٔ انحراف دو پرتو نور زرد، ΔD، می‌شود.

$$\Delta D = 4.6\times10^{-5}\times0.6 = 2.8\times10^{-5}\,\text{rad}$$

در نتیجه فاصله دو پرتو روی پرده، x، می‌شود.

$$x = R\Delta D = \left(5\times10^{3}\,\text{mm}\right)\left(2.8\times10^{-5}\right) = 0.138\text{mm}$$

چون $x = 0.138\text{mm}$ و $d = 2\text{mm}$ است، پس دو رنگ زرد به وسیلهٔ این سیستم جدا نمی‌شوند.

۳- الف) پارامترهای مربوطه عبارتند از: توان، P، ثابت گرانش، G، جرمهای m و M، سرعت نور، C، و فاصله دو جسم، R، که کمیت بدون بعدی از این پارامترها می‌سازیم.

$$P^{\alpha}G^{\beta}m^{\gamma}M^{\delta}C^{\theta}R^{\eta} = 1$$

$$\left(ML^{2}T^{-3}\right)^{\alpha}\left(M^{-1}L^{3}T^{-2}\right)^{\beta}\left(M\right)^{\gamma}\left(M\right)^{\delta}\left(LT^{-1}\right)^{\theta}L^{\eta} = 1$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma+\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\theta+\eta=0\\ -3\alpha-2\beta-\theta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=\alpha+\gamma+\delta\\ \eta=-\gamma-\delta\\ \theta=-5\alpha-2\gamma-2\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow P^{\alpha}G^{\alpha+\gamma+\delta}m^{\gamma}M^{\delta}C^{-5\alpha-2\gamma-2\delta}R^{-\gamma-\delta} = 1$$

$$\left(\frac{PG}{C^{5}}\right)^{\alpha}\left(\frac{Gm}{RC^{2}}\right)^{\gamma}\left(\frac{GM}{RC^{2}}\right)^{\delta} = 1$$

ب) چون P متناسب با m^2 است پس $\gamma=-2\alpha$ می‌شود و داریم:

$$\left(\frac{PG}{C^5}\right)^{\alpha}\left(\frac{Gm}{RC^2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{GM}{RC^2}\right)^{\delta}=1\Rightarrow\left(\frac{PR^2}{GCm^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{GM}{RC^2}\right)^{\delta}=1$$

ج) توان P متناسب با T^{-6} است و T هم متناسب با $M^{-\frac{1}{2}}$ است؛ پس P متناسب با M^3 می‌شود. بنابراین $\delta=-3\alpha$ است. داریم:

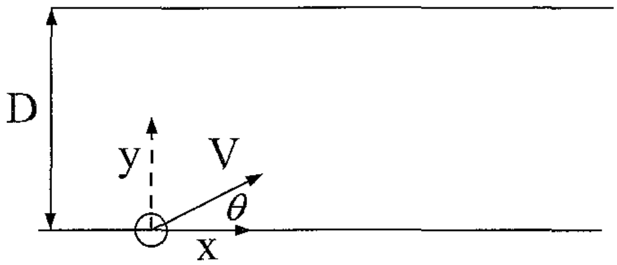
$$\left(\frac{PR^2}{GCm^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{GM}{RC^2}\right)^{-3\alpha}=1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{PR^5C^5}{G^4m^2M^3}\right)^{\alpha}=1\Rightarrow P=K\left(\frac{G^4m^2M^3}{R^5C^5}\right)$$

د) مقدار K را یک می‌گیریم.

$$P=\frac{\left(6.7\times10^{-11}\right)^4\left(6\times10^{24}\right)^2\left(2\times10^{30}\right)^3}{\left(150\times10^9\right)^5\left(3\times10^8\right)^5}\approx 31W$$

۴- الف) چون طولی برای مسلسل در نظر نگرفته‌ایم، فرض می‌شود که چرخش آن سرعتی در راستای مماسی به گلوله‌ها نمی‌دهد. اگر T زمان رسیدن هر تیر به دیوار باشد، داریم.



$$T=\frac{D}{V\sin\theta}+\frac{\theta}{\omega}$$

که در آن در زمان $t=0$، زاویه θ صفر است. برای مینیمم زمان T داریم.

$$\frac{dT}{d\theta}=-\frac{D}{V\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{1}{\omega}=0$$

$$\Rightarrow\frac{D}{V}\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\omega}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{V}{D\omega}\right)^2\sin^4\theta+\sin^2\theta-1=0\Rightarrow\sin^2\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\left(\frac{V}{D\omega}\right)^2}}{2\left(\frac{V}{D\omega}\right)^2}$$

که در آن علامت مثبت قابل قبول است. بنابراین داریم:

$$\theta=\sin^{-1}\left[\frac{D\omega}{\sqrt{2}V}\sqrt{\sqrt{1+4\frac{V^2}{D^2\omega^2}}-1}\right]$$

ب) در حالت $\omega D >> V$ داریم:

$$\sin\theta\approx\frac{D\omega}{\sqrt{2}V}\sqrt{\left(1+2\frac{V^2}{D^2\omega^2}\right)-1}=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

ج) از شلیک گلوله تا رسیدن آن به دیوار مدت $t=\dfrac{D}{V\sin\theta}$ طول می‌کشد. مؤلفه z آن می‌شود.

$$Z=-\frac{1}{2}gt^2=-\frac{1}{2}g\frac{D^2}{V^2\sin^2\theta}$$

مؤلفهٔ x گلوله روی دیوار برابر $x=\dfrac{D}{tg\theta}$ است. بنابراین داریم:

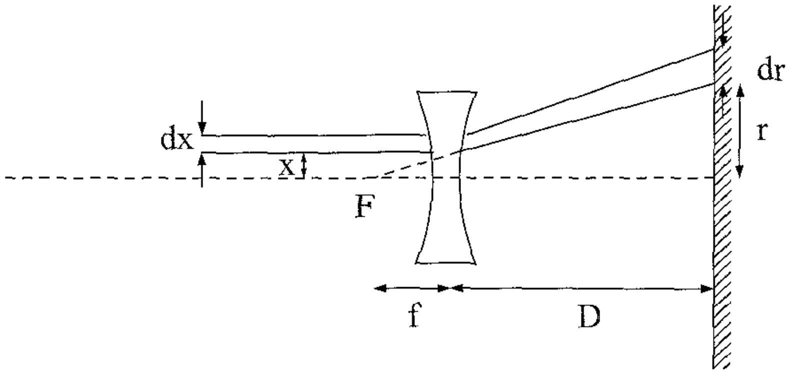
$$Z=-\frac{1}{2}\frac{gD^2}{V^2}\left(1+\cot^2\theta\right)=-\frac{1}{2}\frac{gD^2}{V^2}\left(1+\frac{x^2}{D^2}\right)$$

$$\Rightarrow Z=-\frac{1}{2}\frac{g}{V^2}\left(x^2+D^2\right)$$

پس شکل گلوله‌ها روی دیوار به صورت سهمی است.

پاسخ سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱- الف) به دلیل واگرایی نور در عدسی، شدت نور کاهش می‌یابد و سایه شیشه، تیره به نظر می‌رسد.
ب) مطابق شکل زیر دو پرتو موازی به فاصلهٔ dx در نظر می‌گیریم که پرتو شکسته شده آنها از کانون f می‌گذرد. فاصله‌ی دو پرتو شکسته شده روی پرده، dr است. از روابط هندسی داریم.



$$\frac{x}{f}=\frac{r}{D+f}$$

$$dx=\frac{f}{D+f}dr$$

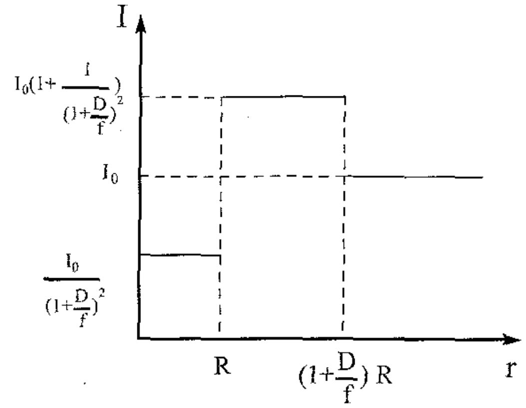
تمام پرتوهای موازی که در فاصله dx هستند در مساحت $2\pi x\,dx$ واقع‌اند که پس از شکست در مساحت $2\pi r\,dr$ قرار می‌گیرند. با استفاده از بقاء انرژی داریم:

$$I_0 2\pi x dx = 2I\pi r dr$$

$$\Rightarrow I = I_0\frac{x}{r}\frac{dx}{dr} \Rightarrow I = I_0\left(\frac{f}{D+f}\right)^2$$

$$\therefore I=\frac{I_0}{\left(1+\frac{D}{f}\right)^2}$$

بنابراین نمودار آن مطابق شکل زیر است.



۲- برای بردارهای یکه در حال دوران داریم:

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{\tau}$$
$$\frac{d\hat{n}}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{n}$$
$$\frac{d\hat{b}}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{b}$$

می‌دانیم $\frac{d\hat{\tau}}{dt}=\frac{v}{R}\hat{n}$، $\frac{d\hat{n}}{dt}=-\frac{v}{R}\hat{\tau}+\beta v\hat{b}$ و $\frac{d\hat{b}}{dt}=-\beta v\hat{n}$. بنابراین به دست می‌آوریم.

$$\vec{\omega}\times\hat{\tau}=\frac{v}{R}\hat{n} \qquad \text{(I)}$$

$$\vec{\omega}\times\hat{n}=-\frac{v}{R}\hat{\tau}+\beta v\hat{b} \qquad \text{(II)}$$

$$\vec{\omega}\times\hat{b}=-\beta v\hat{n} \qquad \text{(III)}$$

بردار $\vec{\omega}$ را بر حسب $\hat{b},\hat{n},\hat{\tau}$ می‌نویسیم.

$$\vec{\omega}=\alpha_1\hat{\tau}+\alpha_2\hat{n}+\alpha_3\hat{b}$$

از (I) داریم:

$$\left(\alpha_1\hat{\tau}+\alpha_2\hat{n}+\alpha_3\hat{b}\right)\times\hat{\tau}=\frac{v}{R}\hat{n}\Rightarrow-\alpha_2\hat{b}+\alpha_3\hat{n}=\frac{v}{R}\hat{n}$$

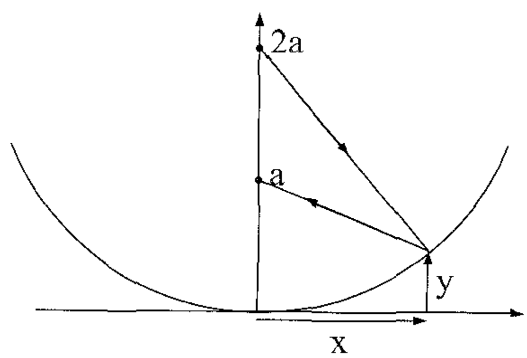
$$\Rightarrow\alpha_2=0,\ \ \alpha_3=\frac{v}{R}$$

از (III) هم داریم:

$$\left(\alpha_1\hat{\tau}+\alpha_2\hat{n}+\alpha_3\hat{b}\right)\times\hat{b}=-\beta v\hat{n}\Rightarrow-\alpha_1\hat{n}+\alpha_2\hat{\tau}=-\beta v\hat{n}\Rightarrow\alpha_1=\beta v$$

پس $\vec{\omega}=\beta v\hat{\tau}+\frac{v}{R}\hat{b}$ است. این $\vec{\omega}$ در معادله (II) هم صدق می‌کند.

۳- الف) بنا به اصل کمترین زمان فرما، اگر همه نورهایی که از نقطه $(0,2a)$ گسیل می‌شوند به نقطه‌ی $(0,a)$ برسند باید مجموع دو مسیر تابش و بازتابش ثابت باشد. پس سطح آینه باید بیضی باشد، یعنی



$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{(y-y_0)^2}{B^2}=1$$

که در آن A نصف قطر در راستای x و B نصف قطر در راستای y است. مرکز بیضی هم $(0,y_0)$ است. نقاط $(0,a)$ و $(0,2a)$ هم کانونهای بیضی‌اند. بنابراین داریم:

$$B=y_0=\frac{3}{2}a$$
$$A=\sqrt{2}a$$

y بر حسب x می‌شود.

$$y=\frac{3a}{2}\left[1\pm\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2}\right]$$

به ازای $x=0$، باید $y=0$ شود. پس علامت منفی قابل قبول است.

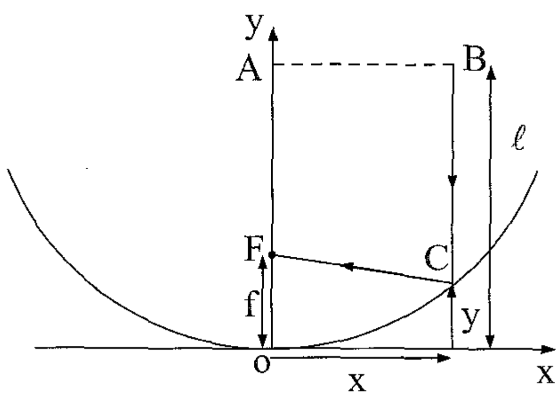
$$y=\frac{3a}{2}\left[1-\sqrt{1-\frac{x^2}{2a^2}}\right]$$

تا مرتبهٔ x^2 می‌شود.

$$y=\frac{3a}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2a^2}\right)\right]=\frac{3x^2}{8a} \qquad \text{(I)}$$

که معادله سهمی است.

ب) بنا به اصل کمترین زمان فرما طول دو مسیر $BC+CF$ و $AO+OF$ با هم برابر است. پس



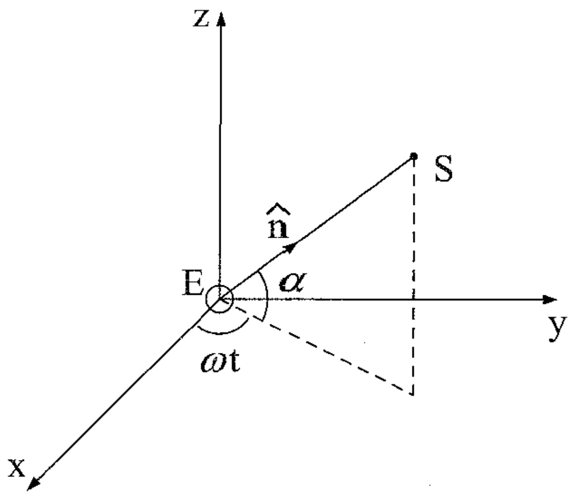
$$\ell-y+\sqrt{x^2+(f-y)^2}=\ell+f$$
$$\Rightarrow (f+y)^2=x^2+(f-y)^2$$
$$\Rightarrow y=\frac{x^2}{4f} \qquad \text{(II)}$$

از مقایسه دو رابطه (I) و (II) به دست می‌آوریم: $f=\frac{2a}{3}$

ج) از رابطه آینه‌های کروی داریم:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\Rightarrow\frac{1}{f}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\Rightarrow f=\frac{2}{3}a$$

۴- الف) مطابق شکل، بردار یکه جهت خورشید نسبت به زمین، $\hat{n}$، به صورت زیر است.



$$\hat{n}=\cos\alpha\cos\omega t\hat{x}+\cos\alpha\sin\omega t\hat{y}+\sin\alpha\hat{z}$$

که در آن $\omega=\dfrac{2\pi}{24\times 3600}\dfrac{rad}{s}$ است.

ب) بردار یکه شعاع واصل نقطه‌ای در صفحه $x-z$ به مرکز زمین می‌شود.

$$\hat{r}=\cos\lambda\hat{x}+\sin\lambda\hat{z}$$

ج) زمان طلوع و غروب خورشید وقتی می‌شود که $\hat{n}$ بر $\hat{r}$ عمود شود. پس داریم:

$$\hat{n}.\hat{r}=0\Rightarrow\cos\alpha\cos\omega t\cos\lambda+\sin\alpha\sin\lambda=0$$

$$\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{\sin\alpha\sin\lambda}{\cos\alpha\cos\lambda}=-\text{tag}\alpha\,\text{tag}\lambda$$

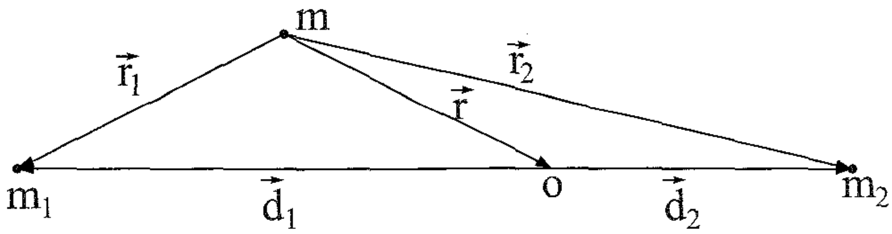
$$\Rightarrow t=\frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(-\text{tag}\alpha\,\text{tag}\lambda\right)$$

بنابراین t زمان غروب و $-t$ زمان طلوع خورشید را نشان می‌دهد.

اگر $\left|\text{tag}\alpha\,\text{tag}\lambda\right|>1$ باشد آنگاه در آن نقطه از زمین شب و یا روز به این صورت نداریم.

پاسخ سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱- الف) مطابق شکل نیروی وارد بر جرم m می‌شود.



$$\vec{F}_m = G\frac{m_1 m\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3} + G\frac{m_2 m\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3}$$

با توجه به اینکه $\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{d}_1$ و $\vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{d}_2$ به دست می‌آوریم.

$$\vec{F}_m = \frac{Gm_1 m\left(\vec{r} + \vec{d}_1\right)}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{Gm_2 m\left(\vec{r} + \vec{d}_2\right)}{|\vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{F}_m = Gm\left[\left(\frac{m_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{m_2}{|\vec{r}_2|^3}\right)\vec{r} + \frac{m_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{d}_1 + \frac{m_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{d}_2\right]$$

روشن است که اگر m روی خط واصل m_1 و m_2 باشد، $\vec{F}_m$ هم در راستای خط واصل بین m و o است. شرط جواب دیگر این است که $\frac{m_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{d}_1 + \frac{m_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{d}_2 = 0$ شود. از طرف دیگر می‌دانیم: $m_1\vec{d}_1 + m_2\vec{d}_2 = 0$ است. پس اگر $|\vec{r}_1|^3 = |\vec{r}_2|^3$ باشد شرط برقرار است. یعنی اگر m روی عمود منصف خط واصل m_1 و m_2 باشد نیروی $\vec{F}_m$ در امتداد خط واصل m به o خواهد بود.

ب) m_1 و m_2 حول نقطه o با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخند. چون m اثری روی حرکت آنها ندارد کافی است این جرم هم با سرعت زاویه‌ای ω حول o بچرخد و $\ddot{\vec{r}} = 0$ باشد. می‌دانیم سرعت زاویه‌ای چرخش m_1 و m_2 برابر است با:

$$\omega^2 = G\frac{m_1 + m_2}{\left(d_1 + d_2\right)^3}$$

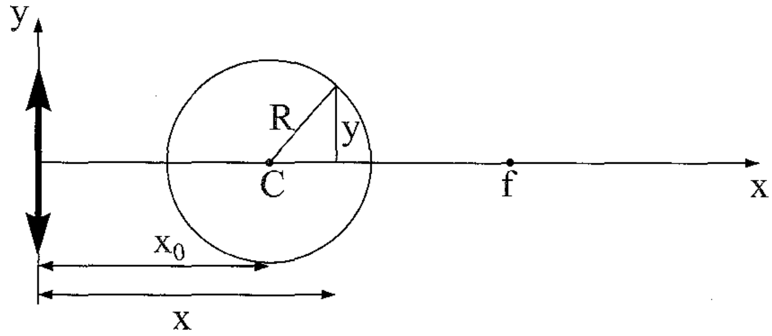
چون m هم باید با این سرعت زاویه‌ای حول o بچرخد، بایستی نیروی وارد بر آن هم به سمت o باشد، یعنی m (مطابق قسمت الف) روی عمود منصف خط واصل m_1 و m_2 باشد. در این وضعیت $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = \ell$ است. از طرف دیگر مطابق قسمت (الف) نیروی وارد بر m برابر $\vec{F}_m = \frac{Gm}{\ell^3}\left(m_1 + m_2\right)\vec{r}$ است که این نیرو باید برابر $mr\omega^2$ باشد. پس داریم:

$$\frac{Gm}{\ell^3}(m_1+m_2)r = mrG\frac{m_1+m_2}{(d_1+d_2)^3}$$

$$\Rightarrow \ell = d_1+d_2$$

پس اگر m، m_1 و m_2 روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند این حالت پیش می‌آید و در واقع دو نقطه در بالا و پایین خط واصل دو جرم m_1 و m_2 این وضعیت را به وجود می‌آورد.

۲- از رابطه‌ی $\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ به دست می‌آوریم. (به ازای تصویر مجازی)



$$q=\frac{pf}{f-p}$$

مختصات جسم را $(x\,,y)$ و مختصات تصویر آن را $(x'\,,y')$ می‌گیریم. داریم:

$$x'=\frac{xf}{f-x}\Rightarrow x=\frac{fx'}{f+x'} \qquad (1)$$

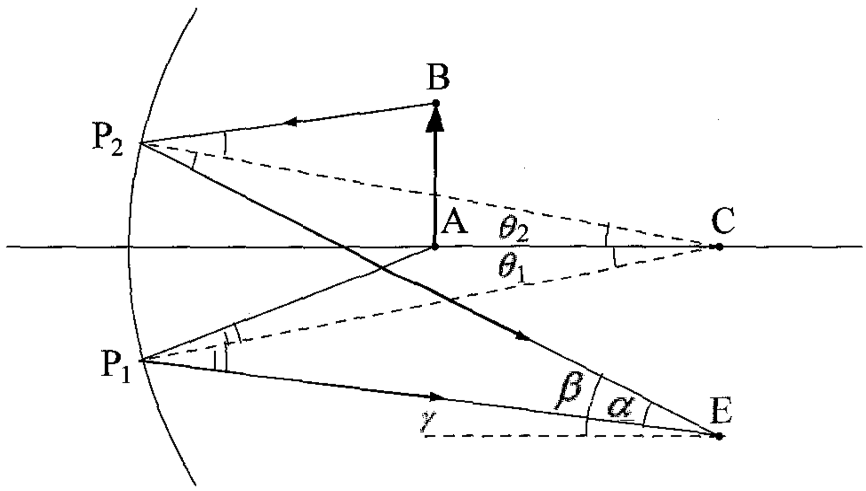
با توجه به رابطه بزرگنمایی $\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}$ و رابطه‌ی $y=\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ و رابطه (۱) داریم:

$$\frac{y'}{x'}=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{y'}{x'}=\frac{\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}{x}$$

$$\frac{y'}{x'}=\frac{\sqrt{R^2-\left(\frac{fx'}{f+x'}-x_0\right)^2}}{\frac{fx'}{f+x'}}\Rightarrow(fy')^2=(f+x')^2\left[R^2-\left(\frac{fx'}{f+x'}-x_0\right)^2\right] \qquad (2)$$

با توجه به اینکه $f-x_0>R$ است می‌توان رابطه (۲) را ساده کرد و دید که معادله مسیر تصویر، $(x'\,,y')$، یک بیضی است.

۳-



از نقطه A پرتویی به آینه می‌تابانیم که آینه را در نقطه‌ی P_1 قطع کند و بازتابش آن از E بگذرد. از نقطه B هم پرتویی به آینه می‌تابانیم که آینه را در نقطهٔ P_2 قطع کند و بازتابش آن هم از E بگذرد. اگر نقاط P_1 و P_2 را به مرکز آینه (نقطه C) وصل کنیم، زاویه بین خطوط به دست آمده (خطوط خط چین) با محور اصلی آینه زوایای θ_1 و θ_2 می‌سازند. حال با توجه به اصل فرما می‌توانیم زوایای θ_1 و θ_2 را تعیین کنیم. یعنی باید زاویه θ_1 مقداری باشد که مجموع طولهای $\overline{AP_1}$ و $\overline{P_1E}$ اکسترمم شود و همچنین زاویهٔ θ_2 مقداری باشد که مجموع طولهای $\overline{BP_2}$ و $\overline{P_2E}$ اکسترمم شود.

با توجه به شکل و مختصات جسم و ناظر داریم:

$$\overline{AP_1}=\sqrt{\left(R\cos\theta_1-\frac{R}{2}\right)^2+R^2\sin^2\theta_1}=R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta_1}$$

$$\overline{P_1E}=\sqrt{R^2\cos^2\theta_1+\left(\frac{R}{2}-R\sin\theta_1\right)^2}=R\sqrt{\frac{5}{4}-\sin\theta_1}$$

$$L_1=\overline{AP_1}+\overline{P_1E}=R\left(\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta_1}+\sqrt{\frac{5}{4}-\sin\theta_1}\right)$$

با اکسترمم کردن این مجموع، θ_1 به دست می‌آید.

$$\frac{dL_1}{d\theta_1}=0\Rightarrow\frac{\sin\theta_1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta_1}}=\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\sin\theta_1}}\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{4}$$

در مورد پرتویی که از B به آینه می‌خورد و به E می‌رسد هم داریم:

$$\overline{BP_2}=\sqrt{\left(R\cos\theta_2-\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{R}{2}-R\sin\theta_2\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{2}-\cos\theta_2-\sin\theta_2}$$

$$\overline{P_2E}=\sqrt{R^2\cos^2\theta_2+\left(\frac{R}{2}+R\sin\theta_2\right)^2}=R\sqrt{\frac{5}{4}+\sin\theta_2}$$

$$L_2=\overline{BP_2}+\overline{P_2E}=R\left(\sqrt{\frac{3}{2}-\cos\theta_2-\sin\theta_2}+\sqrt{\frac{5}{4}+\sin\theta_2}\right)$$

$$\frac{dL_2}{d\theta_2}=0\Rightarrow\frac{\sin\theta_2-\cos\theta_2}{\sqrt{\frac{3}{2}-\cos\theta_2-\sin\theta_2}}=-\frac{\cos\theta_2}{\sqrt{\frac{5}{4}+\sin\theta_2}}$$

که به صورت عددی مقدار زاویه θ_2 برابر 0.65 rad بدست می‌آید.

مطابق شکل زاویهٔ α بزرگی زاویه‌ای تصویر از نظر ناظر است. از روی شکل داریم:

$$\alpha=\beta-\gamma$$

$$tg\beta=\frac{\frac{R}{2}+R\sin\theta_2}{R\cos\theta_2}$$

$$tg\gamma=\frac{\frac{R}{2}-R\sin\theta_1}{R\cos\theta_1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ tg\alpha=tg(\beta-\gamma)=\frac{tg\beta-tg\gamma}{1+tg\beta\, tg\gamma}=A\Rightarrow\alpha=tg^{-1}(A)$$

۴- الف) یک تغییر کوچک در شعاع را در نظر بگیرید.

اگر نور مسیر قبلی خود را طی می‌کرد و نمی‌شکست، داریم که:

$$d\theta_1=\frac{-dr\times tg\theta}{r}$$

علت این امر از طریق هندسه قابل بررسی است. در واقع تغییر راستای $\hat{r}$ برای یک مسیر مستقیم که از مبدا نمی‌گذرد، باعث این امر می‌شود. (می‌توانید با کشیدن یک شکل و زاویه خارجی این مساله را اثبات نمایید.)

از طرفی به علت تغییر محیط از ناحیه r به $r+dr$ نور می‌شکند و داریم که اگر از انحنای دستگاه چشم پوشی کنیم و فرض کنیم که θ نسبت به یک دستگاه محور ثابت است سنجیده شود: (یعنی جمله بالا را کنار بگذاریم.)

$$n_{(r)}\sin\theta_{(r)}=n_{(r+dr)}\sin\theta_{(r+dr)}\Rightarrow$$

$$dn\times\sin\theta+n\cos\theta d\theta_2=0\Rightarrow$$

$$d\theta_2=\frac{-dn\times\sin\theta}{n\cos\theta}=-(\frac{dn}{dr})\frac{dr\times\sin\theta}{n\cos\theta}$$

که رابطه خط دوم رابطه آشنای قانون اسنل است که برای عبور از یک ناحیه به ناحیه دیگر داریم.

حال در کل داریم که تغییر θ ناشی از جمع دو عامل کوچک بالا به ازای یک تغییر r است. در نتیجه:

$$d\theta = d\theta_2 + d\theta_1 = -(\frac{dn}{dr})\frac{dr \times \sin\theta}{n\cos\theta} - \frac{dr \times tg\theta}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dr} = -tg\theta(\frac{1}{r} + \frac{dn}{ndr}) \Rightarrow -\frac{d\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{dr}{r} + \frac{dn}{n} \Rightarrow$$

$$\ln\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta} = \ln\frac{r}{r_0} + \ln\frac{n}{n_0} \Rightarrow nr\sin\theta = const.$$

ب)

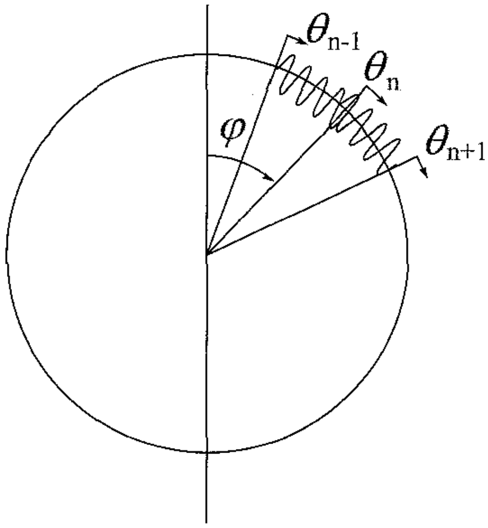
$$\left.\begin{array}{l} r_0 \sin\theta_0 = d \\ b = \dfrac{r_0 \sin\theta_0 n_0}{n_{(b)}} \\ n_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow b = d \times \sqrt{1 - \left(\frac{r_s}{b}\right)^2}$$

$$\frac{b^4}{b^2 - {r_s}^2} = d^2$$

که این معادله درجه دو را می‌توان حل نمود و در ضمن می‌نیمم d نیز با مشتق گیری از این رابطه بدست خواهد آمد.

پاسخ سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱- الف)



رابطه تعادل برای جرم nام در راستای مماس بر حلقه به صورت زیر است:

$$mg\sin\varphi = k'\left[\left(\theta_n-\theta_{n-1}\right)-\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)\right]R$$

که در آن $m=\frac{M}{N}$ و $k'=NK$ است. جرم nام در حالت طبیعی (بدون جاذبه) در زاویه $\frac{2\pi}{N}n$ از امتداد قائم است. در حالت تعادل وقتی جاذبه هم وجود دارد در زاویهٔ $\varphi=\frac{2\pi}{N}n+\theta_n$ است. بنابراین رابطه تعادل می‌شود.

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n+\theta_n\right)=2\theta_n-\theta_{n-1}-\theta_{n+1}$$

ب) با توجه به تقارن، جرم شماره صفر تغییر مکان نمی‌دهد یعنی $\theta_0=0$، بنابراین $C=0$ است. تا مرتبهٔ یک نسبت به $\frac{1}{K}$ رابطهٔ قسمت الف می‌شود.

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)=2\theta_n-\theta_{n-1}-\theta_{n+1}$$

با قرار دادن $\theta_n=\beta\sin(\alpha n)$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)=2\beta\sin(\alpha n)-\beta\sin\left(\alpha(n-1)\right)-\beta\sin\left(\alpha(n+1)\right)$$

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)=2\beta\sin(\alpha n)-2\beta\sin(\alpha n)\cos\alpha$$

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)=2\beta\sin(\alpha n)(1-\cos\alpha)$$

$$\therefore \alpha=\frac{2\pi}{N}, \quad \beta=\frac{Mg}{2N^2KR(1-\cos\alpha)}=\frac{Mg}{4N^2KR\sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

ج) λ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\lambda=\frac{\frac{M}{N}}{R\left(\frac{2\pi}{N}+\theta_n-\theta_{n-1}\right)}$$

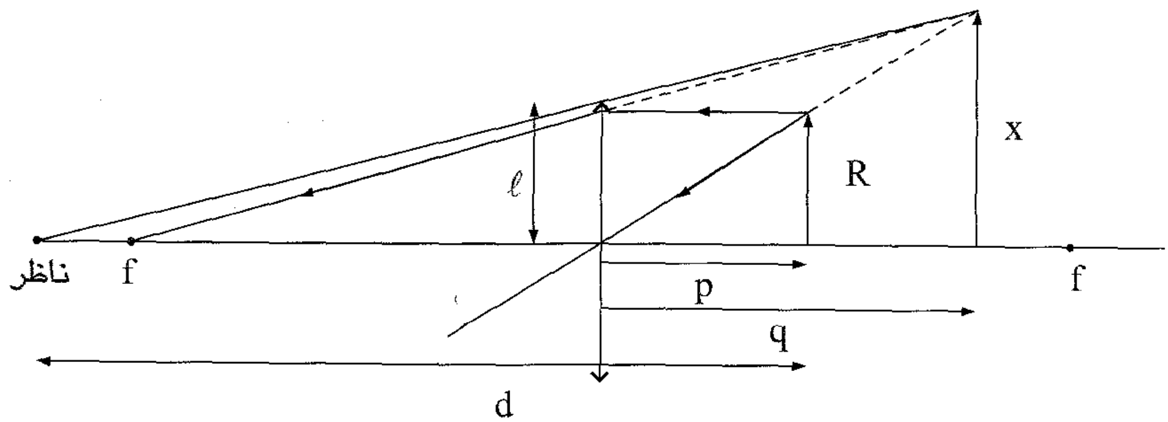
$$\Rightarrow \lambda=\frac{\frac{M}{N}}{R\left(\frac{2\pi}{N}+\frac{2Mg}{4N^2KR\sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right)}\sin\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

با $N\rightarrow\infty$ و $\frac{2\pi}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)=\theta$ داریم:

$$\lambda(\theta)=\frac{M}{2\pi R\left(1+\frac{Mg\cos\theta}{4\pi^2KR}\right)}$$

$$\therefore \lambda(\theta)=\frac{M}{2\pi R}\left(1-\frac{Mg\cos\theta}{4\pi^2KR}\right)$$

۲- الف) مطابق شکل بیشترین بزرگ نمایی وقتی است که خط واصل بین ناظر و لبه ذره‌بین از تصویر ایجاد شده توسط ذره‌بین عبور کند. از روی شکل دیده می‌شود که:



$$\frac{x}{R}=\frac{q}{p}\Rightarrow q=\frac{px}{R} \tag{1}$$

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{p}-\frac{R}{px}=\frac{1}{f}\Rightarrow x=\frac{Rf}{f-p} \tag{2}$$

که در رابطه اخیر از رابطهٔ (۱) استفاده شده است. باز از روی شکل داریم:

$$\frac{x}{d+q-p}=\frac{\ell}{d-p} \tag{3}$$

با جایگزین کردن روابط بدست آمده برای q و x از روابط (۱) و (۲) در رابطه (۳) بدست می‌آوریم:

$$\frac{\dfrac{Rf}{f-p}}{d+\dfrac{p}{R}\left(\dfrac{Rf}{f-P}\right)-p}=\frac{\ell}{d-p}$$

با ساده کردن رابطه اخیر بر حسب p به دست می‌آوریم.

$$\ell p^2+(fR-\ell d)p+(\ell fd-fRd)=0$$

با حل این رابطه برای p داریم:

$$p=\frac{(\ell d-fR)\pm\sqrt{f^2R^2+\ell^2d^2+2fR\ell d-4\ell^2fd}}{2\ell}$$

در حالت $\ell=R$ باید $p=0$ شود. (چرا که در این حالت تصویر ناشی از عدسی بزرگتر است و در ضمن کل جسم را می‌توان از داخل قاب دید.) از این رو تنها علامت منفی در رابطه بالا قابل قبول است.

ب) مقادیر $f=5\text{cm}$، $d=20\text{cm}$، $\ell=3\text{cm}$ و $R=1\text{cm}$ را انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$3p^2-55p+200=0\Rightarrow p=\frac{55-\sqrt{55^2-2400}}{6}=\frac{55-25}{6}=5\text{cm}$$

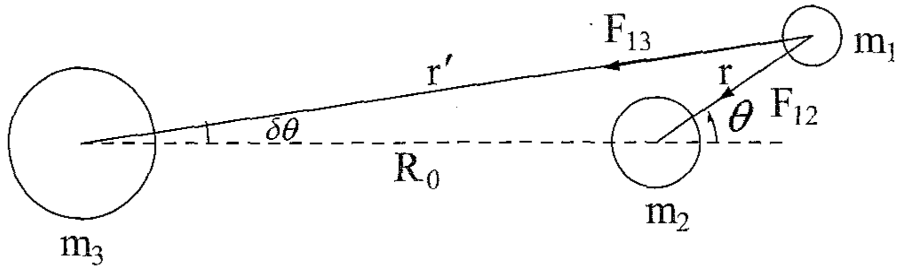
۳- الف) اولا: شرط چنین حالتی این است که

$$\frac{Gm_1m_2}{r_0^2}=m_1r_0\omega_0{}^2$$

یعنی سرعت زاویه‌ای چرخش آن $\omega_0=\sqrt{\dfrac{Gm_2}{r_0^3}}$ باشد.

ثانیاً: چون ω_0 ثابت است پس $\theta=\theta_0+\omega_0t=\theta_0+\sqrt{\dfrac{Gm_2}{r_0^3}}t$ است.

ب) با توجه به شکل، معادله حرکت m_1 در مختصات قطبی به صورت زیر است.



$$\begin{cases} m_1\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=F_{12}+F_{13}\cos\left(\theta-\delta\theta\right) \\ m_1\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=F_{13}\sin\left(\theta-\delta\theta\right) \end{cases}$$

اگر $R_0 \gg r$ باشد $r'^2 \approx R_0{}^2+2rR_0\cos\theta$ و داریم

$$\begin{cases} m_1\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}-G\dfrac{m_1m_3}{R_0{}^2+2R_0r\cos\theta}\left(\cos\theta+\delta\theta\sin\theta\right) \\ m_1\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=\dfrac{Gm_1m_3r}{R_0{}^2+2R_0r\cos\theta}\left(\sin\theta-\delta\theta\cos\theta\right) \end{cases}$$

با صرفنظر کردن از جملات $\dfrac{r^2}{R_0{}^2}$ به بالا و $\dfrac{r}{R_0}\delta\theta$ داریم:

$$\begin{cases} m_1\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}-G\dfrac{m_1m_3}{R_0{}^2}\left(1-\dfrac{2r}{R_0}\cos\theta\right)\cos\theta-\dfrac{Gm_1m_3}{R_0{}^2}\delta\theta\sin\theta \\ m_1\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=\dfrac{Gm_1m_3r}{R_0{}^2}\left(1-\dfrac{2r}{R_0}\cos\theta\right)\left(\sin\theta-\delta\theta\cos\theta\right) \end{cases} \quad (1)$$

با تقریب $\delta\theta \approx \dfrac{r\sin\theta}{R_0}$ و با حفظ معادلات تا مرتبه اول نسبت به $\dfrac{r}{R_0}$ از معادلهٔ دوم رابطه اخیر داریم

$$m_1\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=\frac{Gm_1m_3}{R_0{}^2}r\sin\left(\omega_0t\right)$$

که در آن به جای $\sin\theta$ از قسمت الف مقدار $\sin\omega_0t$ با $\theta_0=0$ استفاده شده است. با تعریف $\ell=r^2\dot{\theta}$ و انتگرال گیری معادله اخیر به دست می‌آوریم.

$$\ell=\ell_0+\int_0^t G\frac{m_3}{R_0{}^2}r\sin\left(\omega_0t\right)dt$$

$$\therefore \ell=\ell_0+\frac{Gm_3}{R_0{}^2}\frac{r_0}{\omega_0}\left(1-\cos\omega_0t\right)=\ell_0+\Delta\ell$$

که در آن $\Delta\ell = \frac{Gm_3}{R_0^{\ 2}}\frac{r_0}{\omega_0}\left(1-\cos\omega_0 t\right)$ ناشی از وجود جرم m_3 است.

معادله اول رابطه (۱) هم تنها با حفظ جملات تا مرتبه اول نسبت به $\frac{r}{R_0}$ می‌شود.

$$m_1\ddot{r} = \frac{m_1\ell^2}{r^3} - \frac{Gm_1m_2}{r^2} - \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\ 2}}\cos\omega_0 t$$

با فرض این که اختلاف r و r_0 (حالتی که m_3 وجود ندارد) کوچک باشد یعنی $\Delta r = r - r_0 \ll r_0$ باشد، به دست می‌آوریم.

$$m_1\left(\Delta\ddot{r}\right) = \frac{m_1\ell^2}{r_0^3}\left(1-3\frac{\Delta r}{r_0}\right) - \frac{Gm_1m_2}{r_0^{\ 2}}\left(1-\frac{2\Delta r}{r_0}\right) - \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\ 2}}\cos\omega_0 t$$

با $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$ و کوچک بودن $\Delta\ell$ نسبت به ℓ_0 داریم:

$$m_1\left(\Delta\ddot{r}\right) = \frac{m_1\ell_0^{\ 2}}{r_0^3}\left(1+\frac{2\Delta\ell}{\ell_0}\right)\left(1-\frac{3\Delta r}{r_0}\right) - \frac{Gm_1m_2}{r_0^2}\left(1-\frac{2\Delta r}{r_0}\right) - G\frac{m_1m_3}{R_0^{\ 2}}\cos\omega_0 t$$

با صرفنظر کردن از جملات مرتبه دوم به دست می‌آوریم:

$$m_1\left(\Delta\ddot{r}\right) = \frac{m_1\ell_0^{\ 2}}{r_0^3} - \frac{3m_1\ell_0^{\ 2}}{r_0^4}\Delta r + \frac{2m_1\ell_0\Delta\ell}{r_0^3} - \frac{Gm_1m_2}{r_0^2} + \frac{2Gm_1m_2}{r_0^3}\Delta r - \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\ 2}}\cos\omega_0 t$$

با توجه به $\ell_0 = r_0^2\omega_0 = \sqrt{Gm_2r_0}$ که از قسمت الف به دست می‌آید، جمله اول و چهارم سمت راست معادله اخیر یکدیگر را حذف می‌کنند و با جانشین کردن $\Delta\ell$ که به شکل زیر است، به دست می‌آوریم:

$$\Delta\ell = \frac{Gm_3}{R_0^2}\frac{r_0}{\omega_0}\left(1-\cos\omega_0 t\right) = C\left(1-\cos\omega_0 t\right) \Rightarrow$$

$$m_1\left(\Delta\ddot{r}\right) = -\frac{Gm_1m_2}{r_0^3}\Delta r + \frac{2m_1\ell_0}{r_0^3}C\left(1-\cos\omega_0 t\right) - \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\ 2}}\cos\omega_0 t$$

که با ساده کردن داریم

$$\Delta\ddot{r} + \omega_0^{\ 2}\Delta r = K - \alpha\cos\omega_0 t$$

که در آن $K = \frac{2m_1\ell_0}{r_0^3}C$, $\alpha = \frac{2m_1\ell_0 C}{r_0^3} + \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\ 2}}$ است. بنابراین جواب r به صورت زیر است:

$$r = r_0 + \Delta r = r_0 + C\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{K}{\omega_0^{\ 2}} + \frac{\alpha}{\omega_1^{\ 2} - \omega_0^{\ 2}}\cos\omega_1 t \ , \ \omega_1 = \omega_0$$

ج) این مدل، مدل خوبی برای سیستم ماه- زمین- خورشید نیست. زیرا در حالت $\omega_1 = \omega_0$ دامنه به بی‌نهایت می‌رود و ماه دور زمین باقی نمی‌ماند. در واقع از چرخش زمین صرفنظر کرده‌ایم که درست نیست و با تقریبهایی که زدیم نیروی ناشی از m_3 (خورشید) را کم گرفته‌ایم که باز درست نیست.

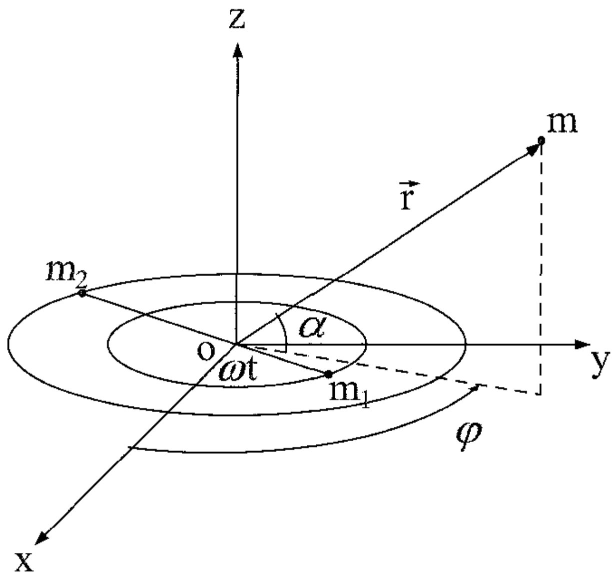
۴- فرض کنید توان ورودی P باشد. توان بر واحد سطح روی شبکیه $\frac{0.01P}{\pi\frac{D^2}{4}}$ است که D قطر لکهٔ زرد است و فرض می‌کنیم تصویر روی تمام لکهٔ زرد بیفتد. اگر a مساحت هر سلول حساس به نور باشد، توانی که به آن می‌رسد $a\frac{0.01P}{\pi\frac{D^2}{4}}$ است. این توان باید حداقل $12\times10\frac{ev}{s}$ باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{0.01Pa}{\pi\frac{D^2}{4}}=120\frac{ev}{s}$$

$$\therefore P=\frac{\pi\frac{D^2}{4}\times120}{0.01a}=\frac{\pi\frac{\left(2\times10^{-3}\right)^2}{4}\times120}{0.01\times0.07\times10^{-6}}\approx5.4\times10^5\frac{ev}{s}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان پنجم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱-



اجرام m_1 و m_2 حول نقطه o با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کنند و بردار مکان آنها در دستگاه xyz به صورت $\vec{d}_1 = d_1\left(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}\right)$ و $\vec{d}_2 = -d_2\left(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}\right)$ است. بردار مکان جرم m هم به صورت $\vec{r} = r\left(\cos\alpha\cos\varphi\hat{i} + \cos\alpha\sin\varphi\hat{j} + \sin\alpha\hat{k}\right)$ است. سیاره تقریباً ثابت است پس داریم:

$$\vec{F}_1 = -G\frac{mm_1}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{d}_1\right)$$

$$\vec{F}_2 = -G\frac{mm_2}{\left|\vec{r}-\vec{d}_2\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{d}_2\right)$$

اگر مقادیر $\vec{r}$، $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ را در روابط $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ جایگزین کنیم و اولین مرتبه غیر صفر $\frac{d_1}{r}$ و $\frac{d_2}{r}$ را نگه داریم، به دست می‌آوریم:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{Gm\left(m_1+m_2\right)}{r^3}\vec{r} + \frac{3}{2}\frac{Gmm_1d_1}{r^5}\left(d_1+d_2\right)\vec{r}$$
$$+\frac{3Gmm_1d_1\left(d_1+d_2\right)}{r^4}\cos\alpha\cos\left(\omega t-\varphi\right)\left(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}\right)$$
$$-\frac{15}{2}\frac{Gmm_1d_1}{r^5}\left(d_1+d_2\right)\left(\cos\alpha\cos\left(\omega t-\varphi\right)\right)^2\vec{r}$$

که در آن α و φ زوایای نشان داده شده در شکل‌اند که مربوط به مختصات m است. توجه کنید در این روابط از $m_1d_1 = m_2d_2$ نیز استفاده شده است. البته با متوسط زمانی گرفتن می‌توان آن را ساده کرد.

۲- برای این که ببینیم حرکت روی دایره پایدار است تغییر جزئی زیر را در r و θ می‌دهیم.

$$\begin{cases} r = r_0 + \delta r \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \delta\theta \end{cases} \to \begin{cases} \dot r = \delta\dot r \\ \dot\theta = \omega_0 + \delta\dot\theta \end{cases} \to \begin{cases} \ddot r = \delta\ddot r \\ \ddot\theta = \delta\ddot\theta \end{cases}$$

بنابراین $\hat v = \dfrac{\left(\delta\dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta\right)}{\sqrt{\delta\dot r^2 + r^2\dot\theta^2}}$ است و تا مرتبه اول معادله‌ی حرکت می‌شود.

$$\begin{cases} m\left(\ddot r - r\dot\theta^2\right) = -\dfrac{\alpha m}{r^n} \\ m\left(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta\right) = \dfrac{\alpha m}{r^n}\left(\dfrac{\delta\dot r}{r\dot\theta}\right) \end{cases} \tag{1}$$

با جایگزین کردن مقادیر و حفظ آنها تا مرتبه اول داریم:

$$\delta\ddot r - \left(r_0 + \delta r\right)\left({\omega_0}^2 + 2\omega_0\delta\dot\theta\right) = -\frac{\alpha}{r_0^n}\left(1 - n\frac{\delta r}{r_0}\right) \tag{3}$$

$$r_0\delta\ddot\theta + 2\omega_0\delta\dot r = \frac{\alpha}{r_0^{n+1}\omega_0}\delta\dot r \tag{4}$$

از (4) به دست می‌آوریم.

$$\delta\dot\theta = \frac{\alpha}{\omega_0 r_0^{n+2}}\delta r - \frac{2\omega_0}{r_0}\delta r \tag{5}$$

(3) هم با توجه به $r_0{\omega_0}^2 = \dfrac{\alpha}{r_0^n}$ و حفظ جملات تا مرتبهٔ اوّل به صورت زیر می‌شود:

$$\delta\ddot r - {\omega_0}^2\delta r - 2\omega_0 r_0\delta\dot\theta = \frac{\alpha n}{r_0^{n+1}}\delta r \tag{6}$$

با ترکیب (5) و(6) و حذف $\delta\dot\theta$ به دست می‌آوریم:

$$\delta\ddot r + \left(3{\omega_0}^2 - \frac{2\alpha}{r_0^{n+1}} - \frac{\alpha n}{r_0^{n+1}}\right)\delta r = 0$$

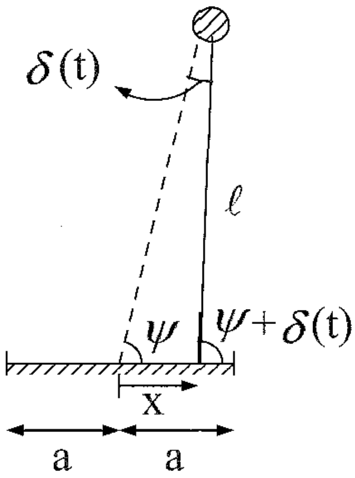
می‌دانیم ${\omega_0}^2 = \dfrac{\alpha}{r_0^{n+1}}$ است و اینکه شرط تعادل پایدار وقتی است که ضریب δr مثبت شود تا حول r_0 یک حرکت نوسانی داشته باشیم. بنابراین

$$3\alpha-2\alpha-\alpha n>0\Rightarrow n<1$$

چون در ابتدا حرکت دایره‌ای داریم، α مثبت است.

۳- الف) مکان تکیه‌گاه آونگ به صورت $x=a\sin\omega t$ است.

چون $a \ll \ell$ است از روی شکل پیداست که:



$$\delta(t)=\frac{x\sin\psi}{\ell}$$

$$\therefore\ \delta(t)=\frac{a\sin\omega t\sin\psi}{\ell} \qquad (1)$$

ب) نیروی مجازی $-m\ddot{x}$ است و مؤلفهٔ مماسی برابر $-m\ddot{x}\sin\psi'=ma\omega^2\sin\omega t\sin\psi'$ است که در آن $\psi'=\psi+\delta(t)$ است. متوسط زمانی این نیروی مماسی می‌شود:

$$\langle F_{\text{مجازی}}\rangle=F'$$

$$F'=\frac{1}{T}\int_0^T ma\omega^2\sin\omega t\sin\psi' dt=\frac{1}{T}ma\omega^2\left[\int_0^T\sin\omega t\left(\sin\psi\cos\delta(t)+\sin\delta(t)\cos\psi\right)dt\right]$$

با تقریب‌های $\sin\delta(t)=\delta(t)$, $\cos\delta(t)=1$ داریم.

$$F'=\frac{ma\omega^2}{T}\int_0^T\sin\psi\sin\omega t\,dt+\frac{ma\omega^2}{T}\int_0^T\cos\psi\sin(\omega t)\delta(t)dt$$

انتگرال اول صفر است و به جای $\delta(t)$ در انتگرال دوم از رابطه (۱) استفاده می‌کنیم.

$$F'=\frac{ma\omega^2}{T}\int_0^T\cos\psi\sin(\omega t)\frac{a\sin\omega t\sin\psi}{\ell}dt=\frac{ma^2\omega^2\cos\psi\sin\psi}{T\ell}\int_0^T\sin^2\omega t\,dt$$

$$F'=\frac{ma^2\omega^2\cos\psi\sin\psi}{2\ell}$$

نیروی مماسی وزن $F_g=mg\cos\psi'$ است و متوسط زمانی آن می‌شود.

$$< F_g > = \frac{1}{T}\int_0^T mg\cos\psi'\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T mg\cos\left(\psi+\delta(t)\right)dt =$$

$$\frac{mg}{T}\int_0^T \left[\cos\psi\cos\delta(t) - \sin\psi\sin\delta(t)\right]dt$$

$$\Rightarrow < F_g > = mg\cos\psi$$

که در آن از $\cos\delta(t)=1$ و $\sin\delta(t)=\delta(t)$ و از (1) استفاده شده است.

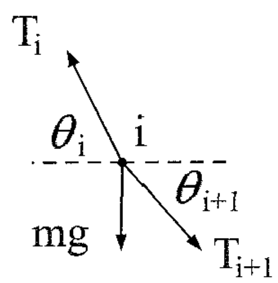
ج) شرط تعادل پایدار این است که متوسط نیروهای به دست آمده در قسمت (ب) با هم برابر شوند یعنی:

$$mg\cos\psi = \frac{ma^2\omega^2}{2\ell}\cos\psi\sin\psi$$

چون $\psi \approx \frac{\pi}{2}$ است پس شرط تعادل پایدار می‌شود $\omega = \sqrt{\frac{2g\ell}{a^2}}$.

۴- ذره‌ی iام را در نظر بگیریم. در حالت تعادل داریم:

$$\begin{cases} T_i\sin\theta_i - T_{i+1}\sin\theta_{i+1} = mg & (1)\\ T_i\cos\theta_i = T_{i+1}\cos\theta_{i+1} & (2)\end{cases}$$



با حذف T_{i+1} بین دو رابطه اخیر بدست می‌آوریم.

$$T_i\sin\theta_i - T_i\cos\theta_i\tan\theta_{i+1} = mg \qquad (3)$$

(2) نشان می‌دهد که $T_i\cos\theta_i$ ثابت است. بنابراین داریم:

$$T_i\cos\theta_i = T_1\cos\theta_1 \qquad (4)$$

که اندیس یک مربوط به ذره اول است. (ذره صفرم نگه داشته شده است.) بنابراین (3) می‌شود.

$$T_1\cos\theta_1\tan\theta_i - T_1\cos\theta_1\tan\theta_{i+1} = mg$$

$$\therefore \quad \tan\theta_{i+1} = \tan\theta_i - \frac{mg}{T_1\cos\theta_1} \qquad (5)$$

از (5) داریم

$$\tan\theta_2 = \tan\theta_1 - \frac{mg}{T_1\cos\theta_1}$$

$$\tan\theta_3 = \tan\theta_2 - 2\frac{mg}{T_1\cos\theta_1} \qquad (6)$$

$$\vdots$$

$$\tan\theta_i = \tan\theta_1 - (i-1)\left(\frac{mg}{T_1\cos\theta_1}\right)$$

حال از تقارن نیرویی که به ذره صفرم و nام وارد می‌شود و نیروی قائم وارد به طناب که برابر جرم آویزان است استفاده می‌کنیم یعنی:

$$2T_1\sin\theta_1 = (N-1)mg$$

$$\sin\theta_1 = \frac{(N-1)mg}{2T_1}$$

که مقدار $\sin\theta_1$ را برابر k در نظر می‌گیریم.

و $\cos\theta_1 = \sqrt{1-k^2}$، پس با توجه به (6) داریم:

$$\tan\theta_i = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} - (i-1)\left(\frac{mg}{T_1\sqrt{1-k^2}}\right)$$

$$\therefore \quad \tan\theta_i = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left(k-(i-1)\frac{mg}{T_1}\right) \;;\; k = \frac{(N-1)mg}{2T_1} \qquad (7)$$

که در آن T_1 یک ثابت است که با توجه به فاصله افقی دو نقطه اتصال طناب (جسم‌های صفرم و Nام)، D، می‌توانیم آن را تعیین کنیم.

$$D = \ell\cos\theta_1 + \ell\cos\theta_2 + \ldots + \ell\cos\theta_{N-1} + \ell\cos\theta_N$$

$$D = \ell\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i = \ell\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_i}} = \ell\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\left(k-(i-1)\frac{mg}{T_1}\right)^2}{1-k^2}}}$$

$$\therefore \quad \frac{D}{\ell} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\left(k-(i-1)\frac{mg}{T_1}\right)^2}{1-k^2}}} \qquad (8)$$

از (8) مقدار T_1 بر حسب کمیت‌های معلوم محاسبه می‌شود.

۵- در هر لحظه سرعت جسم را به صورت $\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}$ نشان می‌دهیم. چون $\vec{B}$ در راستای $\hat{k}$ است پس نیرو در صفحه xy خواهد بود و سرعت همواره در صفحه xy است. معادله حرکت جسم می‌شود:

$$q\vec{v}\times\vec{B} - \alpha\vec{v} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$q\left(\dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}\right)\times B\hat{z} - \alpha\left(\dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}\right) = m\left(\ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y}\right)$$

بنابراین مولفه‌های x و y می‌شود

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\alpha\dot{y} - qB\dot{x} \end{cases}$$

با یک بار انتگرال گیری داریم

$$\begin{cases} m\dot{x} = -\alpha x + qBy + C \\ m\dot{y} = -\alpha y - qBx + C' \end{cases} \qquad (1)$$

که در آن C و C' ثابت‌هایی هستند که از شرایط اولیه به دست می‌آیند. در لحظه پرتاب $x = y = 0$ و $\dot{x} = v_x$ و $\dot{y} = v_y$ است. پس

$$\begin{cases} mv_x = C \\ mv_y = C' \end{cases}$$

بنابراین (1) می‌شود

$$\begin{cases} m\dot{x} = -\alpha x + qBy + mv_x \\ m\dot{y} = -\alpha y - qBx + mv_y \end{cases}$$

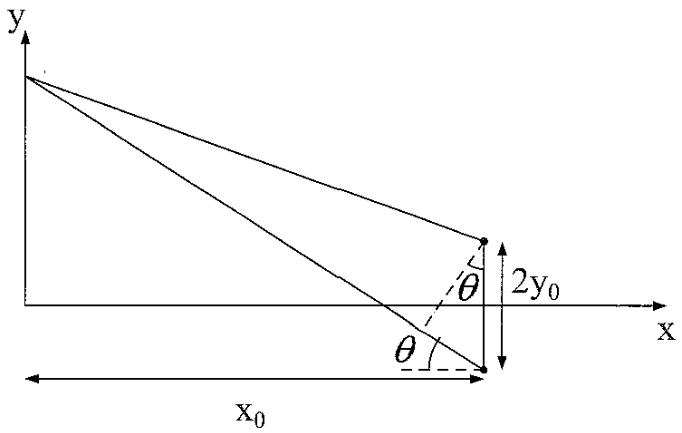
در زمان سکون $\dot{x} = \dot{y} = 0$ است پس:

$$\begin{cases} -\alpha x + qBy + mv_x = 0 \\ -\alpha y - qBx + mv_y = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

با حل (2) بر حسب x و y مختصات نقطه سکون به دست می‌آید.

$$\begin{cases} x = \dfrac{m\left(\alpha v_x + qBv_y\right)}{\alpha^2 + q^2B^2} \\[2ex] y = \dfrac{m\left(\alpha v_y - qBv_x\right)}{\alpha^2 + q^2B^2} \end{cases}$$

۶- الف) تصویر مجازی جسم در آینه مانند یک منبع دیگر عمل می‌کند که با منبع اصلی به اندازهٔ π اختلاف فاز دارد. اختلاف راه نوری دو منبع به اندازهٔ $2y_0 \sin\theta$ است. بنابراین اختلاف فاز آنها می‌شود.



$$\Delta\varphi = \pi + 2\pi \frac{2y_0 \sin\theta}{\lambda}$$

در نقاط ماکزیمم $\Delta\varphi = 2k\pi$ است پس:

$$2k\pi = \pi\left(1 + \frac{4y_0 \sin\theta}{\lambda}\right)$$

$$\therefore \qquad \sin\theta_{max} = \frac{\lambda(2k-1)}{4y_0}$$

اگر y هر نوار را با h نشان دهیم، داریم:

$$h \approx x_0 \sin\theta$$

و مکان ماکزیمم می‌شود

$$h_{max} = \frac{\lambda x_0 (2k-1)}{4y_0}$$

اولین نوار روشن به ازای $k = 1$ به دست می‌آید.

$$h_1 = \frac{\lambda x_0}{4y_0}$$

ب) اگر مکان منبع نورانی را با $\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$ نشان دهیم مکان اولین نوار روشن $h_1 = \dfrac{\lambda}{4}\dfrac{x}{y}$ خواهد شد. بنابراین سرعت آن می‌شود

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{\lambda}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{y^2}\right)$$

با توجه به بردار سرعت منبع $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$ مولفه z بردار $\vec{v}\times\vec{r}$ همان $\dot{x}y - \dot{y}x$ است یعنی

$$(\vec{v}\times\vec{r}).\hat{z} = \dot{x}y - \dot{y}x$$

از طرفی $y = \vec{r}.\hat{y}$ است پس سرعت حرکت اولین نوار روشن می‌شود.

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{\lambda}{4}\frac{(\vec{v}\times\vec{r}).\hat{z}}{(\vec{r}.\hat{y})^2}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱- فرض می‌کنیم که ارابه به مدت زمان t با شتاب ثابت a به سمت راست حرکت کند. در این صورت ارابه ، مسافت $x = \frac{1}{2}at^2$ را به سمت راست حرکت کرده است و طناب به اندازه $\ell = \frac{1}{2}at^2 \frac{r}{R}$ باز شده و در نتیجه وزنه m به اندازه $h = \frac{1}{2}at^2 \frac{r}{R}\sin\theta$ پایین آمده است. حال سرعت هر یک از اجرام را در انتهای کار می‌یابیم. اندازه سرعت جرم M را با v و اندازه سرعت جرم m را با u نمایش می‌دهیم. در نتیجه:

$$v = at$$

$$u = at\sqrt{\left(1-\frac{r}{R}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\sin\theta\right)^2} = at\sqrt{1+\frac{r^2}{R^2}-2\frac{r}{R}\cos\theta}$$

حال با نوشتن بقاء انرژی، بدست می‌آید که:

$$mg\times\frac{1}{2}at^2\frac{r}{R}\sin\theta = \frac{1}{2}M\left(a^2t^2\right)+\frac{1}{2}m\left(a^2t^2\right)\left(1+\frac{r^2}{R^2}-2\frac{r}{R}\cos\theta\right) \Rightarrow$$

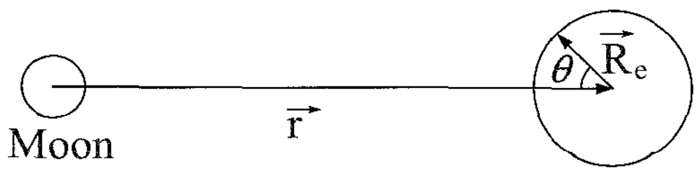
$$a = \frac{mg\ \frac{r}{R}\sin\theta}{M+m\left(1+\frac{r^2}{R^2}-\frac{2r}{R}\cos\theta\right)}$$

۲- زمین با شتابی مشخص به سمت ماه در حال حرکت و شتاب گرفتن است. (حرکت دایره‌ای ماه و زمین به معنای یک شتاب مرکز گرا است.)

r : فاصله زمین تا ماه

R_e : شعاع زمین

M_m : جرم ماه



اگر شتاب زمین را با $\vec{a}$ و شتاب جسم در مکان $\left(\vec{r}+\vec{R}e\right)$ را با توجه به شکل با $\vec{a}'$ نمایش دهیم، بدست می‌آید که:

$$\vec{a}'-\vec{a}=\frac{-GM_m\left(\vec{r}+\vec{R}e\right)}{\left|\vec{r}+\vec{R}e\right|^3}+\frac{GM_m\,\vec{r}}{r^3}=\frac{-GM_m}{r^3}\left(\left(\vec{r}+\vec{R}e\right)\left(1-\frac{3\vec{R}e.\vec{r}}{r^2}\right)-\vec{r}\right)=$$

$$\frac{-GM_m}{r^3}\left(\vec{R}e-\frac{3\left(\vec{R}e.\vec{r}\right)\vec{r}}{r^2}\right)$$

که اگر زاویه θ را جایگذاری کنیم به دست می‌آید که:

$$\vec{a}'-\vec{a}=\frac{GM_m\,Re}{r^3}\left(-3\cos\theta\hat{r}-\hat{R}e\right)$$

حال می‌خواهیم تخمینی از نسبت این شتاب به تغییر شتاب گرانش زمین را بیابیم. ابتدا ماکسیمم هر یک از این دو را می‌یابیم.

$$\max(\vec{a}'-\vec{a})=\frac{GM_m\,Re}{r^3}\sqrt{5}$$

که با مشتق گیری بدست می‌آید. و ماکسیمم شتاب گریز از مرکز نیز برابر است با:

$$a''=\Omega^2R_e$$

در نتیجه نسبت این دو شتاب می‌شود:

$$\frac{\frac{GM_m\,R_e}{r^3}\sqrt{5}}{\Omega^2R_e}$$

که با عدد گذاری مقدار 4×10^{-5} بدست می‌آید.

۳- الف)

$$V\left(r,\theta,0\right)=\int_0^{2\pi}\frac{-G\lambda a d\varphi}{\left(r^2\cos^2\theta+\left(r\sin\theta-a\cos\varphi\right)^2+a^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$-G\lambda a\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\varphi\right)^{1/2}}$$

$$\approx\frac{-G\lambda a}{r}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi+\frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)=$$

$$-\frac{G\lambda a}{r}\left(2\pi\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{3}{4}\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta\right)\right)=\frac{-G\lambda a2\pi}{r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{-1}{2}+\frac{3}{4}\sin^2\theta\right)\right)$$

ب)

$$\int_{-\ell}^{+\ell}\int_{0}^{2\pi}\frac{-G\,\rho\, a\, d\varphi\, dz}{\left(z^2+a^2+d^2-2da\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ج) ما میدان یک کره کامل با چگالی جرمی ρ را می‌دانیم. کره مذکور در قسمت ج را از بر هم نهی کره کامل، با یک چگالی بار $-\rho$ در ناحیه‌ای تقریباً استوانه‌ای شکل می‌توانیم بسازیم:

$$V=\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\int_{0}^{a}\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}\int_{0}^{2\pi}\frac{G\,\rho\, r\, d\varphi\, dr\, dz}{\left(d^2+z^2+r^2-2rd\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}\approx$$

$$\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\frac{2G\rho}{d}\int_{0}^{a}\int_{0}^{R-\frac{r^2}{2R}}\int_{0}^{2\pi}\left(r\, d\varphi\, dr\, dz\left(1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{d^2}+\frac{r}{d}\cos\varphi\right)\right)=$$

$$\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\frac{4\pi G\rho}{d}\int_{0}^{a}\int_{0}^{R-\frac{r^2}{2R}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{d^2}\right)dz\, r\, dr=$$

$$\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\frac{4\pi G\rho}{d}\int_{0}^{a}\left(R-\frac{r^2}{2R}-\frac{R^3\left(1-\frac{r^2}{2R^2}\right)^3}{6d^2}\right)r\, dr\approx$$

$$\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\frac{4\pi G\rho}{d}\left(\left(R-\frac{R^3}{6d^2}\right)\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{8R}\right)=\frac{-4\pi G\rho R^3}{3d}\left(1-\frac{3a^2}{2R^2}+\frac{a^2}{4d^2}+\frac{3a^4}{8R^4}\right)$$

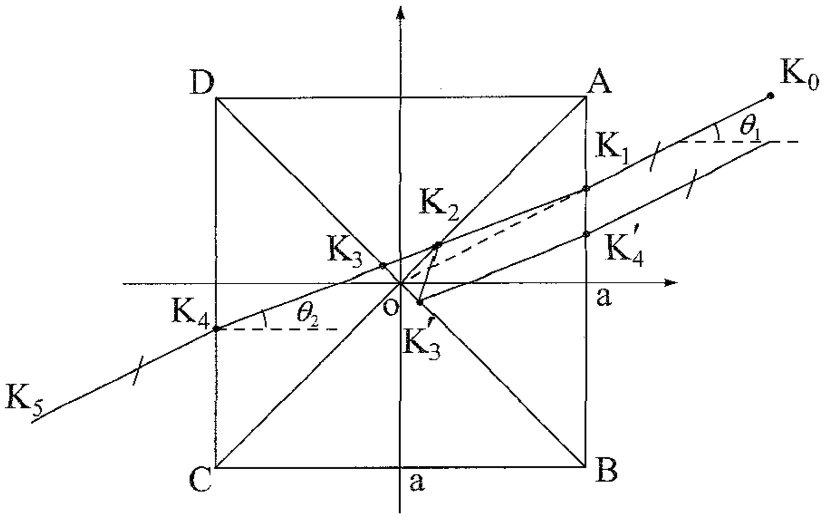
د)

$$\left.\frac{+dV}{d(d)}\right|_{r_0}=\frac{+4\pi G\rho R^3}{3r_0^2}\left(1-\frac{3a^2}{2R^2}+\frac{3a^2}{4r_0^2}+\frac{3a^4}{8R^4}\right)=\omega_0^2 r_0\Rightarrow$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{4\pi G\rho R^3}{3r_0^3}}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{-3a^2}{2R^2}+\frac{3a^2}{4r_0^2}+\frac{3a^4}{8R^4}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{3a^2}{2R^2}\right)^2\right)=$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{4\pi G\rho R^3}{3r_0^3}}\left(1-\frac{3a^2}{4R^2}+\frac{3a^2}{8r_0^2}-\frac{3a^4}{32R^4}\right)$$

۴- به شکل دقت کنید.



در ابتدا پرتوی K_0K_1 وارد سیستم می‌شود. این پرتو می‌شکند و پرتوی K_1, K_2 را تشکیل می‌دهد که حتماً در نقطه‌ای مثل K_2 با آینه Ao برخورد می‌کند.

فرض کنید به جای اینکه فکر کنیم پرتوی K_1K_2 از آینه Ao بازتاب می‌شود، فرض کنیم که کل دنیای سمت پایین آینه Ao نسبت به آن آینه بازتاب می‌شوند و در نتیجه تصویر B روی D می‌افتد و آینه Bo هم به آینه‌ای دیگر یعنی Do تبدیل خواهد شد. K_2K_3 همان بازتاب شده پرتو بازتاب شده ناشی از K_1K_2 در آینه Ao است و در نتیجه همین امتداد K_1K_2 را به خاطر دو بازتاب دارد. پرتوی K_2K_3 با آینه DO در نقطه‌ای به مانند K_3 برخورد می‌کند و باز هم همان عملیات قبل را انجام می‌دهیم و جای اینکه پرتو را بازتاب کنیم، تصویر مجازی را دوباره بازتاب می‌کنیم و تصویر دیگری از تصویر می‌سازیم. یعنی A را به C تصویر می‌کنیم. پرتو K_2, K_3 همان امتداد قبلی خود را یعنی K_3K_4 را می‌پیماید تا اینکه به انتهای مسیر شیشه‌ای یعنی CD می‌رسد و از محیط خارج می‌شود. در هنگام خارج شدن دوباره همان امتداد K_0K_1 را می‌گیرد که تنها یک انتقال به بالا یافته است.

D تصویر شده نقطه B است و C هم تصویر شده نقطه A. گویی که همه چیز نسبت به نقطه o یک تقارن نقطه‌ای یافته است. در واقع بنا بر هندسه می‌دانیم که تصویر نسبت به دو خط متعامد همان دوران به اندازه زاویه 180° است. کافی است پرتوی K_4K_5 را نسبت به مبدأ تقارن نقطه‌ای دهیم تا پرتوی خروجی را بیابیم.

$$\sin\theta_1 = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{\frac{m}{n}}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\cot\theta_2 = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta} - 1} = \sqrt{\frac{(m^2+1)n^2}{m^2} - 1} = \sqrt{\frac{(m^2+1)n^2 - m^2}{m^2}} = \frac{\sqrt{m^2(n^2-1)+n^2}}{m}$$

$$K_4=\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}m-a\,tg\theta_2\right)=\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}m-a\frac{m}{\sqrt{m^2\left(n^2-1\right)+n^2}}\right)$$

که می‌دانیم K_4' همان $-K_4$ است:

$$K_4'=\left(+\frac{a}{2},\frac{am}{\sqrt{m^2\left(n^2-1\right)+n^2}}-\frac{a}{2}m\right)\Rightarrow$$

$$\left(Y'-am\left(\frac{1}{\sqrt{m^2\left(n^2-1\right)+n^2}}-\frac{1}{2}\right)\right)=m\left(x'-\frac{a}{2}\right)$$

که به ازای $n=1$ نیز پرتو بازتابیده همان معادله $Y'=mx'$ را خواهد داشت.

۵- الف)

$$mgh=\frac{1}{2}m{v_0}^2\Rightarrow v_0=\sqrt{2gh}$$

ب)

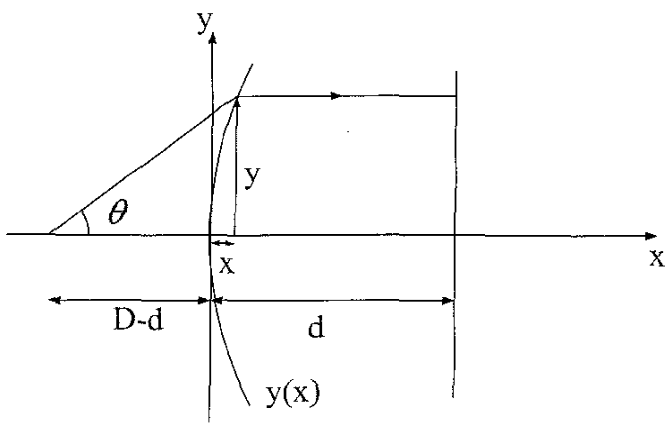
$$\left.\begin{aligned}x&=v_0.T\\ y&=H-h-\frac{1}{2}gT^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=H-h-\frac{x^2}{4h}\qquad\qquad x\le 2\sqrt{h\left(H-h\right)}$$

H ارتفاع Aها از سطح زمین می‌باشد.

$$\frac{\partial y}{\partial h}=-1+\frac{x^2}{4h^2}=0\Rightarrow 4h^2=x^2\Rightarrow h=\frac{x}{2}$$

$$\max y=H-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\times\frac{x}{2}}=H-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}=H-x$$

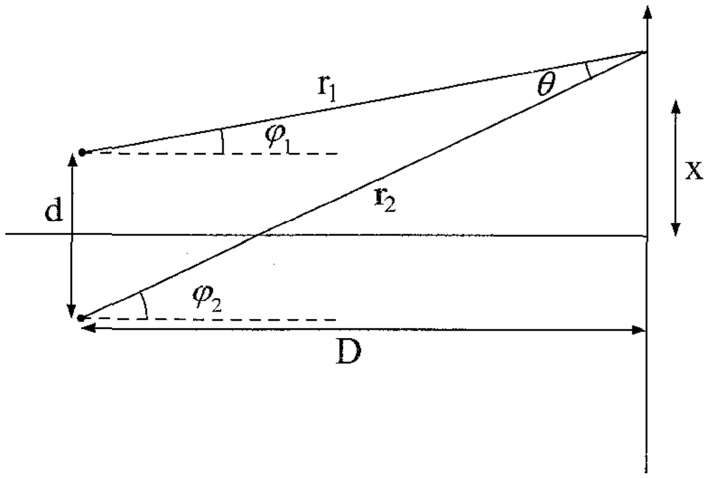
۶- با توجه به اصل فرما تمام پرتوهایی که در بی‌نهایت به هم می‌رسند باید زمان یکسانی را بپیمایند. پس زمانی که پرتوها طی می‌کنند تا به سطح تخت برسند می‌بایست یکسان باشد.



$$\frac{\sqrt{(D-d+x)^2+y^2}}{C}+\frac{n(d-x)}{C}=\frac{D-d}{C}+\frac{nd}{C}\Rightarrow$$
$$\sqrt{(D-d+x)^2+y^2}=nx+D-d\Rightarrow$$
$$y=\sqrt{(nx+D-d)^2-(x+D-d)^2}=\sqrt{(n^2-1)x^2+2(n-1)(D-d)x}$$

۷- **الف)** انرژی که در واحد طول از خط نورانی گسیل می‌شود، برابر U می‌باشد و از طرفی در فاصله r از خط شدت نور، $I(r)$ می‌باشد. که $U=2\pi rI$ ثابت است. پس $I\propto\frac{1}{r}$ و داریم: $I\propto E^2$ در نتیجه $E\propto\frac{1}{\sqrt{r}}$.

ب) به شکل زیر دقت کنید.



و فرض کنید که $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ است. داریم که:

$$r_1=\sqrt{D^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}\approx D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{D}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2D}\right)^2-\frac{xd}{2D^2}\right),\vec{r}_1=D\hat{y}+\left(x-\frac{d}{2}\right)\hat{x}$$
$$r_2=\sqrt{D^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}\approx D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{D}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2D}\right)^2+\frac{xd}{2D^2}\right),\vec{r}_2=D\hat{y}+\left(x+\frac{d}{2}\right)\hat{x}$$

در نتیجه داریم که:

$$I=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot\hat{n}=D\times\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\tilde{C}}{r_1\sqrt{r_1}}e^{i(kr_1-\omega t)}\left(\hat{z}\times\vec{r}_1\right)+\frac{\tilde{C}}{r_2\sqrt{r_2}}e^{i(kr_2-\omega t)}\left(\hat{z}\times\vec{r}_1\right)\right)\times\\ \left(\frac{\tilde{C}}{\sqrt{r_1}}e^{i(kr_1-\omega t)}\hat{z}+\frac{\tilde{C}}{\sqrt{r_2}}e^{i(kr_2-\omega t)}\hat{z}\right)^*\end{array}\right].\hat{n}$$

که در آن $\tilde{C}$ و D دو ثابت به ترتیب مختلط و حقیقی هستند. با توجه به این که $\hat{n}$ در راستای $\hat{y}$ است، با اندکی بررسی می‌توان فهمید که قسمت $\hat{x}$ در داخل $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ در نهایت نتیجه صفر به دنبال دارد. پس از ساده سازی داریم که:

$$I=\tilde{C}'\times\mathrm{Re}\left[\begin{matrix}\left(\frac{1}{r_1\sqrt{r_1}}\left(\hat{z}\times D\hat{y}\right)+\frac{1}{r_2\sqrt{r_2}}e^{ik(r_2-r_1)}\left(\hat{z}\times D\hat{y}\right)\right)\times\\ \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}\hat{z}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}e^{-ik(r_2-r_1)}\hat{z}\right)\end{matrix}\right].\hat{y}=$$

$$\tilde{C}'D\times\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{r_1\sqrt{r_1}}+\frac{1}{r_2\sqrt{r_2}}e^{ik(r_2-r_1)}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}e^{-ik(r_2-r_1)}\right)\right]=$$

$$\tilde{C}''\times\mathrm{Re}\left[\begin{matrix}\left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}}+\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}}e^{ik(r_2-r_1)}\right)\times\\ \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}e^{-ik(r_2-r_1)}\end{matrix}\right]=$$

$$\tilde{C}''\times\mathrm{Re}\left[\begin{matrix}\left(\left(1-\frac{3}{4}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)+\left(1-\frac{3}{4}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)e^{ik(r_2-r_1)}\right)\times\\ \left(\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)+\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)e^{-ik(r_2-r_1)}\right)\end{matrix}\right]=$$

که با جانشینی $r_2-r_1=\frac{xd}{D}$ خواهیم داشت:

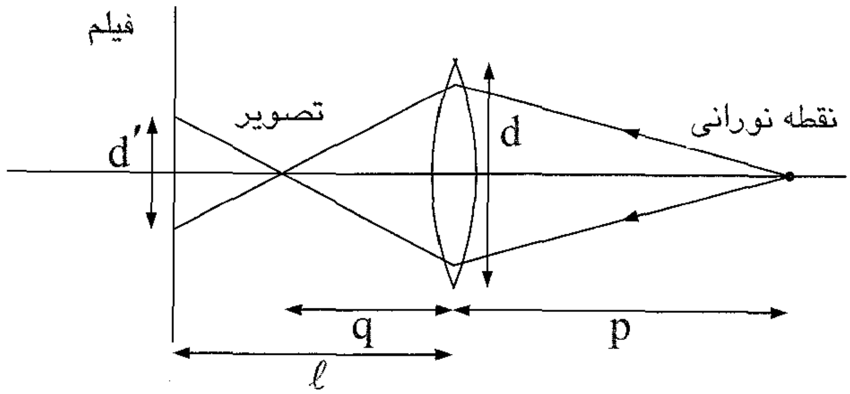
$$I=\tilde{C}''\times\left(\begin{array}{l}\left(1-\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)+\left(1-\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)+\\ \left(\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2-\frac{3}{4}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)\times\cos\left(k\frac{xd}{D}\right)\right)+\\ \left(\left(1-\frac{3}{4}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)\times\cos\left(k\frac{xd}{D}\right)\right)\end{array}\right)=$$

$$\tilde{C}''\times\left(2-\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2-\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)\left(1+\cos\left(k\frac{xd}{D}\right)\right)$$

لازم به ذکر است که چیزی در مورد کوچکی یا بزرگی k که ناشی از λ است در صورت سوال نیامده است.

۸-

$$\frac{1}{p_0}+\frac{1}{\ell}=\frac{1}{f} \qquad (1)$$



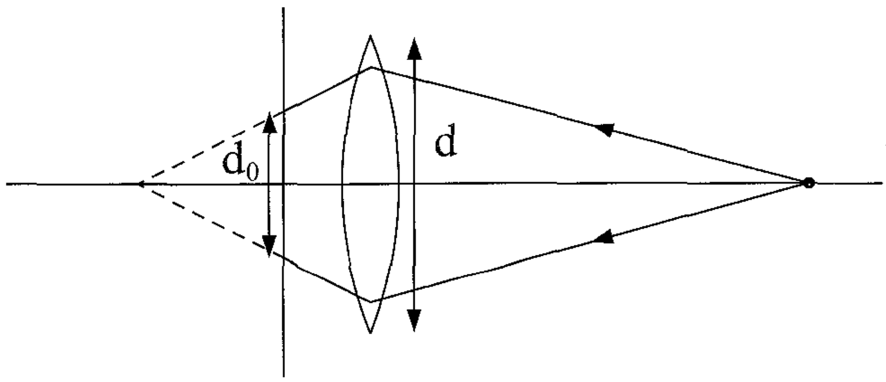
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow q=\frac{fp}{p-f}$$

$$\frac{d'}{\ell-q}=\frac{d}{q}\Rightarrow d'=\left(\frac{\ell}{q}-1\right)d=\left(\ell\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{p}\right)-1\right)d\xrightarrow{(1)}$$

$$d'=\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\right)\ell d$$

$$-d_0\le d'\le d_0\Rightarrow\frac{-d_0}{\ell d}\le\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\le\frac{d_0}{\ell d}\Rightarrow\frac{1}{p_0}+\frac{d_0}{\ell d}\ge\frac{1}{p}\ge\frac{1}{p_0}-\frac{d_0}{\ell d}$$

d' برابر $-d_0$ به شکل مقابل می‌باشد.



۹- الف) می‌دانیم که توان با $\frac{1}{r^2}$ متناسب است. اگر توان خورشید را برابر P_0 بگیریم. توان ستاره‌ای در فاصله R از زمین، برابر است با: (در ضمنِ حل به مدت زمانی که نور در یک دقیقه طی می‌کند LM و به مدت زمانی که نور در یک سال طی می‌کند LY نسبت داده شده است.)

$$P_{(R)} = P_0\left(\frac{8\times LM}{R}\right)^2$$

حال به عنوان یک مدل فرض می‌کنیم که در فاصله بین ۴ سال نوریِ n، تا ۴ سال نوریِ $(n+1)$، تعداد $4\pi n^2$ ستاره وجود داشته باشد. (واضح است که این مدل برای nهای بزرگ مدلی کاملاً مناسب است.) در اینصورت داریم که:

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\frac{10^4 LY}{4LY}} P_0\left(\frac{8\times LM}{4nLY}\right)^2 4\pi n^2 = P_0 4\pi\frac{10^4}{4}\left(\frac{8}{4\times 365\times 24\times 60}\right)^2 \approx 10^{-6}P_0$$

پس نسبت آن به توان خورشید 10^{-6} است.

ب) تعداد ستاره‌های کهکشان راه شیری برابر است با:

$$\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{10^4 LY}{4LY}\right)^3$$

و در نتیجه توان متوسط ستاره‌های کهکشان راه شیری یا ستاره‌های هر کهکشان دیگری در فاصله R از آنها برابر خواهد بود با:

$$P_2'(n') = \frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{10^4 LY}{4LY}\right)^3\times P_0\times\left(\frac{8LM}{2\times 10^6\times n'}\right)^2$$

حال اگر قطر جهان را با r نشان دهیم، توان کل کهکشان‌های دیگر در زمین مثل قسمت الف محاسبه می‌شود. یعنی:

$$P_2 = \sum_{n'=1}^{\frac{r}{2\times10^6 LY}} P_2'(n').4\pi n'^2 = 4\pi\frac{r}{2\times10^6}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{10^4}{4}\right)^3 P_0\left(\frac{8}{2\times10^6\times365\times24\times60}\right)^2$$

و در نتیجه نسبت P_2 به P_1 برابر خواهد بود با:

$$\frac{\frac{r}{2\times10^6}.\frac{4}{3}\pi\left(\frac{10^4}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2\times10^6}\right)^2}{\left(\frac{10^4}{4}\right)\quad\left(\frac{1}{4}\right)^2} \approx r\times10^{-10}$$

که نیاز به مقدار r (شعاع جهان) بر حسب سال نوری دارد که در اطلاعات صورت سوال نیست.