جزوه مدارهای الکتریکی ۲

بهروز آدینه

فهرست مطالب

فصل ۱

گراف‌های شبکه و قضیه تلگان

۱-۱ مقدمه

در مدارهای الکتریکی ۲ می‌خواهیم برای تجزیه و تحلیل و تعیین خواص یک شبکه[1] ، به هر پیچیدگی که باشد، روش‌های منظمی را به وجود آوریم. توجه کنید که ما کلمه شبکه را که معنی یکسان با مدار (یعنی به هم پیوستنی از اجزا) دارد، به کار می‌بریم. با وجود این، کلمه شبکه معمولا ایده پیچیده بودن را دارد (یک شبکه مداری است که اجزای بیشتری داشته باشد). بعضی شبکه‌ها در عمل بسیار پیچیده هستند و ممکن است دارای صدها عنصر باشند. دلیل دیگری برای نیاز ما به توسعه این روش‌های منظم آن است که دنیای مهندسی به کلی در اثر کامپیوتر تغییر کرده است [۱].

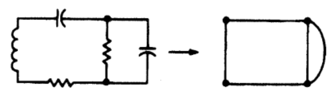
۱-۲ مفهوم یک گراف

قبل از تعریف گراف ابتدا باید مفهوم اجزای فشرده را بیان نماییم. خاصیت عمده عناصر فشرده، کوچکی اندازه آن‌ها می‌باشد (در مقایسه با طول موجی که با فرکانس طبیعی کار آن‌ها متناظر است). از نقطه نظر کلی حوزه الکترومغناطیسی، عناصر فشرده ویژگی‌های نقطه‌ای هستند. یعنی ابعاد فیزیکی آن‌ها قابل صرف‌نظر کردن است. عناصر فشرده ممکن است، مانند مقاومت یا خازن، دوسر داشته باشند و یا، مانند ترانسفورماتور و ترانزیستور، بیش از دو سر داشته باشند. برای عناصر فشرده دوسر می‌توان نشان داد که قوانین عمومی مربوط به حوزه الکترومغناطیسی، توام با محدودیت اندازه فیزیکی که در بالا به آن اشاره شد، لازم می‌دارند که جریانی که وارد یک سر آن می‌شود، با جریان که از سر دیگر آن خارج می‌شود، برابر باشد و اختلاف ولتاژ

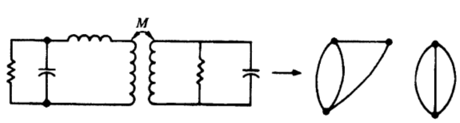
[1] Network

دوسر را، با اندازه‌گیری فیزیکی، می‌توان بدون هیچ ابهامی مشخص نمود. بنابراین، برای عناصر فشرده دوسر، جریانی که از عنصر می‌گذرد و ولتاژ دوسر آن کمیت‌های کاملا معینی هستند و برای عناصر فشرده‌ای که بیش از دو سر دارند جریانی که وارد هر سر می‌شود و ولتاژ بین هر جفت سر نیز، در همه لحظه‌ها، کمیت‌های معینی می‌باشند [۱].

فرض کنید که ما تنها آن فرکانس‌هایی را در نظر می‌گیریم که ما را مجاز می‌دارند که شبکه فیزیکی را به صورت به هم پیوستن اجزای فشرده[۱] یعنی مقاومت‌ها، خازن‌ها، سلف‌ها، سلف‌های تزویج شده، ترانسفورماتورها، منابع وابسته و نابسته مدل‌سازی کنیم. در این فصل شبکه N ممکن است خطی یا غیرخطی، اکتیو یا پسیو، تغییرپذیر با زمان یا تغییرناپذیر با زمان باشد. چون قوانین کیرشف[۲] به ماهیت اجزای مدار بستگی ندارند طبیعی است که می‌توان از ماهیت این اجزا صرف‌نظر کرد. برای این منظور هر جز شبکه N را با یک شاخه[۳] (که به صورت یک قطعه خط نمایش داده می‌شوند) تعویض می‌کنیم و در دو سر هر شاخه نقطه‌های سیاهی که گره‌ها[۴] نامیده می‌شوند رسم می‌کنیم (بعضی مولفین کلمه لبه[۵] را به جای شاخه و کلمه راس[۶] یا پیوند[۷] را به جای گره به کار می‌برند). نتیجه این عمل یک گراف[۸] می‌باشد. دو مثال در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. در شکل ۱-۱(ب) با وجود اینکه دو سلف متقابلا تزویج شده‌اند، گراف تزویج مغناطیسی N را نمایش نمی‌دهد؛ زیرا که M به ماهیت شاخه‌های N مربوط بوده و یک خاصیت گراف N نیست [۱] .



(الف) شبکه N (گراف با چهار گره و پنج شاخه)



(ب) شبکه N (گراف با دو جز مجزا، پنج گره و هفت شاخه)

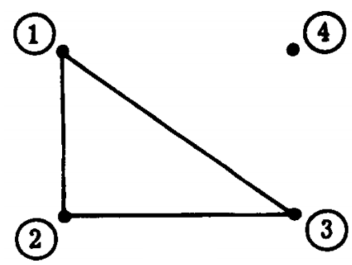
شکل ۱-۱: شبکه‌ها و گراف‌های آن‌ها

به عبارت دقیق‌تر، منظور از کلمه گراف دسته‌ای از گره‌ها به همراه دسته‌ای از شاخه‌ها می‌باشد، به شرط

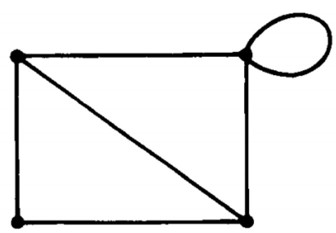
[1]Lumped elements
[2]Kirchhoff's laws
[3]Branch
[4]Nodes
[5]Edge
[6]Vertex
[7]Junction
[8]Graph

اینکه هر شاخه در هر سرش به یک گره ختم شود [۱].

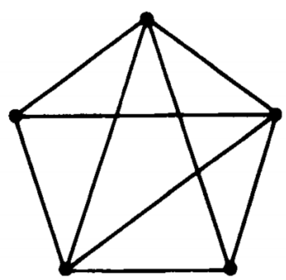
ملاحظه کنید که تعریف گراف، حالت خاصی را که در آن هیچ شاخه‌ای به یک گره متصل نباشد، مانند آنچه که در شکل ۱-۲(الف) نشان داده شده است، شامل می‌باشد. همچنین توجه کنید که چون هر شاخه در هر سرش به گرهی ختم می‌شود و چون طبق تعریف ما، لازم نیست که این گره‌ها از هم متمایز باشند، یک گراف ممکن است دارای خود حلقه[1] باشد، یعنی، حلقه‌ای[2] که از یک شاخه تنها تشکیل شده باشد (شکل ۱-۲(ب) را ببینید). در این درس ما با چنین گراف‌هایی سر و کار نخواهیم داشت [۱].



(الف) شبکه N (گراف با چهار گره و پنج شاخه)



(ب) گرافی با یک گره مجزا شده



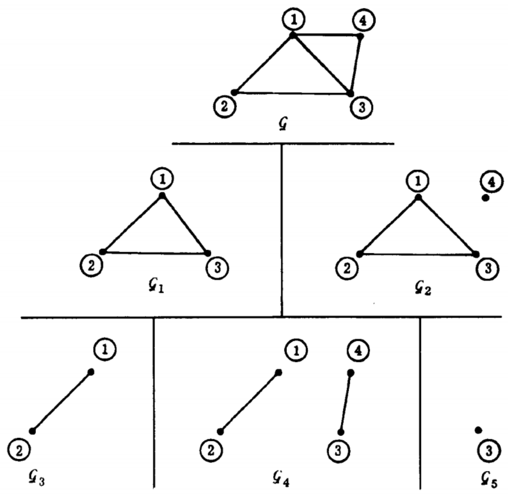
(ج) گرافی که شامل یک خود حلقه می‌باشد

شکل ۱-۲: یک گراف نسبتا پیچیده

فرض کنید که گراف G را داشته باشیم. در این صورت وقتی گویند G_1 یک زیرگراف[3] G می‌باشد که خود G_1 یک گراف بوده و هر گره G_1، یک گره G و هر شاخه G_1، یک شاخه G باشد. به عبارت دیگر، با داشتن گراف G می‌توان با حذف بعضی شاخه‌ها و یا بعضی گره‌ها، گراف G_1 را بدست آورد. در شکل ۱-۳، G_1، G_2، G_3، G_4 و G_5 زیرگراف‌های G هستند. توجه کنید که G_5 تنها از یک گره تشکیل می‌شود

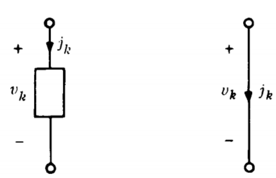
[1]Self-Loop
[2]Loop
[3]Subgraph

و زیرگراف سوده[۱] خوانده می‌شود [۱].



شکل ۱-۳: گراف‌های $G_۱$، $G_۲$، $G_۳$، $G_۴$ و $G_۵$ زیرگراف‌های G هستند.

در تمام بحث‌های بعدی، ما جهت‌های قراردادی برای ولتاژهای شاخه‌ها و جریان‌های شاخه‌ها که جهت‌های متناظر خوانده می‌شوند، انتخاب خواهیم کرد. یعنی پیکانی که جهت قراردادی جریان را مشخص می‌کند، همیشه به سوی سری متوجه خواهد شد که آن سر از لحاظ جهت قراردادی ولتاژ با علامت منفی مشخص شده است. ولتاژ و جریان شاخه kام با v_k و j_k نشان داده خواهد شد چنانکه در شکل ۱-۴ دیده می‌شود. در این فصل ما همیشه جهت‌های قراردادی متناظر را به کار می‌بریم پس لازم است تنها پیکانی که جهت قراردادی جریان را مشخص می‌کند معین شود و علامت‌های منفی و مثبت جهت قراردادی ولتاژ حذف گردد [۱].

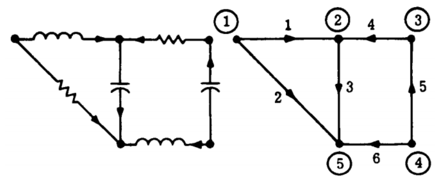


شکل ۱-۴: جهت‌های قراردادی متناظر برای یک جز و برای یک شاخه

برای یک شبکه داده شده N با جهت‌های قراردادی مشخص برای هر یک از شاخه‌های آن، عمل تجریدی[۲]

[1] Degenerate Subgraph
[2] Abstraction

که در بالا توصیف شد منجر به گرافی می‌شود که شاخه‌های آن دارای جهت‌های قراردادی می‌باشند. چنین گرافی گراف جهت‌دار [۱] خوانده می‌شود. به عنوان مثال، شکل ۱-۵ شبکه‌ای با جهت‌های قراردادی و گراف جهت‌دار نظیر را نشان می‌دهد. تصور ما از یک گراف جهت‌دار دسته‌ای از گره‌ها توام با دسته‌ای از شاخه‌های جهت‌دار است که در آن هر شاخه در هر یک از سرهای آن به یک گره ختم می‌شود. به عنوان مثال، می‌توان گره‌ها و شاخه‌های گراف را مطابق شکل ۱-۵ شماره‌گذاری کرد. در این صورت گوییم شاخه ۴ متصل به[۲] گره‌های ۲ و ۳ بوده و از گره ۳ خارج و به گره ۲ وارد می‌شود.



شکل ۱-۵: شبکه و گراف جهت‌دار آن

از دیدگاه تحلیلی، می‌توان گراف جهت‌دار شکل ۱-۵ را با مشخص کردن تمام شاخه‌ها و گره‌ها و تعیین اینکه کدام شاخه وارد کدام گره شده و از کدام گره خارج می‌شود، توصیف نمود. این کار با نوشتن یک ماتریس به راحتی انجام می‌گیرد. فرض کنید که گراف جهت‌دار از b شاخه و n_t گره تشکیل شود و همچنین فرض کنید که تمام گره‌ها و تمام شاخه‌های این گراف به طور دلخواهی شماره‌گذاری گردد. ماتریس تلاقی گره با شاخه[۳] A_a به یک ماتریس مستطیلی با n_t سطر و b ستون گفته می‌شود که جمله (i, k)ام آن یعنی a_{ik} چنین تعریف می‌شود [۱]:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ از گره } i \text{ خارج شود} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ به گره } i \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی نداشته باشد} \end{cases}$$

چون هر شاخه از یک گره تنها خارج شده و به یک گره تنهای دیگر وارد می‌شود، از این جهت هر ستون ماتریس A_a فقط شامل یک $+1$ و یک -1 بوده و تمام اجزای دیگر آن مساوی صفر است. ماتریس تلاقی

---

[1] Oriented Graph
[2] Incident with
[3] Node-to-branch incidence matrix

گراف شکل ۱-۵ چنین است [۱]:

$$
n_t\ \text{گره}\left\{
\begin{array}{c}
\overbrace{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}}^{b\ \text{شاخه}} \\
\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
\right.
$$

بنابراین، برای هر گراف جهت‌دار، شماره‌گذاری شاخه‌ها و گره‌ها و نوشتن ماتریس تلاقی A_a آن کار بسیار ساده‌ای است. از طرف دیگر، برای هر ماتریس $n_t \times b$، با این خاصیت که هر یک از ستون‌های آن دارای یک $+1$ و یک -1 تنها و بقیه عناصر صفر باشد، یک گراف جهت‌دار با b شاخه و n_t گره می‌توان متناظر ساخت [۱].

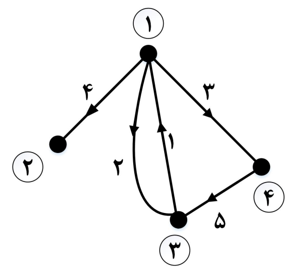
مثال ۱-۱ یک گراف جهت‌دار متناظر با ماتریس تلاقی زیر رسم کنید [۱]:

$$
A_a = \begin{bmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

حل: شماره سطرها و ستون‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$
n_t\ \text{گره}\left\{
\begin{array}{c}
\overbrace{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}}^{b\ \text{شاخه}} \\
\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\right.
$$

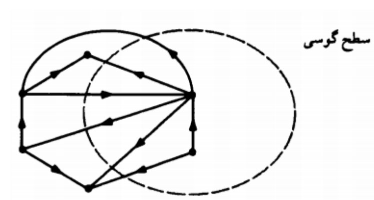
پس: $n_t = 4$ و $b = 5$ یعنی، این گراف دارای ۵ شاخه و ۴ گره است.



شکل ۱-۶: شبکه و گراف جهت‌دار آن برای مثال ۱-۱

۱-۳ کات‌ست‌ها و قانون جریان کیرشهف

برای اینکه بتوان بدون تامل و به طور منظم KCL را برای هر شبکه بیان نمود، اکنون مفهوم کات‌ست[۱] را توسعه می‌دهیم. به طور کلی قانون KCL بیان می‌دارد که مجموع جبری تمام جریان‌هایی که از یک گره خارج می‌شوند، مساوی صفر است. پس به طور حسی، چنانچه گره‌های یک شبکه را به وسیله یک سطح گوسی بسته[۲] به دودسته تفکیک کنیم، به قسمی که دسته‌ای از گره‌ها در داخل سطح فوق و دسته دیگر در خارج آن باشند (شکل ۱-۷ را ببینید)، در این صورت KCL لازم می‌دارد که مجموع جریان‌هایی که از سطح گوسی خارج می‌شوند، مساوی صفر باشد. در بیشتر موارد، به مجموعه تمام شاخه‌هایی که سطح گوسی را قطع می‌کنند یک کات‌ست گفته خواهد شد [۱].



شکل ۱-۷: سطح گوسی که به طور حسی به مفهوم کات‌ست منجر می‌شود.

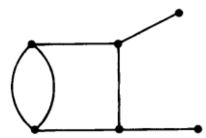
برای اینکه این ایده حسی را دقیق‌تر سازیم باید گام به گام پیش رفته و بین گراف‌های پیوسته و ناپیوسته تفاوت قائل شویم [۱].

اگر میان هر دو گره دلخواه یک گراف، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد (در روی شاخه‌های گراف

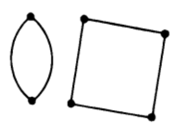
[1] Cut set

[۲] کلمه گوسی را به دلیل تشابهی که با سطح بسته به کار رفته در قانون گوس وجود دارد به کار می‌بریم. قانون گوس بیان می‌دارد که شار الکتریکی خارج شونده از یک سطح بسته، مساوی باری است که در داخل آن سطح قرار دارد.

و بدون در نظر گرفتن جهت شاخه‌ها)، آن گراف را پیوسته[1] گویند. به موجب قرارداد، گرافی که از یک گره تنها تشکیل می‌یابد، پیوسته است. گویند یک گراف پیوسته یک جز جدا از هم دارد. در یک گراف ناپیوسته حداکثر تعداد زیرگراف‌های پیوسته را نیز جزهای جدا[2] از هم نامند. بنابراین یک گراف ناپیوسته باید حداقل دارای دو جز جدا از هم باشد. گراف نشان داده شده در شکل ۱-۸(الف) پیوسته بوده، در حالی که گراف شکل ۱-۸(ب) ناپیوسته است و دارای دو جز جدا از هم می باشد [۱].



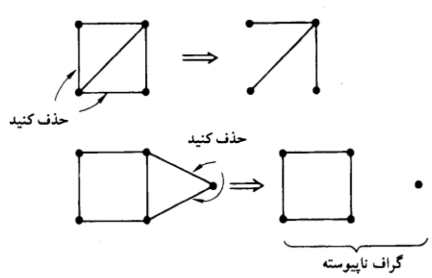
(الف) گراف پیوسته



(ب) گراف ناپیوسته

شکل ۱-۸: گراف پیوسته و ناپیوسته

برای توضیح مفهوم یک کات‌ست باید مشخص نمود که منظور از عبارت حذف یک شاخه چیست. وقتی می‌گوییم شاخه‌ای را حذف می‌کنیم منظور ما این است: قطعه خطی که دو گره را به هم وصل می‌کند حذف کرده و خود گره‌ها را نگه می‌داریم. این کار در شکل ۱-۹ تشریح شده است [۱].

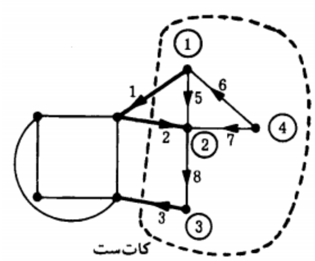


شکل ۱-۹: تشریح عمل حذف یک شاخه

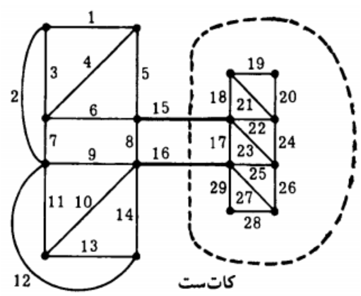
ایده یک کات‌ست، به ایده قطع یک گراف پیوسته به دو جز جدا از هم با حذف چند شاخه آن مربوط

[1] Connected
[2] Seperate parts

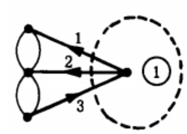
می‌شود. دسته‌ای از شاخه‌های یک گراف پیوسته G را کات‌ست نامند چنانچه: ۱- حذف تمام شاخه‌های این دسته موجب شود که گراف باقیمانده دارای دو جز جدا از هم باشد و ۲- حذف تمام شاخه‌های این دسته به جز یکی از آن‌ها یک گراف پیوسته باقی بگذارد. مثال‌هایی از کات‌ست‌ها در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده است. در این شکل شاخه‌های کات‌ست با خطوط کلفت مشخص شده‌اند و ایده قطع کردن گراف پیوسته به دو جز جدا از هم به وسیله خط‌چینی که تمام شاخه‌های کات‌ست را قطع می‌کند تاکید شده است (این مطلب ایده سطح گوسی را تداعی می‌کند). در گراف شکل ۱-۱۰(ب) ملاحظه می‌شود که دسته شاخه‌هایی که به گره ۱ متصل‌اند یک کات‌ست می‌باشد، زیرا یک گره مجزا شده، یک جز جدا را تشکیل می‌دهد [۱].



(الف) مثال ۱



(ج) مثال ۳



(ب) مثال ۲

شکل ۱-۱۰: مثال‌هایی از کات‌ست‌ها؛ شاخه‌های کات‌ست به وسیله خطوط کلفت نشان داده شده‌اند.

در حالتی که گراف G دارای s جز جدا از هم باشد، یک کات‌ست به آن دسته از شاخه‌ها گفته می‌شود که ۱- حذف تمام شاخه‌های این دسته باعث شود که گراف باقی‌مانده دارای $s + 1$ جز جدا از هم باشد و ۲- حذف تمام شاخه‌های این دسته به جز یکی از آن‌ها گرافی با s جز جدا از هم باقی گذارد. با درک کامل مفهوم کات‌ست، اکنون می‌توان قانون KCL را تعمیم کلی آن بیان نمود:

قانون جریان کیرشف: برای هر شبکه فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از کات‌ست‌های آن، مجموع جبری جریان تمام شاخه‌های کات‌ست مساوی صفر است [۱].

برای به کار بردن KCL چنین عمل می‌کنیم: ۱- یک جهت قراردادی برای کات‌ست تعیین می‌کنیم، مثلا جهت از داخل به خارج آن سطح گوسی که کات‌ست را تعریف می‌کند و ۲- در به دست آوردن مجموع جبری، برای جریان آن شاخه‌هایی که جهت قراردادی آن‌ها موافق جهت کات‌ست باشد علامت مثبت و برای جریان آن شاخه‌هایی که جهت قراردادی آن‌ها مخالف جهت کات‌ست باشد علامت منفی در نظر می‌گیریم [۱].

مثال ۱-۲ برای کات‌ست نشان داده شده در شکل ۱-۱۰(الف)، KCL بیان می‌دارد که:

$$j_۱(t) - j_۲(t) + j_۳(t) = ۰ \qquad \text{برای همه } t$$

مثال ۱-۳ برای کات‌ست نشان داده شده در شکل ۱-۱۰(ب)، KCL بیان می‌دارد که [۱]:

$$j_۱(t) + j_۲(t) - j_۳(t) = ۰ \qquad \text{برای همه } t$$

نکته ۱-۱ KCL در مورد هر شبکه فشرده صرف‌نظر از ماهیت اجزای آن به کار می‌رود [۱].

نکته ۱-۲ معادلاتی که توسط KCL برحسب جریان شاخه‌ها نوشته می‌شوند به صورت معادلات جبری خطی همگن با ضرایب ثابت حقیقی می‌باشند [۱].

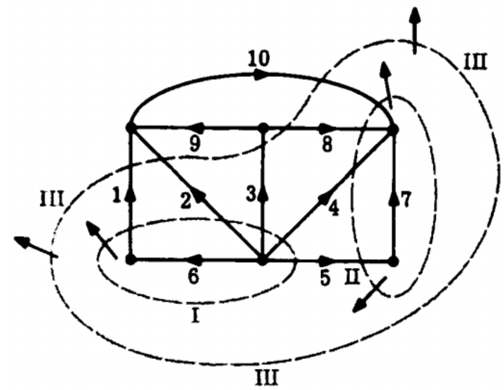
فرض کنید که قانون کیرشف را به کات‌ست‌های I، II و III نشان داده شده در شکل ۱-۱۱ اعمال کنیم. واضح است با جمع معادلات مربوط به کات‌ست‌های I و II، معادله مربوط به کات‌ست III را بدست می‌آوریم. این سه معادله به طور خطی وابسته می‌باشند. به عبارت دیگر، معادله سوم اطلاعات جدیدی که در دو معادله قبل موجود نبود به ما عرضه نکرد. بنابراین، در نظریه عمومی تجزیه و تحلیل شبکه‌ها، ما باید کات‌ست‌ها را به طریقی انتخاب کنیم که هر معادله اطلاعات جدیدی در اختیار ما بگذارد [۱].

مثال ۱-۴ با مراجعه به شکل ۱-۱۰(ج) تعیین کنید کدام یک از مجموعه شاخه‌های زیر، کات‌ست می‌باشند (اگر بعضی از آن‌ها کات‌ست نباشند، دلیل را به دقت بیان کنید) [۱]:

۱- $\{۵, ۶, ۸, ۱۷, ۲۳, ۲۴\}$

۲- $\{۱, ۴, ۶, ۹, ۱۰, ۱۴, ۱۶\}$

۳- $\{۱, ۲, ۳\}$



شکل ۱-۱۱: کات‌ست‌های I، II و III به معادلات KCL منجر می‌شوند که به طور خطی وابسته‌اند.

۴- $\{۱, ۴, ۵, ۱۲, ۱۳, ۱۴\}$

حل:

۱. کات‌ست است.

۲. کات‌ست نیست. چون با حذف تمام شاخه‌ها به جز شاخه ۱۶ دو گراف پیوسته باقی می‌ماند.

۳. کات‌ست است.

۴. کات‌ست نیست. حذف تمام شاخه‌ها باعث بوجود آمدن سه گراف می‌شود.

مثال ۱-۵ برای کات‌ست‌های I، II و III شکل ۱-۱۱، KCL را بنویسید [۱].

حل: برای کات‌ست‌ها جهت جریان کات‌ست مشخص شده است.

۱. برای کات‌ست I داریم: $j_۱ + j_۲ + j_۳ + j_۴ = ۰$

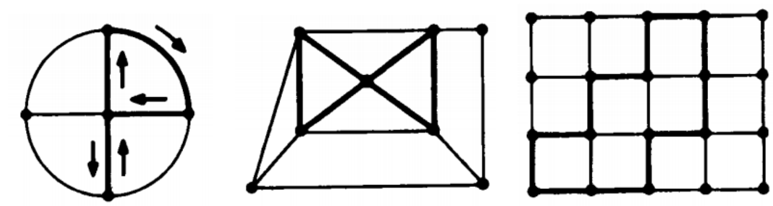
۲. برای کات‌ست II داریم: $-j_۴ - j_۵ - j_۸ - j_{۱۰} = ۰$

۳. برای کات‌ست III داریم: $j_۱ + j_۲ + j_۳ - j_۸ - j_{۱۰} = ۰$

۱-۴ حلقه‌ها و قانون ولتاژ کیرشهف

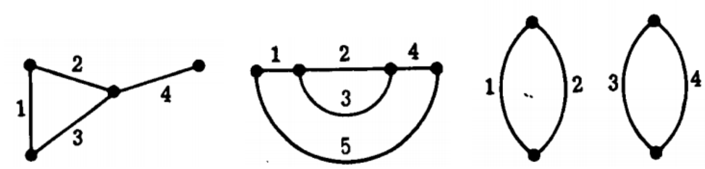
وقتی به طور غیردقیق صحبت شود منظور از یک حلقه یک مسیر بسته است. با این وجود، این بیان غیردقیق روشن نمی‌کند که آیا دسته شاخه‌های مشخص شده در گراف شکل ۱-۱۲ تشکیل حلقه می‌دهند یا

نه. به عبارت دیگر، آیا مجاز است که یک مسیر بسته مانند شکل ۱-۱۳(ب) بیش از یک بار از گرهی بگذرد یا اینکه آیا شاخه‌های آویزان مانند شکل ۱-۱۲(ج) مجاز می‌باشد؟ برای ساده کردن اکثر مطالب مورد بحث فصل‌های بعدی ما مفهوم یک حلقه را چنین بیان خواهیم کرد: یک زیر گراف L از گراف G را حلقه گویند اگر: ۱- زیرگراف L متصل به هم باشد و ۲- به هر گره از L دقیقا دو شاخه متصل باشد. شکل ۱-۱۳ تعریف یک حلقه را تشریح می‌کند.

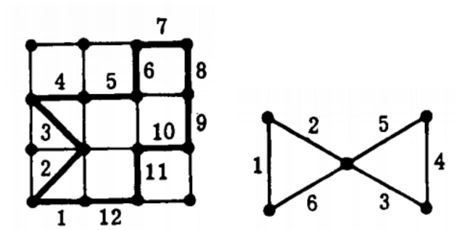


(الف) حلقه است (ب) حلقه نیست (ج) حلقه نیست

شکل ۱-۱۲: شاخه‌های مشخص شده در سه شکل بالا مسیرهای بسته می‌باشند؛ با این وجود تنها حالت الف شرایط حلقه بودن را داراست.



(الف) خاصیت ۱ را نقض می‌کند (ب) خاصیت ۲ را نقض می‌کند (ج) خاصیت ۲ را نقض می‌کند



(د) خاصیت ۲ را نقض می‌کند (ه) یک حلقه می‌باشد

شکل ۱-۱۳: تشریح تعریف یک حلقه.

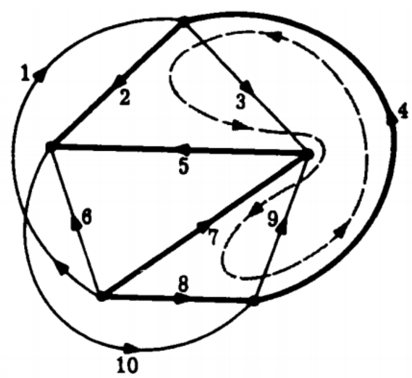
اکنون ما در موقعیتی هستیم که قانون KVL را با تعمیم بیشتری بیان کنیم:

قانون ولتاژ کیرشف: برای هر شبکه فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از حلقه‌های آن، مجموع جبری ولتاژ تمام شاخه‌هایی که در یک حلقه قرار دارند، مساوی صفر است [۱].

برای به کاربردن KVL در هر حلقه چنین عمل می‌کنیم: (۱) یک جهت قراردادی برای حلقه تعیین می‌کنیم و (۲) در تشکیل جمع جبری ولتاژ شاخه‌ها چنانچه جهت قراردادی شاخه با جهت قراردادی حلقه مطابقت داشته باشد ولتاژ شاخه را با علامت مثبت و اگر مطابقت نداشته باشد آن را با علامت منفی مشخص می‌کنیم [۱].

مثال ۱-۶ حلقه مشخص شده در گراف شکل ۱-۱۴ را در نظر بگیرید. برای جهت قراردادی مشخص شده با خط‌چین داریم [۱]:

$$+v_۴(t) + v_۲(t) - v_۵(t) - v_۷(t) + v_۸(t) = ۰ \qquad t \text{ برای همه}$$



شکل ۱-۱۴: تشریح برای معادله یک حلقه؛ جهت قراردادی حلقه با خط‌چین مشخص شده است.

نکته ۱-۳ KVL در مورد هر شبکه فشرده صرف‌نظر از ماهیت اجزای آن به کار می‌رود [۱].

نکته ۱-۴ معادلاتی که توسط KVL برحسب ولتاژ شاخه‌ها نوشته می‌شوند به صورت معادلات جبری خطی همگن با ضرایب ثابت حقیقی هستند [۱].

مثال ۱-۷ KVL را برای حلقه‌های زیر بکار ببرید. آیا معادلات بدست آمده به طور خطی نابسته‌اند [۱]؟

۱- $\{۵, ۹, ۱۰\}$

۲- $\{۵, ۶, ۷\}$

۳- $\{۶, ۸, ۱۰\}$

۴- $\{۷, ۸, ۹\}$

حل:

۱- $-v_5 - v_9 - v_{10} = 0$

۲- $-v_5 + v_6 - v_7 = 0$

۳- $-v_6 + v_8 - v_{10} = 0$

۴- $-v_7 + v_8 + v_9 = 0$

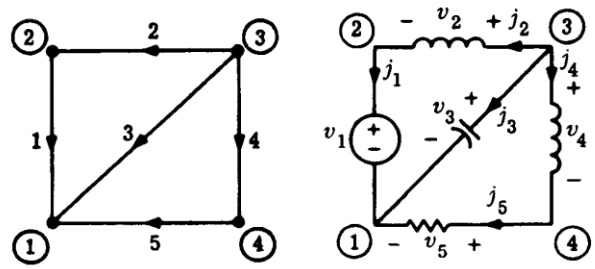
۱-۵ قضیه تلگان

این قضیه بسیار کلی است و برای هر شبکه فشرده که شامل تعداد اجزای خطی یا غیرخطی، پسیو یا اکتیو، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان باشد، معتبر می‌باشد. این کلیت ناشی از این حقیقت است که قضیه تلگان، تنها به دو قانون کیرشف بستگی دارد [۱].

شبکه فشرده دلخواهی را در نظر بگیرید و برای ولتاژ شاخه v_k و جریان شاخه j_k جهت‌های قراردادی متناظر انتخاب کنید(بدین ترتیب $v_k(t)j_k(t)$ توانی است که در زمان t به وسیله شبکه به شاخه k تحویل داده می‌شود). سپس، از ماهیت شاخه‌ها صرف‌نظر کنید. به عبارت دیگر، شبکه را به عنوان گراف جهت‌دار G تصور کنید، مثلا مانند آنچه که در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است. قضیه تلگان بیان می‌دارد که [۱]:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

تنها شرطی که لازم است روی ولتاژهای شاخه v_k اعمال شود، آن است که آن‌ها تمام محدودیت‌هایی که توسط KVL لازم می‌گردد، برآورند. به طریق مشابه، جریان‌های شاخه j_k نیز باید در تمام محدودیت‌هایی که توسط KCL لازم می‌گردد، صدق کنند. باید توجه داشت که ماهیت اجزا و یا در حقیقت وجود یا عدم وجود اجزایی که این j_kها و v_kها را به عنوان جریان‌های شاخه‌ها و ولتاژهای شاخه‌ها دارا باشند، مطلقا ربطی به بررسی درستی قضیه تلگان ندارد. قدرت این قضیه روی این حقیقت قرار دارد که j_kها و v_kها اختیاری هستند و تنها باید محدودیت‌های کیرشف را برآورند [۱].



(ب) گراف شبکه (الف) شبکه

شکل ۱-۱۵: شبکه و گراف جهت‌دار آن

قضیه ۱-۱ شبکه فشرده دلخواهی را در نظر بگیرید که گراف G آن دارای b شاخه و n_t گره باشد. فرض کنید برای هر شاخه این گراف، ولتاژ شاخه v_k و جریان شاخه j_k برای $k = ۱, ۲, \cdots, b$ به طور دلخواهی تعیین شوند. همچنین فرض کنید که آن‌ها نسبت به جهت‌های قراردادی متناظری که به طور دلخواه انتخاب شده‌اند، سنجیده شوند. چنانچه ولتاژهای شاخه‌های $v_۱, v_۲, \cdots, v_b$ تمام محدودیت‌هایی را که بوسیله KVL اعمال می‌شود، برآوردند و چنانچه جریان‌های شاخه‌های $j_۱, j_۲, \cdots, j_b$ نیز تمام محدودیت‌هایی که بوسیله KCL اعمال می‌شود، برآورند، در این صورت [۱]:

$$\sum_{k=۱}^{b} v_k j_k = ۰ \qquad (۱-۱)$$

مثال ۱-۸ فرض کنید ولتاژهای شاخه‌ها و جریان‌های شاخه‌ها در شکل ۱-۱۵ به طور دلخواهی چنان انتخاب شوند که برای تمام حلقه‌ها و گره‌ها تنها در قوانین کیرشف صدق کنند. به عنوان مثال، فرض کنید داشته باشیم [۱]:

$$v_۱ = ۲, \quad v_۲ = -۱, \quad v_۳ = ۱, \quad v_۴ = ۴, \quad v_۵ = -۳$$

$$j_۱ = ۱, \quad j_۲ = ۱, \quad j_۳ = -۳, \quad j_۴ = ۲, \quad j_۵ = ۲$$

با مراجعه به شکل ۱-۱۵ ملاحظه می‌شود که KVL برقرار است، زیرا داریم:

$$v_۱ + v_۲ = v_۳ = v_۴ + v_۵$$

و KCL نیز برآورده می‌شود، زیرا داریم:

$$j_۱ = j_۲, \quad j_۴ = j_۵, \quad j_۱ + j_۳ + j_۵ = ۰$$

برای ملاحظه درستی قضیه تلگان، محاسبه زیر را انجام می‌دهیم:

$$\sum_{k=۱}^{۵} v_k j_k = ۲ - ۱ - ۳ + ۸ - ۶ = ۰$$

نکته ۱–۵ درک این موضوع که ولتاژهای شاخه‌های $v_۱, v_۲, \cdots, v_b$ تنها تحت محدودیت‌های KVL به طور دلخواه انتخاب شوند و به طریق مشابه، جریان‌های شاخه‌های $j_۱, j_۲, \cdots, j_b$ نیز تحت محدودیت‌های KCL به طور دلخواه انتخاب شدند، حائز نهایت اهمیت است [۱].

به عنوان مثال، فرض کنید $\hat{v}_۱, \hat{v}_۲, \cdots, \hat{v}_b$ و $\hat{j}_۱, \hat{j}_۲, \cdots, \hat{j}_b$ دسته دیگری از ولتاژهای شاخه‌ها و جریان‌های شاخه‌ها باشند که به طور دلخواه انتخاب شده و در همان محدودیت‌های KVL و همان محدودیت‌های KCL صدق کنند. در این صورت می‌توان معادله (۱–۱) را به $\hat{v}_k$ها و $\hat{j}_k$ها اعمال نمود و بدست آورد [۱]:

$$\sum_{k=۱}^{b} \hat{v}_k \hat{j}_k = ۰ \qquad (۱\text{–}۲)$$

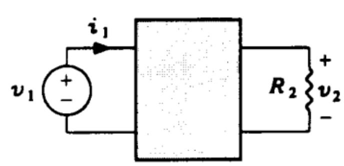
با این وجود می‌توان همین عمل را روی v_kها و $\hat{j}_k$ها انجام داد و بدست آورد [۱]:

$$\sum_{k=۱}^{b} v_k \hat{j}_k = ۰$$

همچنین روی $\hat{v}_k$ها و j_kها انجام داد و بدست آورد [۱]:

$$\sum_{k=۱}^{b} \hat{v}_k j_k = ۰$$

مثال ۱–۹ در شکل ۱–۱۶ شبکه N از تعدادی مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. به ازای دو مقدار $R_۲$ اندازه‌گیری‌های زیر بدست آمده است. مقدار $\hat{v}_۲$ را بدست آورید [۱].



شکل ۱–۱۶: مثال ۱–۹

$$R_۲ = ۵\,\Omega : v_۱ = ۴\,V, \quad i_۱ = ۲\,A, \quad v_۲ = ۳\,V.$$

$$\hat{R}_۲ = ۸\,\Omega : \hat{v}_۱ = ۷\,V, \quad \hat{i}_۱ = ۳\,A, \quad \hat{v}_۲ = ?\,V.$$

پاسخ: رابطه بین ولتاژ، جریان و مقدار مقاومت را می‌دانیم، پس داریم: $\hat{v}_۲ = \hat{R}_۲\hat{i}_۲$ یا $v_۲ = R_۲ i_۲$
در نتیجه می‌توانیم از قضیه تلگان استفاده کنیم و به جای $i_۲$ و $\hat{i}_۲$ مقادیرشان را جایگزین کنیم:

$$\sum_{k=۱}^{۲} v_k\hat{i}_k = \sum_{k=۱}^{۲} \hat{v}_k i_k \Rightarrow v_۱ \times (-\hat{i}_۱) + v_۲ \times \hat{i}_۲ = \hat{v}_۱ \times (-i_۱) + \hat{v}_۲ \times i_۲$$
$$\Rightarrow ۴ \times (-۳) + ۳ \times \frac{\hat{v}_۲}{۸} = ۷ \times (-۲) + \hat{v}_۲ \times \frac{۳}{۵}$$
$$\Rightarrow ۱۲ + \frac{۳\hat{v}_۲}{۸} = ۱۴ + \frac{۳\hat{v}_۲}{۸} \Rightarrow \hat{v}_۲ = \frac{۸۰}{۹}$$

نکته ۱-۶ هنگام قرار دادن مقادیر در مثال ۱-۹ دقت شود که $v_۲$ و $i_۲$ در جهت‌های قراردادی متناظر هستند، ولی $v_۱$ و $i_۱$ در جهت‌های قراردادی متناظر نیستند. در قضیه تلگان همیشه باید جهت‌های قراردادی متناظر رعایت شوند.

مراجع

[۱] ارنست کوه، چارلز دسور. نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها. ترجمه‌ی دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی. چاپ چهاردهم، انتشارات دانشگاه تهران، ویرایش دوم، ۱۳۸۶.