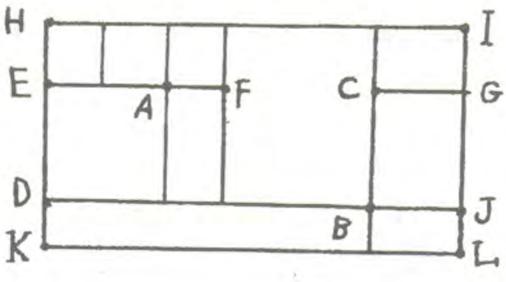
سؤالات آزمون مرحله دوم بیستمین المپیاد ریاضی سال ۸۱

۱) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را یک «جایگشت» از اعداد ۱, ۲, ..., n می‌نامیم هرگاه $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ (یعنی a_1 تا a_n همان اعداد ۱ تا n هستند که احتمالاً ترتیب آنها تغییر کرده است). تمام جایگشت‌های ۱ تا n مانند $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را بیابید که برای هر $1 \leq i \leq n$، $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_i)$ بر $i + 1$ بخش‌پذیر باشد.
برای مثال $a_1 = 3$ و $a_2 = 1$ و $a_3 = 4$ و $a_4 = 2$ یک جایگشت از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

۲) یک مستطیل را به وسیله‌ی تعدادی مستطیل (کوچک‌تر) پوشانده‌ایم به طوری که مستطیل‌ها به جز احتمالاً در رئوس و اضلاع با هم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیل‌های پوشاننده موازی اضلاع مستطیل اصلی هستند، هم‌چنین هیچ قسمتی از این مستطیل‌ها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی‌گیرد. برای مثال، شکل زیر یکی از این حالت‌ها را نشان می‌دهد:



بنابراین هر طور که مستطیل را به وسیله‌ی مستطیل‌های کوچک‌تر با توجه به شرایط فوق بپوشانیم در شکل حاصل تعدادی خط (پاره‌خط) افقی و عمودی و تعدادی نقاط برخورد پاره‌خط‌ها دیده می‌شود، یک نقطه‌ی برخورد را یک «چهارراه» می‌گوییم هرگاه محل تقاطع دو پاره‌خط باشد، مثلاً در شکل بالا نقاط A و B چهار راه هستند ولی نقاط C و D و K چهارراه نیستند، هم‌چنین در این شکل ۵ خط افقی (KL, DJ, CG, EF, HI) و ٦ خط عمودی دیده می‌شود، در ضمن شکل به

وسیله‌ی ۱۰ مستطیل پوشانده شده است.
نشان دهید در هر صورت اگر تعداد خط‌های افقی، عمودی و تعداد چهارراه‌ها را در نظر بگیریم و این سه عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر است با تعداد مستطیل‌های پوشاننده به اضافه‌ی عدد سه.

۳) در چهار ضلعی محدب $ABCD$ داریم $\angle ABC = \angle ADC = ۱۳۵^\circ$. ضمناً M و N به ترتیب نقاطی روی (امتداد) AD و AB می‌باشند به طوری که $\angle MCD = \angle NCB = ۹۰^\circ$، هم‌چنین K محل برخورد دوم دایره‌های محیطی دو مثلث ABD و AMN می‌باشد. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

۴) A و B دو نقطه‌ی ثابت در صفحه می‌باشند. چهار ضلعی محدّب $ABCD$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که $AB = BC$ و $AD = DC$ و زاویه‌ی $\angle ADC = ۹۰^\circ$. ثابت کنید نقطه‌ای ثابت وجود دارد به طوری که هر طور چهار ضلعی $ABCD$ را در یک طرف AB بسازیم خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می‌گذرد.

۵) مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با اضافه کردن موجودی جدید به نام δ به فضای بزرگ‌تری توسعه داده‌ایم، فضای جدید را با $R[\delta]$ نشان می‌دهیم و اعضای آن موجوداتی به شکل $a + b\delta$ هستند که $a, b \in R$. (R نشان دهنده‌ی مجموعه اعداد حقیقی است.)
قرار داد می‌کنیم که $a + b\delta = a' + b'\delta$ اگر و تنها اگر $a = a'$ و $b = b'$.
δ موجودی بسیار کوچک است به طوری که هر چند صفر نیست ولی $\delta^۲ = ۰$!
روی این فضا جمع و ضرب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(a + b\delta) + (a' + b'\delta) = (a + a') + (b + b')\delta$$
$$(a + b\delta)(a' + b'\delta) = aa' + ab'\delta + ba'\delta + bb'\delta^۲ = aa' + (ab' + ba')\delta$$

فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید این چند جمله‌ای در R ریشه‌ای مضاعف دارد اگر و تنها اگر در $R[\delta]$ ریشه‌ای غیر حقیقی داشته باشد. (ریشه‌ی غیر حقیقی یعنی ریشه‌ای به شکل $a + b\delta$ که $b \neq ۰$).
توضیح: می‌گوییم a ریشه‌ی مضاعف چند جمله‌ای $P(x)$ است اگر $P(x)$ بر $(x-a)^۲$ بخش‌پذیر باشد.

۶) در یک کلاس ۲۰ نفره در سال گذشته ۱۰۰ مسابقه‌ی تنیس روی میز بین بچه‌های کلاس برگزار شده است، هیچ دو نفری بیش از یک بار با هم مسابقه نداده‌اند. بچه‌های کلاس می‌خواهند از بین خود دو تیم دو نفره (دو تیم عضو مشترک ندارند) برای شرکت در مسابقات مدرسه انتخاب کنند با این شرط که دو عضو یک تیم در سال گذشته با هم بازی کرده باشند، می‌دانیم که این کار به ۴۰۵۰ طریق مختلف

امکان‌پذیر است. ثابت کنید همه‌ی بچه‌های کلاس در سال گذشته به تعداد مساوی بازی کرده‌اند.