

پاسخ سوال:

. روش تستی: تابع $f(x) = x$ در شرایط سوال صدق میکند که هم پیوسته است و هم پوشا، بنابراین گزینه های ۲ و ۳ و ۴ نمی توانند درست باشند و فقط گزینه ۱ می تواند درست باشد.

روش تشریحی: تابع f یک به یک است زیرا

$$f(x) = f(y) \rightarrow 0 = |f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{2}|x - y| \geq 0 \rightarrow |x - y| = 0 \rightarrow x = y$$

f پوشا هم است زیرا هر تابع یک به یک و پیوسته روی بازه ای دلخواه یا اکیدا صعودی است یا اکیدا نزولی (قضیه ای در کتاب سیلورمن است که با قضیه مقدار میانی میشود آن را اثبات نمود)، پس میتوان فرض کرد (بدون کم شدن از کلیت مسئله) که f تابعی اکیدا صعودی است.

$$\text{if } x > 0 \rightarrow f(x) > f(0) \rightarrow f(x) - f(0) \geq .5x - 0 \rightarrow f(x) \geq .5x + f(0) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{if } x < 0 \rightarrow f(0) > f(x) \rightarrow f(0) - f(x) \geq 0 - .5x \rightarrow f(x) \leq f(0) + .5x \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

و چون f پیوسته است تمام مقادیر بین مثبت و منفی بینهایت را میگیرد و بنابراین f پوشا میشود.