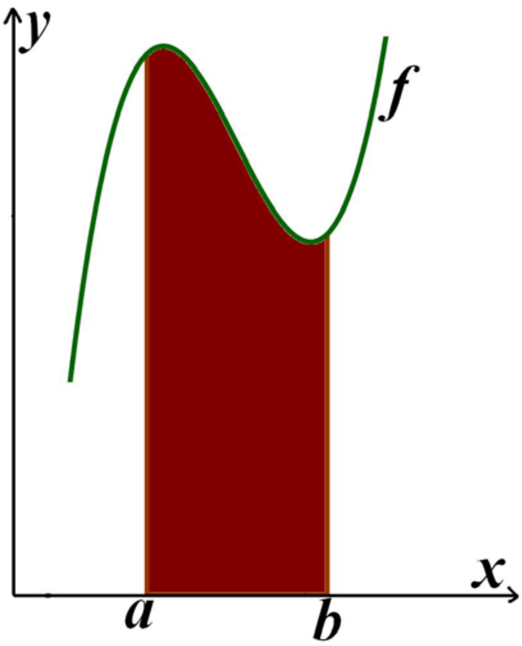
درس اول (انتگرال)



هدف کلی انتگرال محاسبه‌ی مساحت شکل‌های هندسی و مساحت زیر نمودارهای توابع است. مطابق شکل می‌خواهیم مساحت زیر نمودار تابع f را محاسبه کنیم که در شکل با رنگ قهوه‌ای نشان داده شده است. این مساحت را با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهیم علامت $\int$ در حقیقت بزرگ‌شده‌ی حرف S لاتین است که معمولاً مساحت را در ریاضی با حرف S نشان می‌دهند مقصود از a و b این است که این مساحت در بازه یا فاصله‌ی $[a,b]$ حساب می‌شود و منظور از $f(x)dx$ این است که مساحت بین نمودار تابع $f(x)$ و محور xها محاسبه می‌شود. به نماد $\int_a^b f(x)dx$ انتگرال معین نیز می‌گویند.

تعریف ۱. فرض کنید f یک تابع باشد در این صورت تابع F را تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع f می‌نامیم هرگاه $F'(x) = f(x)$ به عبارت دیگر مشتق تابع F برابر f باشد. (معمولاً تابع اولیه را با حروف بزرگ الفبای لاتین نشان می‌دهند.) تابع اولیه را با نماد $\int f(x)dx$ نیز نمایش می‌دهند.

مثال ۲. تابع اولیه $f(x) = ۲$ برابر $F(x) = ۲x$ است.

مثال ۳. تابع اولیه $f(x) = ۲x$ برابر $F(x) = x^۲$ است.

مثال ۴. تابع اولیه $f(x) = \cos x$ برابر $F(x) = \sin x$ است.

مثال ۵. تابع اولیه $\frac{۱}{\cos x} = f(x) = ۱ + \tan^۲ x$ برابر $F(x) = \tan x$ است.

مثال ۶. تابع اولیه $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$ برابر $F(x) = \arcsin$ است.

قضیه ۷. فرض کنیم F تابع اولیه f باشد در این‌صورت $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ این قضیه به قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مشهور است.

مثال ۸. مساحت زیر نمودار تابع $f(x) = ۲x$ را در بازه‌ی $[۲,۳]$ بیابید.

حل: چون $F(x) = x^{۲}$ بنابراین این مساحت برابر $F(۳) - F(۲) = ۳^{۲} - ۲^{۲} = ۹ - ۴ = ۵$ است.

مثال ۹. $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos x dx = \sin(\frac{\pi}{۲}) - \sin(۰) = ۱ - ۰ = ۱$ توجه داشته باشید که تابع اولیه‌ی $\cos x$ برابر $\sin x$ است.

مثال ۱۰. $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} ۱ + \tan^{۲} x dx = \tan(\frac{\pi}{۳}) - \tan(\frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۳} - ۱$

با توجه به مثال‌های بالا مشخص می‌شود برای محاسبه‌ی مساحت باید تابع اولیه را محاسبه کنیم. یکی از روش‌های محاسبه‌ی تابع اولیه این است که فرمول‌های مشتق را به‌عکس کنیم. در جدول زیر فرمول‌های مشتق به عکس شده تا تابع اولیه یا همان انتگرال نامعین برای این توابع به دست آید.

تابع $f(x)$	تابع اولیه $F(x)$
$x^{r} \quad r \neq -۱$	$\frac{۱}{r+۱} x^{r+۱}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$۱ + \tan^{۲} x = \frac{۱}{\cos^{۲} x}$	$\tan x$
$۱ + \cot^{۲} x = \frac{۱}{\sin^{۲} x}$	$-\cot x$

تابع $f(x)$	تابع اولیه $F(x)$
$x^{-۱} = \frac{۱}{x}$	$\ln x$
$\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$	$\arcsin x$
$\frac{۱}{۱ + x^{۲}} = \frac{۱}{x^{۲} + ۱}$	$\arctan x$
e^{x}	e^{x}
a^{x}	$\frac{a^{x}}{\ln a}$

در حقیقت جدول بالا فرمول‌های زیر را برای ما بیان می‌کند.

$\int x^{r} dx = \frac{۱}{r+۱} x^{r+۱} \quad r \neq -۱$	$\int x^{-۱} dx = \int \frac{۱}{x} dx = \ln x$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} dx = \arcsin x$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \frac{۱}{۱ + x^{۲}} dx = \int \frac{۱}{x^{۲} + ۱} dx = \arctan x$
$\int ۱ + \tan^{۲} x dx = \int \frac{۱}{\cos^{۲} x} dx = \tan x$	$\int e^{x} dx = e^{x}$
$\int ۱ + \cot^{۲} x dx = \int \frac{۱}{\sin^{۲} x} dx = -\cot x$	$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a}$

مثال ۱۱. $\int x^{۳} dx = \frac{۱}{۳ + ۱} x^{۳+۱} = \frac{۱}{۴} x^{۴}$

مثال ۱۲. $\int x^{۵} dx = \frac{۱}{۵ + ۱} x^{۵+۱} = \frac{۱}{۶} x^{۶}$

مثال ۱۳. $\int x dx = \frac{۱}{۱ + ۱} x^{۱+۱} = \frac{۱}{۲} x^{۲}$

مثال ۱۴. $\int \frac{۱}{x^{۳}} dx = \int x^{-۳} dx = \frac{۱}{-۳ + ۱} x^{-۳+۱} = \frac{۱}{-۲} x^{-۲} = \frac{۱}{-۲x^{۲}}$

مثال ۱۵. $\int \frac{۱}{x^{۵}} dx = \int x^{-۵} dx = \frac{۱}{-۵ + ۱} x^{-۵+۱} = \frac{۱}{-۴} x^{-۴} = \frac{۱}{-۴x^{۴}}$

مثال ۱۶. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{۱}{۲}} dx = \frac{۱}{\frac{۱}{۲} + ۱} x^{\frac{۱}{۲}+۱} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}} x^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۳} x^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۳} \sqrt{x^{۳}}$

مثال ۱۷. $\int \sqrt[۵]{x} dx = \int x^{\frac{۱}{۵}} dx = \frac{۱}{\frac{۱}{۵} + ۱} x^{\frac{۱}{۵}+۱} = \frac{۱}{\frac{۶}{۵}} x^{\frac{۶}{۵}} = \frac{۵}{۶} x^{\frac{۶}{۵}} = \frac{۵}{۶} \sqrt[۵]{x^{۶}}$

مثال ۱۸. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{-1}{2}+1}x^{\frac{-1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

مثال ۱۹. $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \int x^{\frac{-1}{5}}dx = \frac{1}{\frac{-1}{5}+1}x^{\frac{-1}{5}+1} = \frac{1}{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}$

مثال ۲۰. $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}dx = \int x^{\frac{-7}{5}}dx = \frac{1}{\frac{-7}{5}+1}x^{\frac{-7}{5}+1} = \frac{1}{\frac{-2}{5}}x^{\frac{-2}{5}} = \frac{-5}{2}x^{\frac{-2}{5}} = \frac{-5}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

مثال ۲۱. مساحت زیر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه‌ی $[1,4]$ بیابید.

حل: چون بنابر مثال ۱۶ داریم تابع اولیه برابر $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ است و

$$F(4) - F(1) = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} = \frac{2}{3}\sqrt{64} - \frac{2}{3}\sqrt{1} = \frac{2}{3} \times (8-1) = \frac{14}{3}$$

مثال ۲۲. مساحت زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $[1, \mathrm{e}]$ بیابید. که در آن e عدد نپر است.

حل: چون بنابر جدول داریم تابع اولیه برابر $F(x) = \ln(x)$ است و $F(\mathrm{e}) - F(1) = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

در پایان این درس متذکر می‌شوم که انتگرال یک تابع، منحصر به فرد نیست بنابراین در پایان انتگرال نامعین بهتر است علامت $+C$ گذاشته شود که C هر عدد حقیقی دلخواه می‌تواند باشد.

تمرینات

انتگرال‌های معین و نامعین زیر را حل کنید.

۱) $\int x^7 dx$ ۲) $\int \sqrt{x^5}dx$ ۳) $\int \sqrt[9]{x^5}dx$ ۴) $\int \frac{1}{\sqrt{x^5}}dx$ ۵) $\int \frac{1}{\sqrt[9]{x^5}}dx$ ۶) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}dx$

۷) $\int \frac{1}{x^9}dx$ ۸) $\int_0^{\pi} \sin x dx$ ۹) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ۱۰) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ ۱۱) $\int_0^1 \mathrm{e}^x dx$ ۱۲) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$