حد توابع

تعریف (حد چپ): اگر تابع f با نزدیک شدن x به نقطه $x=a$ از سمت مقدار های کمتر از آن و نزدیک به آن، به عددی مانند l نزدیک شود، می‌گوییم حد چپ تابع در نقطه $x=a$ برابر l می‌باشد. و می نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=l$$

تعریف (حد راست): اگر تابع f با نزدیک شدن x به نقطه $x=a$ از سمت مقدار های بیشتر از آن و نزدیک به آن، به عددی مانند l نزدیک شود، می‌گوییم حد راست تابع در نقطه $x=a$ برابر l می‌باشد. و می نویسیم:

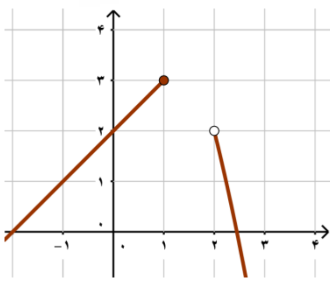
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=l$$

مثال: حد راست و چپ تابع $f(x)=\begin{cases}4x-1 & x\geq 2\\ x^2+2x & x<2\end{cases}$ در نقطه $x=2$ را بیابید.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+2x\right)=4+4=8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(4x-1\right)=8-1=7$$

مثال: با توجه به نمودار، حد راست تابع f را در نقطه $x=2$ و حد چپ تابع f در نقطه $x=1$ بیابید.



$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2$$

تعریف

تعریف (حد تابع): تابع f در نقطه $x=a$ حد دارد هرگاه حد راست و چپ تابع در نقطه مذکور موجود و برابر یکدیگر باشد. یعنی:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l$$

مثال

مثال: حد تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x\geq ۱ \\ x^{۲}+۳ & x<۱ \end{cases}$ در نقطه $x=۱$ را در صورت وجود بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (۳x+۱) = ۴ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (x^{۲}+۳) = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = ۴$$

مثال

مثال: حد تابع $f(x)=[x]+۱$ در نقاط $x=۲$ و $x=۱/۵$ را در صورت وجود بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = [۲^+] = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = [۲^-] = \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) \quad \times$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱/۵^+} f(x) = [۱/۵^+] = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱/۵^-} f(x) = [۱/۵^-] = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = ۱$$

تست

تست: - اگر در تابع f داشته باشیم $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۳$، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) $f(۲)=۳$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) + \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۵$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲)$

۴) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. سایر گزینه‌ها لزوما صحیح نیستند.

تست: اگر تابع $y=a[x+2]+x[x]-2$ در $x=2$ حد داشته باشد، حد این تابع در $x=\sqrt{2}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}+8$ ۲) $2\sqrt{2}-8$ ۳) $\sqrt{2}-8$ ۴) $2\sqrt{2}+8$

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. باید حد چپ و راست تابع در نقطه‌ی $x=2$ برابر باشند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(a\left[4^+\right]+2\left[2^+\right]-2\right)=4a+2(2)-2=4a+2\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(a\left[4^-\right]+2\left[2^-\right]-2\right)=3a+2(1)-2=3a\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 4a+2=3a\Rightarrow a=-2\longrightarrow f(x)=-2[x+2]+x[x]-2$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)=-2\left[\sqrt{2}+2\right]+\sqrt{2}\left[\sqrt{2}\right]-2=-2(3)+\sqrt{2}(1)-2=\sqrt{2}-8$$

تست: (تجربی۸۷) در تابع با ضابطه $f(x)=(x+a)[x]$ اگر $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) صفر

نکته

نکته: اگر تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases} g(x) & ,x\neq a \\ h(x) & ,x=a \end{cases}$ تعریف شود، در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$$

مثال

مثال: اگر تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4 & x\neq 1 \\ 2x-3 & x=1 \end{cases}$ باشد،حاصل را بیابید.

$$1)\ \lim_{x\to 1} f(x)= \qquad ,2)\ f(1)=$$

پاسخ: با توجه به نکته بالا داریم:

$$1)\ \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(3x^2-4\right)=3-4=-1 \qquad ,2)\ f(1)=2-3=-1$$

تست۲: - اگر $g(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\neq 4 \\ 5 & x=4 \end{cases}$، حاصل $\lim_{x\to 4} g(x)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۹

قضایای حد توابع:

اگر توابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند آن‌گاه توابع: $f\pm g$ و $f\times g$ در نقطه $x=a$ دارای حد می‌باشد و داریم:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)$$

اگر $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$، داریم: $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$

نکته: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L$، داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{L}(L\neq 0)\quad,\quad \lim_{x\to a}f^n(x)=L^n$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}\quad (L>0\ \vee\ n=2k+1)$$

نکته: اگر f یک تابع چندجمله‌ای باشد داریم: $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

تست: - توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x=1$ حد دارند. اگر $\lim_{x\to 1}(2f(x)+3g(x))=7$ و $\lim_{x\to 1}f(x)=5$، حاصل $\lim_{x\to 1}((3x-1)g(x))$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است. ابتدا $\lim_{x\to 1}g(x)$ را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 1}\left(2f(x)+g(x)\right)=7\Rightarrow 2\lim_{x\to 1}f(x)+3\lim_{x\to 1}g(x)=7$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to 1}f(x)=5}2(5)+3\lim_{x\to 1}g(x)=7\Rightarrow\lim_{x\to 1}g(x)=-1$$

حال داریم: $\lim_{x\to 1}\left((3x-1)g(x)\right)=2\times -1=-2$

«((امام علی(ع): شایسته است که دانش مرد از سخنش بیشتر، و خردش غالب بر زبانش باشد.))»

تست: اگر $f(x)$ در $x=2$ حد داشته باشد و داشته باشیم $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+f(x)+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+x}=2$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+f(x)}{1+f(x)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $-\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. ابتدا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+f(x)+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+x}=2\xrightarrow[x\to 2]{\lim f(x)=a}\frac{2+a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}=2$$

$$\Rightarrow 2+a+\sqrt{a}=2\sqrt{a}+4\Rightarrow a-\sqrt{a}=2\Rightarrow a=4\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=4$$

حال داریم: $$\lim_{x\to 2}\frac{x+f(x)}{1+f(x)}=\frac{2+4}{1+4}=\frac{6}{5}$$

تست۳: اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{f(x)+1}=1$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

محاسبه حد در حالت‌های مختلف

۱- استفاده از قاعده هوپیتال

۱) استفاده از قاعده هوپیتال: اگر در محاسبه حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ حالت ابهام $\frac{\circ}{\circ}$ پیش بیاید، از تساوی زیر برای محاسبه حد استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+۲x-۳}{x^۲-x}\overset{hop}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^۲+۲}{۲x-۱}=۵\quad ,۲)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^n-۱}{x-۱}\overset{hop}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{nx^{n-۱}}{۱}=n$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}\overset{hop}{=}\lim_{x\to ۴}\frac{x}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{۴}{\frac{۱}{۴}}=۱۶$$

$$۴)\ \lim_{x\to \circ}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}\overset{hop}{=}\lim_{x\to \circ}\frac{۲\cos x\sin x}{\sin x}=۲$$

تست: حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}$، کدام است؟

تجربی ۹۷

۱) -۱۱۲ ۲) -۹۶ ۳) -۸۴ ۴) -۷۲

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}\overset{H}{=}\lim_{x\to ۴}\frac{۶x-۱۰}{\frac{\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}}}=\frac{۱۴}{\frac{-۱}{۸}}=-۱۱۲$$

تست۴: حدّ عبارت $\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x \to -8$، کدام است؟

تجربی ۹۸

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

تست۵: حدّ عبارت $\dfrac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}$، وقتی $x \to 2$، کدام است؟

خارج تجربی ۹۸

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

تست۶: اگر $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}=\dfrac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

(تجربی خارج ۹۵)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

تست۷: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

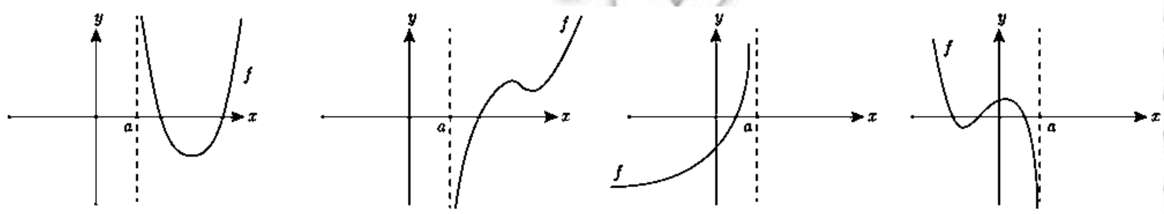
(تجربی خارج ۸۸)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

محاسبه حد در حالت‌های مختلف

۲- حد بی‌نهایت

تعریف (حد یک‌طرفه بی‌نهایت): فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطه‌ی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگتر کرد، مشروط بر آن‌که x با مقادیر بزرگتر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود. برای سایر حالات نیز تعریف به طور مشابه انجام می‌شود.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

نکته: به عبارت‌های 0^+ و 0^- صفرهای حدی می‌گوییم که از لحاظ قدر مطلقی اعدادی بسیار کوچک و نزدیک به صفر هستند. داریم:

$$\frac{0}{0^+}=\frac{0}{0^-}=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{a}{0^-}=-\infty & a>0\\[2mm] \dfrac{a}{0^-}=+\infty & a<0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\dfrac{a}{0^+}=+\infty & a>0\\[2mm] \dfrac{a}{0^+}=-\infty & a<0\end{cases}$$

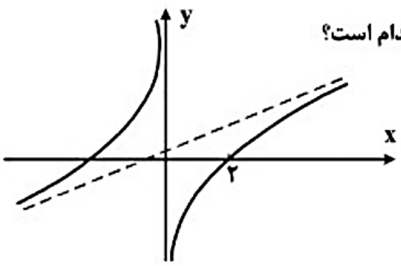
مثال: حاصل هر یک از حدهای زیر را بیابید.

$$1)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{5}{3x}=\frac{5}{0^-}=-\infty\ ,\qquad 2)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\frac{[0^-]}{0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{\sin x}=\frac{1}{\sin 0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty\ ,\qquad 4)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{2x}{\cos x}=\frac{\pi}{0^-}=-\infty$$

تست: شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{ax^{۲}-۱}{x+b}$ است. $a+b$ کدام است؟

تجربی ۹۶



۱) صفر

۲) $\dfrac{۱}{۴}$

۳) $\dfrac{۱}{۲}$

۴) ۲

تست: گزینه ۲ صحیح است. چون $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=-\infty$ پس $x=۰$ ریشه مخرج کسر است. پس: $b=۰$. از طرفی با توجه به نمودار $f(۲)=۰$، پس $۴a-۱=۰\Rightarrow a=\dfrac{۱}{۴}$. و در نهایت داریم: $a+b=\dfrac{۱}{۴}$.

تست: در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x+|x|}$، کدام بیان، درست است؟

تجربی ۹۸

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=-\infty$

تست: گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{x+|x|}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{۲x}=\frac{-۱}{۰^{+}}=-\infty$$

تست: در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}$، کدام بیان، درست است؟

تجربی خارج ۹۸

۱) $\lim\limits_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^{+}} f(x)=-\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^{+}} f(x)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^{-}} f(x)=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{۴\pi}{۳}} f(x)=+\infty$

تست: گزینه ۱ صحیح است. داریم: $\sin\dfrac{۲\pi}{۳}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}>۰$ و همچنین $\cos\dfrac{۲\pi}{۳}=\dfrac{-۱}{۲}$ و تابع در ناحیه این زاویه یعنی ناحیه دوم نزولی است. پس داریم:

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^{+}} f(x)=\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^{+}}\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{-}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^{-}}=-\infty$$

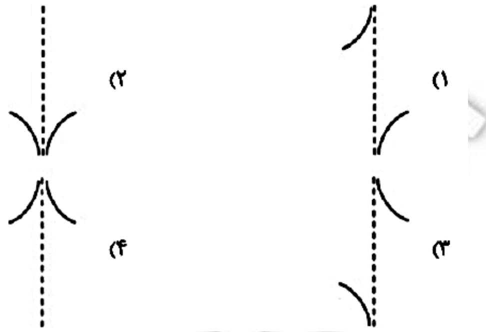
تست۸: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[\sin x]}{x}$ کدام است؟

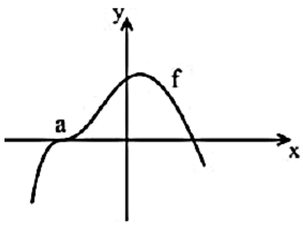
۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) ۱

تست۹: حاصل $\lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{[\sin x]}{6x-x^2}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) ۱

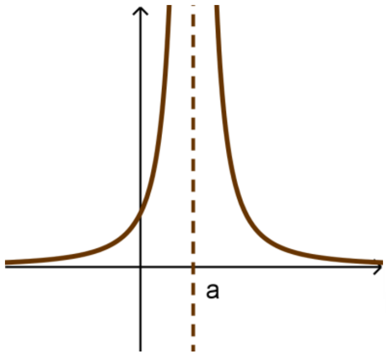
تست۱۰: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=\dfrac{x}{f(x)}$ در همسایگی نقطه‌ی a به کدام صورت است؟



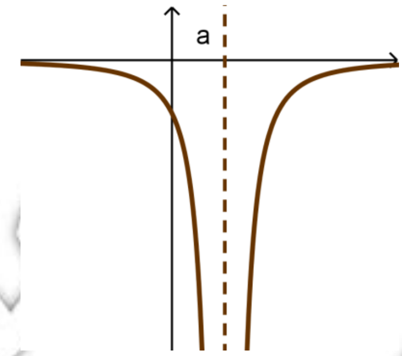


تعریف

تعریف (حد بی‌نهایت): فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف از a تعریف شده باشد. رابطه‌ی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگتر کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود. برای $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ نیز تعریف به طور مشابه انجام می‌شود.



$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

مثال

مثال: حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-2}{|5-x|}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$

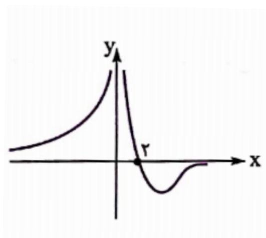
۳) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{(x-3)^2}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x+1}{(x-7)^4}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\cos(x-4)}{x^2-8x+16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-4)^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

تست

تست: - شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax+2}{x^2+b}$ است. $f(4)$ کدام است؟



۱) $-\dfrac{1}{8}$ ۲) $-\dfrac{1}{4}$

۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{8}$

تست: گزینه ۱ صحیح است. چون $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ ، پس $x=0$ ریشه مخرج است. پس: $b=0$. از طرفی با توجه به نمودار $f(2)=0$ ، پس: $2a+2=0\Rightarrow a=-1$. داریم: $f(4)=\dfrac{-4+2}{16}=\dfrac{-1}{8}$.

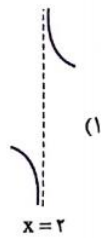
تست۱۱: - حاصل حدهای $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x^2-2x+1}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2-3x}$ به ترتیب کدام است؟

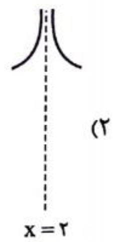
۱) $+\infty$ ، $+\infty$ ۲) $-\infty$ ، $-\infty$ ۳) $+\infty$ ، $-\infty$ ۴) $-\infty$ ، $+\infty$

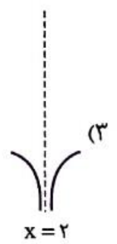
تست۱۲: اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{2x^2-ax+b}=+\infty$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

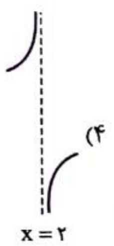
۱) $a=-b=2$ ۲) $a=b=-2$ ۳) $a=b=4$ ۴) $-a=b=4$

تست۱۳: - نمودار تابع $f(x)=\frac{x+3}{x^2-4x+4}$ در کنار خط $x=2$ چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تست۱۴: - در تابع $f(x)=\frac{2x}{x^2+ax+b}$ اگر $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۲   ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$

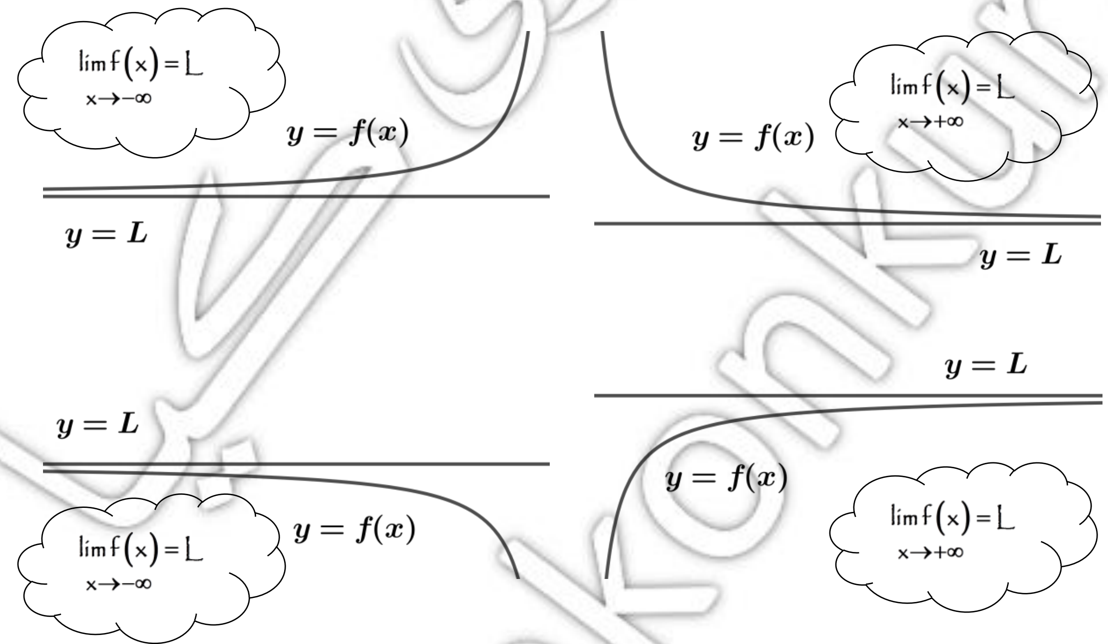
محاسبه حد در حالت‌های مختلف

۳- حد در بی‌نهایت:

تعریف (حد در بی‌نهایت):

تعریف: اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه‌ی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

تعریف: اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد، رابطه‌ی $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.



نکته: داریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n}=0,\ (n\in\mathbb{N})$.

نکته: برای محاسبه حدهایی به صورت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=L$، کافی است صورت و مخرج را بزرگترین درجه‌ی متغیر x، تقسیم کنیم.

مثال: حاصل را بیابید.

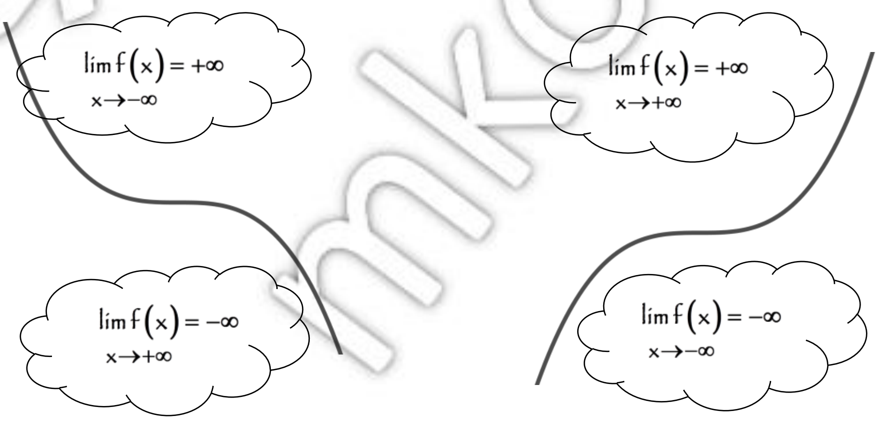
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x-1}{1-4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-4\right)}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^2+6x-1}{-3x^3+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(7+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(-3+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

تعریف (حد نامتناهی در بی‌نهایت):

الف) اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه‌ی $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ به این معناست که $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود. برای حد $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ نیز تعریف به صورت مشبه انجام می شود.

ب) اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد، رابطه‌ی $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ به این معناست که $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کرد ، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود. برای حد $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ نیز تعریف به صورت مشابه انجام می شود.



نکته

نکته: داریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$.

نکته: با توجه به دو نکته بالا داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} 0 & m<n \\ \dfrac{a_m}{b_n} & m=n \\ \infty & m>n \end{cases}$$

مثال

مثال: حاصل را بیابید.

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4x+1}{1-4x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-4x^3} = -\frac{1}{4}$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1-5x^2}{6+4x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x^2}{4x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{4x} = 0$$

$$3)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+6+\sqrt{x^2+3x}}{6x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+\sqrt{x^2}}{6x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+|x|}{6x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^2+6}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} (-4x) = -\infty$$

تست

تست: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{5}{2}$ باشد، آنگاه حدّ $f(x)$ وقتی $x \to -1$، کدام است؟

تجربی ۹۵

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5}{2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+2x}{2x} = \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-1} \frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2} \overset{H}{=} \lim_{x\to-1} \frac{3+\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+5}}}{2} = \frac{3+\dfrac{-4}{3}}{2} = \frac{5}{6}$$

نکته: مسایلی که به حالت $\infty-\infty$ برخورد می‌کند، ابهام دارند و باید رفع ابهام شوند.

نکته: داریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1}\left|x+\frac{6}{2}\right|\right)=x-x-3=-3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+8x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9}\left|x+\frac{8}{2(9)}\right|\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x-3x-\frac{4}{6}\right)=\frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\left|x+\frac{2}{2(1)}\right|\right)=\lim_{x\to-\infty}(x-x-1)=-1$$

تست: اگر $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$، کدام است؟

تجربی ۹۸

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. ابهام دارید زیرا:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(2x-2x)=\infty-\infty$$

روش اول:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+\sqrt{4x^2+x}}{1}\times\frac{2x-\sqrt{4x^2+x}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2-4x^2-x}{2x-\sqrt{4x^2+x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{2x-(-2x)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{4x}\right)=-\frac{1}{4}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+2\left|x+\frac{1}{8}\right|\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-2\left(x+\frac{1}{8}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-2x-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$$

تست: اگر $f(x)=x-\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟

تجربی خارج ۹۸

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-\sqrt{4x^2+x}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-\sqrt{4x^2}}{x}\right)==\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-|2x|}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-(-2x)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{x}\right)=3$$

تست‌ها: حد $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left[\frac{1}{x}\right]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

تست۱۶: - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{ax^n+4}$ ، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ باشد،آن‌گاه $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ کدام است؟

(تجربی ۸۵)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

تست۱۷: - حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2+9x}}{3x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

(تجربی خارج ۸۶)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

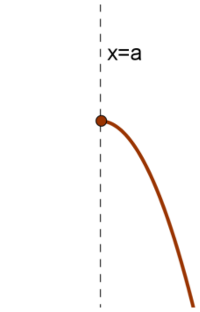
تست۱۸: - در تابع $f(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2+6x}}{ax-2}$ ، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ ، کدام است؟

(تجربی خارج ۸۹)

۱) صفر ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پیوستگی

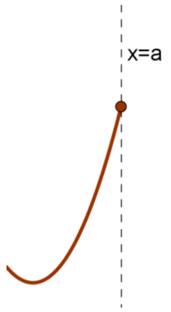
تعریف (پیوستگی راست):



تابع f در نقطه $x=a$ پیوستگی راست دارد، هرگاه:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

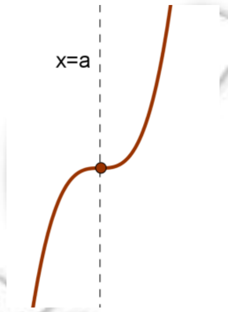
تعریف (پیوستگی چپ):



تابع f در نقطه $x=a$ پیوستگی چپ دارد، هرگاه:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

تعریف (پیوستگی توابع):



تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است، هرگاه:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$ یا

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

مثال: مقدار a و b را طوری بیابید که تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} a[x]-1 & x<2 \\ -2 & x=2 \\ a\sin(x-2)+bx & x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=a\left[2^-\right]-1=a-1 \\ f(2)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=a(0)+2b=2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=-2\Rightarrow a=-1 \\ 2b=-2\Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

تست: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{3-x} & , x\neq 3\\ m & , x=3\end{cases}$ در نقطهٔ $x=3$ پیوستگی چپ داشته باشد، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است. باید: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$. داریم:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{3-x}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{3-x}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{3-x}=\lim_{x\to 3^-}\frac{3-x}{3-x}=1\xrightarrow{f(3)=m} m=1$$

تست: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} & ; x>0\\ a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) & ; x\leq 0\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در $x=0$ پیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. باید: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\cos x)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=a\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}=2\Rightarrow a=4$$

تست: به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8+x^3}{|x+2|}; & x\neq -2\\ a ; & x=-2\end{cases}$، در نقطهٔ $x=-2$، فقط از چپ پیوسته است؟

تجربی ۹۸

۱) ۱۲- ۲) ۶- ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است. باید: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=f(-2)$. داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{8+x^3}{|x+2|}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)}=-12\\ f(-2)=a\end{cases}\Rightarrow a=-12$$

تست ۱۹: - اگر تابع $g(x)=\begin{cases} x^{2}+ax & x>1 \\ x^{3}+2x & x=1 \\ 3b+\cos(x-1) & x<1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) -2

تست ۲۰: - اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) & x>-3 \\ a & x=-3 \\ [x]+b & x<-3 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=-3$ پیوسته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

تست ۲۱: در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{2x}}{2-x} & ; x\neq 2 \\ a & ; x=2 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=2$ پیوسته است؟

(تجربی ۸۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱

تست ۲۲: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax+2^{x-3} & ; x<3 \\ a\log_2(1+x) & ; x\geq 3 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=3$ پیوسته است. $f(2)$ کدام است؟

(تجربی ۹۷)

۱) -2 ۲) $-1/5$ ۳) ۱ ۴) صفر

تست ۲۳: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x\neq 0 \\ a & ; x=0 \end{cases}$. به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

(تجربی ۹۶)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

تست۲۴: - به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3} & , \ x>3\\ ax-3a-\dfrac{3}{8} & , \ x\le 3\end{cases}$، در نقطه‌ی $x=3$، پیوسته است؟

(تجربی خارج۹۴)

۱) -2 ۲) 2 ۳) هیچ مقدار a ۴) هر چه باشد a

تست۲۵: - به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1} & x\ne 1\\ a & x=1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است؟

(ریاضی خارج ۹۲)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) هیچ مقدار a

تست۲۶: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}3x-[x] \ ; x<2\\ a \ ; x=2\\ x+2 \ ; x>2\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=2$ پیوسته است؟

(تجربی۹۲)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) هیچ مقدار a

تست۲۷: - تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}[x]$ از نظر پیوستگی در $x=0$ چگونه است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

(ریاضی خارج۹۱)

۱) پیوسته است. ۲) فقط از چپ پیوسته است.
۳) فقط از راست پیوسته است. ۴) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته

تست۲۸: ۱- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{x} \ ; & x\ne 0\\ a \ ; & x=0\end{cases}$، در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است؟

(ریاضی خارج۹۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار a

تعریف

پیوستگی توابع روی بازه:

تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است هرگاه f:

۱) روی بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.

۲) در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد. ۳) در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

نکته: تابع f تابعی پیوسته است، هرگاه در همه‌ی نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد.

مثال

مثال: تابع $f(x)=\sqrt{2x-4}$، بر بازه‌ی $[2,+\infty)$ پیوسته است. زیرا:

$$a\in(2,+\infty)\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)\ ,\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=0$$

مثال: تابع $f(x)=2x+1$، بر مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. زیرا:

$$a\in\mathbb{R}\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

تست

تست: به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{x} & ;\ 1\le x\le 6\\ a+\cos^2\dfrac{\pi x}{36} & ;\ x>6\end{cases}$ بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است؟

تجربی ۹۴

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. باید: $\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^+} f(x)$. داریم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+}\left(a+\cos^2\frac{\pi x}{36}\right)=\lim_{x\to 6^+}\left(a+\cos^2\frac{\pi}{6}\right)=a+\frac{3}{4}\\ \lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{-1}{4}$$

((امام علی(ع): ایمان ، صبوری در سختی و گرفتاری است و شکرگزاری در آسایش و نعمت.))

تست: به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; x>2\\ ax-1 & ; x\le 2\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

ریاضی ۹۸

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. باید: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$. داریم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}}\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}\right)=\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{4}}=4\\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a-1=4\Rightarrow a=2/5$$

تست: به ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x[x] & ; |x|<1\\ ax+b & ; |x|\ge 1\end{cases}$، بر روی R پیوسته است. a کدام است؟

ریاضی خارج ۹۸

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. باید: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$. داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x[x] & ,-1<x<1\\ ax+b & ,x\le -1,x\ge 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow 0=a+b\\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)\Rightarrow -a+b=1\end{cases}\Rightarrow b=\frac{1}{2}\quad ,a=-\frac{1}{2}$$

تست ۲۹: - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2+x-2|}{x-1} & ; x\ne 1\\ a & ; x=1\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a بر $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

(تجربی ۹۰)

۱) هر مقدار a ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

تست۳۰: (ریاضی ۹۷)
تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-[x]}{x^{3}-x-6} & ; x\neq 2\\ a & ; x=2\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در بازهٔ $[2,3)$، پیوسته است؟

۱) $\frac{1}{11}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{6}$

تست۳۱: (ریاضی خارج ۹۷)
تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x} & ; x\neq 0\\ \dfrac{1}{12} & ; x=0\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ پیوسته است، b کدام است؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

تست۳۲: (تجربی خارج ۶)
تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^{2}-x-1}{x-1} & ; x>1\\ ax-a+3 & ; x\leq 1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است؟

۱) فقط $\frac{1}{2}$ ۲) فقط ۲ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

تست۳۳: (تجربی خارج ۸۷)
به‌ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+a} & , x\geq -1\\ x^{2}+ax & , x<-1\end{cases}$، در $x=-1$ پیوسته است؟

۱) $\{1,\sqrt{2}\}$ ۲) $\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$ ۳) ϕ ۴) $\mathbb{R}$

تست۳۴: (تجربی خارج ۸۸)
به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}a+\sin^{2}x & 0\leq x<\frac{\pi}{4}\\ \sqrt{2}\cos 3x & \frac{\pi}{4}\leq x\leq 2\pi\end{cases}$، روی بازه‌ی $[0,2\pi]$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار a