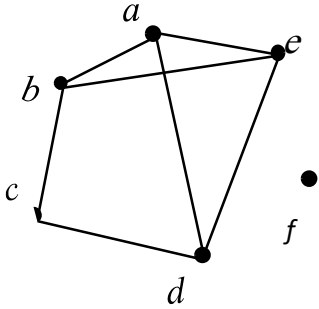
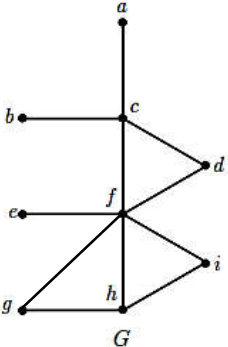


سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان:
نام و نام خانوادگی:		سال دوازدهم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: / / ۱۳۹۸	تعداد صفحه: ۲
جشنواره طراحی سوال امتحان نهایی خراسان رضوی - بهمن ۹۷				
طراح سوال: صدیقه کیوانلو شهرستانگی				
ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره		
۱	درستی و نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد $a^2 + b^2$ فرد است. ب) ۲ گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ وجود دارند. پ) اگر گرافی دوری به طول n داشته باشد، حتماً یک مسیر به طول $n - 1$ دارد.	۰,۷۵		
۲	گزاره ای زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: (اگر $a \geq 0$ باشد، $(a + \frac{1}{a}) \geq 2$)	۰,۵		
۳	ثابت کنید هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند؟	۱		
۴	ثابت کنید اگر $a b$ و $b \neq 0$ در این صورت $ a \leq b $	۱		
۵	برای خرید یک کتاب ۲۴۰۰ تومانی فقط اسکناس های ۵۰۰ و ۲۰۰ تومانی در اختیار داریم. به چند روش می توانیم از این اسکناس ها برای خرید کتاب استفاده کنیم؟	۱		
۶	باقیمانده تقسیم $500! + 499! + 498! + \dots + 2! + 1!$ را بر ۱۲ بدست آورید؟	۱		
۷	گراف G داده شده است با توجه به گراف به سوالات زیر پاسخ دهید؟ الف) بین رئوس های e و c یک مسیر به طول ۳ بنویسید. ب) یک دور به طول ۵ بنویسید. پ) مجموعه $N_G[f]$ را با نوشتن عضوهایش مشخص کنید. ت) یک یال مجاور با یال bc بنویسید. د) چند یال به گراف G اضافه کنیم تا به یک گراف کامل تبدیل شود.	۱,۲۵		
۸	کوثر، فاطمه، زهرا، محدثه، طاهره و صدیقه در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۵ نفر دیگر باشد یا نباشد. الف) چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟ ب) اگر بودن در فهرست دوستان رابطه ای دو طرفه باشد، یعنی هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟	۱		
۹	در یک گراف $\Delta = 3$ و $\delta = 6$ مرتبه گراف ۶ است اندازه گراف را بدست آورید؟	۰,۵		
۱۰	اگر G یک گراف k -منتظم n راسی باشد نشان دهید $\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor \leq \gamma(G)$	۰,۵		
۱۱	در گراف شکل روبرو: الف) مجموعه ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه گر باشد؟ ب) مجموعه ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه گر مینیمال باشد؟ پ) مجموعه ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه گر مینیمم باشد؟	۰,۷۵		

مدت امتحان :	ساعت شروع ۸: صبح	رشته : ریاضی و فیزیک	سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی گسسته
تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : / / ۱۳۹۸	سال دوازدهم آموزش متوسطه	نام و نام خانوادگی :
طراح سوال : صدیقه کیوانلو شهرستانی		جشنواره طراحی سوال امتحان نهایی خراسان رضوی - بهمن ۹۷	
نمره	سؤالات (پاسخ نامه دارد)		ردیف
۱,۵		<p>نقشه مقابل نقشه ی یک منطقه شامل چند روستا و جاده های بین آن روستاهاست و مسافت جاده های بین آن روستاها مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی از روستاها احداث کنیم به گونه که ای فاصله ی هر روستا تا نزدیکترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه فوق ، مسئله مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستانها را مشخص کنید.</p>	۱۲
۱		<p>برای $n \in N$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که : الف) چگونه می توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) چگونه می توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه ی احاطه گری با اندازه ۲ داشته باشد.</p>	۱۳
۱,۵		<p>الف) چند عدد شش رقمی وجود دارد که دارای سه رقم ۲، دو رقم ۳ و یک رقم ۴ است؟ ب) معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ مفروض است. این معادله چند جواب صحیح نامنفی با شرط $x_1 \geq 4$ و $5x_2 =$ دارد؟</p>	۱۴
۱,۵		دو مربع لاتین از مرتبه ۴ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.	۱۵
۱,۵		در یک دانشگاه ۴۹ رشته وجود دارد این دانشگاه حداقل چند دانشجو باید داشته باشد تا دست کم ۵ نفر از آنها هم رشته باشند؟	۱۶
۲		چند تابع پوشا از مجموعه ۵ عضوی B به مجموعه ی ۳ عضوی A وجود دارد؟	۱۷
۱,۵		الف) به چند طریق می توان ۱۰ نفر را در دو اتاق ۳ نفره و دو اتاق ۲ نفره اسکان داد؟ ب) تعداد جایگشت های چهار حرفی از حروف کلمه SALAMAT که دو حرف آنها A باشد را بدست آورید؟	۱۸

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان:
نام و نام خانوادگی:		سال دوازدهم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: / / ۱۳۹۸	تعداد صفحه: ۳
جشنواره طراحی سوال امتحان نهایی خراسان رضوی - بهمن ۹۷				
طراح سوال: صدیقه کیوانلو شهرستانکی				
ردیف	پاسخنامه	نمره		
۱	الف) نادرست (۰,۲۵) ب) نادرست (۰,۲۵) پ) درست (۰,۲۵)	۰,۷۵		
۲	$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow (a-1)^2 \geq 0$	۰,۵		
۳	فرض می کنیم n دو n + 1 دو عدد صحیح متوالی باشند در این صورت کفایت ثابت کنیم ب م م آنها ۱ است داریم: $(n, n+1) = d \Rightarrow \begin{cases} d n \\ d n+1 \end{cases} \Rightarrow$ $d n+1 - n \Rightarrow d 1 \Rightarrow d = \pm 1 \xrightarrow{d>0} d = +1$	۱		
۴	چون a b پس b = aq و چون b ≠ ۰ پس q ≠ ۰ (۰,۲۵) و چون q ∈ Z لذا q ≥ ۱ حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در a ضرب کنیم خواهیم داشت. $1 \leq q \Rightarrow a \times 1 \leq a \times q \Rightarrow a \leq aq \Rightarrow a \leq b \quad (۰,۵)$	۱		
۵	$500x + 200y = 2400 \Rightarrow 5x + 2y = 24 \quad (۰,۲۵)$ $5x \equiv 24 \Rightarrow 5x \equiv 24+6 \Rightarrow 5x \equiv 30$ $x \equiv 6 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x - 0 = 2k \Rightarrow x = 2k$ $5(2k) + 2y = 24 \Rightarrow 10k + 2y = 24 \Rightarrow 2y = 24 - 10k \Rightarrow y = 12 - 5k$	۱		
۶	بنابراین برای n ≥ 4 داریم n! ≡ 0 (۰,۲۵) پس $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 500! \equiv 1+2+6 \equiv 9$	۱	دانیل می	

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان:	
نام و نام خانوادگی:		سال دوازدهم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: / / ۳۹۸		تعداد صفحه: ۳	
جشنواره طراحی سوال امتحان نهایی خراسان رضوی - بهمن ۹۷ طراح سوال: صدیقه کیوانلو شهرستانکی							
ردیف	پاسخنامه						نمره
۷	الف) eadc یا eabc (۰,۲۵) ب) cdeabc (۰,۲۵) پ) $N_G[f] = \{f\}$ (۰,۲۵) ت) ba یا bc یا ea یا ed (۰,۲۵) د) ۸ یال (۰,۲۵)						۱,۲۵
۸	الف) ۶ نفر را به عنوان ۶ راس یک گراف جهت دار در نظر می‌گیریم به طور مثال از نام فاطمه به نام زهرا یک یال رسم می‌کنیم در صورتی در فهرست دوستان فاطمه نام زهرا باشد و برعکس پس حداکثر تعداد یالها در این گراف جهت دار $۳۰ = ۶ \times ۵$ می‌باشد. (۰,۲۵) از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا نداشتن) پس تعداد کل حالات برای آن $۲^{۳۰}$ می‌باشد. (۰,۲۵) ب) در این حالت گراف ما جهت دار نیست. پس حداکثر تعداد یالها $15 = \frac{۶ \times ۵}{۲}$ است. (۰,۲۵) بنابراین تعداد کل حالات $۲^{۱۵}$ است. (۰,۲۵)						۱
۹	چون درجه همه رئوس برابر ۳ است، پس گراف ۳-منتظم است. (۰,۲۵) $\begin{cases} p=6 \\ r=3 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{۳ \times ۶}{۲} = 9$ (0.25)						۰,۵
۱۰	در گراف k-منتظم n راسی، داریم $\Delta = k$ می‌باشد. بنابراین $\gamma(G) \geq \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$ (۰,۵)						۰,۵
۱۱	الف) $\{g,a,b,f\}$ یا هر مجموعه احاطه دیگر (۰,۲۵) ب) $\{a,b,f\}$ یا هر مجموعه احاطه گر مینیمال دیگر (۰,۲۵) پ) $\{c,f\}$ (۰,۲۵)						۰,۷ ۵
۱۲	ابتدا هر روستا را به عنوان یک راس گراف با حروف انگلیسی کوچک مشخص می‌کنیم سپس بین هر دو راس به شرطی یال رسم می‌کنیم که فاصله ی آنها بیشتر از ۱۰ کیلومتر نباشد. (۰,۲۵) رسم شکل (۰,۷۵) $\gamma(G) \geq \lfloor \frac{۱۵}{۸+1} \rfloor = ۲$ (۰,۲۵) یک مجموعه ی احاطه گری مینیمم می‌تواند $\{c, m\}$ باشد. بنابراین کافیت دو بیمارستان در روستاهای c و m احداث گردد. (۰,۲۵)						۱,۵
۱۳	الف) کافیت مطابق شکل یک یک گراف دو بخشی رسم کنیم به طوری که یک بخش آن شامل k راس و بخش دیگر شامل n-k راس باشد. (۰,۲۵) رسم شکل (۰,۲۵)						۰,۵

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان:																																																
نام و نام خانوادگی:	سال دوازدهم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: / / ۱۳۹۸	تعداد صفحه: ۳																																																
جشنواره طراحی سوال امتحان نهایی خراسان رضوی - بهمن ۹۷ طراح سوال: صدیقه کیوانلو شهرستانی																																																			
ردیف	پاسخنامه	نمره																																																	
۰/۵	<p>(ب) مطابق شکل روبرو باید گراف را رسم کرد. که دو مجموعه ی احاطه گری آن $\{v_1, v_n\}$ و $\{v_1, v_{n-1}\}$ می باشد.</p> <p>رسم شکل (۰,۲۵)</p>																																																		
۱۴	<p>الف) تعداد اعداد ۶ رقمی مورد نظر برابر است با تعداد جابه جا شدن های سه تا ۲ تا ۳ و یک ۴ پس این تعداد برابر است با:</p> $\frac{6!}{3!2!1!} = 60 \quad (۰.۵)$ <p>ب) در واقع می خواهیم ۱۹ شی یکسان را در یک جعبه قرار دهیم به طوری که جعبه اول حداقل چهار شی و جعبه دوم دقیقاً ۵ شی داشته باشد. برای این کار ۴ شی در جعبه اول قرار می دهیم و ۵ شی در جعبه دوم قرار می دهیم و جعبه دوم را کنار می گذاریم. در این صورت سه جعبه داریم و ۱۰ شی که باید این ۱۰ شی را در داخل ۳ جعبه قرار دهیم در نتیجه داریم.</p> $\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66 \quad (۰.۵)$	۱.۵																																																	
۱۵	<p>(۰,۵+۰,۵+۰,۵+۰,۵) (هر مربع ۰,۵)</p> <table border="1"> <tr> <td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳۳</td><td>۴۴</td><td>۱۱</td><td>۲۲</td> </tr> <tr> <td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۴۱</td><td>۳۲</td><td>۲۳</td><td>۱۴</td> </tr> <tr> <td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۱۲</td><td>۲۱</td><td>۳۴</td><td>۴۳</td> </tr> <tr> <td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۲۴</td><td>۱۳</td><td>۴۲</td><td>۳۱</td> </tr> </table>	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳۳	۴۴	۱۱	۲۲	۴	۳	۲	۱	۱	۲	۳	۴	۴۱	۳۲	۲۳	۱۴	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۱۲	۲۱	۳۴	۴۳	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۲۴	۱۳	۴۲	۳۱	۱.۵	
۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳۳	۴۴	۱۱	۲۲																																								
۴	۳	۲	۱	۱	۲	۳	۴	۴۱	۳۲	۲۳	۱۴																																								
۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۱۲	۲۱	۳۴	۴۳																																								
۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۲۴	۱۳	۴۲	۳۱																																								
۱۶	<p>طبق تعمیم اصل لانه کیبوتری تعداد دانشجویان (کیبوتران) را m در نظر می گیریم و تعداد لانه ها را همان تعداد رشته ها $(n=49)$ در نظر می گیریم (۰,۵) در این صورت تعداد دانشجویان برابر است با:</p> $k+1=5 \Rightarrow k=4 \Rightarrow m=kn+1=49 \times 4+1=197 \quad (۰.۵)$	۱.۵																																																	
۱۷	<p>می دانیم تعداد کل توابع از مجموعه B به مجموعه A برابر است با $n(B)^{n(A)}$ که آن را با S و تعداد آن را $n(S)$ نشان می دهیم پس تعداد کل توابع برابر است با $3^5 = 243$ (۰,۲۵) حال فرض کنید مجموعه توابعی باشد که هیچ عضوی از B را به A_i نسبت نمی دهند. یعنی:</p> <p>در این صورت کفایت برای پیدا کردن تعداد تابع پوشا، حاصل رابطه ی</p> $ \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad (۰,۲۵)$ $ A_1 = A_2 = A_3 = 3^5 = 3^3 \quad (۰.۲۵), A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 3^5$ $= 3 \quad (۰.۲۵), A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0 \quad (۰.۲۵), A_1 \cup A_2 \cup A_3 $ $= 3^3 + 3^3 + 3^3 - (1+1+1) + 0 = 9^3 \quad (۰.۲۵), \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = 243 - 9^3$ $= 150 \quad (۰.۲۵)$	۲																																																	
۱۸	<p>الف) $\binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = \frac{10!}{2! \times 2! \times 3! \times 3!} \quad (۰.۲۵)$</p> <p>ب) دو حرف A حتماً انتخاب شده اند پس دو حرف دیگر باید از بین ۴ حرف باقیمانده باید انتخاب شوند که این کار به $\binom{4}{2}$ حالت امکان پذیر است. (۰,۲۵) از طرفی در کلمات چهار حرفی ساخته شده، ۲ حرف A تکراری است لذا تعداد جایگشت های این چهار حرف برابر است با:</p>	۱.۵																																																	