

هوالعلی

آزمون سوم: کیهان شناسی و دینامیک کهکشان

دی 95



یازدهمین تیم جمهوری اسلامی ایران در المپیاد جهانی نجوم و اختر فیزیک

امیر احسان علیزاده

امیر حسین ستوده فر

زهرا فرهمند

عباس فروزان نژاد

عماد صالحی

محمد علی نادمی

پریمه صفریان

شایان عزیزی

سینا بلوکی

علیرضا ملکی

## ثوابت نجومی و فیزیکی

$6.67 * 10^{-11} \frac{m^3}{Kg.s^2}$	ثابت جهانی گرانش	<b>G</b>
$5.67 * 10^{-8} \frac{W}{K^4.m^2}$	ثابت استفان بولتزمن	<b><math>\sigma</math></b>
$1.38 * 10^{-23} \frac{J}{K}$	ثابت بولتزمن	<b><math>k_B</math></b>
$1 * 10^{-34} Js$	ثابت پلانک کاهش یافته	<b><math>\hbar</math></b>
$3 * 10^8 \frac{m}{s}$	سرعت نور	<b>c</b>
$1.989 * 10^{30} Kg$	جرم خورشید	<b><math>M_s</math></b>
$6.96 * 10^8 m$	شعاع خورشید	<b><math>R_s</math></b>
$1.5 * 10^{11} m$	واحد نجومی	<b>A. U.</b>
$3.09 * 10^{16} m$	پارسک	<b>pc</b>
$9.46 * 10^{15} m$	سال نوری	<b>ly</b>
$3.85 * 10^{26} W$	درخشندگی خورشید	<b><math>L_s</math></b>
$73 \frac{Km}{s.Mpc}$	ثابت هابل	<b><math>H_0</math></b>

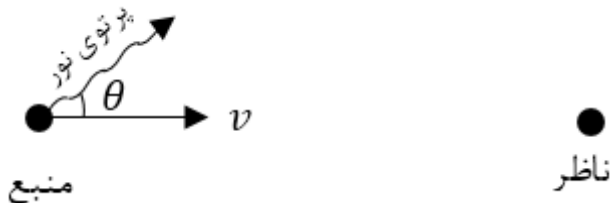
۱- دستگاه مختصاتی را به گونه ای بر روی کهکشان راه شیری قرار می دهیم که محور Z آن عمود بر صفحه مداری خورشید و خورشید بر روی محور X قرار دارد. در این دستگاه بردار مکان خورشید و یک خوشه ستاره ای بدین صورت داده می شوند:

$$R_1 = 8.5i \quad , \quad R_2 = 6.2i + 1.7j - 4.2k$$

تابع چگالی کهکشان را به صورت  $\rho = \rho_0 \frac{1}{1 + (\frac{r}{a})^2}$  در نظر بگیرید که در آن  $a = 2 \text{ kpc}$  و  $\rho_0 = 3 \times 10^{-20} \text{ kg/m}^3$  هستند.

با فرض اینکه بردار تکانه زاویه ای این خوشه ستاره ای به سمت عرض کهکشانی  $20^\circ$  باشد و دایروی بودن مدار ها، قرمزگرایی خوشه را بیابید. (از حرکت زمین به دور خورشید صرف نظر کنید)

۲- یک منبع نقطه ای نور را در نظر بگیرید که به صورت همسانگرد و با شدت ثابت  $I_0$  تابش میکند. ناظری را در نظر بگیرید که مشاهده میکند این منبع نور با سرعت  $v$  به وی نزدیک میشود. به علت وجود اثرات نسبیتی شدتی که ناظر از منبع مشاهده میکند،  $I$ ، متفاوت از  $I_0$  بوده و به  $\theta$ ، زاویه با راستای سرعت، بستگی دارد.



الف) نشان دهید تابعیت  $I$  از  $\theta$  به شکل زیر است.

$$I(\theta) = I_0 \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2}$$

در ادامه  $\frac{v}{c}$  را کوچک در نظر گرفته و از مرتبه دوم و بیشتر آن صرف نظر کنید.

ب) با فرض اینکه این منبع نور یک جسم سیاه است و دمای مؤثر سطحی آن  $T_0$  می‌باشد؛ دمایی که ناظر برای سطح این منبع اندازه می‌گیرد را بدست آورید.

ج) در صورتی که  $v = 0.12 c$  باشد و طول موجی که بیشترین تابش منبع در آن است  $\lambda_0$  باشد؛  $\lambda$  طول موجی که ناظر در آن بیشترین تابش را مشاهده میکند، و  $\lambda_0$  را بیابید.

د) با تاثیر دادن اثر دوپلر روی  $\lambda_0$ ،  $\lambda_0'$  را بیابید و با  $\lambda$  مقایسه کنید. توضیح دهید چرا این دو مقدار باید مساوی یا نامساوی باشند.

راهنمایی:

$$\int \frac{1+x}{(1-x)^2} dx = \frac{2}{1-x} + \ln|1-x|$$

$$\int \frac{x(1+x)}{(1-x)^2} dx = x + \frac{2}{1-x} + 3 \ln|1-x|$$

$$\int \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{2}{1-x} + 5 \ln|1-x|$$

۳- فرض کنید تابع جرم اولیه ی ستاره ها تابع جرم salpeter با کمینه جرم 0.1 و بیشینه جرم 100 جرم خورشید باشد. ثابت تابع جرم اولیه را برای چگالی سطحی دیسک به دست آورید. -چگالی سطحی، چگالی انتگرال گرفته در راستای عمود در کهکشان، بر پارسک مربع است. - ستاره ها را رشته اصلی فرض کنید.

جرم میانگین ستاره ها را به دست آورید.

تعداد برای چه جرمی بیشینه است؟

ستاره ای با چه جرمی درخشندگی میانگین را دارد؟

چگالی ستارگان در نزدیکی خورشید چند ستاره بر پارسک مکعب و فاصله ی میانگین آن ها چند پارسک است؟

راهنمایی:

چگالی سطحی ستاره ها در نزدیکی خورشید  $55 M_{sun}/pc^{-2}$  است. چگالی سطحی کل از تابع سلپتر به دست می آید:

$$\xi(m)dm = \xi_0 m^{-2.35} dm$$

ضخامت دیسک کهکشان را  $500 pc$  در نظر بگیرید.

۴- همانطور که میدانید در کیهان اجرام در جای خود ساکن هستند (در مقیاس بزرگ) و اجرام دیگر از دید ناظرها با سرعت  $v=Hr$  در حال دور شدن هستند و ابعاد کیهان متناسب با عامل مقیاس تغییر می کند، کیهان از سه مؤلفه ماده، تابش و ماده تاریک تشکیل شده است که فشار ایجاد شده از جانب انرژی تاریک منفی است!

حال می خواهیم نگرشی دیگر از کیهان را بررسی کنیم، فرض کنید در این نگرش به جای اینکه ابعاد کیهان تغییر کند این ابعاد ما است که متناسب با عامل مقیاس تغییر می کند و مقیاس های ما (زمان و مکان) همراه خودمان کوچک یا بزرگ میشود و باعث میشود که فاصله اجرام دیگر از ما تغییر کند! در این نگرش ماده و تابش در زمینه ای انرژی تاریک قرار دارند که به صورت یکنواخت در کیهان پخش شده است که همواره چگالی آن از دید همه ی ناظر ها ثابت است قرار دارند. در این نگرش اگر فشار وارده از جانب ماده تاریک بر ماده و تابش به فشار آنها غلبه کند باعث کوچک شدن ابعاد آنها میشود و همینطور بلعکس.

الف) معادلات فریدمان را برای این نگرش بدست آورید.

با فرض اینکه طول موج امواج الکترومغناطیسی در دستگاه  $t_0$  که مقیاس آن ثابت است تغییر نکند:

ب) ثابت کنید که سرعت نور از دید همه ناظر ها در همه زمان ها ثابت است و رابطه قرمز گرایی با عامل مقیاس بدست آورید.

ج) ثابت کنید چگالی انرژی تاریک بدون تولید یا کاهش جرم با تغییر ابعاد ناظر تغییر می کند.

د) آیا این نگرش با نگرش قبلی تفاوت دارد؟ دلیل خود را بیان کنید .

۵- کهکشانی قرص مانند به شعاع  $R$  و ضخامت  $l$  را در نظر بگیرید که  $(l \ll R)$ . ناظری در فاصله  $d$  از مرکز کهکشان قرار دارد زاویه ناظر با قرص کهکشان  $\theta$  میباشد. این ناظر تابعیت پتانسیل گرانشی کهکشان را به

$$\phi = \phi_0 \cdot \ln(r_c^2 + A_0(1 - \cos(\Psi)) / \cos^2 \eta)$$

صورت:

میبیند که در آن  $\Psi$  زاویه بین مرکز کهکشان و نقطه ای از صفحه کهکشان از دید ناظر و  $\eta$  زاویه سمتی بین ناظر و همان نقطه از صفحه کهکشان است که بر روی صفحه کهکشان بررسی می شود (  $A$  نیز هم یک ثابت است که باید تعیین شود). با فرض این که  $d \ll R$  باشد، تابع چالی کهکشان را بدست آورید.

موفق باشید;) ;