

www.konkur.in

وبسایت کنکور

دانلود انواع جزوات کنکور و ارشد

سوالات کنکور سراسری و آزاد داخل و خارج از کشور

سوالات کنکور ارشد همه رشته ها به همراه پاسخ

مصاحبه و کارنامه نمرات برتر کنکور

دانلود کتابهای درسی و دانشگاهی و حل المسائل ها

مشاوره تحصیلی کنکور و ارشد

سوالات پیام نور و المپیاد و آزمایشگاه ها

و خدمات دیگر

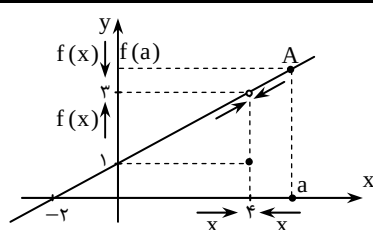


حد و پیوستگی

۳-۱: مفاهیم مقدماتی حد

با مفهوم حد و چگونگی محاسبه‌ی آن در سال گذشته در درس حسابان آشنا شده‌اید. در کتاب دیفرانسیل، ما به صورت دقیق‌تر و با زبان ریاضی با این مفهوم مواجه می‌شویم و در توابی خاص‌تر آن را بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۱: فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع f در $x = a$ برابر L است (و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$)، اگر جمله‌ی زیر درست باشد:
مقدار تابع f را به عدد L بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به شرط آن که مقدار x را به عدد a به اندازه‌ی کافی نزدیک کرده باشیم.



مسئله‌ی (۱): تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & x \neq 4 \\ 1 & x = 4 \end{cases}$ مفروض است.

الف) مقدار $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ چقدر است؟

ب) اگر بخواهیم $|f(x) - 3| < 1$ ، باید x را به چه اندازه‌ای به ۴ نزدیک کنیم؟
برای $|f(x) - 3| < 0.01$ چقدر؟

حل: الف) با توجه به نمودار تابع، می‌دانیم وقتی مقدار x به عدد ۴ نزدیک می‌شود (در شکل با $x = a$ نشان داده‌ایم)، روی نمودار نقطه‌ی A به سمت نقطه‌ی توخالی نزدیک می‌شود و متناظر آن، روی محور عرض‌ها مقدار $f(a)$ به ۳ نزدیک می‌شود. پس: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$.

ب) می‌دانیم برای $x \neq 4$ ، ضابطه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ است. شرط $|f(x) - 3| < 1$ را به زبان ریاضی (برای $x \neq 4$) می‌نویسیم:

$$|f(x) - 3| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3}x + 1 - 3 \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3}x - 2 \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}|x - 4| < 1 \Leftrightarrow |x - 4| < 3$$

مشاهده می‌کنید که اگر $|x - 4| < 3$ (که چون $x \neq 4$ ، بهتر است آن را به شکل $0 < |x - 4| < 3$ بنویسیم)، آن گاه $|f(x) - 3| < 1$. از بحث همسایگی می‌دانید شرط $0 < |x - 4| < 3$ به معنی $x \in (2, 6) - \{4\}$ است. یعنی اگر x در همسایگی محذوف نقطه‌ی ۴ به شعاع ۳ قرار بگیرد، آن گاه $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی ۳ به شعاع ۱ قرار خواهد گرفت.

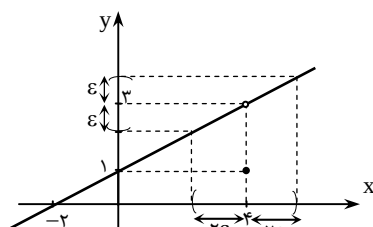
برای $|f(x) - 3| < 0.01$ نیز می‌توانیم بحث مشابهی داشته باشیم: (برای $x \neq 4$)

$$|f(x) - 3| < 0.01 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3}x + 1 - 3 \right| < 0.01 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3}x - 2 \right| < 0.01 \Leftrightarrow \frac{1}{3}|x - 4| < 0.01 \xrightarrow{x \neq 4} 0 < |x - 4| < 0.03$$

پس اگر x در همسایگی محذوف نقطه‌ی ۴ به شعاع 0.03 قرار بگیرد، $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی ۳ به شعاع 0.01 قرار خواهد گرفت.

مسئله‌ی (۲): در مسئله‌ی (۱)، می‌دانیم اگر $0 < |x - 4| < \delta$ ، آن گاه $|f(x) - 3| < \varepsilon$. چه رابطه‌ای بین δ و ε برقرار است؟

حل: کافی است شرط‌ها را به زبان ریاضی به هم تبدیل کنیم: $|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3}x + 1 - 3 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3}x - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 4| < 3\varepsilon$



معنی جمله‌های بالا این است که برای $x \neq 4$ ، دو نامساوی $|x - 4| < 3\varepsilon$ و $|f(x) - 3| < \varepsilon$ می‌توانیم $\delta \leq 3\varepsilon$ ، آن گاه از $0 < |x - 4| < \delta$ ، نتیجه بگیریم. در نمودار نیز نتایج فوق را به شکل هندسی نشان داده‌ایم. همان طور که مشاهده می‌کنید اگر x در فاصله‌ای کمتر از 3ε از عدد ۴ قرار بگیرد (یعنی داخل فاصله‌ی مشخص شده روی محور x ها)، آن گاه $f(x)$ در فاصله‌ی کمتر از ε از عدد ۳ قرار می‌گیرد.

با توجه به دو مثال قبل تعریف حد را به زبان ریاضی چنین می‌توان بیان کرد:

تعریف ۲: فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع f در $x = a$ برابر L است (و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$)، اگر جمله‌ی زیر درست باشد:

برای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ یافت شود طوری که اگر $0 < |x - a| < \delta$ ، آن گاه $|f(x) - L| < \varepsilon$.

یا به بیان دیگر:

○ **مسئله (۳):** ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4x = -4$.

حل: در این مثال $f(x) = x^2 - 4x$ و $a = 2$ و $L = -4$. کافی است نشان دهیم برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود دارد که اگر $0 < |x - 2| < \delta$ ، آن گاه $|x^2 - 4x + 4| < \varepsilon$ داریم:

$$|x^2 - 4x + 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x - 2)^2| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2|^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \sqrt{\varepsilon}$$

نامساوی های برگشت پذیر بالا نشان می دهد که اگر $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$ ، آن گاه از $0 < |x - 2| < \delta$ نتیجه می گیریم: $|f(x) + 4| < \varepsilon$. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$$

تست (۱): در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 1}$ ، اگر $0 < |x - 1| < \delta$ ، آن گاه مقادیر $f(x)$ در همسایگی -1 به شعاع 0.04 قرار می گیرد. بزرگ ترین مقدار δ کدام است؟

$$(1) \ 0.02 \quad (2) \ 0.2 \quad (3) \ \sqrt{0.04} \quad (4) \ 0.64$$

حل: در واقع در این تست از مفهوم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ سؤال شده است. ابتدا دقت کنید که با تقسیم صورت کسر f بر مخرج آن داریم:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = (x - 1)(x^2 - 2x) \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x, \ x \neq 1$$

می خواهیم مقادیر f در همسایگی -1 به شعاع 0.04 قرار گیرند، یعنی: $|f(x) + 1| < 0.04$. بنابراین:

$$|f(x) + 1| < 0.04 \Leftrightarrow |x^2 - 2x + 1| < 0.04 \Leftrightarrow |x - 1|^2 < 0.04 \Leftrightarrow |x - 1| < 0.2$$

پس اگر $\delta \leq 0.2$ ، از شرط $0 < |x - 1| < \delta$ نتیجه می گیریم: $|f(x) + 1| < 0.04$. بنابراین گزینه ی (۲) پاسخ درست است.

تست (۲): با فرض $f(x) = \begin{cases} 5x - 1 & x < 1 \\ 3x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ ، می دانیم وقتی $0 < |x - 1| < \delta$ ، آن گاه مقادیر f در فاصله ی $(3/985, 4/015)$ قرار می گیرد. δ کدام عدد نمی تواند باشد؟

$$(1) \ 0.003 \quad (2) \ 0.002 \quad (3) \ 0.003 \quad (4) \ 0.004$$

حل: قرار گرفتن f در آن فاصله، معادل $|f(x) - 4| < 0.015$ است. چون تابع دو ضابطه ای است در همسایگی های راست و چپ $x = 1$ جداگانه شرط را بررسی می کنیم:

$$1) \ 0 < x - 1 < \delta: |f(x) - 4| < 0.015 \Leftrightarrow |3x + 1 - 4| < 0.015 \Leftrightarrow 3|x - 1| < 0.015 \Leftrightarrow |x - 1| < 0.005$$

$$2) \ -\delta < x - 1 < 0: |f(x) - 4| < 0.015 \Leftrightarrow |5x - 1 - 4| < 0.015 \Leftrightarrow 5|x - 1| < 0.015 \Leftrightarrow |x - 1| < 0.003$$

مشاهده می کنید که از یکی نتیجه می گیریم: $\delta \leq 0.005$ و از دیگری $\delta \leq 0.003$. برای آن که همواره شرط $|f(x) - 4| < 0.015$ برقرار باشد، باید هر دو نتیجه ی بالا برقرار باشد، یعنی $\delta \leq 0.003$ ، بنابراین گزینه ی (۴) نمی تواند مقدار δ باشد.

در تعریف حد، با نزدیک شدن x به عددی مانند a ، مقدار $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک می شود، این نزدیک شدن باید از هر دو سمت a (یعنی در همسایگی چپ و راست a) صورت بگیرد.

اما به همین ترتیب با در نظر گرفتن یک همسایگی می توانیم حدهای یک طرفه را تعریف کنیم:

تعریف: حد چپ و حد راست.

۱- تابع f در $x = a$ حد راستی برابر L دارد (می نویسیم $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$)، اگر این جمله درست باشد: مقدار $f(x)$ را به L بتوانیم هر قدر

که می خواهیم نزدیک کنیم، به شرط آن که x از سمت مقادیر بزرگ تر از a ، به a به اندازه ی کافی نزدیک شود. به بیان دیگر:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

۲- تابع f در $x = a$ حد چپی برابر L دارد (می نویسیم $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$)، اگر این جمله درست باشد: مقدار $f(x)$ را به L بتوانیم هر قدر

که می خواهیم نزدیک کنیم، به شرط آن که x از سمت مقادیر کوچک تر از a ، به a به اندازه ی کافی نزدیک شود. به بیان دیگر:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



◀ **تذکره (۱):** همان طوری که مشاهده می کنید شرط $0 < |x - a| < \delta$ ، در همسایگی راست a (برای $x > a$) تبدیل به $0 < x - a < \delta$ و در همسایگی چپ a (برای $x < a$)، تبدیل به $-\delta < x - a < 0$ می شود.

◀ **تذکره (۲):** اگر حدهای چپ و راست تابع f در $x = a$ موجود و برابر باشند، آن گاه تابع f در $x = a$ حد دارد. به بیان دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

اگر هر دو حد موجود باشند، ولی برابر نباشند، آن گاه تابع f در $x = a$ حد ندارد.

◀ **تذکره (۳):** شرط وجود داشتن هر یک از حدها این است که مقدار L عددی حقیقی شود. به بیان دیگر وقتی $L = \pm\infty$ ، تابع حد ندارد.

یک قرارداد مهم: اگر تابع f فقط در یک همسایگی یک طرفه (همسایگی راست یا همسایگی چپ) $x = a$ تعریف شده باشد، طبق قرارداد کتاب درسی، منظور از $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ همان حد راست یا چپ تابع در نقطه a است.

مثال:

۱- تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ در همسایگی راست $x=1$ تعریف شده، ولی در همسایگی چپ $x=1$ تعریف نشده است. داریم $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ ، ولی $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ وجود ندارد. طبق قرارداد بالا منظور از $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ همان $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ است، پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ ، بنابراین با آن که تابع f در $x=1$ حد چپ ندارد، ولی در این نقطه حد دارد.

۲- تابع $f(x) = \sin^{-1} x$ در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده، ولی در همسایگی راست آن تعریف نشده است ($D_f = [-1, 1]$). داریم $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$ ، ولی $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ وجود ندارد. طبق قرارداد بالا می توانیم بنویسیم: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$

۳- تابع $f(x) = \begin{cases} \sin^{-1} x & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$ ، هم در همسایگی راست $x=1$ تعریف شده است، هم در همسایگی چپ آن. پس نمی توانیم از قرارداد بالا استفاده کنیم، بنابراین منظور از $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ هیچ کدام از دو حد $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$ نیست. در این مثال حد چپ و راست برابر نیستند، پس تابع در $x=1$ حد ندارد.

تست (۳): شکل روبه رو نمودار تابع f است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2)$ کدام است؟

(۱) -۲
(۲) صفر
(۳) ۲
(۴) ۴

حل: با توجه به شکل واضح است که $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ (زیرا به نقطه ی توخالی (۲، ۲) نزدیک می شویم)، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$ و $f(2) = 3$. بنابراین پاسخ تست $2 - 1 + 3 = 4$ یا گزینه ی (۴) می شود.

تست (۴): برای اثبات $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2|x-2|) = 3$ کدام گزینه مناسب است؟

(۱) $\forall \varepsilon > 0: 0 < |x-1| < \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$
(۲) $\forall \varepsilon > 0: -\sqrt{\varepsilon} < x-1 < 0 \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$
(۳) $\forall \varepsilon > 0: -\varepsilon^2 < x-1 < 0 \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$
(۴) $\forall \varepsilon > 0: -\varepsilon < x-1 < 0 \Rightarrow |f(x)-3| < 2\varepsilon$

حل: در همسایگی چپ $x=1$ (و به طور کل در همسایگی کوچک $x=1$) علامت عبارت $x-2$ منفی است، بنابراین داریم:

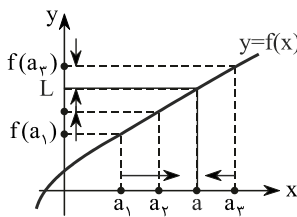
$$f(x) = x^2 + 2(2-x) = x^2 - 2x + 4$$

باید شرط $|f(x)-3| < \varepsilon$ را بررسی کنیم:

$$|f(x)-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 2x + 4 - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 2x + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x-1)^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \sqrt{\varepsilon}$$

چون $x \rightarrow 1^-$ ، نامساوی بالا به $-\sqrt{\varepsilon} < x-1 < 0$ تبدیل می شود و طبق تعریف حد چپ، گزینه ی (۲) پاسخ تست خواهد بود.

رابطه‌ی حد و دنباله‌ها:



فرض کنید تابع $y = f(x)$ در $x = a$ حدی برابر L داشته باشد. دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ تشکیل می‌دهیم که به عدد a همگرا باشد. می‌توانیم نقاط متناظر این دنباله را مطابق شکل روی محور x ها مشخص کنیم. با در نظر گرفتن مقادیر تابع به ازای $x = a_n$ ، دنباله‌ی دیگری به دست می‌آید که همان $\{f(a_n)\}$ است. می‌توانیم نقاط متناظر این دنباله‌ی جدید را مطابق شکل روی محور y ها نشان دهیم. می‌بینید که با نزدیک شدن جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ به a ، جملات دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به L نزدیک می‌شوند. پس دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد L همگرا است.

قضیه: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ و $a_n \neq a$ ، آن گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نیز به L همگرا است.^(۱)

مثال: داریم: $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$ ، و می‌دانیم دنباله‌ی $\{\frac{n+1}{n+2}\}$ به عدد ۱ همگرا است. پس دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ یعنی $\{\frac{n+1}{n+2} + 1\}$ به عدد L (یعنی ۲) باید همگرا باشد. درستی این نتیجه را خودتان بررسی کنید.

نتیجه: اگر دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا به عدد a باشند، $a_n \neq a$ و $b_n \neq b$ ، ولی دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به یک عدد مساوی همگرا نباشند، تابع f در نقطه‌ی $x = a$ حد ندارد.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ حد ندارد (چرا؟). برای اثبات این حکم می‌توانیم از دو دنباله با جمله‌های عمومی $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = -\frac{1}{n}$ کمک بگیریم. می‌دانیم هر دو دنباله به صفر همگرايند، ولی $f(a_n) = 1$ (زیرا $a_n > 0$) و $f(b_n) = 0$ (زیرا $b_n < 0$). پس دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا هستند، لذا تابع f در $x = 0$ حد ندارد.

تست (۵): کدام دنباله‌های زیر نشان می‌دهند که $\lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{1}{x}$ وجود ندارد؟

(۱) $\{\frac{1}{n\pi}\}$ و (۲) $\{\frac{1}{2n\pi}\}$

(۳) $\{\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{4}}\}$ و (۴) $\{\frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{3}}\}$

حل: در همه‌ی گزینه‌ها حد دنباله‌ها برابر صفر است. پس باید بررسی کنیم که در کدام گزینه مقادیر تابع به ازای دو دنباله به عددهای مختلفی همگرا می‌شود. مثلاً در گزینه‌ی (۱) اگر $a_n = \frac{1}{n\pi}$ و $b_n = \frac{1}{2n\pi}$ ، آن گاه داریم: $f(a_n) = 0$ و $f(b_n) = 0$ (که $f(x) = \tan \frac{1}{x}$). پس حد دو دنباله عددهای مختلفی نمی‌شود و این گزینه برای نشان دادن حد نداشتن تابع f مناسب نیست. به همین ترتیب می‌توانید گزینه‌های دیگر را رد کنید. پاسخ تست گزینه‌ی (۳) است، زیرا:

$$\left. \begin{aligned} a_n = \frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{4}} &\Rightarrow f(a_n) = \tan(n\pi - \frac{\pi}{4}) = -1 \\ b_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{4}} &\Rightarrow f(b_n) = \tan(n\pi + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ در } x = 0 \text{ حد ندارد}$$

^(۱): اگر برای تعداد متناهی از a_n ها داشته باشیم $a_n = a$ ، باز هم حکم این قضیه درست است.



تست (۶): برای آن که نشان دهیم تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در $x=2$ حد ندارد، از دو دنباله‌ی $\{2 + \frac{1}{n}\}$ و $\{\frac{2n+a}{n}\}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت a کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

$$\sqrt{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (۳)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$-\sqrt{3} \quad (۱)$$

مل: باید دو دنباله با جمله‌های عمومی $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ و $b_n = \frac{2n+a}{n}$ دارای این شرط باشند که اولاً $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ (که این شرط برقرار است)، ثانیاً $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$. چون همواره a_n یک عدد گویا است، پس $f(a_n) = 1$ ، بنابراین برای آن که $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \neq 1$ ، باید دنباله‌ی $\{b_n\}$ از اعداد گنگ باشد. گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) چنین شرطی را برآورده می‌کنند، بنابراین پاسخ تست گزینه‌ی (۲) است.

در رابطه‌ی حد و دنباله‌ها، عکس قضیه‌ی گفته شده نیز به صورت زیر قابل بیان است:

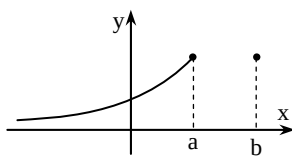
قضیه: اگر برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ و $a_n \neq a$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

تذکره: به کلمه‌ی «هر» دقت کنید. با یک دنباله‌ی $\{a_n\}$ که در شرایط بالا صدق کند، نمی‌توان نشان داد که تابع f در $x=a$ دارای حد است!

روش‌های مختلف تشخیص نقاطی که تابع در آن‌ها حد ندارد:

با توجه به آن‌چه که تاکنون گفته‌ایم به صورت زیر می‌توانیم این روش‌ها را جمع‌بندی کنیم:

۱- اگر تابع f در یک همسایگی $x=a$ نامعین باشد (این همسایگی جزء دامنه‌ی تابع نباشد)، تابع در این نقطه حد نخواهد داشت. زیرا اصلاً نمی‌توانیم x را به آن نقطه نزدیک کنیم.



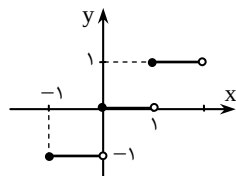
مثال: الف) در شکل مقابل، تابع در $x=b$ حد ندارد و در $x=a$ حد راست ندارد. تابع در هر دو همسایگی $x=b$ و در همسایگی راست $x=a$ نامعین است. دقت کنید که طبق قرارداد، تابع در $x=a$ حد دارد، زیرا فقط در یک همسایگی $x=a$ (همسایگی چپ) تعریف شده، بنابراین منظور از $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ همان $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ است.

ب) دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{(1-x)(x-2)}$ برابر $[1, 2]$ است، پس همسایگی چپ $x=1$ در دامنه‌ی تابع نیست و $\lim_{x \rightarrow 1^-} y$ وجود ندارد (البته $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 0$). چون تابع فقط در یک همسایگی $x=1$ تعریف شده، داریم: $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} y = 0$ ، پس تابع در $x=1$ حد دارد.

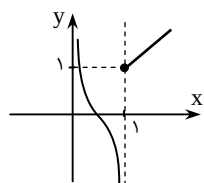
پ) تابع $y = \frac{1}{\tan \frac{1}{x}}$ در $x=0$ حد ندارد، زیرا در هر همسایگی $x=0$ که در نظر بگیریم نقاطی هست که در آن‌ها y نامعین است. در واقع تابع

در نقاط $x = \frac{1}{n\pi}$ (که $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$) نامعین است (چرا؟)، و در هر همسایگی $x=0$ ، هر چقدر هم که کوچک باشد، از این نقاط یافت می‌شود.

۲- اگر تابع در همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده باشد و حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود نباشند، یا موجود و نابرابر باشند، تابع در $x=a$ حد ندارد.



مثال: الف) تابع $y = [x]$ در $x=0$ حد ندارد، زیرا مطابق نمودار تابع داریم: $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0$ (در واقع این تابع در هیچ نقطه‌ی $x=n$ که $n \in \mathbb{Z}$ حد ندارد).



ب) تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ \cot(\pi x) & x < 1 \end{cases}$ در $x=1$ حد ندارد، زیرا با آن که $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ ولی $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ وجود ندارد (در واقع $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$). نمودار تابع را در بازه‌ی $(0, +\infty)$ مشاهده می‌کنید.

۳- اگر برای دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ ، $a_n \neq a$ و $b_n \neq a$ ، دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا باشند، تابع f در $x=a$ حد ندارد.

مثال: تابع $y = \sin \frac{\pi}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد، زیرا برای دنباله‌هایی با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{1}{2n}$ و $b_n = \frac{1}{2n + \frac{1}{2}}$ داریم:

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ولی $f(a_n) = 0$ و $f(b_n) = 1$ پس $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به عددهای متفاوتی همگرا هستند.

تست (۷): چند تا از حدهای زیر وجود دارد؟

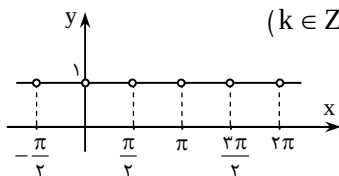
(پ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$ (۴) ۳

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^{-1}(x - 1)$ (۳) ۲

(الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \times \cot x$ (۲) ۱

(۱) صفر

حل: داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \times \cot x = 1$. تابع $y = \tan x \times \cot x$ در نقاط $x = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) تعریف نشده است



و در نقاط دیگر داریم: $y = 1$. پس نمودار آن مانند شکل روبه‌رو می‌شود. بنابراین در تمامی نقاط $x \in \mathbb{R}$ حد تابع برابر ۱ است، حتی نقاطی که جزء دامنه‌ی تابع نیستند.

در تابع $y = \sin^{-1}(x - 1)$ همسایگی $x = 0$ در دامنه‌ی تابع نیست، زیرا:

$$|x - 1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

پس حد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin^{-1}(x - 1)$ وجود ندارد، ولی حد راست تابع وجود دارد و برابر $-\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین تابع در $x = 0$ حدی برابر $-\frac{\pi}{2}$ دارد، زیرا فقط در یک همسایگی $x = 0$ تعریف شده است.

حد چپ تابع $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$ در $x = 0$ موجود نیست، زیرا همسایگی چپ $x = 0$ در دامنه‌ی تابع نیست:

$$\left. \begin{aligned} 1 - x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 1 \\ 1 - \sqrt{1 - x} \geq 0 &\Rightarrow \sqrt{1 - x} \leq 1 \Rightarrow 1 - x \leq 1 \Rightarrow x \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{دامنه‌ی تابع} = [0, 1]$$

پس حدهای الف و ب وجود دارند. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

قضایای حد:

در بحث حد قضایایی وجود دارد که محاسبه‌ی حدود تابع را ساده می‌کند. اثبات این قضایا را می‌توانید در کتاب‌های مرجع مشاهده کنید. در این جا ما فهرست‌وار آن‌ها را ذکر می‌کنیم و درباره‌ی قضیه‌های مهم‌تر مثال‌هایی را حل می‌کنیم.

قضیه: ۱- اگر f تابع ثابت با دامنه‌ی R باشد (برای هر $x \in R$ داشته باشیم: $f(x) = c$)، آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ (برای هر $a \in R$).

۲- اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن‌گاه: $c \in \mathbb{R}$ یک عدد ثابت است و $n \in \mathbb{N}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = L_1 \pm L_2$

(الف) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL_1$

(ت) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}$ (به شرط $L_2 \neq 0$)

(پ) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = L_1 L_2$

(ج) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ (اگر n زوج باشد، برای $L_1 > 0$ این تساوی برقرار است).

(ث) $\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = L_1^n$

(چ) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L_1|$

نتیجه: با استفاده از قضیه‌های بالا نتیجه می‌گیریم که یک چند جمله‌ای مانند $P(x)$ در تمامی نقاط $a \in \mathbb{R}$ حد دارد و مقدار حد آن، همان $P(a)$ می‌شود. یعنی: $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$.

تذکره: توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ نیز مانند چند جمله‌ای‌ها هستند، یعنی: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

هم‌چنین توابع $y = \tan x$ (برای $a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$) و $y = \cot x$ (برای $a \neq k\pi$).

^۱ - در این قضیه توابع f و g باید در همسایگی یکسانی از $x = a$ تعریف شده باشند.

**نکته:**

در قضیه‌ی قبل دیدیم که اگر f و g در $x = a$ حد داشته باشند، توابع $f \pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ (به شرط غیر صفر بودن حد g) نیز در $x = a$ حد خواهند داشت. عکس این قضیه، درست نیست. در واقع:

(الف) اگر f در $x = a$ حد داشته باشد و g حد نداشته باشد، آن گاه قطعاً $f \pm g$ و $\frac{g}{f}$ در $x = a$ حد نخواهند داشت، ولی fg و $\frac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند.

(ب) اگر f و g هر دو در $x = a$ حد نداشته باشند، هر یک از توابع $f \pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ ممکن است در $x = a$ حد داشته باشند یا نداشته باشند.

سعی کنید در هر قسمت مثال مناسبی برای توابع f و g ارائه دهید. برای نمونه ثابت می‌کنیم که در حالت (الف)، $\frac{g}{f}$ قطعاً حد ندارد. زیرا اگر $h = \frac{g}{f}$ در $x = a$ حد داشته باشد، هم h و هم f در این نقطه حد دارند، پس hf نیز حد دارد، ولی $g = hf$ ، بنابراین تابع g باید در $x = a$ حد داشته باشد که مخالف فرض است.

تست (۸): اگر تابع f در نقطه‌ی $x = 1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 1$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

حل: فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$ ، آن گاه طبق قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = \frac{2L - 1}{L + 1} \xrightarrow{\text{فرض}} \frac{2L - 1}{L + 1} = 1 \Rightarrow 2L - 1 = L + 1 \Rightarrow L = 2$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست (۹): اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (|x| - a)^2 - 3 & x < 0 \\ x + 2a & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ حد داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{-1, 3\}$ (۳) $\{1, -3\}$ (۴) $\emptyset$

حل: برای حد داشتن باید حد چپ و راست تابع باهم برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2a) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (|x| - a)^2 - 3 \Rightarrow 2a = a^2 - 3$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a - 3)(a + 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 3, a_2 = -1$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

قضیه:

قضیه‌ی فشردگی: اگر در یک همسایگی محذوف $x = a$ بدانیم: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

مسئله‌ی (۱۴): اگر برای تابع f بدانیم: $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ ، ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

حل: می‌دانیم برای هر عدد حقیقی α داریم: $|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ ، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} -|f(x)| &\leq f(x) \leq |f(x)| \\ \lim_{x \rightarrow a} -|f(x)| &= \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

تست (۱۰): اگر $\cos(\pi x) < f(x) < 2x - x^2 - 2$ ، $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) موجود نیست. (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

حل: می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1} \cos(\pi x) = -1$ ، پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

قضیه:

قضیه‌ی توابع کران‌دار: اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ کران‌دار باشد و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)f(x) = 0$$

به بیان دیگر: صفر حدی = کران‌دار $\times$ صفر حدی.

تذکره: دقت کنید که در این قضیه لازم نیست تابع f در نقطه‌ی $x = a$ حد داشته باشد.

این قضیه را می‌توانید با استفاده از قضیه‌ی فشردگی اثبات کنید. برای تمرین آن را اثبات کنید. (راهنمایی: فرض کنید $|f(x)| \leq k$ ، سپس با استفاده از قضیه‌ی فشردگی نشان بدهید: $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)g(x)| = 0$ و در نهایت از مسأله‌ی (۴) استفاده کنید.)

مثال: تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد، ولی در همسایگی آن کران‌دار است ($-1 \leq f(x) \leq 1$). بنابراین از $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x}{x - 1} = 0$

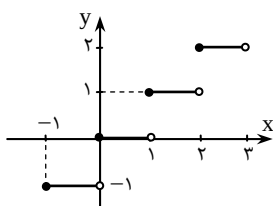
نتیجه می‌گیریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x}{x - 1} \sin \frac{\pi}{x} = 0$. از دیگر توابع کران‌دار معروف می‌توان به $y = \cos x$ ، $y = \sin^{-1} x$ ، $y = \cos^{-1} x$ ، $y = \cot^{-1} x$ و $y = \tan^{-1} x$ اشاره کرد.

تست (۱۱): فرض کنید $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ و $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \geq 2 \\ 4 - 2x & x < 2 \end{cases}$. در این صورت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)D(x)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) صفر (۴) وجود ندارد.

حل: با توجه به ضابطه‌ی تابع f داریم $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$. حال چون همواره $0 \leq D(x) \leq 1$ ، پس $D(x)$ تابعی کران‌دار است و طبق قضیه‌ی قبل حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)D(x)$ برابر صفر می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

♦ حد در توابع شامل جزء صحیح:



تابع جزء صحیح و مسائل حدی مربوط به آن بخش مهمی از تست‌های این مبحث را تشکیل می‌دهد. به‌این دلیل جداگانه آن را بررسی می‌کنیم.

طبق نمودار تابع $f(x) = [x]$ که در شکل روبه‌رو رسم شده است، در تمام نقاط $x = n$ (که $n \in \mathbb{Z}$) تابع حد ندارد. در نقاط دیگر تابع حد دارد و مقدار حد با مقدار تابع یکسان است.

در نقاط $x = n$ به‌صورت دقیق‌تر طبق نمودار می‌توانیم بگوییم: $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n$ و

$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1$. بیان بالا اساس پیدا کردن حد در توابع شامل جزء صحیح است.

نکته:

در محاسبه‌ی حد در توابع شامل جزء صحیح، در صورت امکان جزء صحیح‌ها را حذف کنید و به جای آن‌ها اعداد ثابت قرار دهید. برای این منظور دقت کنید که:

۱- اگر $f(x) \rightarrow L$ و L عددی غیر صحیح باشد، آن گاه: $[f(x)] = [L]$

۲- اگر $f(x) \rightarrow L^+$ (به معنی $f(x) \rightarrow L$ و $f(x) > L$)، که L عددی صحیح است، آن گاه: $[f(x)] = L$

۳- اگر $f(x) \rightarrow L^-$ (به معنی $f(x) \rightarrow L$ و $f(x) < L$)، که L عددی صحیح است، آن گاه: $[f(x)] = L - 1$

دقت کنید که در موارد (۲) و (۳) از نامساوی‌ها یا تعیین علامت عبارت $f(x) - L$ یا از نمودار تابع $f(x)$ می‌توانید کمک بگیرید.



با چند تست با مفهوم نکته‌ی بالا بیش‌تر آشنا شوید:

تست (۱۲): اگر $f(x) = |x| + [x + \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ، حد چپ تابع در $x = 3$ کدام است؟

۴ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

حل: چون $3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Z}$ ، از بخش (۱) نکته‌ی قبل استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} [x + \frac{\sqrt{3}}{2}] = [3 + \frac{\sqrt{3}}{2}] \xrightarrow{0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1} [3 + \frac{\sqrt{3}}{2}] = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} [x + \frac{\sqrt{3}}{2}] = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3 + 3 = 6$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تست (۱۳): با فرض $a = -\frac{1}{5}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} [\frac{1}{x}]$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۶ (۳)

-۴ (۲)

-۵ (۱)

حل: چون عبارت داخل جزء صحیح، عدد صحیح -۵ می‌شود، باید تعیین کنیم که $\frac{1}{x} \rightarrow (-5)^+$ یا $\frac{1}{x} \rightarrow (-5)^-$ در حالت اول چون می‌توانیم

$\frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $(-5, -4)$ قرار دهیم، حاصل حد $[\frac{1}{x}]$ برابر -۵ می‌شود و در حالت دوم چون می‌توانیم $\frac{1}{x}$ را در $(-6, -5)$ قرار دهیم، حاصل

حد $[\frac{1}{x}]$ برابر -۶ می‌شود. داریم:

$$x \rightarrow (-\frac{1}{5})^- \Rightarrow x < -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} > -5 \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow (-5)^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} [\frac{1}{x}] = [(-5)^+] = -5$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

تست (۱۴): اختلاف حدهای راست و چپ تابع $f(x) = [-x^2 + 2x] - [\frac{-2x-5}{3}]$ در $x = 2$ کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

حل: ابتدا حدهای چپ و راست $[\frac{-2x-5}{3}]$ را پیدا می‌کنیم:

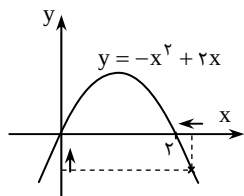
$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow -2x < -4 \Rightarrow -2x - 5 < -9 \Rightarrow \frac{-2x-5}{3} < -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} [\frac{-2x-5}{3}] = [(-3)^-] = -4$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -2x > -4 \Rightarrow -2x - 5 > -9 \Rightarrow \frac{-2x-5}{3} > -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} [\frac{-2x-5}{3}] = [(-3)^+] = -3$$

حال حدهای چپ و راست $[-x^2 + 2x]$ را با توجه به نمودار تابع $y = -x^2 + 2x$ پیدا می‌کنیم:

با توجه به نمودار، وقتی $x \rightarrow 2^+$ مقدار y به صفر از سمت مقادیر کوچک‌تر از آن نزدیک می‌شود،

یعنی $y \rightarrow 0^-$.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [-x^2 + 2x] = [0^-] = -1$$

بنابراین: $\lim_{x \rightarrow 2^+} [-x^2 + 2x] = [0^-] = -1$. به همین ترتیب داریم: $\lim_{x \rightarrow 2^-} [-x^2 + 2x] = [0^+] = 0$. با ترکیب نتایج بالا به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1 - (-4) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 - (-3) = 3 \Rightarrow \text{اختلاف دو حد} = 0$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

○ **مسئله‌ی (۵):** حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} x \lceil \frac{1}{x} \rceil$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ را بیابید.

حل: حد $\lim_{x \rightarrow 0} \lceil \frac{1}{x} \rceil$ وجود ندارد. کافی است دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ و چون $f(a_n) = n$

که $(f(x) = \lceil \frac{1}{x} \rceil)$ ، نتیجه می‌گیریم دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ یک دنباله‌ی واگرا است. پس حد مورد نظر وجود ندارد.

با استفاده از قضیه‌ی فشردگی می‌توانیم نشان بدهیم: $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$ می‌دانیم برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم: $\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$ ، بنابراین به ازای $x > 0$ داریم:

$$\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x > 0} x(\frac{1}{x} - 1) < x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1 \Rightarrow 1 - x < x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1$ ، طبق قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌گیریم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$. به همین ترتیب برای $x < 0$ می‌توانید ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1 \text{ و نتیجه بگیرید: } \lim_{x \rightarrow 0^-} x \lceil \frac{1}{x} \rceil = 1$$

برای به‌دست آوردن حد آخر نیز دقت کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \lceil \frac{1}{x} \rceil = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \lim_{x \rightarrow 0} \lceil \frac{1}{x} \rceil = 0 \times 1 = 0$$

به همین ترتیب می‌توانید نشان بدهید $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$ (برای $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$).

تست (۱۵): حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor]$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) وجود ندارد.

حل: در راه‌حل مسئله‌ی قبل دیدید که برای $x > 0$ داریم: $1 - x < x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1$. پس وقتی $x \rightarrow 0^+$ داریم: $x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \rightarrow 1$ ولی نمی‌توانیم

بگوییم $x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \rightarrow 1^-$ (حتی با آن که $x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1$). در واقع اگر دو دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = \frac{1}{n + 0.5}$ را در نظر بگیرید،

داریم: $f(a_n) = 1$ ولی $f(b_n) < 1$ که $f(x) = x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. پس $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(a_n)] = 1$ ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(b_n)] = 0$.

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نکته:

(عامل صفر کننده در حد)

فرض کنید تابع f در نقطه‌ی $x = n$ (که $n \in \mathbb{Z}$) دارای حد باشد. در این صورت تابع $y = f(x)[x]$ در نقطه‌ی $x = n$ تنها در صورتی حد دارد که f در این نقطه در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود. یعنی f در این نقطه حدی برابر صفر داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow n^+} y = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = L \times [n^+] = Ln$$

اثبات: اگر $\lim_{x \rightarrow n} f(x) = L$ ، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} y = \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = L \times [n^-] = L(n-1)$$

دو حد فوق تنها در صورتی باهم برابرند که $L = 0$.

مثال: تابع $y = (x-2)[x]$ در $x = 2$ حدی برابر صفر دارد (زیرا $x-2$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر می‌شود)، ولی در نقاط دیگر با طول صحیح حد ندارد.

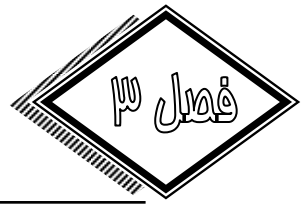
تست (۱۶): تابع $f(x) = (x^3 - 3x + 2)[x]$ در چند نقطه‌ی $a \in \mathbb{Z}$ دارای حد است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

حل: تابع در نقاطی با طول صحیح دارای حد است که $x^3 - 3x + 2$ دارای حد صفر باشد. پس باید ریشه‌های آن را به‌دست آوریم. واضح است که $x = 1$ یکی از ریشه‌ها است، با تقسیم عبارت بر $x-1$ می‌توانیم آن را تجزیه کنیم:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2)$$

پس در دو نقطه‌ی $x = 1$ و $x = -2$ ، عبارت $x^3 - 3x + 2$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.



مفاهیم مقدماتی حد

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۱- اگر $3 - \frac{1}{3} < x < 3 + \frac{1}{3}$ و $x \neq 3$ ، آن‌گاه در نامساوی $|\frac{x^2 - 3x}{2x - 6} - \frac{3}{2}| < \varepsilon$ ، کم‌ترین مقدار ε چقدر است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{3}{2}$
- ۲- اگر به ازای هر x که $\frac{9}{2} < x < \frac{7}{2}$ و $x \neq 4$ داشته باشیم: $|\frac{x^2 - 4x}{3x - 12} - \frac{4}{3}| < \beta$ ، کدام یک از مقادیر زیر را می‌تواند اختیار کند؟
 (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{5}$
- ۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ ، وقتی $0 < |x - 1| < \delta$ ، مقادیر $f(x)$ در بازه‌ی $(\frac{2}{96}, \frac{3}{94})$ قرار می‌گیرد. بزرگ‌ترین مقدار δ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{3}{9}$ (۴) $\frac{1}{9}$
- ۴- تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ مفروض است. x به کدام همسایگی نقطه‌ی $x = 1$ تعلق داشته باشد تا نامساوی $\frac{1}{1000} < f(x) < \frac{999}{1000}$ برقرار باشد؟
 (۱) $(\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$ (۲) $(\frac{8}{10}, \frac{12}{10})$ (۳) $(-\frac{9}{10}, -\frac{7}{10})$ (۴) $(\frac{7}{10}, \frac{13}{10})$
- ۵- در تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}$ ، اگر $0 < |x - 1| < \delta$ ، آن‌گاه فاصله‌ی مقادیر $f(x)$ از حد آن در نقطه‌ی $x = 1$ ، کم‌تر از $\frac{1}{10}$ می‌شود. بیش‌ترین مقدار δ کدام است؟
 (۱) $\frac{25}{2}$ (۲) $\frac{3}{20}$ (۳) $\frac{1}{300}$ (۴) $\frac{1}{300}$
- ۶- در تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 3 \\ 5x - 8 & x < 3 \end{cases}$ ، اگر $0 < |x - 3| < \delta$ ، آن‌گاه فاصله‌ی مقادیر $f(x)$ از عدد ۷، کم‌تر از $\frac{1}{10}$ است. δ کدام عدد می‌تواند باشد؟
 (۱) $\frac{25}{2}$ (۲) $\frac{3}{20}$ (۳) $\frac{5}{20}$ (۴) $\frac{1}{10}$
- ۷- در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 1 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ ، اگر $|x - 1| \leq a$ ، آن‌گاه $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{10}$ بیش‌ترین مقدار a کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{10}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{5}{10}$
- ۸- در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} & x > 2 \\ 4x - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ ، اگر $0 < |x - 2| < \delta$ ، آن‌گاه مقادیر $f(x)$ در بازه‌ی $(\frac{6}{97}, \frac{7}{93})$ قرار می‌گیرد. بیش‌ترین مقدار δ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{25}{9}$ (۳) $\frac{75}{9}$ (۴) $\frac{125}{9}$
- ۹- تابع $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{|x|} \sin(\frac{1}{x})$ مفروض است. کدام گزینه برای هر $\varepsilon > 0$ ، درست است؟
 (۱) $|x| < \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ (۲) $|x| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$
 (۳) $|x| < \frac{\varepsilon}{10} \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{10}$ (۴) $|x| < \frac{\varepsilon}{100} \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{10}$

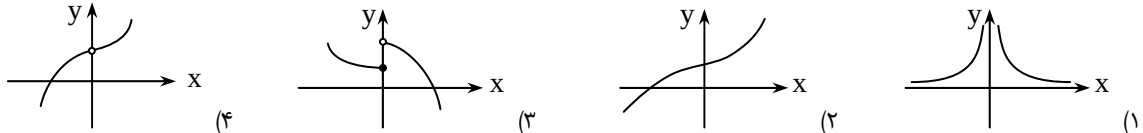
* ۱۰- در تعریف ریاضی حد برای $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{10}} [x + \frac{3}{10}]$ ، اگر $\varepsilon = 0.01$ ، بیشترین مقدار δ کدام است؟

- (۱) 0.1 (۲) 0.2 (۳) 0.3 (۴) 0.9

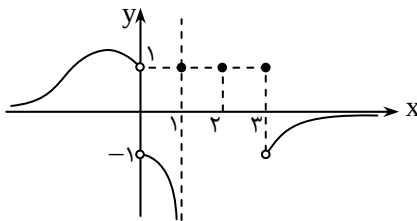
۱۱- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} mx - 2 & x > 2 \\ |x| + 4m & x \leq 2 \end{cases}$ در $x = 2$ حد داشته باشد، مقدار $f(-5)$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) 12 (۴) 17

۱۲- کدامیک از توابعی که نمودار آن‌ها در زیر رسم شده، در $x = 0$ دارای حد راست است، ولی حد ندارد؟



۱۳- در شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ کدام است؟



- (۱) 1
(۲) -1
(۳) 2
(۴) وجود ندارد.

۱۴- با توجه به شکل تست ۱۳، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)]$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) -2 (۴) صفر

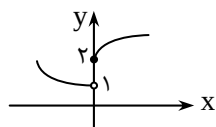
۱۵- با توجه به شکل تست ۱۳، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) صفر (۳) $-\infty$ (۴) وجود ندارد.

۱۶- با توجه به شکل تست ۱۳، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)] + [-f(x)]$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) صفر (۴) وجود ندارد.

۱۷- نمودار $y = f(x)$ شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x^2 - 1) + f(1 - |x|))$ کدام است؟



- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) وجود ندارد.

۱۸- در تابع $f(x) = \begin{cases} |x-1| & x \neq 1, -1 \\ 1 & x = -1 \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) تابع فقط در $x = 1$ حد ندارد.
(۲) تابع فقط در $x = -1$ حد ندارد.
(۳) تابع در R حد دارد.
(۴) تابع در $x = 1, -1$ حد ندارد.

۱۹- اگر $f(x) = \begin{cases} -3 & x \notin \mathbb{Z} \\ x^2 - 4 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) 12 (۳) -20 (۴) وجود ندارد.

۲۰- تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ 2 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ در بازه $(-3, 3)$ در چند نقطه حد ندارد؟

- (۱) پنج نقطه (۲) دو نقطه (۳) سه نقطه (۴) هیچ نقطه

۲۱- فرض کنید f تابعی زوج باشد و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$. آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) -3 (۳) صفر (۴) قابل تعیین نیست.

۲۲- اگر $f = \{(2, 3), (1/9, 3/9), (1/99, 3/99), (1/999, 3/999), \dots\}$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) $3/9$ (۴) وجود ندارد.



- ۲۳- اگر تابع f در $x = 1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 4}{f(x)} = 4$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$
- ۲۴- اگر $f(x) = x!$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.
- ۲۵- اگر برای هر $x \neq 0$ داشته باشیم: $x^2 + 3 \leq f(x) - 1 \leq \cos x + 2$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۶- اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R} - \{4\}$ داشته باشیم: $|f(x) - 3| \leq 3(4 - x)^2$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+1) + 2}{2 - f(2x-2)}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۵ (۳) -۳ (۴) قابل تعیین نیست.
- ۲۷- کدام یک از توابع زیر در $x = 0$ دارای حد است؟
 (۱) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - x^2}$ (۲) $f_2(x) = \frac{x}{|x|} - 2[x]$ (۳) $f_3(x) = \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x}$ (۴) $f_4(x) = (-1)^{[x]}$
- ۲۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[-x]\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۲
- ۲۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)\left[\frac{1}{x+1}\right]$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱
- ۳۰- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} |[x]| + \lim_{x \rightarrow 0^+} [|x|]$ کدام عدد است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) ۲
- ۳۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - |-2x|}{[x^2 + \frac{1}{2}] - |x|}$ کدام است؟
 (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) -۱
- ۳۲- با فرض $f(x) = \frac{x - |x|}{[1-x] - x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱
- ۳۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x^2]}{[x]}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x^2]}{[x]}$ به ترتیب کدام است؟
 (۱) صفر - وجود ندارد (۲) صفر - صفر (۳) وجود ندارد - وجود ندارد (۴) وجود ندارد - صفر
- ۳۴- تابع $f(x) = ([-x] - 3)(2[x] + a)$ در $x = 1$ حد دارد. a کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) -۴ (۳) -۸ (۴) -۱۰
- ۳۵- اختلاف بین حد چپ و حد راست تابع $f(x) = [\frac{x}{2}] - [-\frac{x}{3}]$ در $x_0 = 6$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱
- ۳۶- در تابع $y = [3x] + 2[x] - [x^2]$ ، اگر $x \rightarrow 2$ ، حد راست از چپ چقدر بیش تر است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

- ۳۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} [-\frac{1}{x}]$ ، وقتی $x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-$ ، کدام است؟
 (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵
- ۳۸- اگر $f(x) = [x] + [2x] + \dots + [nx]$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ کدام است؟
 (۱) -n (۲) صفر (۳) $\frac{n+1}{2}$ (۴) n
- ۳۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 10^-} \frac{[x^3] - x^3}{[x] - x}$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۱۰
- ۴۰- اگر $a \in \mathbb{Z}$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow a} ([x] + [4-x])$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) وجود ندارد.
- ۴۱- a چقدر باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} [x-1] + [1-x] & x > 1 \\ a[x-3] & x < 1 \end{cases}$ در $x=1$ حد داشته باشد؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$
- ۴۲- اگر $f(x) = [1-x]$ ، آن گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x)$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.
- ۴۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log[x]$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) $-\infty$ (۳) $+\infty$ (۴) وجود ندارد.
- ۴۴- تابع با ضابطه $f(x) = [x]^3 - [x]$ ، در چند نقطه با طول صحیح دارای حد است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار
- ۴۵- تابع $f(x) = [x](3x^2 + 2x - 1)$ ، در چند نقطه به طول صحیح حد دارد؟
 (۱) یک (۲) دو (۳) بی شمار (۴) هیچ نقطه
- ۴۶- تابع $f(x) = [x] \sin ax$ به ازای چه مقدار $a \neq 0$ ، در تمام نقاط صحیح حد دارد؟
 (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار $a \neq 0$
- ۴۷- تابع $f(x) = (x^2 + ax^2 + bx)[x-2]$ در نقاط $x=2$ و $x=3$ حد دارد. حاصل $a+b$ کدام است؟
 (۱) -۱۱ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۱۱
- ۴۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} [x^2 - 2x + 5]$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) وجود ندارد.
- ۴۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} [x^2 + x]$ ، وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ ، کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲
- ۵۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\sin x] + [\cos x]}{[\sin x]}$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $+\infty$ (۴) صفر
- ۵۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} [-\cos x]$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) صفر (۴) وجود ندارد.

- ۵۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} [\frac{1}{\sin x}]$ ، وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ ، کدام است؟
 (۱) وجود ندارد. (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) صفر
- ۵۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} [\cot x]$ ، وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+$ ، کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۵۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[\tan x^3]}{\tan[x]}$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) $-\infty$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{\tan 1}$
- ۵۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] \cot x$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] \cot[x]$ ، به ترتیب کدام است؟
 (۱) صفر - وجود ندارد. (۲) -۱ وجود ندارد. (۳) صفر - صفر (۴) وجود ندارد - وجود ندارد.
- ۵۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [\sin x + \cos x]$ ، وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-$ ، کدام است؟
 (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲
- ۵۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \sin^{-1}(\frac{1}{x-1})$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) وجود ندارد.
- ۵۸- کدام یک از حدود زیر موجود است؟
 (۱) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x]$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cos^{-1}(1-x)$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1}(\frac{1}{x})$ (۴) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} [\cos x]$
- ۵۹- کدام یک از حدود زیر وجود ندارد؟
 (۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\frac{1}{x^2})$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] \tan(\frac{\pi[x+1]}{2})$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos x]}{|\sin x|}$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x^2] - \tan x}{\sin x}$
- ۶۰- تابع $y = \operatorname{sgn}[|x|]$ در چند نقطه حد ندارد؟
 (۱) در تمام نقاط حد دارد. (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) بی شمار
- ۶۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} x[\frac{1}{x}]$ ، وقتی $x \rightarrow 0$ ، کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) وجود ندارد.
- ۶۲- * اگر $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + ax + b)[\frac{1}{x}] = 4$ ، آن گاه مقدار $a - b$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) -۴
- ۶۳- * حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x - 1)[\frac{2}{2x-1}]$ ، وقتی $x \rightarrow \frac{1}{2}$ ، کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) حد ندارد.
- ۶۴- کدام دو دنباله بیانگر آن هستند که تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول صفر حد ندارد؟
 (۱) $\{\frac{1}{n}\}$ و $\{1 - \frac{1}{n}\}$ (۲) $\{\frac{1}{2+n}\}$ و $\{\frac{-1}{n}\}$ (۳) $\{n\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ (۴) $\{\frac{1}{n+5}\}$ و $\{\frac{1}{n+1}\}$
- ۶۵- کدام دو دنباله‌ی زیر نشان می‌دهد که $f(x) = [x]$ در $x = 1$ حد ندارد؟
 (۱) $\{1 - \frac{1}{n!}\}$ و $\{1 + \frac{1}{n!}\}$ (۲) $\{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\}$ و $\{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}$ (۳) $\{\frac{2n+1}{n}\}$ و $\{\frac{2n-1}{n}\}$ (۴) $\{\frac{1}{n}\}$ و $\{-\frac{1}{n}\}$

۶۶- برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x) = \cos(\frac{\pi}{x})$ در $x = 0$ ، کدام دنباله‌ها مناسب است؟

- (۱) $\{\frac{1}{2n}\}$ و $\{-\frac{1}{2n}\}$ (۲) $\{\frac{1}{n\pi}\}$ و $\{-\frac{1}{n\pi}\}$ (۳) $\{\frac{1}{2n}\}$ و $\{\frac{1}{2n}\}$ (۴) $\{\frac{1}{2n+1}\}$ و $\{-\frac{1}{2n+1}\}$

۶۷- کدام جفت از دنباله‌های زیر، عدم وجود حد تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ -1 & x \notin Q \end{cases}$ را در $x = 0$ نشان می‌دهد؟

- (۱) $\{\frac{1}{n}\}$ و $\{-\frac{1}{n}\}$ (۲) $\{\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ و $\{-\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ (۳) $\{\frac{\pi}{n}\}$ و $\{-\frac{1}{n}\}$ (۴) $\{\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ و $\{-\frac{\pi}{n}\}$

۶۸- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = 0$ ، آن‌گاه کدام گزاره درباره‌ی حد تابع $f(x)$ در $x = 0$ همواره درست است؟

- (۱) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ (۴) هیچ‌کدام

۶۹- اگر برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ، داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$ ، آن‌گاه:

- (۱) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \ni 0 < |x - a| < N \rightarrow |f(a_N) - L| < \varepsilon$
 (۲) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \ni 0 < |x| < N \rightarrow |f(a_N) - L| < \varepsilon$
 (۳) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
 (۴) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

۷۰- اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ و دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد صفر همگرا باشد، کدام دنباله‌ی زیر می‌تواند دنباله‌ی $\{a_n\}$ باشد؟

- (۱) $\{2 + \frac{2}{n}\}$ (۲) $\{\frac{2n+5}{n+2}\}$ (۳) $\{\frac{2n+3}{n+1}\}$ (۴) $\{\sqrt{n^2 + 4n} - n\}$

۷۱- اگر $f(x) = (3x+1)[2x]$ و $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ ، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگرا است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۵ (۴) واگرا

۷۲- اگر $f(x) = (2x+1)[3x]$ و $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ ، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگرا است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) واگرا

۷۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \sin^{-1}(\frac{1}{x-1})}{|x|}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) حد وجود ندارد.

۷۴- اگر f تابعی باشد که در هیچ نقطه به جز $x = 1$ حد نداشته باشد، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 0$ و بدانیم برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $|f(x)| \leq 5$ ، آن‌گاه تابع

$g(x) = (2x-1)f(x)$ دقیقاً در چند نقطه حد دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) ۱

۷۵- با شرایط تست ۷۴، تابع $h(x) = \sqrt{2x-3}f(x)$ دقیقاً در چند نقطه حد دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

* ۷۶- با شرایط تست ۷۴، اگر تعریف کنیم $i(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ ، تابع $y = i(x)f(x)$ دقیقاً در چند نقطه حد دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) بی‌شمار

۷۷- اگر تابع $f(x) = (x^2 + ax) \cos(\frac{1}{x-1})$ در $x = -1$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) هر مقدار حقیقی (۴) هیچ مقدار حقیقی

۷۸- اگر تابع $f(x) = (x^2 + ax) \cos(\frac{1}{x-1})$ در $x = 1$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) هر مقدار حقیقی (۴) هیچ مقدار حقیقی



دانش‌آزمایی

۷۹- اگر $x \in Q$ و $x \in R - Q$ ، $f(x) = \begin{cases} |x-1| & x \geq 1 \\ [x] & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R - Q \end{cases}$ ، آن‌گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) وجود ندارد.

* ۸۰- اگر $x \in Q$ و $x \notin Q$ ، $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ ، تابع $f(x) = (x^3 + 4x - 4)D(x)$ در چند نقطه دارای حد است؟
 (۱) هیچ (۲) یک (۳) سه (۴) بی‌شمار

۸۱- اگر $x \in Q$ و $x \in R - Q$ ، $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in Q \\ 3 & x \in R - Q \end{cases}$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 4} (f \circ f)(x)$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) وجود ندارد.

* ۸۲- اگر $x \in Q$ و $x \in R - Q$ ، $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in Q \\ 0 & x \in R - Q \end{cases}$ و $f(x) = [x] + [-x]$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

* ۸۳- اگر $x \in Q$ و $x \notin Q$ ، $f(x) = \begin{cases} 4 & x \in Q \\ -1 & x \notin Q \end{cases}$ ، آن‌گاه تابع با ضابطه $g(x) = [x - 3]f(x)$ در کدام مجموعه حد دارد؟
 (۱) $[3, 4)$ (۲) $[3, +\infty)$ (۳) $(3, 4)$ (۴) $\{3\}$

۸۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in Q \\ 2-x & x \in R - Q \end{cases}$ در چند نقطه حد دارد؟
 (۱) یک نقطه (۲) دو نقطه (۳) سه نقطه (۴) چهار نقطه

۸۵- اگر $a_n = \frac{4n+1}{2n+1}$ و $f(x) = b + [2x]$ ، به ازای کدام مقدار b ، دنباله $\{f(a_n)\}$ به عدد ۱ همگراست؟ (سراسری - ۸۵)
 (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) نشدنی

۸۶- اگر $f(x) = \begin{cases} ax-1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟ (سراسری - ۸۶)
 (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

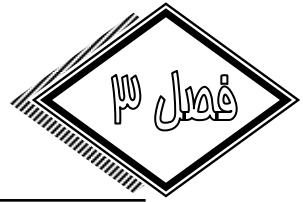
۸۷- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟ (سراسری - ۸۷)
 (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) موجود نیست.

۸۸- اگر $a_n = \frac{n+1}{n}$ و $f(x) = \frac{2x + [-x]}{x^2 - 1}$ ، آن‌گاه دنباله $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگرا است؟ (سراسری - ۸۸)
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) همگرا نیست.

۸۹- اگر $a_n = \frac{2n^2 + b}{n^2 + 3n}$ و $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ ، به ازای کدام مقدار b ، دنباله $\{f(a_n)\}$ همگرا است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۵)
 (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) هر مقدار b (۴) هیچ مقدار b

۹۰- اگر $f(x) = \frac{[x] - 3}{x - 4}$ و $a_n = \frac{4n - 3}{n + 2}$ ، آن‌گاه دنباله $\{f(a_n)\}$ چگونه است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۷)
 (۱) همگرا به -۱ (۲) همگرا به صفر (۳) همگرا به ۱ (۴) واگرا

۹۱- اگر $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ و $f(x) = \left| \left[\frac{x}{2} \right] \right|$ ، آن‌گاه دنباله $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگرا است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۹)
 (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) همگرا نیست.



مفاهیم مقدماتی حد

پاسخ‌های تشریحی

B ۱- گزینه‌ی (۲) از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم: $0 < |x-3| < \frac{1}{3}$. حال نامساوی دوم را بررسی می‌کنیم:

$$\left| \frac{x^2-3x}{2x-6} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x(x-3)}{2(x-3)} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \xrightarrow{x \neq 3} \left| \frac{x-3}{2} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < 2\varepsilon$$

برای آن که از فرض، نامساوی اخیر را بتوان نتیجه گرفت، باید $\frac{1}{3} \geq 2\varepsilon$ ، یعنی $\varepsilon \geq \frac{1}{6}$. پس کم‌ترین مقدار ε ، $\frac{1}{6}$ است.

B ۲- گزینه‌ی (۴) شرط اول معادل $0 < |x-4| < \frac{1}{3}$ است. شرط دوم را ساده می‌کنیم: (با فرض $x \neq 4$)

$$\left| \frac{x^2-4x}{3x-12} - \frac{4}{3} \right| < \beta \Leftrightarrow \left| \frac{x(x-4)}{3(x-4)} - \frac{4}{3} \right| < \beta \Leftrightarrow \left| \frac{x-4}{3} \right| < \beta \Leftrightarrow |x-4| < 3\beta$$

برای آن که از فرض، نامساوی اخیر را بتوان نتیجه گرفت، باید $\frac{1}{3} \geq 3\beta$ ، یعنی: $\beta \geq \frac{1}{9}$ ، و تنها گزینه‌ی (۴) در این شرط صدق می‌کند.

B ۳- گزینه‌ی (۳) شرط قرار گرفتن مقادیر $f(x)$ در بازه‌ی $(\frac{3}{10}, \frac{2}{9})$ معادل شرط $|f(x)-3| < 0.4$ است. حال داریم:

$$\begin{aligned} |f(x)-3| < 0.4 &\Leftrightarrow \left| \frac{2x^2-x-1}{x-1} - 3 \right| < 0.4 \Leftrightarrow \left| \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1} - 3 \right| < 0.4 \xrightarrow{x \neq 1} |2x+1-3| < 0.4 \\ &\Rightarrow 2|x-1| < 0.4 \Rightarrow |x-1| < 0.2 \end{aligned}$$

پس بزرگ‌ترین مقدار δ که در این شرایط صدق می‌کند، $\delta = 0.2$ است.

B ۴- گزینه‌ی (۱) نامساوی $1/100 < f(x) < 9/99$ ، معادل نامساوی $0.01 < |f(x)-1| < 0.09$ است. با توجه به این که $f(x) = (x-1)^3 + 1$ داریم:

$$|f(x)-1| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow |(x-1)^3| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$$

B ۵- گزینه‌ی (۴) داریم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \times 1 - 1 = 2$ ، پس باید $|f(x)-2| < 0.1$. می‌دانیم به‌ازای $0 < |x-1| < \delta$ داریم:

$f(x) = 3x - 1$. بنابراین نامساوی بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$|f(x)-2| < 0.1 \Leftrightarrow |3x-1-2| < 0.1 \Leftrightarrow 3|x-1| < 0.1 \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{30}$$

پس بیش‌ترین مقدار δ ، همان $\frac{1}{30}$ است.

C ۶- گزینه‌ی (۴) باید همسایگی راست و چپ نقطه‌ی ۳ را جداگانه بررسی کنیم: (دقت کنید که $0 < |x-3| < \delta$ ، معادل $-\delta < x-3 < \delta$ و

$x \neq 3$ است)

$$\text{اگر } 0 < x-3 < \delta : |f(x)-7| < 0.1 \Leftrightarrow |2x+1-7| < 0.1 \Leftrightarrow 2|x-3| < 0.1 \Leftrightarrow |x-3| < 0.05$$

$$\text{اگر } -\delta < x-3 < 0 : |f(x)-7| < 0.1 \Leftrightarrow |5x-8-7| < 0.1 \Leftrightarrow 5|x-3| < 0.1 \Leftrightarrow |x-3| < 0.02$$

برای آن که در هر دو همسایگی چپ و راست شرط $|f(x)-7| < 0.1$ برقرار باشد، باید $\delta \leq 0.05$ و $\delta \leq 0.02$ ، یعنی بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای δ ، 0.02 است، و تنها گزینه‌ی (۴) در این شرط صدق می‌کند.

B ۷- گزینه‌ی (۳) همسایگی راست و چپ $x=1$ را جداگانه بررسی می‌کنیم: (دقت کنید که $|x-1| \leq a$ معادل $-a \leq x-1 \leq a$ است)

$$\text{اگر } 0 \leq x-1 \leq a : |f(x)-1| \leq 0.1 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1-1| \leq 0.1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq 0.1 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 0.01$$

$$\text{اگر } -a \leq x-1 < 0 : |f(x)-1| \leq 0.1 \Leftrightarrow |2x-1-1| \leq 0.1 \Leftrightarrow 2|x-1| \leq 0.1 \Leftrightarrow 1-x \leq 0.05$$

پس برای آن که در همسایگی راست $x=1$ ، شرط $|f(x)-1| \leq 0.1$ برقرار باشد، کافی است $a \leq 0.01$ ، و برای آن که در همسایگی چپ آن، این شرط برقرار باشد، کافی است $a \leq 0.05$. پس بزرگ‌ترین مقدار a که در دو شرط صدق می‌کند $a = 0.01$ است.



۸- گزینه‌ی (۳) قرار گرفتن $f(x)$ در بازه‌ی $(\frac{6}{97}, \frac{7}{93})$ معادل شرط $|f(x) - 7| < \frac{1}{93}$ است. باید همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x = 2$ را جداگانه بررسی کنیم:

$$0 < x - 2 < \delta : |f(x) - 7| < \frac{1}{93} \Leftrightarrow \left| \frac{(3x-1)(3x+1)}{3x-1} - 7 \right| < \frac{1}{93} \Leftrightarrow |3x+1-7| < \frac{1}{93} \Leftrightarrow 3|x-2| < \frac{1}{93} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{279}$$

اگر $-\delta < x - 2 < 0 : |f(x) - 7| < \frac{1}{93} \Leftrightarrow |4x-1-7| < \frac{1}{93} \Leftrightarrow 4|x-2| < \frac{1}{93} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{372}$
برای آن که در هر دو همسایگی چپ و راست شرط $|f(x) - 7| < \frac{1}{93}$ برقرار باشد، باید هر دو شرط $\delta \leq \frac{1}{372}$ و $\delta \leq \frac{1}{279}$ برقرار باشد. پس بزرگ‌ترین مقدار δ ، $\frac{1}{372}$ است.

۹- گزینه‌ی (۱) نشان می‌دهیم گزینه‌ی (۱) همواره درست است.

$$\begin{cases} |x| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{|x|} < \varepsilon \\ |\sin(\frac{1}{x})| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{|x|} |\sin(\frac{1}{x})| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

یادداشت: از این نامساوی می‌توان برای اثبات تساوی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ استفاده کرد.

۱۰- گزینه‌ی (۱) می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0/6} [x + 0/3] = [0/9] = 0$ ، بنابراین باید بیش‌ترین مقدار δ را به گونه‌ای پیدا کنیم که اگر $0 < |x - 0/6| < \delta$ ، آن‌گاه: $|[x + 0/3] - 0| < 0/1$. چون $|x + 0/3| < 0/1$ یک عدد صحیح است، شرط $|[x + 0/3]| < 0/1$ به معنی $[x + 0/3] = 0$ است، بنابراین: $[x + 0/3] = 0 \Rightarrow 0 \leq x + 0/3 < 1 \xrightarrow{-0/9} -0/9 \leq x - 0/6 < 0/1$ پس بزرگ‌ترین عدد δ که برای آن $0 < |x - 0/6| < \delta$ ، $\delta = 0/1$ است.

۱۱- گزینه‌ی (۱) باید حدهای چپ و راست تابع در $x = 2$ با هم برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 2m - 2 = 2 + 4m \Rightarrow m = -2 \Rightarrow f(-5) = |-5| + 4 \times (-2) = -3$$

۱۲- گزینه‌ی (۳) در گزینه‌های (۲) و (۴) تابع در $x = 0$ حد دارد. در گزینه‌ی (۱) تابع نه حد راست دارد، نه حد چپ. در گزینه‌ی (۳) تابع هم حد راست دارد، هم حد چپ، ولی این دو حد نابرابرند.

۱۳- گزینه‌ی (۲) با توجه به شکل وقتی از سمت راست به صفر نزدیک می‌شویم، مقدار تابع به -1 نزدیک می‌شود (روی نمودار به سمت نقطه‌ی توخالی $(0, -1)$ پیش می‌رویم).

۱۴- گزینه‌ی (۱) وقتی از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به سمت عدد 1 نزدیک می‌شوند و بزرگ‌تر از 1 هستند، پس $[f(x)]$ نیز به سمت 1 نزدیک می‌شود.

۱۵- گزینه‌ی (۴) چون نه همسایگی چپ و نه همسایگی راست $x = 2$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، پس تابع در این نقطه نیز حد ندارد.

۱۶- گزینه‌ی (۱) می‌دانیم: $[\alpha] + [-\alpha] = \begin{cases} \alpha \in \mathbb{Z} \\ -1 \end{cases}$ پس وقتی $x \rightarrow 3^+$ ، طبق نمودار داریم: $[f(x)] + [-f(x)] = -1$ ، بنابراین حد موردنظر نیز برابر -1 می‌شود.

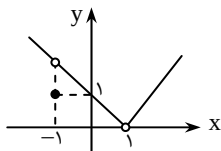
۱۷- گزینه‌ی (۳) ابتدا حد راست عبارت را در $x = 1$ به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 1^+ : x > 1 \Rightarrow t = x^2 - 1 > 0, \quad h = 1 - |x| < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x^2 - 1) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(1 - |x|) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) + \lim_{h \rightarrow 0^-} f(h) = 2 + 1 = 3$$

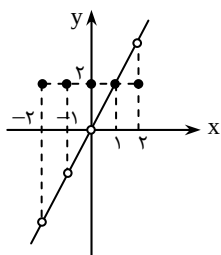
به همین ترتیب ثابت می‌شود حد چپ عبارت نیز برابر 3 است، پس حد عبارت برابر 3 است.

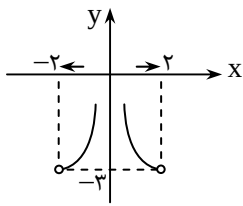
۱۸- گزینه‌ی (۳) با توجه به نمودار تابع مشخص است که تابع در R حد دارد، هرچند که در نقطه‌ی $x = 1$ مقدار ندارد و در نقطه‌ی $x = -1$ مقدار حد با مقدار تابع متفاوت است.



۱۹- گزینه‌ی (۱) در بازه‌های $(-4, -3)$ و $(-5, -4)$ (یعنی همسایگی‌های $x = -4$) داریم: $f(x) = -3$. پس مقدار حد نیز برابر -3 می‌شود.

۲۰- گزینه‌ی (۴) نمودار تابع یک خط راست است که نقاط با طول صحیح روی آن توخالی شده‌اند و تنها در $x = 1$ است که نقطه‌ی توپر متناظر روی خط قرار گرفته. بنابراین در تمام نقاط بازه، تابع حد دارد، هرچند که در نقاط با طول‌های -2 ، -1 ، 0 و 2 ، حد تابع با مقدار آن فرق دارد.





۲۱- گزینه‌ی (۲) B می‌دانیم نمودار توابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است. وقتی $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$ ، مطابق شکل با نزدیک شدن به $x = 2$ از سمت چپ، روی نمودار به نقطه‌ای با عرض $y = -3$ نزدیک می‌شویم. پس در قرینه‌ی آن، با نزدیک شدن به $x = -2$ از سمت راست، بازهم به نقطه‌ای با عرض $y = -3$ نزدیک می‌شویم. یعنی $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -3$.

۲۲- گزینه‌ی (۴) B با توجه به آن که نمودار تابع از نقاط گسسته تشکیل شده، همسایگی نقطه‌ی $x = 2$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد و تابع حد ندارد.

۲۳- گزینه‌ی (۱) A اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$ ، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 4}{f(x)} = \frac{L^2 + 4}{L} \Rightarrow \frac{L^2 + 4}{L} = 4 \Rightarrow L^2 - 4L + 4 = 0 \Rightarrow L = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$$

۲۴- گزینه‌ی (۴) B دقت کنید که دامنه‌ی تابع f ، اعداد حسابی $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ است، پس در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

۲۵- گزینه‌ی (۴) A می‌توانیم از قضیه‌ی فشردگی استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 + \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3) = 3 \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 1) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 + 1 = 4$$

۲۶- گزینه‌ی (۲) B با استفاده از قضیه‌ی فشردگی، حد تابع f را به دست می‌آوریم:

$$0 \leq |f(x) - 3| \leq 3(4 - x)^2, \quad \lim_{x \rightarrow 4} 3(4 - x)^2 = 0 \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 4} |f(x) - 3| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) + 2}{2 - f(2x-2)} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) + 2}{2 - f(t)} = \frac{3 + 2}{2 - 3} = -5$$

۲۷- گزینه‌ی (۲) C در گزینه‌ی (۱)، چون $x^2 - x^2 = x^2(x-1)$ ، دامنه‌ی تابع $\{0\} \cup [1, +\infty)$ می‌شود و همسایگی $x = 0$ در دامنه حضور ندارد. در گزینه‌ی (۳) اشتراک دو محدوده‌ی جواب $x(x+1) \geq 0$ و $x(x-1) \geq 0$ ، به دامنه‌ی $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$ برای تابع f_3 منجر می‌شود و بازهم همسایگی موردنظر وجود ندارد. در گزینه‌ی (۴)، به وضوح داریم: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_4(x) = (-1)^{-1} = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) = 1$

ولی برای گزینه‌ی (۲) حد ندارد. $x = 0$ در f_4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x} - 2[x] \right) = 1 - 2 \times 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{-x} - 2[x] \right) = -1 - 2 \times (-1) = 1$$

۲۸- گزینه‌ی (۴) B با توجه به این که $x \rightarrow 2^-$ ، به جای جزء صحیح موجود در کسر، مقدار عددی آن را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow -x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow \text{جواب} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[(-2)^+] \sqrt{(x-2)^2}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2 \end{aligned}$$

۲۹- گزینه‌ی (۲) A وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، داریم $\frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ و چون $\frac{1}{x} \rightarrow 1$ عددی غیرصحیح است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\left[\frac{1}{x+1} \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right] = 0$$

۳۰- گزینه‌ی (۲) B مقدار دو حد را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} [|x|] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = [0^+] = 0$$

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} [|x|] = |-1| = 1$$

۳۱- گزینه‌ی (۲) B وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، چون $x < 0$ ، داریم: $|x| = -x$ و $-2x = |x|$ ، هم‌چنین چون $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ و $x^3 + \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}$ عددی غیر صحیح

$$\text{است، } \left[x^2 + \frac{1}{x} \right] \text{ به همان } \left[\frac{1}{x} \right] = 0 \text{ نزدیک می‌شود. بنابراین:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - (-2x)}{0 - (-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{x} = 3$$

۳۲- گزینه‌ی (۱) B مقدار دو حد را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x}{[1^-] - x} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + x}{[1^+] - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{1 - x} = 0$$



۳۳- گزینهی (۴) B در تابع مورد نظر همسایگی راست $x = 0$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، زیرا برای $0 \leq x < 1$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس حد اول وجود ندارد. ولی وقتی $x \rightarrow 0^-$ داریم: $[x] = -1$ و $[x^2] = 0$ ، پس حاصل حد دوم برابر صفر می‌شود.

۳۴- گزینهی (۴) B باید حدهای راست و چپ تابع در $x = 1$ با هم برابر باشند:

$$x \rightarrow 1^+ : x > 1 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = ([(-1)^-] - 3)(2[1^+] + a) = (-2 - 3)(2 + a) = -5(2 + a)$$

$$x \rightarrow 1^- : x < 1 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = ([(-1)^+] - 3)(2[1^-] + a) = (-1 - 3)(0 + a) = -4a$$

برای حد داشتن تابع در $x = 1$ باید $-5(2 + a) = -4a$ ، که نتیجه می‌دهد: $a = -10$.

۳۵- گزینهی (۲) B حدهای چپ و راست را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$x \rightarrow 6^+ \Rightarrow x > 6 \Rightarrow \frac{x}{2} > 3, \frac{x}{3} > 2 \Rightarrow -\frac{x}{3} < -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = [3^+] - [(-2)^-] = 3 - (-3) = 6$$

$$x \rightarrow 6^- \Rightarrow x < 6 \Rightarrow \frac{x}{2} < 3, \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow -\frac{x}{3} > -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = [3^-] - [(-2)^+] = 2 - (-2) = 4$$

۳۶- گزینهی (۲) B حدهای چپ و راست را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow 2^+ \Rightarrow 3x \rightarrow 6^+, \quad x^2 \rightarrow 4^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} y &= 6 + 2 \times 2 - 4 = 6 \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow 3x \rightarrow 6^-, \quad x^2 \rightarrow 4^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} y &= 5 + 2 \times 1 - 3 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جواب} = 6 - 4 = 2$$

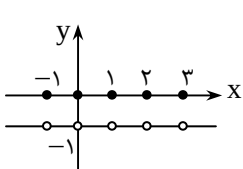
۳۷- گزینهی (۳) B مقدار عبارت $-\frac{1}{x}$ به ازای $x = -\frac{1}{4}$ عددی صحیح است. پس به بررسی دقیق‌تری احتیاج داریم:

$$x \rightarrow (-\frac{1}{4})^- \Rightarrow x < -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} > -4 \Rightarrow -\frac{1}{x} < 4 \Rightarrow -\frac{1}{x} \rightarrow 4^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} [-\frac{1}{x}] = [4^-] = 3$$

۳۸- گزینهی (۱) B وقتی $x \rightarrow 0^-$ داریم: $2x \rightarrow 0^-, 3x \rightarrow 0^-, \dots$ و بنابراین: $nx \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underbrace{[0^-] + \dots + [0^-]}_{\text{بار } n} = \underbrace{-1 - 1 - \dots - 1}_n = -n$$

$$x < 10 \Rightarrow x^2 < 100 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 10^-} \frac{[x^2] - x^2}{[x] - x} = \frac{[100^-] - 100}{[10^-] - 10} = \frac{999 - 1000}{9 - 10} = 1 \quad \text{وقتی } x \rightarrow 10^- \text{ داریم:}$$



$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{داریم: } [x] + [4-x] = 4 + [x] + [-x]$$

پس طبق نمودار تابع $y = [x] + [-x]$ ، در همه‌ی نقاط $a \in \mathbb{R}$ داریم: $\lim_{x \rightarrow a} [x] + [-x] = -1$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow a} 4 + [x] + [-x] = 3$$

۴۱- گزینهی (۲) C ضابطه‌ی اول تابع به فرم $[a] + [-a]$ درمی‌آید که در همه‌ی نقاط حدی برابر -1 دارد، پس: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$.

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x - 3 < -2 \Rightarrow x - 3 \rightarrow (-2)^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a[(-2)^-] = -3a \quad \text{ضابطه‌ی دوم داریم:}$$

$$\text{پس باید } -3a = -1 \text{، که نتیجه می‌دهد: } a = \frac{1}{3}.$$

۴۲- گزینهی (۴) راه اول: همسایگی‌های چپ و راست را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$x \rightarrow 1^+ : x > 1 \Rightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = [0^-] = -1$$

$$x \rightarrow 1^- : x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [0^+] = 0$$

برای $1 < x < 2$ داریم: $f(x) = -1$ و برای $0 < x < 1$ داریم: $f(x) = 0$. پس برای $1 < x < 2$ داریم: $(f \circ f)(x) = f(-1) = 2$ و برای $0 < x < 1$ داریم: $(f \circ f)(x) = f(0) = 1$ ، یعنی تابع $(f \circ f)$ در نقطه‌ی $x = 1$ حد ندارد.

راه دوم: ضابطه‌ی تابع $f \circ f$ را تشکیل می‌دهیم. داریم: $(f \circ f)(x) = [1 - f(x)]$ ، و می‌دانیم $f(x)$ همواره عددی صحیح است، پس می‌توانیم جزء صحیح را حذف کنیم. یعنی:

$$(f \circ f)(x) = 1 - f(x) = 1 - [1 - x] = 1 - 1 - [-x] = -[-x]$$

تابع حاصل در همه‌ی نقاط با طول صحیح حد ندارد.

A ۴۳- گزینه‌ی (۴) چون به ازای $0 \leq x < 1$ داریم: $[x] = 0$ و $\log(0)$ تعریف نشده است، پس همسایگی راست $x = 0$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، بنابراین حد نیز وجود ندارد.

C ۴۴- گزینه‌ی (۲) فرض کنید در نقطه‌ی $x = n$ که $n \in \mathbb{Z}$ ، تابع حد داشته باشد. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) \Rightarrow [n^+]^r - [n^+] = [n^-]^r - [n^-] \Rightarrow n^r - n = (n-1)^r - (n-1)$$

$$\Rightarrow n^r - n = n^r - 3n^r + 3n - 1 - n + 1 \Rightarrow 3n(n-1) = 0 \Rightarrow n = 0, n = 1$$

B ۴۵- گزینه‌ی (۱) تابع تنها در نقاطی با طول صحیح حد دارد که برای آن‌ها $3x^2 + 2x - 1$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، یعنی در ریشه‌های آن. چون $3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$ ، تنها ریشه‌ی صحیح عبارت $x = -1$ است.

B ۴۶- گزینه‌ی (۱) باید به‌ازای تمام مقادیر صحیح $x = k$ ، عبارت $\sin(ak)$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، یعنی $\sin(ak) = 0$. می‌دانیم این امر برای $a = \pi$ اتفاق می‌افتد (به طور کلی a می‌تواند هر مضرب صحیحی از π باشد).

C ۴۷- گزینه‌ی (۳) تابع $y = [x-2]$ در هیچ نقطه‌ای با طول صحیح حد ندارد. پس باید در نقاط $x = 2$ و $x = 3$ عبارت $x^3 + ax^2 + bx$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود. یعنی دو ریشه‌ی $x = 2$ و $x = 3$ داشته باشد. بنابراین:

$$x^3 + ax^2 + bx = x(x^2 + ax + b) = x(x-2)(x-3) \Rightarrow x(x^2 + ax + b) = x(x^2 - 5x + 6)$$

پس $a = -5$ ، $b = 6$ و بنابراین: $a + b = 1$

تذکره: دقت کنید که تابع f علاوه بر دو نقطه‌ی ذکر شده، در نقطه‌ی $x = 0$ نیز حد دارد.

B ۴۸- گزینه‌ی (۲) راه‌اول: باتوجه به نمودار $y = x^2 - 2x + 5$ ، وقتی $x \rightarrow 1$ ، چه از چپ و چه از راست، مقدار y به سمت ۴ از مقادیر بزرگ‌تر از ۴ نزدیک می‌شود. یعنی: $y \rightarrow 4^+$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [x^2 - 2x + 5] = [4^+] = 4$$

راه دوم: با توجه به $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$ ، وقتی $x \rightarrow 1$ داریم:

$$(x-1)^2 > 0, (x-1)^2 \rightarrow 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 > 4, x^2 - 2x + 5 \rightarrow 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [x^2 - 2x + 5] = 4$$

B ۴۹- گزینه‌ی (۳) می‌دانیم وقتی $x \rightarrow -1$ داریم: $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x) = 0$. برای تعیین حد تابع اصلی به نمودار $y = x^2 + x$ دقت کنید. طبق این نمودار وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ ، $x^2 + x \rightarrow 0^-$ ، بنابراین: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} [x^2 + x] = [0^-] = -1$

C ۵۰- گزینه‌ی (۱) طبق نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، وقتی $x \rightarrow \pi^+$ داریم: $\sin x \rightarrow 0^-$ و $\cos x \rightarrow (-1)^+$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\sin x] + [\cos x]}{[\sin x]} = \frac{[0^-] + [(-1)^+]}{[0^-]} = \frac{-1 + (-1)}{-1} = 2$$

B ۵۱- گزینه‌ی (۱) با توجه به دایره‌ی مثلثاتی یا نمودار $y = \cos x$ ، وقتی $x \rightarrow 0$ ، چه از چپ و چه از راست، داریم: $\cos x \rightarrow 1^-$. بنابراین:

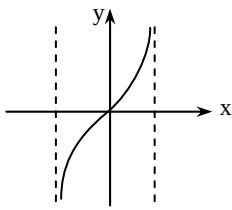
$$\cos x < 1 \Rightarrow -\cos x > -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [-\cos x] = [(-1)^+] = -1$$

C ۵۲- گزینه‌ی (۳) وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ ، چه از چپ و چه از راست، طبق دایره‌ی مثلثاتی یا نمودار $y = \sin x$ داریم: $\sin x \rightarrow (-1)^+$ ، یعنی $\sin x > -1$ و $\sin x \rightarrow (-1)$. حال داریم:

$$0 > \sin x > -1 \Rightarrow \frac{1}{\sin x} < -1 \Rightarrow \frac{1}{\sin x} \rightarrow (-1)^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})} \left[\frac{1}{\sin x} \right] = [(-1)^-] = -2$$

B ۵۳- گزینه‌ی (۱) با توجه به دایره‌ی مثلثاتی یا نمودار $y = \cot x$ ، وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+$ ، مقدار $\cot x$ به سمت ۱ با مقادیر کمتر از ۱ نزدیک می‌شود. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} [\cot x] = [1^-] = 0$$

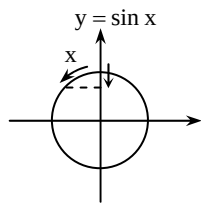


۵۴- گزینهی (۴) طبق نمودار $y = \tan x$ (یا دایره‌ی مثلثاتی)، وقتی $x \rightarrow 0^-$ با مقادیر کم‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[\tan x^r]}{\tan[x]} = \frac{[0^-]}{\tan[0^-]} = \frac{-1}{\tan(-1)} = \frac{-1}{-\tan 1} = \frac{1}{\tan 1}$$

دقت کنید که اگر $x \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه $x^r \rightarrow 0^-$ و $\tan x^r \rightarrow 0^-$.

۵۵- گزینهی (۱) در فاصله‌ی $0 < x < 1$ داریم: $[x] = 0$ ، بنابراین در این فاصله مقدار تابع $[x] \cot x$ ، صفر مطلق است و تابع $[x] \cot[x]$ تعریف نشده است. پس حد اول برابر صفر است و حد دوم وجود ندارد.



۵۶- گزینهی (۳) می‌دانیم: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ، حال داریم:

$$\begin{aligned} x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^- &\Rightarrow x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow[\text{مثلثاتی}]{\text{طبق دایره‌ی}} \sin(x + \frac{\pi}{4}) > \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) \\ &\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [\sin x + \cos x] = [1^+] = 1 \end{aligned}$$

۵۷- گزینهی (۴) وقتی $x \rightarrow 1$ ، داریم: $\frac{1}{x-1} \rightarrow \infty$ و $\sin^{-1}(\infty)$ وجود ندارد! درواقع همسایگی $x = 1$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، زیرا:

$$D_f : -1 \leq \frac{1}{x-1} \leq 1 \Rightarrow |\frac{1}{x-1}| \leq 1 \Rightarrow |x-1| \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0$$

۵۸- گزینهی (۱) در گزینه‌ی (۱)، وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، چه از چپ و چه از راست، داریم: $\sin x \rightarrow 1$ و $\sin x < 1$ ، بنابراین $\sin x \rightarrow 1^-$ و مقدار

حد برابر صفر می‌شود. در گزینه‌ی (۲)، دامنه‌ی تابع از شرط $-1 \leq 1-x \leq 1$ به دست می‌آید، یعنی: $D_f = [0, 2]$ و همسایگی چپ $x = 0$ در

دامنه حضور ندارد. در گزینه‌ی (۳) داریم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(t) = \frac{\pi}{2}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tan^{-1}(\frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(t) = -\frac{\pi}{2}$

در گزینه‌ی (۴) نیز وقتی $x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+$ ، داریم: $\cos x \rightarrow 0^+$ و در حالت $x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-$ ، داریم: $\cos x \rightarrow 0^-$ ، پس مقدار حد راست و چپ $[\cos x]$ برابر صفر و -1 می‌شود.

۵۹- گزینه‌ی (۲) گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

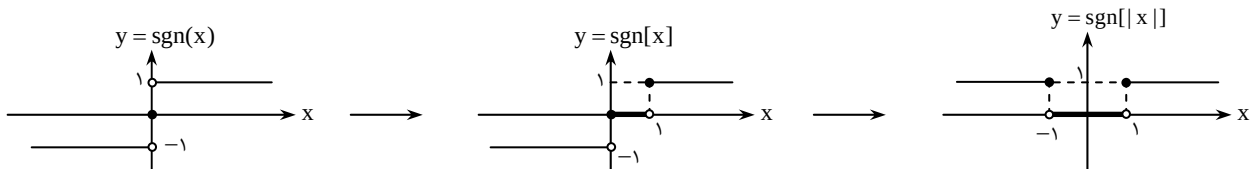
$$۱) x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x^r} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\frac{1}{x^r}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$۳) x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1^- \Rightarrow [\cos x] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos x]}{|\sin x|} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$$

$$۴) x \rightarrow 0^- \Rightarrow x^r \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x^r] - \tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - \tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\cos x} = -1$$

(۲) بازه‌ی $[0, 1]$ که یک همسایگی راست صفر است، در دامنه‌ی تابع $\tan(\frac{\pi[x+1]}{2})$ قرار ندارد، زیرا در این بازه تابع به صورت $\tan \frac{\pi}{2}$ می‌شود که تعریف نشده است.

۶۰- گزینه‌ی (۲) نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در دو نقطه‌ی $x = \pm 1$ حد ندارد.

۶۱- گزینهی (۱) می‌دانیم برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم: $\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$ ، بنابراین: $\frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \leq \frac{1}{x}$ ، حال داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{اگر } x > 0 : x(\frac{1}{x} - 1) < x[\frac{1}{x}] \leq 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0^+} x[\frac{1}{x}] = 1 \\ \text{اگر } x < 0 : x(\frac{1}{x} - 1) > x[\frac{1}{x}] \geq 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0^-} x[\frac{1}{x}] = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x[\frac{1}{x}] = 1$$

D ۶۷- گزینه‌ی (۱) با استفاده از قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^r + ax + b) \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x^r \left[\frac{1}{x} \right] + \lim_{x \rightarrow 0} ax \left[\frac{1}{x} \right] + \lim_{x \rightarrow 0} b \left[\frac{1}{x} \right]$$

می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right]$ وجود ندارد، ولی $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \left[\frac{1}{x} \right] = 0$ (برای $n \geq 2$). بنابراین اگر $b \neq 0$ ، حد فوق وجود ندارد، پس $b = 0$ و داریم:

$$\text{مقدار حد} = 0 + a \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a - b = 4$$

D ۶۸- گزینه‌ی (۲) وقتی $x \rightarrow \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه $\frac{2x-1}{2} \rightarrow 0$ ، بنابراین اگر قرار دهیم $t = \frac{2x-1}{2}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x-1)(x+1) \left[\frac{2}{2x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2(x+1) \times \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{2x-1}{2} \right) \left[\frac{2}{2x-1} \right] = 3 \times \lim_{t \rightarrow 0} t \left[\frac{1}{t} \right] = 3 \times 1 = 3$$

B ۶۹- گزینه‌ی (۲) باید دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بنزیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ و $a_n > 0$ و $b_n < 0$ ، در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\frac{-1}{n} < 0 \text{ و } \frac{1}{2+n} > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+n} = 0$$

C ۷۰- گزینه‌ی (۱) باید دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بنزیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ و $a_n > 1$ و $b_n < 1$ ، در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$$

عدد ۱ است. در گزینه‌های (۳) و (۴) حد دنباله‌ها عدد ۱ نیست، و در گزینه‌ی (۲)، برای هر دو دنباله داریم: $a_n, b_n < 1$

C ۷۱- گزینه‌ی (۳) نشان می‌دهیم دنباله‌های گزینه‌ی (۳) دنباله‌هایی مناسب هستند.

$$\left. \begin{aligned} a_n = \frac{1}{2n} &\Rightarrow f(a_n) = \cos(2n\pi) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1 \\ b_n = \frac{1}{2n+1} &\Rightarrow f(b_n) = \cos(2n\pi + \pi) = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \end{aligned} \rightarrow \text{حد ندارد } x = 0 \text{ در } f(x)$$

C ۷۲- گزینه‌ی (۳) باید دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بنزیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ و $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گویا و $\{b_n\}$ دنباله‌ای

از اعداد گنگ باشد، در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$ ، حال آن‌که $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$. دنباله‌های گزینه‌ی (۳) در این شرایط صدق می‌کنند.

B ۷۳- گزینه‌ی (۴) از $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ یا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ می‌توانیم نتیجه بگیریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ ، زیرا اگر برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ داشته

باشیم: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ و بدانیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$ ، ولی برعکس این قضیه لزوماً درست نیست. اگر برای هر دنباله‌ی

$\{a_n\}$ که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ داشته باشیم: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ ، آن‌گاه گزینه‌ی (۱) درست می‌شود، ولی از فرض سؤال فقط می‌دانیم این شرط برای

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ x-1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad a_n = \frac{1}{n} \text{ برقرار است. برای مثال نقض تابع زیر را در نظر بگیرید:}$$

B ۷۴- گزینه‌ی (۴) طبق قضیه، از شرط صورت سؤال نتیجه می‌گیریم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و تعریف ریاضی این حکم در گزینه‌ی (۴) آمده است.

C ۷۵- گزینه‌ی (۴) باید دنباله‌ای مثال بنزیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ و $a_n < 2$ ، در این صورت: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$. دنباله‌های

گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) در این شرط صدق نمی‌کنند. مثلاً برای گزینه‌ی (۲) داریم:

$$a_n = \frac{2n+5}{n+2} = \frac{2(n+2)+1}{n+2} = 2 + \frac{1}{n+2} \Rightarrow a_n > 2$$

به همین ترتیب گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند. ولی با نامساوی‌های برگشت‌پذیر زیر درستی گزینه‌ی (۴) ثابت می‌شود:

$$a_n < 2 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 4n} - n < 2 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 4n} < n+2 \Leftrightarrow n^2 + 4n < n^2 + 4n + 4 \Leftrightarrow 0 < 4$$

C ۷۶- گزینه‌ی (۲) با توجه به فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ ، ولی باید تعیین کنیم که $a_n \rightarrow 2^+$ یا $a_n \rightarrow 2^-$ داریم:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2(n+3)-5}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3} \Rightarrow a_n < 2 \Rightarrow a_n \rightarrow 2^- \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (3 \times 2 + 1)[4^-] = 21$$



۷۲- گزینه‌ی (۴) با توجه به فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، ولی $\lim_{x \rightarrow 0} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، این دنباله واگرا است، زیرا دو زیردنباله با حدهای متفاوت دارد:

$$a_{2n} = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow a_{2n} \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{2n}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (2 \times 0 + 1)[0^+] = 0$$

$$a_{2n+1} = \frac{-1}{2n+2} \Rightarrow a_{2n+1} \rightarrow 0^- \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{2n+1}) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = (2 \times 0 + 1)[0^-] = -1$$

۷۳- گزینه‌ی (۱) دقت کنید که همسایگی چپ $x = 0$ در دامنه‌ی تابع $y = \sin^{-1}(\frac{1}{x-1})$ حضور دارد. حال داریم:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0, \quad \sin^{-1}(\frac{1}{x-1}) \text{ کران دار} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|x|} \sin^{-1}(\frac{1}{x-1}) = 0$$

۷۴- گزینه‌ی (۱) در نقطه‌ی $x = 1$ ، تابع g از ضرب دو تابع حددار تشکیل شده و خود نیز حد دارد. در نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ ، تابع g از ضرب یک تابع با حد صفر و یک تابع کران دار تشکیل شده و بنابراین حدی برابر صفر دارد. در نقاط دیگر g حد ندارد.

تذکره: برای اثبات جمله‌ی آخر به این دقت کنید که اگر در نقطه‌ی دیگری تابع g حد داشته باشد، تابع $y = \frac{g(x)}{2x-1}$ از تقسیم دو تابع حددار تشکیل شده (با حد غیر صفر در مخرج) و بنابراین خود حد دارد. ولی $y = f(x)$ ، و می‌دانیم تابع f در نقاط دیگر حد ندارد.

۷۵- گزینه‌ی (۲) چون دامنه‌ی تابع h ، $x \geq \frac{3}{2}$ است، پس همسایگی نقطه‌ی $x = 1$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد. لذا برخلاف تست قبل، این بار

در $x = 1$ حد ندارد. همچنین با استدلالی مشابه تست قبل می‌توانید نتیجه بگیرید $\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^+} h(x) = 0$ ، چون همسایگی چپ $x = \frac{3}{2}$ در

دامنه‌ی تابع حضور ندارد، نتیجه می‌گیریم، $\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^+} h(x)$. پس تابع h در $x = \frac{3}{2}$ حد دارد.

۷۶- گزینه‌ی (۳) تابع در هیچ نقطه‌ای حد ندارد. فرض کنید در نقطه‌ی $x = a$ (که $a \neq 1$) حدی برابر L داشته باشد، در این صورت اگر

دنباله‌ی $\{a_n\}$ با فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ را در نظر بگیریم، داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} i(a_n)f(a_n) = L$. می‌دانیم برای هر عدد حقیقی مانند a ، می‌توانیم

دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{a_n\}$ در نظر بگیریم که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ و $i(a_n) = 1$ و در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$ ، که مخالف فرض حد

نداشتن f در نقطه‌ی $x = a$ است. تنها در $x = 1$ نیاز به بررسی دیگری دارد، برای این نقطه دنباله‌ای از اعداد گنگ نیز مانند $\{b_n\}$ در نظر بگیرید که $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ ، بنابراین $i(b_n) = 0$ و در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} i(b_n)f(b_n) = 0$. چون باید این حد با $\lim_{n \rightarrow \infty} i(a_n)f(a_n) = L$ هم برابر

باشد، نتیجه می‌گیریم $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ که مخالف فرض $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 0$ است.

۷۷- گزینه‌ی (۳) می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow -1} \cos(\frac{1}{x-1}) = \cos(\frac{-1}{-2}) = \cos(\frac{1}{2})$. پس a هر مقداری باشد، تابع f از ضرب دو تابع تشکیل شده که هر دو در

$x = -1$ حد دارند، بنابراین خود f نیز در این نقطه حد دارد.

۷۸- گزینه‌ی (۱) در $x = 1$ تابع $\cos(\frac{1}{x-1})$ حد ندارد، ولی در همسایگی آن کران دار است. بنابراین برای حد داشتن تابع f ، باید حد عبارت

$$ax + x^2 \text{ در } x = 1 \text{ برابر صفر شود. یعنی: } 1 + a = 0, \text{ که نتیجه می‌دهد: } a = -1$$

۷۹- گزینه‌ی (۱) با استفاده از ضابطه‌ی f داریم: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. حال چون تابع g یک تابع

$$\text{کران دار است، نتیجه می‌گیریم: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$$

۸۰- گزینه‌ی (۲) تابع $D(x)$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد، ولی کران دار است ($0 \leq D(x) \leq 1$). بنابراین در نقاطی مانند $x = a$ که داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^3 + 4x - 4) = 0, \text{ حد تابع } f \text{ نیز برابر صفر خواهد شد، در غیر این صورت (یعنی اگر } \lim_{x \rightarrow a} (x^3 + 4x - 4) = L \neq 0 \text{)، دو دنباله‌ی}$$

$\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با مقادیر گویا و گنگ یافت می‌شود که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ و داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0$ ، بنابراین

f در نقاط دیگر حد ندارد. عبارت $x^3 + 4x - 4 > 0$ نیز فقط یک ریشه دارد (زیرا مشتق آن $3x^2 + 4 > 0$ است، بنابراین به یک تابع اکیداً صعودی درجه‌ی ۳ اشاره دارد که دقیقاً یک ریشه دارد)، بنابراین f در یک نقطه حد دارد.

۸۱- گزینه‌ی (۱) با توجه به ضابطه برای همه‌ی مقادیر $x \in \mathbb{R}$ ، داریم: $f(x) \in \mathbb{Q}$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ f)(x) = 2 \Rightarrow \text{تابع ثابت با مقدار } 2: (f \circ f)(x) = 2 \Rightarrow f(f(x)) = 2 \xrightarrow{f(x) \in \mathbb{Q}} f(f(x)) = 2$$

D ۸۶- گزینه‌ی (۴) می‌دانیم $f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ، حال می‌توانیم نشان دهیم که $f(g(x))$ در $x = 0$ حد ندارد. دو دنباله‌ی

$\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را از اعداد گویا و گنگ در نظر بگیرید که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ و $0 < a_n, b_n < 1$. در این صورت $a_n \notin \mathbb{Z}$ و $g(a_n) = a_n^2 \notin \mathbb{Z}$ و $g(b_n) = 0 \in \mathbb{Z}$ ، پس: $f(g(a_n)) = -1$ و $f(g(b_n)) = 0$ ، یعنی: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(b_n)) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(g(a_n))$ ، پس تابع $f \circ g$ در $x = 0$ حد ندارد.

D ۸۳- گزینه‌ی (۳) تابع f در هیچ نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ حد ندارد، ولی کران‌دار است. پس در مواردی که $\lim_{x \rightarrow a} [x - 3] = 0$ ، تابع g در نقطه‌ی $x = a$ حد دارد. برای $3 \leq x < 4$ داریم: $g(x) = 0$ و بنابراین تابع g در همه‌ی نقاط $x \in (3, 4)$ حد دارد. نقطه‌ی مرزی $x = 3$ را باید جداگانه بررسی کنیم. در این نقطه داریم: $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 0$ (چرا؟)، ولی $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ وجود ندارد، زیرا دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ از اعداد گویا و گنگ می‌توان نوشت که $a_n < 3$ ، $b_n < 3$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$. بنابراین: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 4$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$. حال چون $\lim_{x \rightarrow 3^-} [x - 3] = -1$ ، داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = -4$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = 1$ ، پس تابع g در نقطه‌ی $x = 3$ حد چپ ندارد.

C ۸۴- گزینه‌ی (۲) اگر در نقطه‌ای مانند $x = a$ داشته باشیم $a^2 = 2 - a$ ، تابع f در این نقطه حد دارد و در غیر این صورت حد ندارد. برای اثبات فرض کنید که در نقطه‌ای مانند $x = a$ داشته باشیم $a^2 \neq 2 - a$. در این صورت دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را در نظر بگیرید که اولی کاملاً از اعداد گویا باشد و دومی از اعداد گنگ و داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. در این صورت: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = a^2$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 2 - a$ ، پس از شرط $a^2 \neq 2 - a$ نتیجه می‌گیریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$. بنابراین تابع f در این نقطه حد ندارد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که در نقاطی که $a^2 = 2 - a$ ، شرط حد دنباله‌ای برقرار است و تابع حد دارد. بنابراین:

تابع در دو نقطه حد دارد $\Rightarrow a = 1 \Rightarrow a = -2$ ، $a = -2 \Rightarrow (a + 2)(a - 1) = 0 \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2 - a \Rightarrow a^2 = 2 - a$

C ۸۵- گزینه‌ی (۲) با توجه به فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ ، ولی برای یافتن $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ باید تعیین کنیم که $a_n \rightarrow 2^-$ یا $a_n \rightarrow 2^+$ داریم:

$$a_n = \frac{2n+1}{2n+1} = \frac{2(2n+1)-1}{2n+1} = 2 - \frac{1}{2n+1} \Rightarrow a_n < 2 \Rightarrow a_n \rightarrow 2^- \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = b + [4^-] = b + 3$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) = 1}{\text{فرض}} \rightarrow b + 3 = 1 \Rightarrow b = -2$$

A ۸۶- گزینه‌ی (۲) حدهای چپ و راست را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + 2a, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - 1 \xrightarrow{\text{فرض}} 1 + 2a - a + 1 = -1 \Rightarrow a = -3$$

B ۸۷- گزینه‌ی (۳) چون $x^3 - x = x(x^2 - 1)$ ، وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، عبارت $x^3 - x$ از ضرب دو عبارت منفی تشکیل شده است. بنابراین $x^3 - x \rightarrow 0^+$ و باید حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ را بیابیم. با توجه به ضابطه‌ی تابع داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x} = 1$$

C ۸۸- گزینه‌ی (۳) می‌دانیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ و چون $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ داریم $a_n \rightarrow 1^+$ (وقتی $n \rightarrow \infty$). به این ترتیب برای پیدا کردن $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ باید $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ را پیدا کنیم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow -x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow [-x] = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{1+1} = 1$$

B ۸۹- گزینه‌ی (۴) با توجه به فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. همچنین چون $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+1)}$ تابع f به ازای $x \geq 2$ یا $x \leq -1$ تعریف شده است، پس برای آن‌که دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا باشد باید $a_n \rightarrow 2^+$ (زیرا اگر $a_n < 2$ ، در دامنه‌ی تابع قرار دارند). حال جمله‌ی عمومی دنباله را به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$a_n = \frac{2(n^2 + 3n) + b - 6n}{n^2 + 3n} = 2 + \frac{b - 6n}{n^2 + 3n} \Rightarrow a_n - 2 = \frac{b - 6n}{n^2 + 3n}$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $a_n - 2 \sim \frac{-6n}{n^2}$ ، پس $a_n - 2 \rightarrow 0^-$ ، بنابراین همواره $a_n \rightarrow 2^-$ و به ازای هیچ مقدار b شرط $a_n \rightarrow 2^+$ رخ نمی‌دهد.

B ۹۰- گزینه‌ی (۲) با توجه به فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ۴$. ولی برای یافتن $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ باید تعیین کنیم که $a_n \rightarrow ۴^+$ یا $a_n \rightarrow ۴^-$. داریم:

$$a_n = \frac{۴(n+۲)-۱۱}{n+۲} = ۴ - \frac{۱۱}{n+۲} \Rightarrow a_n < ۴ \Rightarrow a_n \rightarrow ۴^-$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow ۴^-} f(x) = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = ۰$$

B ۹۱- گزینه‌ی (۴) با توجه به فرض به ازای n های زوج و فرد می‌توانیم دو زیردنباله برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ در نظر بگیریم:

$$n = ۲k \Rightarrow a_{۲k} = \frac{۱}{۴k} \Rightarrow f(a_{۲k}) = \left[\frac{۱}{۴k} \right] \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{۲k}) = [0^+] = ۰$$

$$n = ۲k - ۱ \Rightarrow a_{۲k-۱} = \frac{-۱}{۲(۲k-۱)} \Rightarrow f(a_{۲k-۱}) = \left[\frac{-۱}{۴(۲k-۱)} \right] \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{۲k-۱}) = [0^-] = -۱$$

بنابراین دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ شامل دو زیردنباله با حدهای متفاوت است، در نتیجه همگرا نیست.



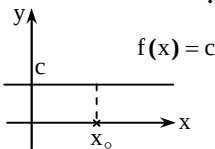
حد و پیوستگی توابع

۴-۲: قضایای حد و محاسبه‌ی حد توابع

در بخش گذشته با مفهوم حد آشنا شدیم و دیدیم که چگونه حد یک تابع را می‌توان از روی نمودار آن یا نوشتن جدول مقادیر تعیین کرد. ولی در توابع پیچیده‌تر چگونه عمل می‌کنیم؟ آیا باز هم باید از جدول مقادیر تابع استفاده کنیم یا رسم نمودار آن؟ قضیه‌های حد ابزاری هستند که در محاسبه‌ی حد توابع پیچیده‌تر به ما کمک می‌کنند. تمام این قضایا را می‌توان به صورت دقیق با استفاده از تعریف ریاضی حد اثبات کرد، که البته در این جا از اثبات آن‌ها صرف نظر می‌کنیم. دو قضیه‌ی زیر قضیه‌هایی هستند که می‌توانید درستی آن‌ها را به راحتی با استفاده از رسم نمودار آن‌ها تحقیق کنید:

قضیه:

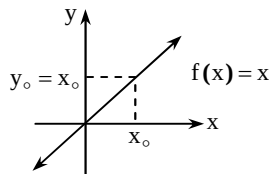
اگر $f(x) = c$ (عددی ثابت و حقیقی است)، آن گاه حد تابع $f(x)$ در تمام نقاط برابر همان مقدار ثابت c است.



با توجه به نمودار روبه‌رو واضح است که: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

قضیه:

برای تابع $f(x) = x$ ، حد تابع $f(x)$ در تمام نقاط برابر مقدار تابع است.



از نمودار روبه‌رو واضح است که: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$

قضیه‌ی بعد نشان می‌دهد که در محاسبه‌ی حدود توابع، می‌توانید از اعمال اصلی حساب روی آن‌ها استفاده کنید:

قضیه:

اگر برای دو تابع f و g داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن گاه:

(ب) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$

(الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$

(ت) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L_1}{L_2}$ (در این قسمت باید $L_2 \neq 0$)

(پ) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = L_1 L_2$

○ **مسئله‌ی (۱):** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -3$ ، $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 8$ ، آن گاه حاصل هر یک از حدهای زیر را حساب کنید:

(پ) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} \right)$

(ب) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{h(x) - g(x)}$

(الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$

حل: طبق قضیه‌ی قبل داریم:

(الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -3 + 0 = -3$

(ب) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{h(x) - g(x)} = \frac{2 \times (-3)}{8 - 0} = -\frac{3}{4}$

(پ) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} \right) = \frac{-3}{8} + \frac{0}{-3} = -\frac{3}{8}$

تست (۱): اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 1$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

حل: فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$ ، آن گاه طبق قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{2L-1}{L+1} \Rightarrow \frac{2L-1}{L+1} = 1 \Rightarrow 2L-1 = L+1 \Rightarrow L = 2$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

با استفاده از قضیه‌ی قبل می‌توان نتایج دیگری نیز گرفت:

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$$

نتیجه‌ی (۱): اگر $g(x) = c$ را یک تابع ثابت فرض کنید، طبق خاصیت قسمت (پ) داریم:

یعنی می‌توانیم حد یک تابع را در یک عدد ثابت ضرب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^r = L^r$$

نتیجه‌ی (۲): اگر $f(x) = g(x)$ باشد، باز از خاصیت قسمت (پ) به‌دست می‌آوریم:

با استقراء روی n می‌توانید نتیجه‌ی زیر را ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = L^n$$

نتیجه‌ی (۳): مشابه نتیجه‌ی (۲) برای توان‌های کسری (یا در حقیقت فرجه‌ی n تابع) هم برقرار است. یعنی

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

البته واضح است که در این قسمت اگر n عددی زوج باشد، باید شرط $L \geq 0$ نیز برقرار باشد. این نتیجه را می‌توانید با استفاده از نتیجه‌ی (۲) اثبات کنید. (راهنمایی: اگر $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ ، آن گاه می‌دانیم $g^n(x) = f(x)$. همچنین می‌دانیم نتیجه‌ی (۲) برای تابع g برقرار است).

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

نتیجه‌ی (۴): اگر در نتیجه‌ی (۲) قرار دهیم $f(x) = x$ ، با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ نتیجه می‌گیریم:

با توجه به این نتیجه و این که هر چندجمله‌ای مانند $P(x)$ از مجموع جملاتی چون $a_n x^n$ تشکیل شده، داریم:

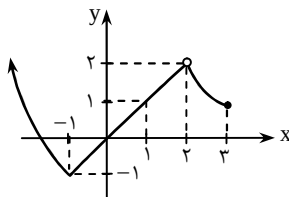
$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

یعنی برای محاسبه‌ی حد یک چندجمله‌ای، وقتی $x \rightarrow a$ ، کافی است به جای x در عبارت چندجمله‌ای مقدار a را قرار دهیم.

نتیجه‌ی (۵): با توجه به قضیه‌ی تقسیم حدها و نتیجه‌ی قبل، برای توابع گویا مانند $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \frac{P(a)}{Q(a)} = h(a) \quad , \quad Q(a) \neq 0$$

مسئله‌ی (۲): با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه‌رو حدهای زیر را بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3+f(x)} \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 f(x) \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(x)} \quad \text{پ)}$$

حل: الف) با توجه به شکل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{ب) داریم: } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3+f(x)} = \sqrt{3+\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} = \sqrt{3+1} = 2$$

پ) با توجه به این که $f(0) = 0$ ، پس از قضایای حد نمی‌توانیم استفاده کنیم. ولی دقت کنید که مقدار تابع $h(x) = \frac{f(x)}{f(x)}$ در همسایگی

محدوف صفر برابر ۱ است و تنها در نقطه‌ی صفر تعریف نشده است. واضح است که برای چنین تابعی داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$



تست (۲): در تابعی با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \geq 2 \\ -x + 3 & x < 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ برابر

$f(1)$ است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۱)$$

حل: هر دو ضابطه چندجمله‌ای هستند. پس طبق نتیجه‌ی (۴) داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax) = 2^2 + a \times 2 = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + 3) = -2 + 3 = 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\substack{\text{فرض سوال} \\ f(1)=2}]{\text{فرض سوال}} 4 + 2a + 1 = 2 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست (۳): وضعیت حد تابع $f(x) = \frac{x \operatorname{sgn}(1+x)}{2+x}$ در نقطه‌ی $x = -1$ کدام است؟

(۴) حد چپ و راست نابرابر دارد.

(۳) فقط حد چپ دارد.

(۲) فقط حد راست دارد.

(۱) حد دارد.

حل: حدهای چپ و راست را جداگانه می‌یابیم:

$$x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x+1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{2+x} = -1$$

$$x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x+1) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-x}{2+x} = 1$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مسئله‌ی (۳): در هر قسمت مقدار حد خواسته‌شده را در صورت وجود به‌دست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 - 4x^2} \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+|x|} \quad \text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2})$$

حل: الف) اگر بخواهید فوراً از قضایای حد استفاده کنید، نتیجه می‌گیرید: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 - 4x^2} = \sqrt{0^3 - 4 \times 0^2} = 0$. آیا این نتیجه درست است؟

خیر! می‌دانیم برای آن که تابعی در نقطه‌ی $x = a$ حد داشته باشد، باید در یک همسایگی نقطه تعریف شده باشد که بتوان به آن نقطه از هر دو طرف نزدیک شد. در این‌جا می‌دانیم:

$$f_1(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2} = \sqrt{x^2(x-4)} \Rightarrow D_{f_1} = [4, +\infty) \cup \{0\}$$

همان‌طور که می‌بینید با آن که تابع f_1 در نقطه‌ی صفر تعریف شده است، ولی در همسایگی صفر تعریف نشده است. پس $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$ وجود ندارد.

ب) با توجه به تعریف قدرمطلق به‌دست می‌آوریم:

$$f_2(x) = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$$

پ) ابتدا دامنه‌ی تابع را با تعیین علامت عبارت پیدا می‌کنیم:

$$f_3(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0, 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow D_{f_3} = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

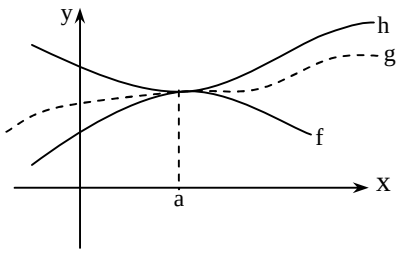
چون تابع در همسایگی راست $x = 1$ تعریف شده و در همسایگی چپ آن مقدار ندارد، پس $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_3(x)$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1} f_3(x)$ وجود ندارد.

$$\text{البته داریم: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x) = \sqrt{1-1} + \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

نکته:

شرط اول وجود حد تابع در $x = a$ ، تعریف شده بودن تابع در یک همسایگی $x = a$ است. همواره در محاسبه‌ی حد یک تابع، مطمئن شوید که تابع در همسایگی نقطه‌ی موردنظر تعریف شده باشد. یکی از روش‌های این کار تعیین دامنه است.

قضیه فشردگی



قضیه فشردگی (که به «قضیه ساندویچ» نیز معروف است!) قضیه مفید دیگری است که در محاسبه حد بسیاری از توابع قابل استفاده است. برای درک این قضیه، به شکل روبه‌رو نگاه کنید. در این شکل سه تابع f ، g و h را در نظر گرفته‌ایم، طوری که نمودار g بین f و h باشد. (یعنی داشته باشیم: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$)

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ (یعنی مانند شکل با نزدیک شدن به نقطه‌ی $x=a$ ، دو تابع h و f نیز مرتباً به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند)، خود به خود تابع g نیز که بین آن‌ها قرار دارد، فشرده می‌شود و حد آن برابر حد دو تابع f و h می‌گردد، پس:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

قضیه:

اگر برای سه تابع f ، g و h که در همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده‌اند، داشته باشیم $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

⚡ **تذکر (۱):** شرط $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ لازم نیست برای تمام $x \in R$ یا حتی تمام x ‌های دامنه‌ی توابع برقرار باشد، تنها کافی است در یک همسایگی محذوف $x=a$ برقرار باشد. زیرا مفهوم حد به رفتار تابع در اطراف نقطه‌ی a مربوط است، نه به رفتار تابع در همه‌ی نقاط.

⚡ **تذکر (۲):** در شرط قضیه فشردگی نامساوی‌ها می‌تواند اکید باشد، یعنی $f(x) < g(x) < h(x)$.

⚡ **تذکر (۳):** از این قضیه درباره‌ی حدود یک طرفه نیز می‌توانید استفاده کنید.

○ **مسئله (۴):** تابع $f(x)$ روی R تعریف شده است و می‌دانیم برای هر $x \in [0, 2]$ داریم: $x^3 \leq f(x) \leq x^3 + 2$. مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را بیابید.

حل: می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 3$. پس طبق قضیه فشردگی داریم: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

○ **مسئله (۵):** ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$

حل: برای محاسبه‌ی این حد نمی‌توان از قضیه‌های ابتدایی حد استفاده کرد، چون تابع $y = \left[\frac{1}{x} \right]$ در $x=0$ حد ندارد که بخواهیم از قضیه‌ی حاصل ضرب حد دو تابع استفاده کنیم. اما می‌توانیم از قضیه فشردگی استفاده کنیم.

از خواص مربوط به تابع جزء صحیح می‌دانیم، برای هر $a \in R$ ، $a - 1 < [a] \leq a$. پس: $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$. حال داریم:

$$\text{الف) } x \rightarrow 0^+ : x > 0 \Rightarrow x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq x \times \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$$

تابع $f(x)$ در همسایگی راست نقطه‌ی $x=0$ بین دو تابع $g(x)=1-x$ و $h(x)=1$ قرار دارد و می‌دانیم:

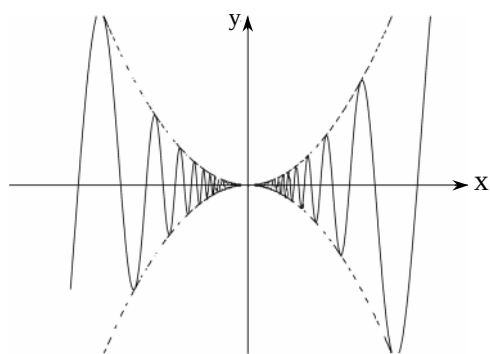
$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g_1(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} h_1(x) = 1 \right) \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\text{ب) } x \rightarrow 0^- : x < 0 \Rightarrow x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq x \times \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq 1$$

باز هم تابع $f(x)$ بین دو تابع g و h قرار دارد و با روشی مانند قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

با مقایسه‌ی نتایج قسمت (الف) و (ب) به‌دست می‌آوریم: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

مسئله (۶): ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$



حل: اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ وجود داشت، می‌توانستیم به راحتی با استفاده از قاعده‌ی ضرب حدها، حد مورد نظر را حساب کنیم. ولی همان‌طور که در بخش پیش دیده‌ایم، حد فوق وجود ندارد. اما با استفاده از قضیه‌ی فشردگی می‌توان حد تابع را به‌دست آورد. برای $x \neq 0$ می‌دانیم:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x^2$$

پس اگر $f(x) = x^2$ ، $h(x) = -x^2$ و $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ ، آن‌گاه در همسایگی محذوف $x = 0$ خواهیم داشت:

$$h(x) \leq g(x) \leq f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

در شکل نمودار تابع را می‌بینید که بین دو تابع $f(x) = x^2$ و $h(x) = -x^2$ قرار گرفته است.

نتیجه‌ای از قضیه‌ی فشردگی درباره‌ی توابع کران‌دار

مسئله‌ی (۶) را دوباره بررسی می‌کنیم. در این مسئله تابع $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ از ضرب دو تابع تشکیل شده است، یکی $f_1(x) = x^2$ که برای آن داریم $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$ و دیگری $f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ که می‌دانیم در همسایگی نقطه‌ی $x = 0$ (و البته در کل $\mathbb{R}$) کران‌دار است. منظور از کران‌دار بودن f_2 این است که مقدار تابع f_2 همواره در آن همسایگی بین دو عدد حقیقی ثابت قرار می‌گیرد (در این جا مثلاً $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$ یا معادل آن $|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)| \leq 1$). در حالت کلی برای چنین توابعی نکته‌ی زیر را می‌توانیم بگوییم:

نکته:

اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی $x = a$ کران‌دار باشد، و حد تابع g در نقطه‌ی $x = a$ برابر صفر باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

به بیان دیگر: صفر = صفر $\times$ کران‌دار

تست (۴): اگر $f(x)$ تابعی باشد که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ ، آن‌گاه مقدار حد تابع $y = (f(x) + 1) \sin \frac{\pi}{x^2}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

حل: چون $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 1) = -1 + 1 = 0$ ، تابع موردنظر از ضرب دو تابع تشکیل شده است که یکی در نقطه‌ی $x = 0$ حدی برابر صفر دارد و دیگری در همسایگی نقطه‌ی صفر کران‌دار است. طبق نکته‌ی قبل داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$.

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست (۵): f تابعی حقیقی است با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ که در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست. اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم: $|f(x)| \leq 2$ ،

آن‌گاه تابع $y = (x^2 - 1)f(x)$ دقیقاً در چند نقطه دارای حد است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل: چون تابع f در $\mathbb{R}$ کران‌دار است (زیرا همواره $-2 \leq f(x) \leq 2$)، پس طبق نکته‌ی قبل، در نقاطی که حد $(x^2 - 1)$ برابر صفر می‌شود،

حد $(x^2 - 1)f(x)$ نیز برابر صفر می‌شود، یعنی در ۲ نقطه‌ی $x = 1$ و $x = -1$.

در نقاط دیگر تابع $f(x)$ حد ندارد، و $(x^2 - 1)$ نیز حدی غیر صفر دارد، پس حاصل ضرب آن دو حد ندارد.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

◀ **تذکره:** می‌توانید نتیجه‌ی اشاره‌شده در راه‌حل تست را به شیوه‌ی زیر اثبات کنید: از برهان خلف استفاده کنید. فرض کنید تابع $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ در نقطه‌ای غیر از نقاط $x = \pm 1$ حد داشته باشد، یعنی برای $a \neq \pm 1$ داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1$. چون

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = \frac{L_1}{a^2 - 1} = L_2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$$

$a^2 - 1 \neq 0$ ، طبق قضیه‌ی تقسیم حد توابع داریم:

که با فرض حد نداشتن f در هیچ نقطه‌ای از R در تناقض است.

○ **مسئله‌ی (۷):** تابع $f(x)$ به گونه‌ای تعریف شده است که برای هر x متعلق به دامنه‌ی f داریم: $|f(x) - 2| < \frac{1-x^2}{1+x^2}$. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را بیابید.

حل: اگر بلافاصله از قضیه‌ی فشردگی استفاده کنیم، به اشتباه حد موردنظر را برابر ۲ به دست می‌آوریم، زیرا به دامنه‌ی تابع توجهی نکرده‌ایم. با توجه به فرض و این که همواره $|f(x) - 2| \geq 0$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow D_f \subset (-1, 1)$$

پس همسایگی راست نقطه‌ی $x = 1$ در دامنه‌ی f قرار ندارد، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نیست.

◀ **تذکره:** اگر بدانیم همسایگی چپ نقطه‌ی $x = 1$ در دامنه‌ی f قرار دارد، حد چپ آن را می‌توانیم با استفاده از قضیه‌ی فشردگی به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} |f(x) - 2| < \frac{1-x^2}{1+x^2} &\Rightarrow \frac{x^2-1}{1+x^2} < f(x) - 2 < \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) - 2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

◆ قضیه‌های دیگر درباره‌ی وجود و عدم وجود حد

○ **مسئله‌ی (۸):** توابع $f(x)$ و $g(x)$ به گونه‌ای در همسایگی $x = a$ تعریف شده‌اند که f در $x = a$ حد دارد و g در $x = a$ حد ندارد. در هر حالت درباره‌ی وجود یا عدم وجود حد در تابع بحث کنید:

الف) $h_1(x) = f(x) + g(x)$ ب) $h_2(x) = f(x)g(x)$ پ) $h_3(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

ت) $h_4(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ ث) $h_5(x) = fog(x)$ ج) $h_6(x) = gof(x)$

حل: الف) این تابع قطعاً حد ندارد. برای اثبات از برهان خلف استفاده کنید. فرض کنید: $\lim_{x \rightarrow a} h_1(x) = L$. با توجه به فرض مثال: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L'$.

پس طبق قضیه‌های حد: $\lim_{x \rightarrow a} h_1(x) - f(x) = L - L'$ ، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - L'$ که مخالف فرض حد نداشتن g است.

ب) تابع h_2 در $x = a$ می‌تواند حد داشته باشد، یا نداشته باشد.

مثلاً تابع $f(x) = 1$ در $x = 0$ حد دارد و $g(x) = [x]$ در $x = 0$ حد ندارد، تابع $h_2(x) = [x]$ نیز در $x = 0$ حد نخواهد داشت.

برای مثالی دیگر فرض کنید $f(x) = x$ که در $x = 0$ حد دارد، و $g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ که در $x = 0$ حد ندارد. ولی داریم:

$$h_2(x) = f(x)g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x|$$

که واضح است در نقطه‌ی $x = 0$ حدی برابر صفر دارد.

پ) این حد هم می‌تواند وجود داشته باشد یا وجود نداشته باشد. از همان مثال‌های قسمت (ب) در این قسمت هم می‌توانید استفاده کنید.

ت) این تابع قطعاً حد ندارد. فرض کنید تابع h_4 در $x = a$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} h_4(x) = L$. با فرض $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L'$ ، طبق قضایای حد:

یعنی: $\lim_{x \rightarrow a} h_4(x)f(x) = LL'$ ، که مخالف فرض حد نداشتن g در $x = a$ است.



(ث) این حد می تواند موجود باشد یا وجود نداشته باشد. برای مثال:

۱- اگر $f(x) = 1$ و $g(x) = [x]$ ، آن گاه داریم $\text{fog}(x) = 1$ که در همه ی نقاط حد دارد.

۲- اگر $f(x) = x$ و $g(x) = [x]$ ، آن گاه داریم $\text{fog}(x) = [x]$ که در $x = 0$ حد ندارد.

(ه) این حد هم شرایطی مانند قسمت (ث) دارد. برای مثال می توانیم از همان مثال های قسمت قبل استفاده کنید.

نکته:

اگر $f(x)$ در $x = a$ حد داشته باشد و $g(x)$ در $x = a$ حد نداشته باشد، آن گاه قطعاً توابع $f \pm g$ و $\frac{g}{f}$ در $x = a$ حد نخواهند داشت.



پرسش: فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a_1$ و $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x) = a_2$. آیا همواره می توان نتیجه گرفت که $\lim_{x \rightarrow a} \text{fog}(x) = a_2$ ؟

پاسخ: پاسخ سؤال منفی است! مثلاً توابع $g(x) = 5$ و $f(x) = \begin{cases} x-3 & x \neq 5 \\ 4 & x = 5 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می دانیم $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$. اما $\lim_{x \rightarrow 3} \text{fog}(x) \neq 2$. در واقع داریم: $\text{fog}(x) = f(g(x)) = f(5) = 4$ ، یعنی fog نیز تابعی ثابت است، در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 3} \text{fog}(x) = 4$.



در این پرسش مشاهده کردید که درباره ی ترکیب حد دو تابع نمی توان با قطعیت اظهار نظر کرد. البته در شرایطی خاص پاسخ این پرسش مثبت است، که این شرایط در قضیه ی زیر بیان شده است:

قضیه:

مد ترکیب توابع

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a_1$ و $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x) = a_2$. در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} \text{fog}(x) = a_2$ ، اگر و تنها اگر، حداقل یکی از شرط های

زیر برقرار باشد:

۱- $f(a_1) = a_2$ (در آینده خواهید دید که در این حالت به f تابعی پیوسته می گویند).

۲- لااقل یک همسایگی محذوف نقطه ی $x = a$ موجود باشد که $g(x)$ همواره در آن مقداری مخالف a_1 داشته باشد.

◀ **تذکره:** این قضیه (به جز شرط اول آن) در عمل فایده ی زیادی ندارد! بهتر است به جای آن که هنگام حل مسائل به این فکر کنید که شرط دوم برقرار است یا خیر، fog را حساب کنید! ذکر آن در این جا تنها برای تکمیل بحث است.

○ **مسئله ی (۹):** $f(x)$ تابعی فرد است و می دانیم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = L_2$. ثابت کنید: $L_1 + L_2 = 0$.

حل: طبق فرض $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L_1$. حال اگر قرار دهیم $x = -t$ ، وقتی $x \rightarrow 0^+$ داریم $t = -x \rightarrow 0^-$. پس:

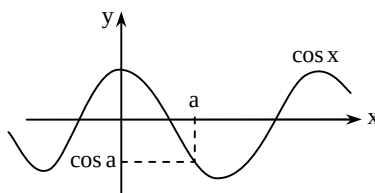
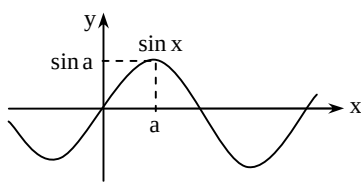
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(-t) \xrightarrow{\text{فرد}} \lim_{t \rightarrow 0^-} (-f(t)) = - \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = -L_2 \Rightarrow L_1 = -L_2 \Rightarrow L_1 + L_2 = 0$$

محاسبه ی حد در توابع مثلثاتی

دیدیم که چگونه حد عبارت های شامل چندجمله ای ها، رادیکال ها و کسرها را می توان محاسبه کرد. درباره ی توابع مثلثاتی نیز با استفاده از تعریف ریاضی حد، می توان ثابت کرد که روابط زیر برقرار است:

۱) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

۲) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$



یعنی برای محاسبه ی حد $\sin x$ و $\cos x$ در نقطه ی دلخواه a ، مانند محاسبه ی حد چندجمله ای ها کافی است مقدار تابع را در نقطه ی a حساب کنیم. به نمودار توابع دقت کنید و درکی از این دو رابطه پیدا کنید.

نتیجه:

درباره‌ی توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ ، $f(x) = \cos x$ ، $f(x) = \tan x$ و $f(x) = \cot x$ داریم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ تنها

باید به این دقت کنید که a در دامنه‌ی تابع باشد.

دقت کنید که مثلاً برای $f(x) = \tan x$ ، طبق قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$$

مسئله (۱۰): حاصل هر یک از حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{(ت)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{(پ)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\sin x} \quad \text{(ب)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} (\sin^x x - \cos^x x) \quad \text{(الف)}$$

مل: الف) با استفاده از قضیه‌ها داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\sin^x x - \cos^x x) = \sin^\pi \pi - \cos^\pi \pi = 0 - (-1)^\pi = -1$$

(ب) نمی‌توانیم مستقیماً از قضیه‌ها استفاده کنیم. برای $-\pi < x < 0$ داریم $\sin x < 0$ ، پس تابع در بازه‌ی $(-\pi, 0)$ تعریف نشده است. یعنی در همسایگی چپ $x = 0$ تعریف نشده است، در نتیجه حد تابع در نقطه‌ی صفر وجود ندارد.

$$\text{(پ)} \quad \text{می‌دانیم برای اعدادی چون } x = \frac{1}{n\pi} \text{ (که } n \in \mathbb{Z} \text{) داریم: } \sin \frac{1}{x} = 0$$

پس تابع $f(x)$ برای مقادیری مانند $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots, \frac{1}{2000\pi}, \dots$ تعریف نشده است. یعنی هر چقدر که به صفر نزدیک شویم، باز هم نقاطی وجود دارند که در آن‌ها f تعریف نشده است. پس نمی‌توانیم x را به صفر نزدیک کنیم و حد تابع f در نقطه‌ی صفر وجود ندارد.

(ت) این بار $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و مشکل قسمت (پ) را نداریم. ولی باز هم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود ندارد! در واقع این تابع مرتباً میان -1 و $+1$ در نزدیکی $x = 0$ نوسان می‌کند و مقدار $f(x)$ به عدد ثابتی نزدیک نمی‌شود. برای توضیح بیش‌تر به آخرین مسأله‌ی بخش قبل مراجعه کنید که تابعی شبیه این تابع را بررسی کرده‌ایم.

یادداشت: واضح است که این تابع در همه‌ی نقاط $\mathbb{R}$ غیر از نقطه‌ی صفر حد دارد و مقدار حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

مسئله (۱۱): حاصل هر یک از حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2007} (1 - \cos \pi x) [x]^\gamma \quad \text{(ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 1385} (\cos(\pi [x])) \sin \pi x \quad \text{(الف)}$$

مل: الف) حدهای راست و چپ را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow 1385^+ : [x] = 1385 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1385^+} f(x) = \cos(1385\pi) \sin(1385\pi) = -1 \times 0 = 0 \\ x \rightarrow 1385^- : [x] = 1384 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1385^-} f(x) = \cos(1384\pi) \sin(1385\pi) = 0 \times 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1385} f(x) = 0$$

با روشی مشابه می‌توانید ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم: $\lim_{x \rightarrow n} f(x) = 0$

(ب) حدهای راست و چپ را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2007^+} f(x) = (1 - \cos(2007\pi)) \times 2007^\gamma = (1 - (-1)) \times 2007^\gamma = 2 \times 2007^\gamma$$

$$\lim_{x \rightarrow 2007^-} f(x) = (1 - \cos(2007\pi)) (2006)^\gamma = (1 - (-1)) \times 2006^\gamma = 2 \times 2006^\gamma$$

چون دو حد بالا با هم مساوی نیستند، حد اصلی نیز وجود ندارد. با روشی مشابه در حالت کلی می‌توانید ثابت کنید که برای $n = 2k$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ ، تابع در نقطه‌ی $x = n$ حد دارد و برای $n = 2k + 1$ این حد وجود ندارد.



تست (۶): حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x| + [x]}{4|x| + 2[\frac{x}{4}]}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$-۲ \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۱)$$

حل: وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، یعنی $x < 0$ و در همسایگی $x = 0$ هستیم. در این حالت داریم:

$$|\sin x| = -\sin x, \quad [x] = -1, \quad |x| = -x, \quad \frac{x}{4} \rightarrow 0^- \Rightarrow [\frac{x}{4}] = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x - 1}{-4x - 2} = \frac{-\sin x - 1}{-4 \times 0 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

برای حد توابع مثلثاتی قضیه‌ی بسیار مهم دیگری نیز قابل بیان است که کاربرد اصلی آن را در بحث رفع ابهام خواهید دید.

قضیه: با استفاده از قضیه‌ی فشردگی نتایج زیر برقرارند:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (۱)$$

اثبات: دایره‌ی مثلثاتی و زاویه‌ی حاده‌ی x را در نظر بگیرید. طبق آنچه از این دایره می‌دانیم: $BC = \tan x$ ،

$OH = \cos x$ و $AH = \sin x$. با توجه به $OA = OC = 1$ داریم: $S_{OAC} = \frac{1}{2}AH$ و $S_{OBC} = \frac{1}{2}BC$

بنابراین: $S_{OAC} = \frac{1}{2}\sin x$ و $S_{OBC} = \frac{1}{2}\tan x$. همچنین می‌دانیم مساحت قطاع OAC برابر $\frac{1}{2}x$ است (x بر حسب رادیان). به این ترتیب نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \xrightarrow{\times 2 \sin x} 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

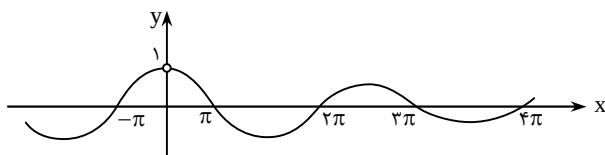
به این ترتیب تابع $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ بین دو تابع $g(x) = 1$ و $h(x) = \frac{1}{\cos x}$ قرار گرفته است. چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ ، پس

طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

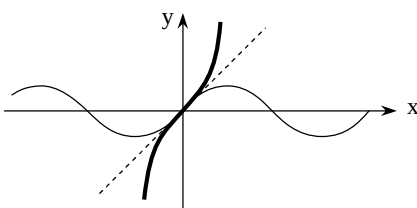
می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ یک تابع زوج است (چرا؟)، بنابراین $f(-x) = f(x)$ ، در نتیجه حد راست و چپ آن در نقطه‌ی $x = 0$ برابر می‌شود. پس $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

برای اثبات رابطه‌ی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ می‌توانید بنویسید: $\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{f(x)} \times \frac{1}{\cos x}$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$



به نمودار تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ نیز دقت کنید. می‌بینید که $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.



در شکل روبه‌رو نیز نمودار سه تابع $y = \sin x$ ، $y = x$ و $y = \tan x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. می‌بینید که نامساوی‌های ابتدای اثبات در این نمودار واضح‌تر مشخص شده‌اند. برای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ داریم: $\sin x < x < \tan x$ و برای $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ داریم:

$$\tan x < x < \sin x$$

محاسبه‌ی حد در عبارت‌های شامل جزء صحیح

در بخش قبل دیدیم که چگونه در توابع شامل جزء صحیح می‌توانیم با استفاده از رسم نمودار مقدار حد را تعیین کنیم. این‌جا می‌خواهیم حالاتی پیچیده‌تر را بررسی کنیم.

اولین چیزی که در حل مسائل مربوط به حد در توابع شامل جزء صحیح باید در نظر داشته باشیم، مواردی است که می‌توانیم به جای عبارت شامل

جزء صحیح یک عدد ثابت قرار دهیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} ([5x-3]x^2 + 3)$ را پیدا کنیم. می‌دانیم وقتی $x \rightarrow \frac{1}{4}$

$5x-3 \rightarrow -\frac{1}{4}$ ، پس وقتی که به عدد $\frac{1}{4}$ خیلی نزدیک بشویم، مقدار عبارت $5x-3$ تقریباً $-\frac{1}{4}$ یا اعداد نزدیک به آن است، پس به جای $[5x-3]$ می‌توانیم قرار دهیم ۱- به این ترتیب باید حد زیر را به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} ((-1) \times x^2 + 3) = -\frac{1}{4} + 3 = \frac{11}{4}$$

ولی مثلاً در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow 1} ([5x-3]x^2 + 3)$ نمی‌توانیم چنین کاری انجام دهیم. زیرا $5x-3 \rightarrow 2$ ، و عدد ۲ یک عدد مرزی است! اگر

مقدار $5x-3$ کمی بیش‌تر از ۲ باشد داریم $[5x-3] = 2$ ، و اگر کمی از ۲ کوچک‌تر باشد داریم: $[5x-3] = 1$. معمولاً این وضعیت‌ها را با علامت‌های + و - نشان می‌دهیم، یعنی می‌گوییم در حالت اول: $[5x-3] = [2^+] = 2$ و در حالت دوم $[5x-3] = [2^-] = 1$.

نکته:

در محاسبه‌ی حد در توابع شامل جزء صحیح، در صورت امکان جزء صحیح را حذف و به جای آن اعداد ثابت قرار دهید. برای این منظور دقت کنید که:

۱- اگر $f(x) \rightarrow L$ و L عددی غیر صحیح باشد، آن‌گاه: $[f(x)] = [L]$

۲- اگر $f(x) \rightarrow L^+$ (به معنی $f(x) \rightarrow L$ و $f(x) > L$)، که L عددی صحیح است، آن‌گاه: $[f(x)] = L$

۳- اگر $f(x) \rightarrow L^-$ (به معنی $f(x) \rightarrow L$ و $f(x) < L$)، که L عددی صحیح است، آن‌گاه: $[f(x)] = L - 1$

تست (۷): حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right]$ کدام است؟ (سراسری - ۸۱)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

حل: وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، داریم: $\frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ ، پس $\left[\frac{1}{x+1} \right] = 0$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x+1} \right] = 2 \times 0 = 0$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست (۸): مجموع حد چپ و راست $y = (x^2 + 1)[x^2 - 2]$ ، وقتی $x \rightarrow \sqrt{2}$ میل می‌کند، کدام است؟ (آزاد - ۸۲)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۶

حل: وقتی $x \rightarrow \sqrt{2}$ ، داریم: $x^2 - 2 \rightarrow 0$. پس نمی‌توانیم به جای $[x^2 - 2]$ عدد صفر را قرار دهیم و باید حدهای چپ و راست را جداگانه حساب کنیم:

$$x \rightarrow (\sqrt{2})^+ : x > \sqrt{2} \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow x^2 - 2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow [x^2 - 2] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = (2+1) \times 0 = 0$$

$$x \rightarrow (\sqrt{2})^- : x < \sqrt{2} \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow x^2 - 2 < 0 \Rightarrow x^2 - 2 \rightarrow 0^- \Rightarrow [x^2 - 2] = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^-} y = (2+1) \times (-1) = -3$$

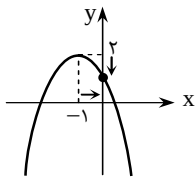
پس پاسخ نهایی $-3 + 0 = -3$ می‌شود. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

○ مسأله‌ی (۱۲): حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2[3x - x^3]}{x^2 - 5x + 3}$

(الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} [-x^2 - 2x + 1]$

(پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sin x} \right]$



مل: الف) وقتی $x \rightarrow 0^-$ داریم: $-x^2 - 2x + 1 \rightarrow 1$ ، ولی باید تعیین کنیم که از سمت مقادیر کوچک‌تر از ۱ یا بزرگ‌تر از ۱. در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = -x^2 - 2x + 1$ را رسم کرده‌ایم. می‌بینید که وقتی $x \rightarrow 0^-$ مقادیر تابع از سمت y ‌های بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود. پس $1^+ \rightarrow -x^2 - 2x + 1$ ، بنابراین حاصل حد $1^+ = 1$ می‌شود.

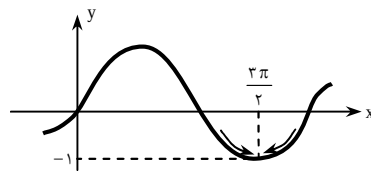
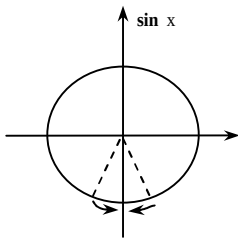
(ب) وقتی $x \rightarrow 1$ داریم: $3x - x^3 \rightarrow 2$. چون رسم نمودار تابع ساده نیست، از روش دیگری استفاده می‌کنیم. یکی از روش‌های مفید «تعیین علامت» است. می‌دانیم نامساوی $3x - x^3 > 2$ معادل $-x^3 + 3x - 2 > 0$ و برعکس آن $3x - x^3 < 2$ معادل $A < 0$ است (که $A = -x^3 + 3x - 2$). پس A را تعیین علامت می‌کنیم:

$$A = (x-1)(-x^2 - x + 2) = -(x-1)^2(x+2) \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & 1 & \\ \hline A & + & - & - \end{array}$$

پس وقتی $x \rightarrow 1$ (چه از راست و چه از چپ)، همواره $A < 0$ ، بنابراین $3x - x^3 < 2$. نتیجه می‌گیریم:

$$3x - x^3 \rightarrow 2^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2[3x - x^3]}{x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2 \times 1}{x^2 - 5x + 3} = -1$$

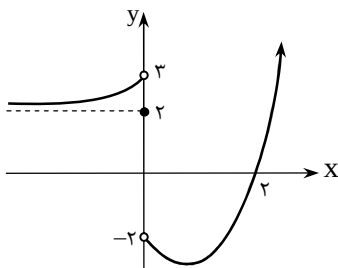
(پ) وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ داریم: $\frac{1}{\sin x} \rightarrow -1$. با توجه به دایره‌ی مثلثاتی (یا نمودار $y = \sin x$) واضح است که در همسایگی چپ یا راست



$$\sin x > -1 \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

چون $\sin x > -1$ ، پس $\frac{1}{\sin x} < \frac{1}{-1}$ ، یعنی $\frac{1}{\sin x} \rightarrow (-1)^-$ ، در نتیجه: $\left[\frac{1}{\sin x} \right] = -2$. بنابراین پاسخ حد نیز ۲- می‌شود.

تست (۹): نمودار تابع f مطابق شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 3}{3[f(x)] + 1}$ کدام است؟



(۱) -1 (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{5}{8}$

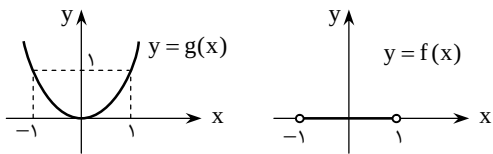
مل: وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، روی قسمت پایینی نمودار حرکت می‌کنیم. در این حالت $f(x)$ از طرف مقادیر کوچک‌تر از ۲- به عدد ۲- نزدیک می‌شود، یعنی: $f(x) \rightarrow (-2)^-$. پس: $[f(x)] = -3$. نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 3}{3[f(x)] + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + 3}{3 \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] + 1} = \frac{-2 + 3}{3 \times (-3) + 1} = -\frac{1}{8}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

❖ صفر مطلق و صفر حدی

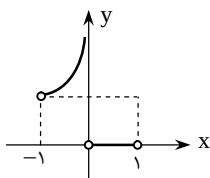
می‌دانیم حد هر دو تابع $f(x) = [x^2]$ و $g(x) = x^2$ ، وقتی $x \rightarrow 0$ برابر صفر است. ولی آیا نوع این دو رفتار یکسان است؟



در شکل‌های روبه‌رو نمودار دو تابع در فاصله‌ی $(-1, 1)$ رسم شده است. می‌بینید که در تابع f ، در یک همسایگی $x = 0$ داریم $f(x) = 0$ ، ولی در تابع g فقط وقتی $x \rightarrow 0$ داریم $g(x) \rightarrow 0$ اصطلاحاً می‌گوییم تابع f در $x = 0$ «صفر مطلق» است، ولی تابع g «صفر حدی» است.

○ **مسئله‌ی (۱۳):** مقادیر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[x]}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$ را در صورت وجود بیابید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \frac{[x]}{x}$ و $g(x) = \frac{x}{[x]}$. هنگام محاسبه‌ی حد دو تابع، حد هر دو عبارت صورت و مخرج برابر صفر می‌شود و نمی‌توانیم از قضیه‌های مربوط به حدود استفاده کنیم. باید به روشی دیگر عمل کنیم.



وقتی $0 < x < 1$ داریم: $[x] = 0$ ، بنابراین $f(x) = 0$. پس تابع f در همسایگی راست $x = 0$ تابع ثابتی با مقدار صفر است (صفر مطلق) و می‌توانیم نتیجه بگیریم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (در شکل روبه‌رو نمودار f در فاصله‌ی $(-1, 1)$ رسم شده است).

برای محاسبه‌ی حد دوم به این دقت کنید که همسایگی راست $x = 0$ در دامنه‌ی تابع g قرار ندارد (چرا؟) بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ وجود ندارد.

نکته:

اگر در یک همسایگی عدد a تابع $f(x)$ دقیقاً برابر صفر باشد و داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (ولی تابع g دقیقاً صفر

$$\text{نباشد)، آن گاه } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ (به بیانی ساده‌تر: } \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0 \text{)}$$

همچنین دقت کنید که حالت $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}$ در دامنه‌ی تابع نیست، پس حدی هم وجود ندارد.

○ **مسئله‌ی (۱۴):** در هر قسمت حد خواسته شده را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\text{(ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-|x|} \right]$$

$$\text{(الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{[x^2]}{x} \right]$$

حل: الف) وقتی $x \rightarrow 0$ (چه از راست و چه از چپ) داریم: $x^2 \rightarrow 0$ و چون $x^2 > 0$ ، پس $[x^2] = 0$ (صفر مطلق). بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{[x^2]}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{0}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [0] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

ب) حدهای راست و چپ را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$x \rightarrow 0^+ : \begin{cases} \left[\frac{1}{1-|x|} \right] = \left[\frac{1}{1-x} \right] \\ x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow 1-x < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x} > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-x} \right] = 1$$

به همین ترتیب و با روشی مشابه نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{1+|x|} \right] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

لازم به ذکر است که بحث مفصل‌تر درباره‌ی حد در عبارت‌های شامل جزء صحیح را در بخش پیوستگی خواهیم آورد و حل مثال‌های پیچیده‌تری از این گونه توابع را به آن بخش واگذار می‌کنیم.



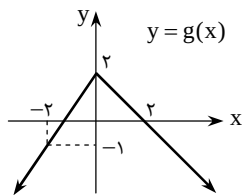
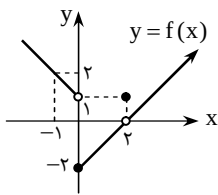
تمرین‌های بخش ۲-۴

۱- اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -3$ ، $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 8$ ، حاصل مقادیر زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)h(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{h(x)}$ پ) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x) - h(x))$

ت) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{g(x)}}{\sqrt[3]{f(x)} + g^2(x)}$ ث) $\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{(x^2 - 1)g(x)}{h(x) + x} \right)$

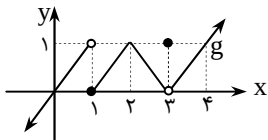
۲- نمودار توابع f و g در شکل‌های روبه‌رو رسم شده است. حاصل هر یک از عبارات زیر را به‌دست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{1 + g(x)}}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) + g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - g(x))}$ ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{g(x) + 2}$

۳- برای تابعی که با نمودار زیر معرفی شده است، حاصل هر یک از مقادیر را بیابید. (در صورت وجود)



الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2/5} \frac{g^2(x) - 1}{x - 2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{x - 3}$

۴- اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b$ و $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = c$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ را بر حسب b و c بیابید.

۵- اگر $f(x) = 4 - x^2$ و $g(x) = \sqrt{1 + x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$ را به‌دست آورید.

۶- در هر قسمت مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه‌ی موردنظر حد داشته باشد.

الف) $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 - 3 & x < 0 \\ x + 2a & x \geq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ ب) $f(x) = \begin{cases} x^2 + [x] & x > 1 \\ ax + [-x] & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$

۷- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x > 2 \\ ax + b & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ حد دارد. ثابت کنید تابع $g(x) = \begin{cases} 6 - 2a[x] & x > 1 \\ bx & x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ حد دارد.

۸- اگر $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ ، مقادیر حد $f(x)$ در نقاط $x = 1$ ، $x = 2$ و $x = 3$ را بیابید.

۹- الف) تابع f برای هر $x \in \mathbb{R}$ در نامساوی $b - |x - a| \leq f(x) \leq b + |x - a|$ صدق می‌کند. مقدار $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ را به‌دست آورید.

ب) اگر برای هر x از دامنه‌ی f بدانیم: $x^2 + 2 \leq f(x) \leq 3x$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ را در صورت وجود بیابید.

۱۰- ثابت کنید اگر $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. آیا عکس این شرط هم برقرار است؟

۱۱- اگر $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ، ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

۱۲- فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی $x = a$ تعریف شده باشند، ولی هیچ کدام در $x = a$ حد نداشته باشند. با ارائه مثال‌های مناسب نشان بدهید که هر یک از توابع زیر در $x = a$ ممکن است حد داشته باشند یا ممکن است حد نداشته باشند.

الف) $f + g$ ب) fg پ) $\frac{f}{g}$ ت) $\frac{g}{f}$ ث) $f \circ g$ ج) $g \circ f$

۱۳- تابع f یک تابع زوج است و می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L_1$. ثابت کنید f در $x = 0$ حد دارد.

۱۴- حاصل هریک از عبارات‌های زیر را بیابید. (در صورت وجود)

الف) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ ب) $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right]$ ، $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = ?$

پ) $f(x) = -2\left[\frac{x}{4} - 1\right] - |1 - x|$ ، $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = ?$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{[x] + [-x] + 2}$ ث) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^-} \left[-\frac{1}{x}\right]$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} ([x^2] - [-x^2])$

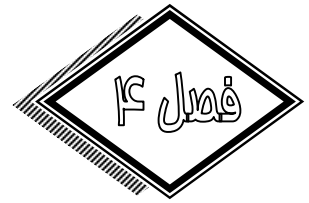
۱۵- اگر $f(x) = \frac{1}{[x] - 1}$ و $g(x) = \frac{1}{|[x]| - 1}$ ، حد چپ و راست هر یک از این دو تابع را وقتی $x \rightarrow 1$ و $x \rightarrow -1$ بیابید (در صورت وجود).

۱۶- تمام مقادیر a را به گونه‌ای تعیین کنید که حد تابع زیر وقتی $x \rightarrow 0/5$ موجود باشد.

$$f(x) = \begin{cases} [x + a] & x > 0/5 \\ 2x & x < 0/5 \end{cases}$$

۱۷- حاصل هریک از حدود زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{x^2 + 1}\right]$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right]$ پ) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left[\frac{1}{\cos x}\right]$ ت) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left[\frac{1}{x}\right]\right]$



قضایای حد و محاسبه‌ی حد توابع

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۱- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر حقیقی a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -1 \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -1$ حد دارد؟
 (۱) $\{0\}$ (۲) $\{2\}$ (۳) $\emptyset$ (۴) $\mathbb{R}$
- ۲- حد تابع $y = \frac{4\pi \cos x}{1 + \cot x}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\pi\sqrt{2}$ (۳) $2\pi\sqrt{2}$ (۴) صفر
- ۳- اگر برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم: $\cos(\pi x) < f(x) < 2 - x^2$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟
 (۱) موجود نیست. (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱
- ۴- مقدار a چقدر باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} \sin |x| & x \geq -\frac{\pi}{2} \\ [x] + a & x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -\frac{\pi}{2}$ دارای حد باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۵- اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(x) - 1| \leq (x-1)^2$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f(x)+1}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱
- ۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{2x + 3})$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{7}$ (۲) صفر (۳) ۳ (۴) وجود ندارد.
- ۷- اگر تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 4}{f(x)} = 4$ ، آن‌گاه مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲
- ۸- در تابع $f(x) = [\frac{x}{2}] + [\sqrt{x}]$ ، اگر $x \rightarrow 2$ مجموع حد راست و چپ چقدر است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱
- ۹- اگر $f(x) = |x| + [x + \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ، حد چپ تابع در $x = 3$ کدام است؟ (آزاد - ۸۱)
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۴
- ۱۰- در تابع $y = [2x] + 2[x] - [x^2]$ ، اگر $x \rightarrow 2$ ، حد راست از حد چپ چقدر بیش‌تر است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

- ۱۱- حد عبارت $\frac{[x]+1}{x^2-1}$ وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) وجود ندارد.
- ۱۲- به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = a[x] + [x+1]$ در نقطه‌ی $x=1$ حد دارد؟
 (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2
- ۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - [x]}{2|x| + [x]}$ وقتی $x \rightarrow 0^-$ کدام است؟
 (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1
- ۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} [x]([x]-1)$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟
 (۱) -2 (۲) -1 (۳) صفر (۴) 1
- ۱۵- اگر $f(x) = [x] + [4-x]$ ، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟
 (۱) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$
- ۱۶- حد چپ تابع $f(x) = x^2 + [-x]$ در نقطه‌ی $x=2$ کدام است؟
 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5
- ۱۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{[\sin x + 1]}{x + 1}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{\pi + 2}$ (۲) $\frac{2}{\pi + 2}$ (۳) $\frac{\pi + 2}{2}$ (۴) $\pi + 2$
- ۱۸- حد تابع $y = \frac{[x^2 + 2]}{[x + 1]}$ وقتی $x \rightarrow \sqrt{2}$ چقدر است؟
 (۱) 2 (۲) 1 (۳) 4 (۴) 3
- ۱۹- تابع $y = (x^2 - 1)[x]$ در چند نقطه به طول صحیح دارای حد است؟
 (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار
- ۲۰- اگر $f(x) = \begin{cases} m[x] + n[-x] & x > 1 \\ m[x] - n[-x] & x < 1 \end{cases}$ در $x=1$ حد داشته باشد، حاصل $\frac{n}{m}$ کدام است؟
 (۱) 3 (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) 1 (۴) -1
- ۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}})^+} [\frac{1}{x}] - \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}})^-} [\frac{1}{x}]$ کدام است؟
 (۱) 1 (۲) 2 (۳) -2 (۴) -1
- ۲۲- با فرض $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟
 (۱) $-f(1)$ (۲) $1 - f(0)$ (۳) صفر (۴) موجود نیست.
- ۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} (\frac{x+2}{x-3}) \operatorname{sgn}(x+1)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) حد ندارد.



۲۴- چه تعداد از توابع زیر در نقطه‌ی $x = 0$ حد ندارند؟

الف) $f_1(x) = \sqrt{\sin x}$ ب) $f_2(x) = [\cos x]$ پ) $f_3(x) = \sin^{-1}(1-x)$

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۲۵- حد تابع $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi[-x]) & x \geq 0 \\ \frac{\sin|x|}{x} & x < 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) حد ندارد.

۲۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x^2 - 1](\sqrt{x} - 1)}{[\sin \pi x]}$ برابر کدام گزینه است؟

۱ (۱) صفر ۲ (۲) -۱ ۳ (۳) ۱ ۴ (۴) وجود ندارد.

۲۷- در تابع $f(x) = [-2x] + [\sin(\frac{\pi}{x})]$ ، مجموع حد چپ و راست اگر $x \rightarrow 2$ برابر کدام گزینه است؟

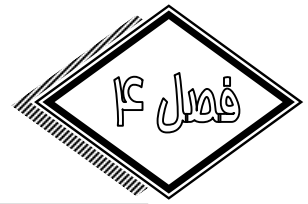
۱ (۱) -۸ ۲ (۲) -۹ ۳ (۳) -۱۰ ۴ (۴) -۷

۲۸- اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟ (سراسری - ۸۶)

۱ (۱) -۴ ۲ (۲) -۳ ۳ (۳) -۲ ۴ (۴) -۱

۲۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟ (سراسری - ۸۹)

۱ (۱) -۱ ۲ (۲) صفر ۳ (۳) ۱ ۴ (۴) موجود نیست.



قضایای حد و محاسبه‌ی حد توابع

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۳) به وضوح: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = (-1+a)^2$ و $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -2+1 = -1$ و معادله‌ی $(-1+a)^2 = -1$ جوابی حقیقی ندارد.

۲- گزینه‌ی (۲) حد تابع با جای‌گذاری $x = \frac{\pi}{4}$ در ضابطه‌ی آن به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} y = \frac{4\pi \times \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cot \frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1} = \pi\sqrt{2}$$

۳- گزینه‌ی (۴) می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow 1} \cos \pi x = -1$ پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

۴- گزینه‌ی (۳) حد چپ و راست را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+ : \sin |x| = \sin(-x) = -\sin x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} (-\sin x) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$-2 < -\frac{\pi}{2} < -1 \Rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}\right] = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} ([x] + a) = -2 + a$$

برای حد داشتن تابع باید داشته باشیم: $-2 + a = 1$ ، پس $a = 3$.

۵- گزینه‌ی (۳)

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq |f(x) - 1| \leq (x-1)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} 0 = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 1} |f(x) - 1| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

۶- گزینه‌ی (۴) برای $-2 < x < 2$ داریم $x^2 - 4 < 0$ ، پس همسایگی چپ $x = 2$ در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد، بنابراین تابع در $x = 2$ حد ندارد.

۷- گزینه‌ی (۳) قرار می‌دهیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 4}{f(x)} = \frac{L^2 + 4}{L} = 4 \Rightarrow L^2 - 4L + 4 = 0 \Rightarrow L = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

۸- گزینه‌ی (۲) با توجه به $\lim_{x \rightarrow 2} [\sqrt{x}] = [\sqrt{2}] = 1$ داریم: $\lim_{x \rightarrow 2^-} [\sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [\sqrt{x}] = 1$. دو حد دیگر را می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{x}{2}\right] = [1^+] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x}{2}\right] = [1^-] = 0 \Rightarrow \text{مجموع حدود} = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$$

۹- گزینه‌ی (۲) عدد $3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ صحیح نیست، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[x + \frac{\sqrt{x}}{2}\right] = \left[3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3 + 3 = 6$$

۱۰- گزینه‌ی (۲) می‌دانیم: $\lim_{x \rightarrow 2^+} [3x] = [6^+] = 6$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} [3x] = [6^-] = 5$ ، یعنی حد راست یک واحد از حد چپ بیش‌تر است. نتیجه‌ای

مشابه برای عبارات $[x]$ و $[x^2]$ وجود دارد. پس اگر اختلاف حد راست از چپ تابع اصلی را A بنامیم، داریم:

$$A = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} [3x] - \lim_{x \rightarrow 2^-} [3x]\right) + 2 \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] - \lim_{x \rightarrow 2^-} [x]\right) - \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} [x^2] - \lim_{x \rightarrow 2^-} [x^2]\right) = 1 + 2 \times 1 - 1 = 2$$



۱۱- گزینه ی (۲) وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ داریم: $[x] = -1$ ، پس صورت کسر صفر مطلق و مخرج آن صفر حدی می شود.

۱۲- گزینه ی (۲) می دانیم: $f(x) = a[x] + [x] + 1 = (a+1)[x] + 1$ پس:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= (a+1) \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + 1 = (a+1) \times 1 + 1 = (a+1) + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= (a+1) \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] + 1 = (a+1) \times 0 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a+1) = 0 \Rightarrow a = -1$$

۱۳- گزینه ی (۱) وقتی $x \rightarrow 0^-$ داریم: $|x| = -x$ و $[x] = -1$ ، بنابراین حد به صورت زیر می شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - (-1)}{2(-x) + (-1)} = \frac{-(-1)}{(-1)} = -1$$

۱۴- گزینه ی (۳) چون گزینه های سؤال همه اعداد حقیقی هستند (و هیچ کدام «حد موجود نیست» نمی باشد)، می توانیم مطمئن باشیم حد موردنظر وجود دارد و کافی است تنها حد راست آن را به دست آوریم: (البته اگر شک دارید می توانید به راحتی حد چپ تابع را نیز حساب کنید!)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x]([x] - 1) = 1 \times (1 - 1) = 0$$

۱۵- گزینه ی (۴) ضابطه ی تابع را می توانیم به صورت $f(x) = [x] + [-x] + 4$ بنویسیم.

همان طور که در بخش قبل نشان داده ایم، تابع $y = [x] + [-x]$ در همه ی نقاط $x \in \mathbb{R}$ حدی برابر ۱- دارد. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1 + 4 = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3, \quad f(3) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

۱۶- گزینه ی (۱)

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow -x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow [-x] = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2) = 2$$

۱۷- گزینه ی (۲)

$$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \Rightarrow \sin x \rightarrow 1^- \Rightarrow [\sin x] = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{[\sin x] + 1}{x + 1} = \frac{1}{x + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{2}{\pi + 2}$$

۱۸- گزینه ی (۱) داریم: $f(x) = \frac{[x^2 + 2]}{[x + 1]} = \frac{2 + [x^2]}{1 + [x]}$ وقتی $x \rightarrow \sqrt{2}$ ، هر دو عبارت x^2 و x دارای حدهایی با مقادیر غیر صحیح هستند،

پس می توانیم با اطمینان مقادیر آن ها را در جزء صحیح جای گذاری کنیم. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{2 + [x^2]}{1 + [x]} = \frac{2 + [(\sqrt{2})^2]}{1 + [\sqrt{2}]} = \frac{2 + [2]}{1 + [1]} = \frac{2 + 2}{1 + 1} = 2$$

۱۹- گزینه ی (۳) تابع $f_1(x) = [x]$ در هیچ نقطه ای با طول صحیح دارای حد نیست. تابع $f_2(x) = x^2 - 1$ در تمام نقاط دارای حد است. نتایج

زیر قابل اثبات اند:

۱- در نقاط $x = \pm 1$ تابع $y = f_1 f_2$ حدی برابر صفر دارد، زیرا در این نقاط $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f_2(x) = 0$ و تابع f_1 تابعی کران دار است.

۲- در نقاط $x = n$ که $n \in \mathbb{Z} - \{\pm 1\}$ ، تابع y حد ندارد. زیرا در این نقاط داریم:

$$\lim_{x \rightarrow n^+} (x^2 - 1)[x] = (n^2 - 1)n, \quad \lim_{x \rightarrow n^-} (x^2 - 1)[x] = (n^2 - 1)(n - 1)$$

۲۰- گزینه ی (۲) حدهای چپ و راست را به دست می آوریم:

$$x \rightarrow 1^+ : x > 1 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow -x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = m[1^+] + n[(-1)^-] = m - 2n$$

$$x \rightarrow 1^- : x < 1 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow -x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m[1^-] + n[(-1)^+] = m \times 0 - n \times (-1) = n$$

برای آن که $f(x)$ در $x = 1$ حد داشته باشد، باید $m - 2n = n$ ، یعنی $m = 3n$

۲۱- گزینه‌ی (۴) دو حد را جداگانه به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^+ \Rightarrow x > -\frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{x} < -\gamma \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow (-\gamma)^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^+} \left[\frac{1}{x}\right] = [(-\gamma)^-] = -\gamma$$

$$x \rightarrow \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^- \Rightarrow x < -\frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{x} > -\gamma \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow (-\gamma)^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^-} \left[\frac{1}{x}\right] = [(-\gamma)^+] = -\gamma$$

۲۲- گزینه‌ی (۱) اولاً چون همواره $x \leq [x]$ ، پس $x - [x] \geq 0$ ، در نتیجه $D_f = R$ اکنون داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} ((-1) + \sqrt{x - (-1)}) = (-1) + \sqrt{0} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} ((-2) + \sqrt{x - (-2)}) = -2 + \sqrt{-1 + 2} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 = -f(1)$$

۲۳- گزینه‌ی (۴) حدهای چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x + 1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x+2}{x-3}\right) = \frac{-1+2}{-1-3} = -\frac{1}{4}$$

$$x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x + 1) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\frac{x+2}{x-3}\right) = \frac{1}{4}$$

۲۴- گزینه‌ی (۲) الف) برای $-\pi < x < 0$ داریم: $\sin x < 0$ ، پس همسایگی چپ صفر در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد و تابع در $x = 0$ حد ندارد.

ب) وقتی $x \rightarrow 0$ ، $\cos x \rightarrow 1^-$ ، پس: $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x] = 0$ ، تابع در $x = 0$ حد دارد.

پ) داریم: $D_{f_p} = \{x \mid -1 \leq 1 - x \leq 1\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ ، پس همسایگی چپ $x = 0$ در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد.

۲۵- گزینه‌ی (۱) حدهای چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow -x \rightarrow 0^- \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(\pi[-x]) = \cos(-\pi) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} \xrightarrow{\text{فشردگی}} -1$$

۲۶- گزینه‌ی (۴) وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، داریم: $\pi x \rightarrow \pi^-$ ، پس طبق نمودار تابع $y = \sin x$ (یا دایره‌ی مثلثاتی) داریم: $\sin(\pi x) \rightarrow 0^+$ ، بنابراین $[\sin \pi x] = 0$ ، پس همسایگی چپ نقطه‌ی $x = 1$ در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ وجود ندارد.

۲۷- گزینه‌ی (۲) حدهای چپ و راست را جداگانه به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 2^+ : x > 2 \Rightarrow \begin{cases} -2x < -4 \Rightarrow -2x \rightarrow (-4)^- \Rightarrow [-2x] = -5 \\ \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{x} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \rightarrow 1^- \Rightarrow \left[\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4 + 0 = -4 \quad \text{پس:} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -5 + 0 = -5 \quad \text{با شیوه‌ی مشابهی داریم:}$$

۲۸- گزینه‌ی (۲) با استفاده از قضایای حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 2a - (a - 1) = a + 2 \xrightarrow{\text{فرض}} a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$$

۲۹- گزینه‌ی (۳) داریم: $x^3 - x = x(x^2 - 1)$ ، وقتی $x \rightarrow 0^-$ داریم: $x^2 - 1 < 0$ و $x < 0$ ، پس $x(x^2 - 1) \rightarrow 0^+$ ، بنابراین در واقع $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ را می‌خواهیم که برابر است با $\sqrt{1-0} = 1$.