کسرهای مصری

نوشتن یک عدد گویا به‌صورت کسرهای مصری، نوشتن آن عدد به‌صورت مجموعی از کسرهایی است که صورت آن کسرها ۱ و مخرج‌شان یک عدد طبیعی است به‌طوری که مخرج کسرها تکراری نباشند. به عنوان مثال $\frac{۴۳}{۴۸}$ را می‌توان به‌صورت $\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}$ نمایش داد.

سؤالی که در اینجا می‌توان مطرح کرد این است که آیا هر عدد گویایی را می‌توان به صورت کسرهای مصری نوشت؟ پاسخ این سؤال مثبت است. یعنی هر عدد گویایی را می‌توان به صورت کسرهای مصری نوشت.

فیبوناچی[1] روش «حریصانه» را ارائه کرد و به‌وسیله‌ی آن اثبات کرد که هر عدد گویا را می‌توان به‌صورت کسرهای مصری نوشت.

روش حریصانه به این صورت است که در هر مرحله، بزرگ‌ترین کسر واحدی را (با صورت ۱) که مقدار آن از عدد گویای مورد نظرمان کوچک‌تر است، به عنوان یکی از کسرهای موجود در کسرهای مصری در نظر می‌گیریم.

این نحوه‌ی بیان شاید تا حدی پیچیده باشد. بیان‌مان را با ذکر مثالی روشن می‌کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم $\frac{۴}{۱۳}$ را به‌صورت کسرهای مصری بنویسیم. بزرگ‌ترین کسر با صورت واحد $\frac{۱}{۲}$ است که $\frac{۱}{۲}$ نمی‌تواند جزء کسرهای مصری عدد $\frac{۴}{۱۳}$ باشد. زیرا $\frac{۱}{۲}$ از $\frac{۴}{۱۳}$ بزرگ‌تر است $\left(\frac{۱}{۲}>\frac{۴}{۱۳}\right)$. بعد از $\frac{۱}{۲}$، باید $\frac{۱}{۳}$ را امتحان کنیم. $\frac{۱}{۳}$ هم نمی‌تواند جزء کسرهای مصری عدد $\frac{۴}{۱۳}$ باشد. زیرا $\frac{۱}{۳}$ هم از $\frac{۴}{۱۳}$ بزرگ‌تر است $\left(\frac{۱}{۳}>\frac{۴}{۱۳}\right)$. ولی $\frac{۱}{۴}$ می‌تواند جزء کسرهای مصری عدد $\frac{۴}{۱۳}$ باشد. زیرا $\frac{۱}{۴}<\frac{۴}{۱۳}$ است.

$$\frac{۴}{۱۳}=\frac{۱}{۴}+\cdots$$

حال باید $\frac{۱}{۴}-\frac{۴}{۱۳}$ را محاسبه کنیم که می‌شود $\frac{۳}{۵۲}$ و کسرهای بعدی را با عدد $\frac{۳}{۵۲}$ مقایسه می‌کنیم. کسر $\frac{۱}{۵}$ نمی‌تواند جزء کسرهای مصری باشد. زیرا $\frac{۱}{۵}$ از عدد $\frac{۳}{۵۲}$ بزرگ‌تر است. به همین شکل اگر ادامه دهیم، به کسر $\frac{۱}{۱۸}$ می‌رسیم.

$$\frac{۴}{۱۳}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۸}+\cdots$$

۱. fibonacci

سپس باید $\frac{۱}{۱۸} - \frac{۳}{۵۲}$ را محاسبه کنیم که می‌شود $\frac{۱}{۴۶۸}$. بنابراین

$$\frac{۴}{۱۳} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۸} + \frac{۱}{۴۶۸}$$

در روش «حریصانه» اعدادی که در مخرج کسرهای مصری به‌دست می‌آیند، شاید کمی بزرگ باشند و محاسبات را سخت بکنند؛ ولی مزیت این روش این است که با آن هر عدد گویا را می‌توان به‌صورت کسرهای مصری نوشت.

برای نوشتن اعداد گویا به‌صورت کسرهای مصری، روش‌های گوناگون دیگری نیز موجود است. ولی آن روش‌ها برای هر عدد گویایی کار نمی‌کند و بعضی اعداد خاص را می‌توان با آن روش‌ها به‌صورت کسرهای مصری نوشت. اگر بخواهیم عدد $\frac{۵}{۱۲۱}$ را با استفاده از روش «حریصانه» به‌صورت کسرهای مصری بنویسیم، چنین می‌شود:

$$\frac{۵}{۱۲۱} = \frac{۱}{۲۵} + \frac{۱}{۷۵۷} + \frac{۱}{۷۶۳۳۰۹} + \frac{۱}{۸۷۳۹۶۰۱۸۰۹۱۳} + \frac{۱}{۱۵۲۷۶۱۲۷۹۵۶۴۲۰۹۳۴۱۸۸۴۶۲۲۵}$$

اما $\frac{۵}{۱۲۱}$ را به‌صورت‌های دیگری نیز می‌توان به‌صورت کسرهای مصری نمایش داد.

$$\frac{۵}{۱۲۱} = \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۲۴۲} + \frac{۱}{۶۰۵} + \frac{۱}{۷۲۶} + \frac{۱}{۱۲۱۰}$$

و یا به‌صورت خیلی ساده‌تر:

$$\frac{۵}{۱۲۱} = \frac{۱}{۳۳} + \frac{۱}{۱۲۱} + \frac{۱}{۳۶۳}$$

همان‌طور که ملاحظه کردید با استفاده از روش «حریصانه» معمولاً کسرهای چاقی به‌دست می‌آیند. ولی اگر از روش‌های دیگری استفاده کنیم، با استفاده از کسرهای لاغرتر، می‌توان یک عدد گویا را به‌صورت کسرهای مصری نوشت.

در ادامه به بعضی از این روش‌ها اشاره خواهیم کرد. البته این روش‌ها برای هر عدد گویایی جواب نمی‌دهند. رابطه‌ی زیر در تبدیل اعداد گویا به کسرهای مصری بسیار مفید است. در این رابطه، p، q و z اعداد طبیعی هستند و $p+q$ بر z بخش‌پذیر است.

$$\frac{z}{pq} = \frac{۱}{\frac{p(p+q)}{z}} + \frac{۱}{\frac{q(p+q)}{z}} \qquad \text{«رابطه‌ی ۱»}$$

رابطه‌ی بالا به سادگی اثبات می‌شود. برای اثبات چنین عمل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\frac{p(p+q)}{z}}+\frac{۱}{\frac{q(p+q)}{z}}=\frac{q+p}{\frac{pq(p+q)}{z}}=\frac{(q+p)}{\frac{pq}{z}(p+q)}=\frac{۱}{\frac{pq}{z}}=\frac{z}{pq}$$

با استفاده از رابطه‌ی ۱، کسرهای مصری $\frac{۲}{۳۵}$ به‌صورت زیر است.

$$\frac{۲}{۳۵}=\frac{۲}{۵\times ۷}=\frac{۱}{\frac{۵\times(۵+۷)}{۲}}+\frac{۱}{\frac{۷\times(۵+۷)}{۲}}=\frac{۱}{۵\times ۶}+\frac{۱}{۷\times ۶}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۴۲}$$

۱. با قرار دادن $z=۲$، $p=۱$ و $q=۷$ در رابطه‌ی ۱، کسرهای مصری عدد $\frac{۲}{۷}$ را بنویسید.

۲. عدد $\frac{۲}{۹۹}$ را به سه روش مختلف، با استفاده از رابطه‌ی ۱ به‌صورت کسرهای مصری بنویسید.

در رابطه‌ی ۱، قرار دهید $z=۱$ و $q=۱$؛ در نتیجه به رابطه‌ی جدیدی می‌رسیم که آن را رابطه‌ی ۲ نام‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{۱}{p}=\frac{۱}{(p+۱)}+\frac{۱}{p(p+۱)} \qquad \text{«رابطه‌ی ۲»}$$

۳. با استفاده از رابطه‌ی ۲ توضیح دهید که هر عدد گویا را می‌توان به بی‌نهایت روش به‌صورت کسرهای مصری نوشت.

اگر در طرفین رابطه‌ی ۲، عدد ۲ را ضرب کنیم، به رابطه‌ی ۳ می‌رسیم.

$$\frac{۲}{p}=\frac{۲}{(p+۱)}+\frac{۲}{p(p+۱)} \qquad \text{«رابطه‌ی ۳»}$$

در رابطه‌ی ۳، اگر p فرد باشد، $\frac{۲}{p}$ به‌صورت کسرهای مصری نوشته خواهد شد.

۴. با استفاده از رابطه‌ی ۳، اعداد گویای زیر را به‌صورت کسرهای مصری بنویسید.

$$\frac{۲}{۷} =$$

$$\frac{۲}{۹۹} =$$

$$\frac{۲}{۳۵} =$$

برای اعداد گویایی مانند $\frac{z}{pq}$ که مخرج آنها یک عدد مرکب است، می‌توان کسرهای مصری $\frac{z}{p}$ را به‌دست آورد. و سپس مخرج کسرهای مصری $\frac{z}{p}$ را در عدد q ضرب کرد. به عنوان مثال اگر بخواهیم کسرهای مصری $\frac{۳}{۱۶}$ را بنویسیم، چون می‌دانیم $\frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۱۶}$، پس می‌توان کسرهای مصری $\frac{۳}{۴}$ را محاسبه کرد و سپس عدد ۴ را در مخرج کسرهای مصری ضرب کرد.

$$\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۱۶} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\right) = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶}$$

۵. اعداد گویای زیر را با استفاده از روش بالا، به‌صورت کسرهای مصری بنویسید.

$$\frac{۲}{۳۵} =$$

$$\frac{۲}{۹۹} =$$

همچنین با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توان هر عدد گویا را که صورت آن عدد ۲ است، به‌صورت کسرهای مصری نوشت.

$$\frac{۲}{p} = \frac{۱}{p} + \frac{۱}{۲p} + \frac{۱}{۳p} + \frac{۱}{۶p} \qquad \text{«رابطه‌ی ۴»}$$

۶. درستی رابطه‌ی ۴ را نشان دهید.

۷. با استفاده از رابطه‌ی ۴، اعداد گویای زیر را به‌صورت کسرهای مصری بنویسید.

$$\frac{۲}{۷} =$$

$$\frac{۲}{۹۹} =$$

$$\frac{۲}{۳۵} =$$

از رابطه‌ی زیر نیز می‌توان برای تبدیل بعضی از اعداد گویا به کسرهای مصری استفاده کرد.

$$\frac{a}{ab-۱} = \frac{۱}{b} + \frac{۱}{b(ab-۱)} \qquad \text{«رابطه‌ی ۵»}$$

همان‌طور که می‌بینید در سمت چپ تساوی، «مخرج به‌علاوه‌ی ۱» بر صورت بخش‌پذیر می‌شود. (یعنی $(ab-۱)+۱$ بر a بخش‌پذیر می‌شود.)

به عنوان مثال اگر بخواهیم عدد $\frac{۹}{۱۷}$ را به‌صورت کسرهای مصری بنویسیم، چنین عمل می‌کنیم:

چون $(۱۷+۱)$ بر ۹ بخش‌پذیر است، می‌توان از رابطه‌ی ۵ استفاده کرد.

$$\frac{۹}{۱۷} = \frac{۹}{۹\times۲-۱} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲(۹\times۲-۱)} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲\times۱۷} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳۴}$$

۸. اعداد زیر را با استفاده از رابطه‌ی ۵، به‌صورت کسرهای مصری بنویسید.

$$\frac{۲}{۲۹} =$$

$$\frac{۳}{۲۹} =$$

$$\frac{۵}{۲۹} =$$

$$\frac{۱۰}{۲۹} =$$

$$\frac{۲}{۱۷} =$$

$$\frac{۹}{۱۷} =$$

$$\frac{۶}{۲۳} =$$

$$\frac{۴}{۲۳} =$$

۹. با استفاده از تمرین قبل، اعداد زیر را به صورت کسرهای مصری بنویسید.

$\frac{۱۳}{۲۹} =$ $\qquad$ $\frac{۱۱}{۱۷} =$

$\frac{۲۰}{۲۹} =$ $\qquad$ $\frac{۱۰}{۲۳} =$

۱۰. عدد $\frac{۵}{۱۲۱}$ را با استفاده از روش‌هایی که در ادامه پیشنهاد می‌شود، به‌صورت کسرهای مصری بنویسید.

الف) با استفاده از رابطه‌ی $\left(\frac{۲}{۱۱}\right)^{۲} + \frac{۱}{۱۲۱} = \frac{۵}{۱۲۱}$

ب) با استفاده از رابطه‌ی $\frac{۱}{۱۱} \times \frac{۴}{۱۱} + \frac{۱}{۱۲۱} = \frac{۵}{۱۲۱}$

ج) نوشتن کسرهای مصری عدد $\frac{۵}{۱۱}$ و ضرب هر مخرج در عدد ۱۱. $\left(\frac{۳}{۱۱} + \frac{۲}{۱۱} = \frac{۵}{۱۱}\right)$

۱۱. نشان دهید که اگر b یک عدد فرد باشد، $\frac{۲}{b}$ را می‌توان با استفاده از ۲ کسر به‌صورت کسرهای مصری نوشت.

۱۲. نشان دهید که اگر b یک عدد زوج باشد، $\frac{۳}{b}$ را می‌توان با استفاده از ۲ کسر به‌صورت کسرهای مصری نوشت.

۱۳. نشان دهید که اگر b مضربی از ۳ باشد، در این صورت $\frac{۲}{b}$ را می‌توان با استفاده از ۲ کسر به‌صورت کسرهای مصری نوشت.

۱۴. نشان دهید که اگر b مضربی از ۵ باشد، در این صورت $\frac{۲}{b}$ را می‌توان با استفاده از ۲ کسر به‌صورت کسرهای مصری نوشت.