Kinematics سینماتیک

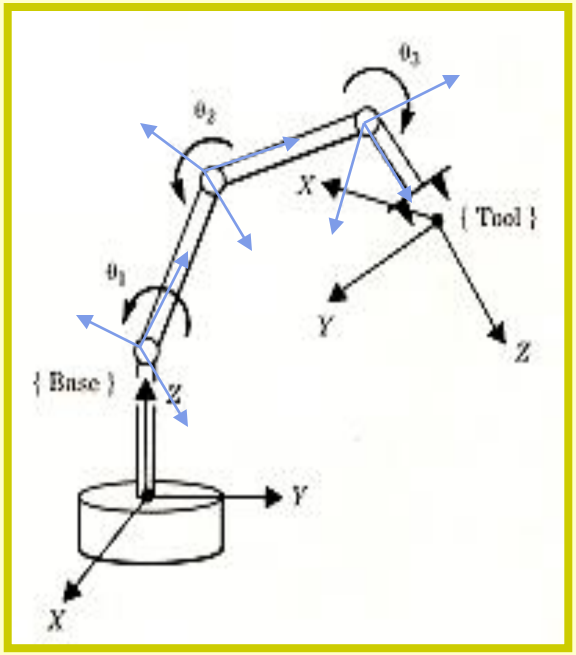
Kinematics سینماتیک

- معمولا مطالعه سینماتیک نقطه شروع استاندارد درس روباتیک است.
- سینماتیک علاوه بر روباتیک در سایر علوم نظیر گرافیک و انیمیشن نیز کاربرد دارد.

سینماتیک :

- عبارت است از مطالعه تحلیلی هندسه حرکت روبات :
  - نسبت به یک محور مختصات ثابت
  - نسبت به نیرو ها و یا گشتاوری که باعث حرکت میشوند

بحث سینماتیک برای روباتهای صنعتی



A 3-DOF Manipulator Arm

- در بحث سینماتیک مستقیم روباتهای صنعتی روشی ارائه میشود که موقعیت و جهت لینک ها و ابزار روبات را بصورت تابعی از متغیرهای مفصل ها نسبت به محور مرجع محاسبه میکند.
- برای اینکار فریمهای مختصاتی به هر بخش از مکانیزم روبات وصل شده و سپس ارتباط بین این محورها بیان میشود.

Manipulators

- بازوی روباتیک و یا روبات صنعتی از تعدادی اتصال صلب (link) تشکیل میشودکه توسط مفاصل (joints) به هم متصل میشوند.
- مفصل ها ممکن است چرخشی و یا رفت و بر گشتی باشند.
- برای حرکت دادن مفاصل روبات از موتور و یا سیستم هیدرولیک استفاده میشود.
- در انتهای روبات یک ابزار قرار میگیرد که بر روی صفحه ای در مچ روبات نصب میشود.

طرح های متداول روباتهای صنعتی

SCARA

Cylindrical

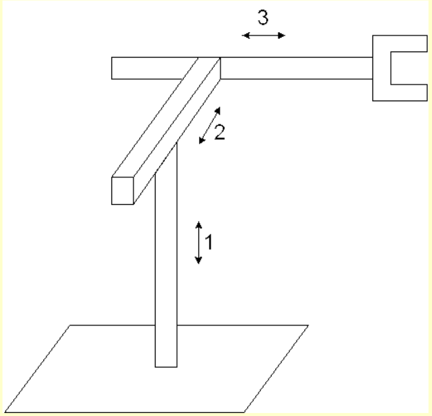
Articulated

Spherical

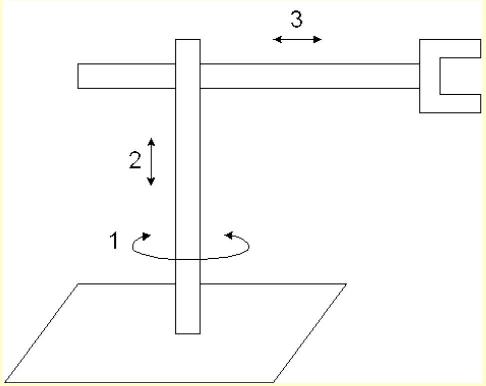
Cartesian

Manipulators

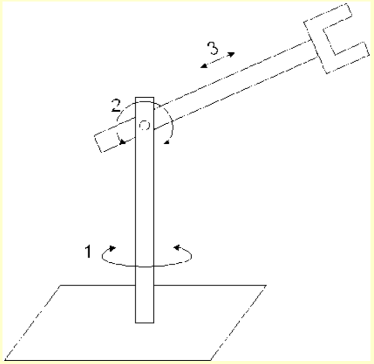
- Robot Configuration:



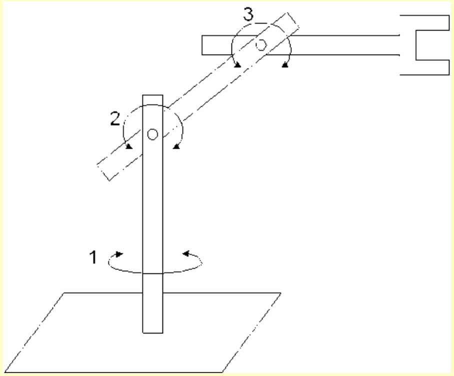
Cartesian: PPP



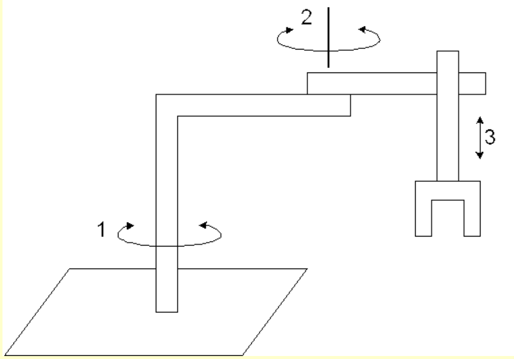
Cylindrical: RPP



Spherical: RRP

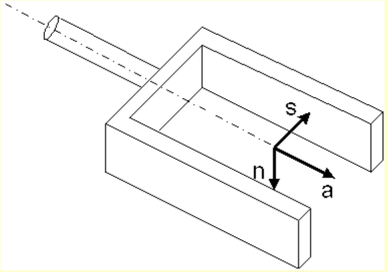


Articulated: RRR



SCARA: RRP

(Selective Compliance Assembly Robot Arm)



Hand coordinate:

n: normal vector; **s**: sliding vector;

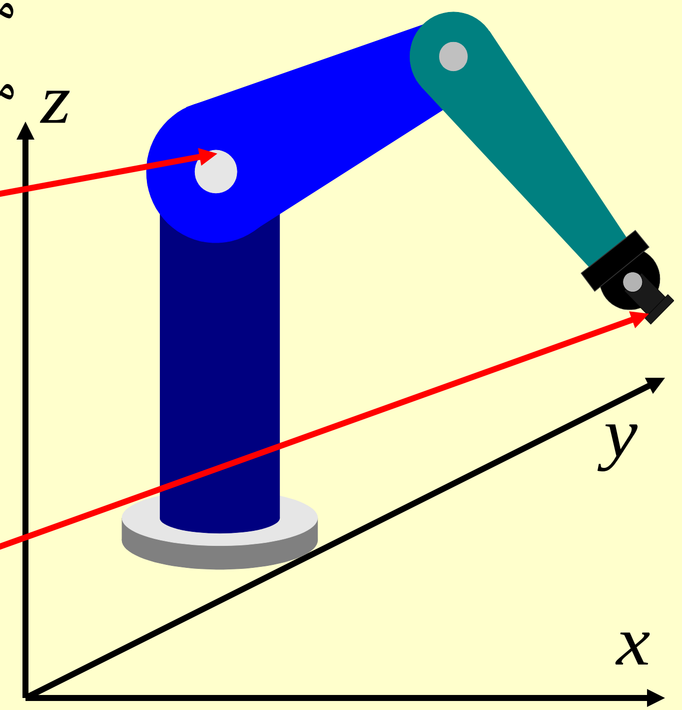
a: approach vector, normal to the tool mounting plate

Manipulators

- روبات صنعتی با مشخصات زیر شناخته میشود:
  - تعداد محورها
    - محورهای اصلی 3-1 : که برای تعیین موقعیت بازو بکار میروند
    - محورهای فرعی 6-4 : که برای جهت دادن به ابزار بکار میروند.
    - محورهای اضافی n-7 : که برای پرهیز از موقعیت های نامطلوب بکار میروند.
  - درجه آزادی: Degree of Freedom (DOF)
  - فضای کاری: Workspace
  - ظرفیت بار : Payload (load capacity)
  - دقت و تکرارپذیری: Precision v.s. Repeatability

بحث سینماتیک برای روباتهای صنعتی

- میخواهیم با در دست داشتن مختصات مفاصل روبات مشخص کنیم که انتهای روبات در چه نقطه ای از فضا قرار میگیرد و چه جهتی پیدا میکند.



Given joint variables

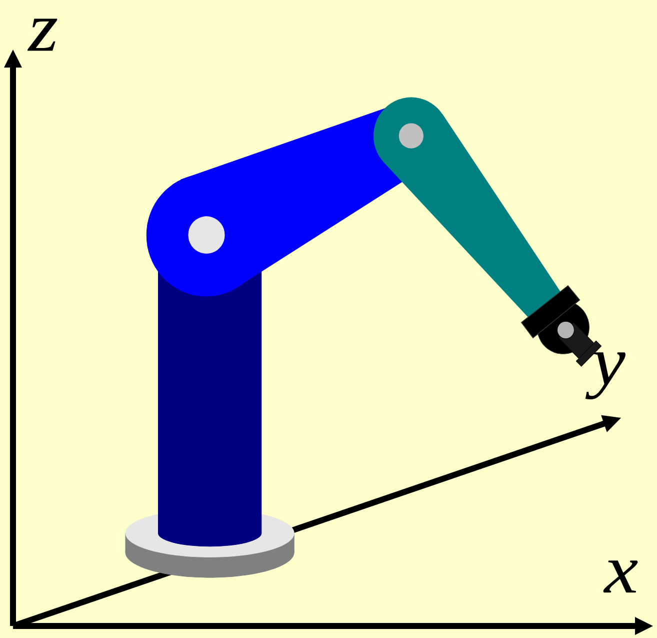
$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \cdots \theta_n)$$

$$Y = (x, y, z, O, A, T)$$

End-effector position and orientation, -Formula?

بحث سینماتیک معکوس برای روباتهای صنعتی

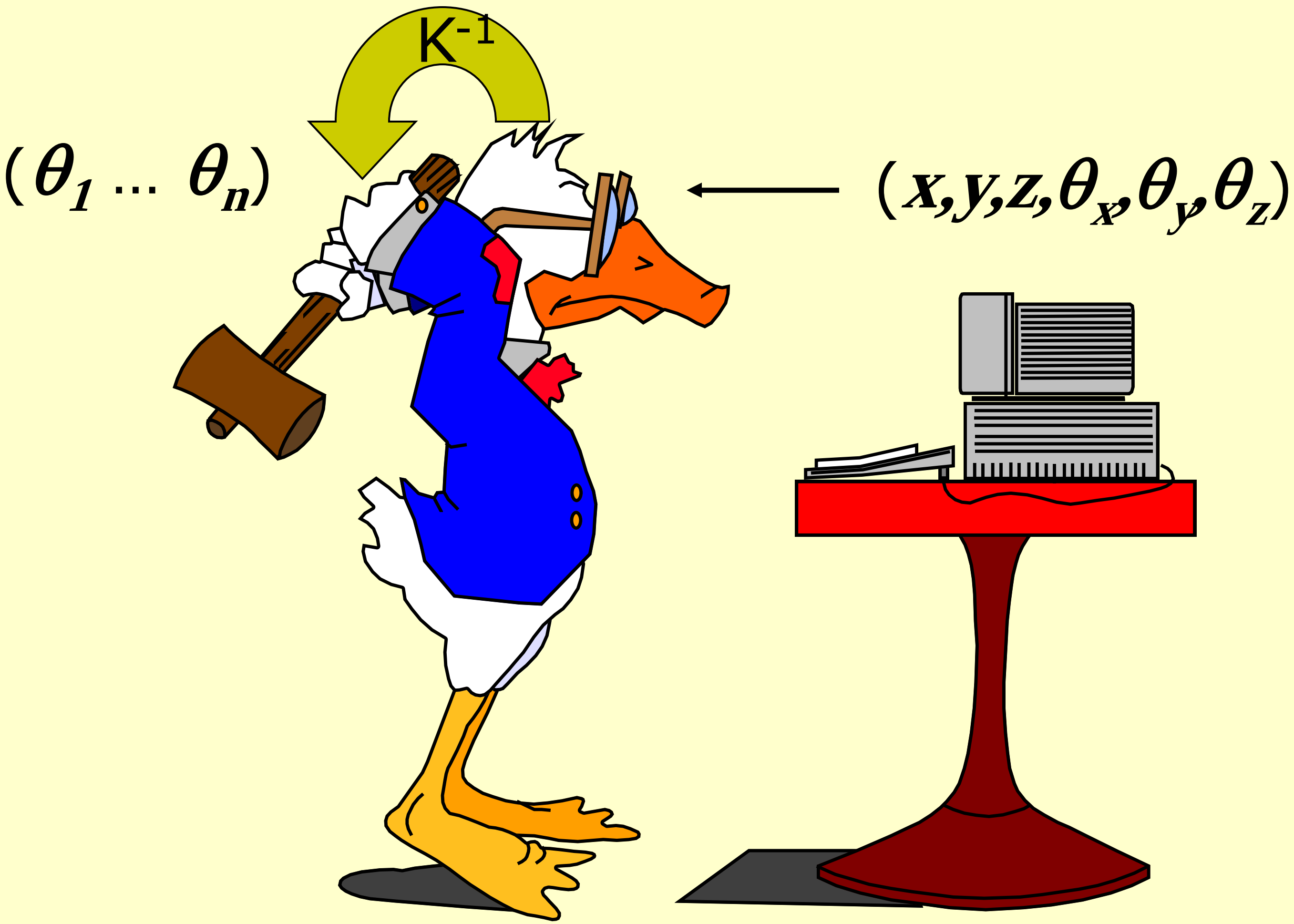
- میخواهیم با داشتن نقطه انتهائی روبات (P) و همچنین معلوم بودن جهتی که روبات باید به این نقطه نزدیک شود(R) مختصات مفاصل روبات را بگونه ای پیدا کنیم که روبات در موقعیت مورد نظر قرار گیرد.



Position (P) & Orientation (R) of the end-effector

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n)$$

سینماتیک معکوس



مثال

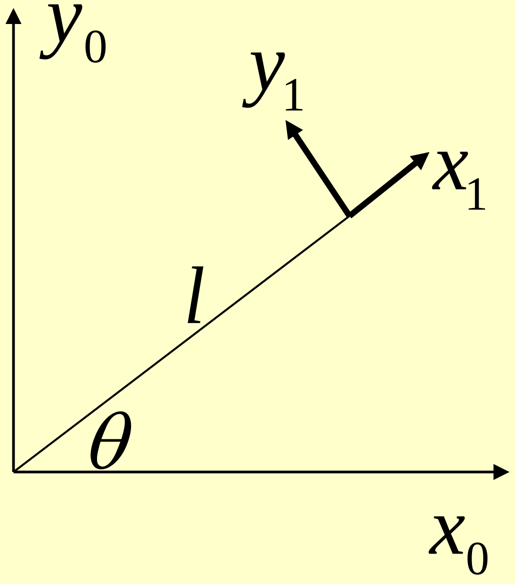
Forward kinematics

$$x_0 = l\cos\theta$$

$$y_0 = l\sin\theta$$

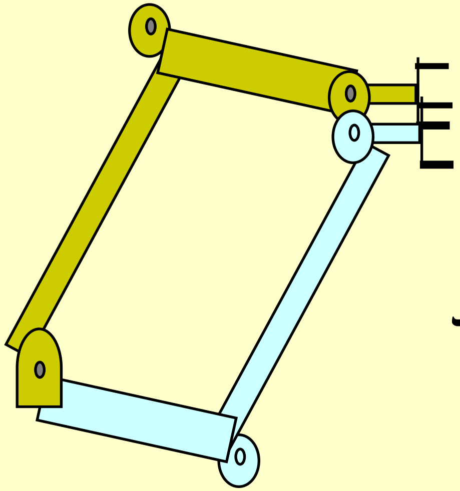
Inverse kinematics

$$\theta = \cos^{-1}(x_0 / l)$$



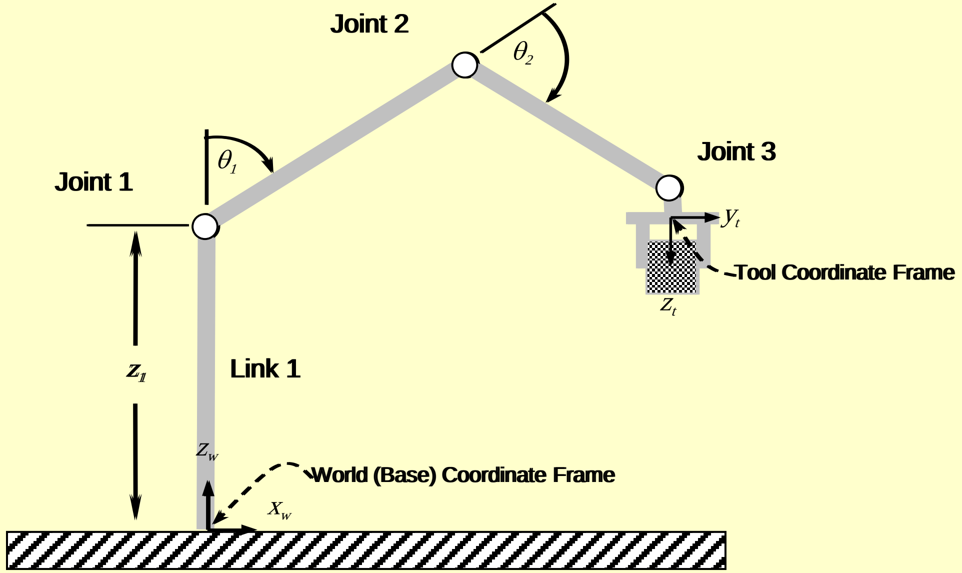
بحث سینماتیک معکوس برای روباتهای صنعتی

- بحث سینماتیک معکوس سخت تر از سینماتیک مستقیم است زیرا:
  - معادلات حاصله غیر خطی بوده و از اینرو همیشه راه حل سیستماتیکی برای حل آنها بصورت closed form وجود ندارد.
  - راه حل منحصر بفرد نیست.
  - راه حل بستگی به مشخصات روبات دارد



2 solutions!

سینماتیک مستقیم و معکوس



Link Space

n variables

$(\theta_1 \ldots \theta_n)$

Forward K

Inverse K

Tool Space

6 variables

$(x,y,z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)$

سینماتیک روباتهای متحرک

- مطالعه سینماتیک روباتهای متحرک در دو زمینه لازم است:
  - طراحی مناسب روبات برای انجام عمل مورد نظر
  - نوشتن نرم افزار کنترلی روبات ساخته شده

- یک اختلاف مهم بین روبات متحرک و روبات صنعتی در اندازه گیری موقعیت است. روبات صنعتی در یک نقطه ثابت است لذا میتوان موقعیت آنرا نسبت به این نقطه ثابت اندازه گرفت.

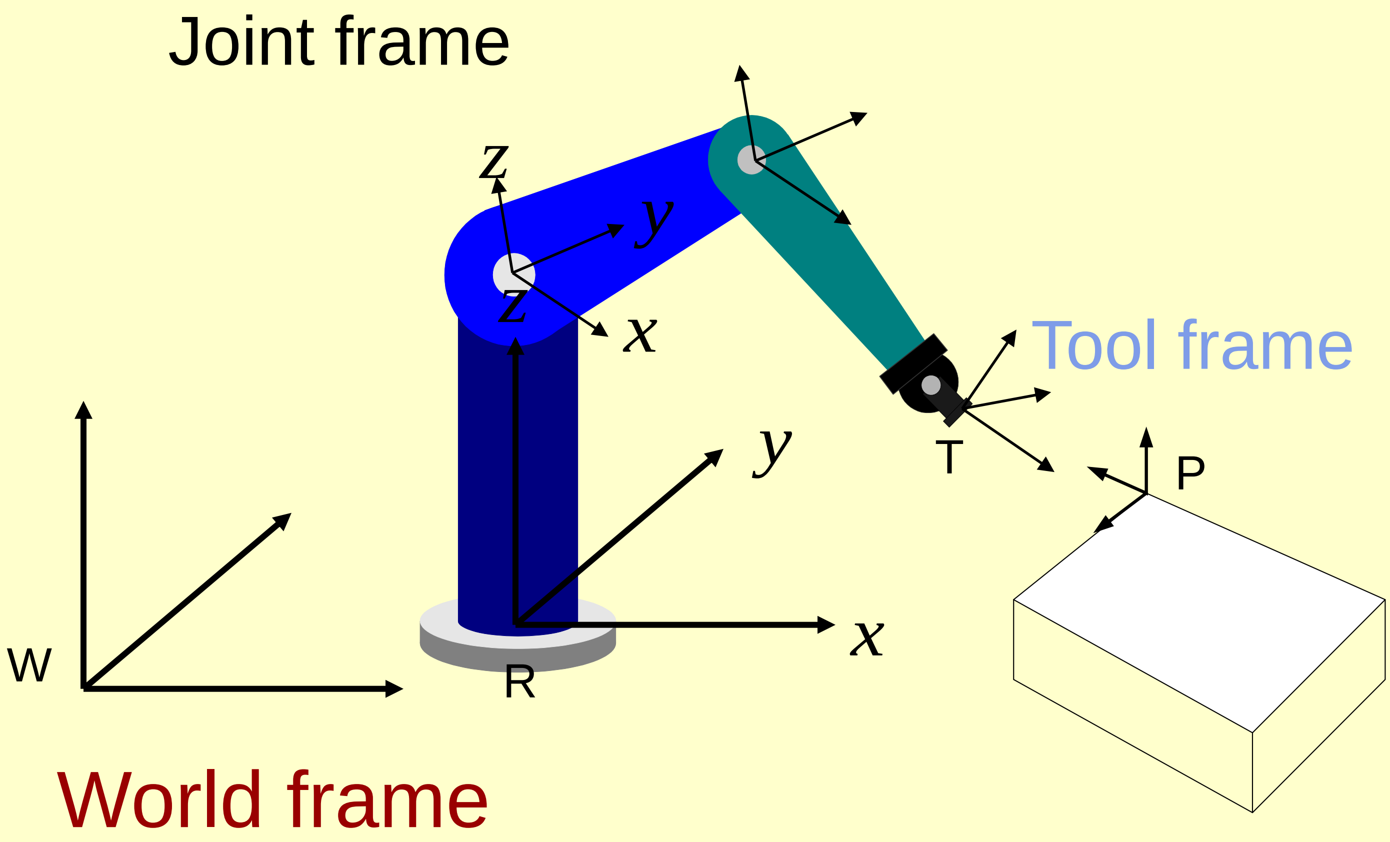
کنترل موقعیت یک روبات

- برای کنترل موقعیت یک روبات لازم است تا موارد زیر را بدانیم:
  - مدل سینماتیکی /دینامیکی روبات
  - مدل تعامل بین چرخ و زمین
  - تعریفی از حرکت مورد نیاز:
    - کنترل سرعت -کنترل موقعیت
  - قانون کنترلی که نیازمندیهای لازم را برآورده میکند.

محور های مختصات

- روباتهای صنعتی نیاز به انتقال ابزار یا قطعات در فضا دارند که لازمه آن داشتن مختصاتی برای نشان داده موقعیت ابزار، قطعات و بدنه روبات است.
- هنگام بررسی موقعیت یک روبات معمولا علاقمند هستیم که موقعیت آنرا نسبت به یک محور مختصات مرجع بسنجیم .
- در حالیکه حرکت اجزای یک روبات نظیر چرخها، محل قرار گرفتن سنسورها، و غیره نسبت به بدنه روبات اندازه گیری میشوند.
- از اینرو لازم است تا موقعیت روبات ویا اهداف دیگر را که نسبت به موقعیت روبات اندازه گیری میشوند نسبت به محور مختصات مرجع بیان نمود.
- برای اینکار نیاز به تبدیل مختصات خواهد بود

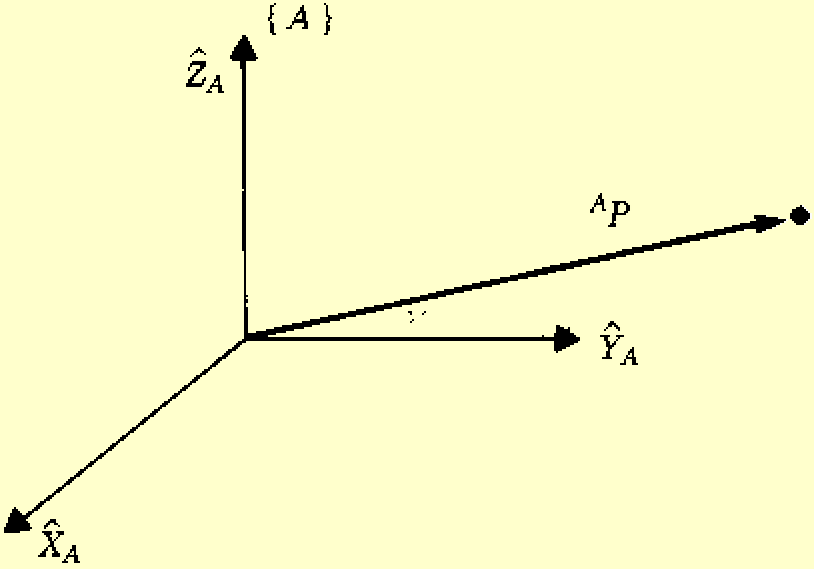
محورهای مرجع مختصات



نامگذاری محورهای مرجع مختصات

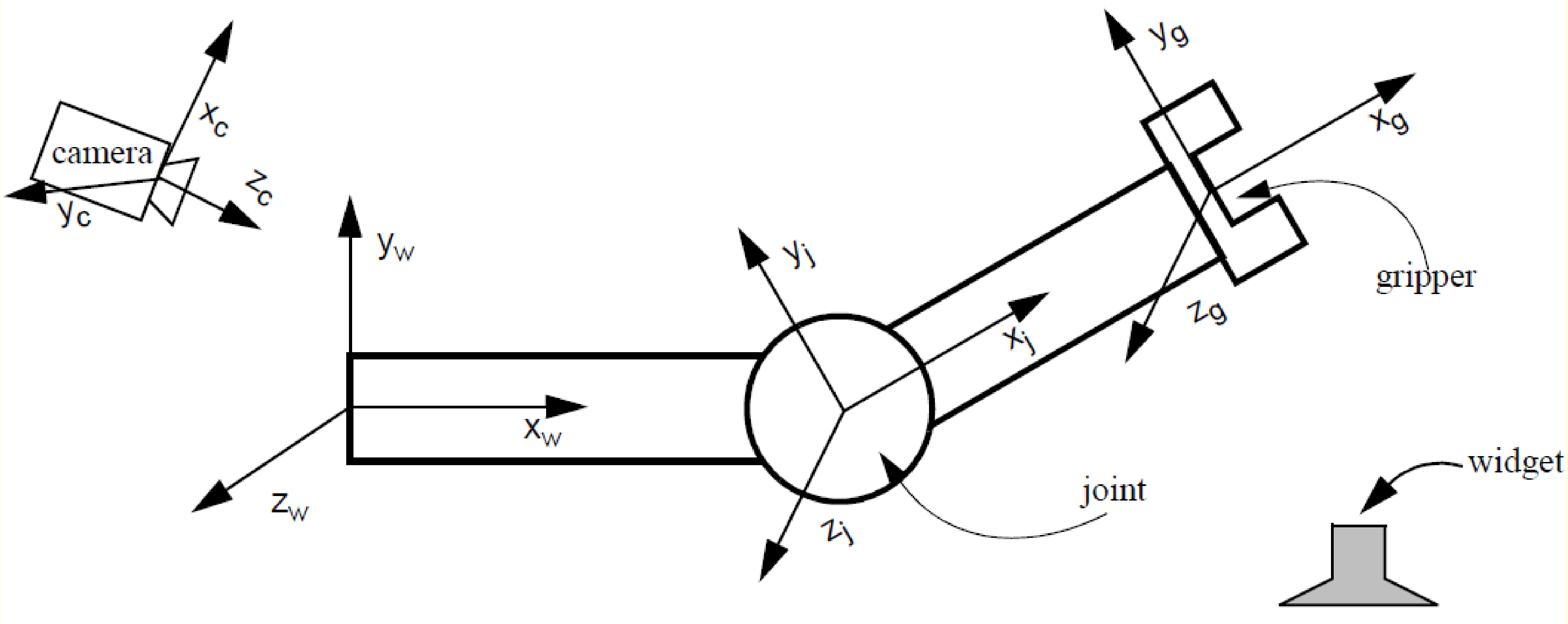
- بعلت اینکه ممکن است تعداد زیادی محور مختصات در یک سیستم وجود داشته باشد، میتوان برای نامگذاری آنها از حروف استفاده نمود: {A}
- در اینصورت برای نشان داده مختصات یک نقطه میتوان نام فریم مرجع را نیز ذکر کرد:

برای مثال ^{A}P مختصات نقطه P را نسبت به محور A نشان میدهد.



$$^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

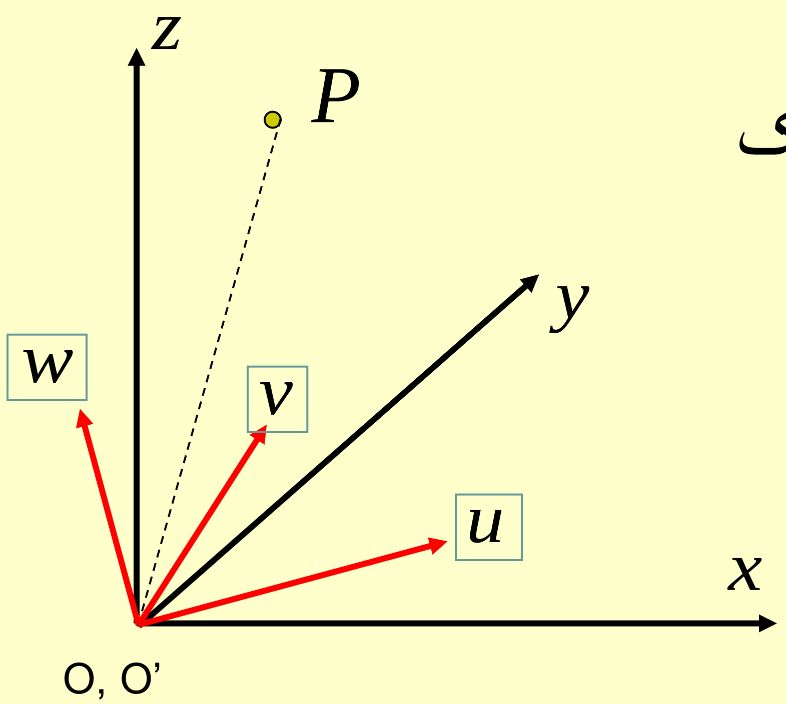
The Use of Multiple Coordinate Frames in Robotics



A very simple robot arm with one joint and one gripper. The world, camera, joint, and gripper coordinate frames are indicated

نامگذاری محورهای مرجع مختصات

- روش دیگری که برای نمایش نقاط و محور مختصات مربوطه بکار میرود بصورت زیر است:
- در این روش برای هر محور از یک



اسم 4 حرفی استفاده میشود:

نام مبدا و هر یک از محورهای سه گانه

- Oxyz
- O’uvw

- و هر بردار یا نقطه با اسامی محورهای مربوطه مشخص میشود.

P_{uvw} $\vec{P}_{uvw}$ P_{xyz} $\vec{P}_{xyz}$

نمایش نقطه و بردار

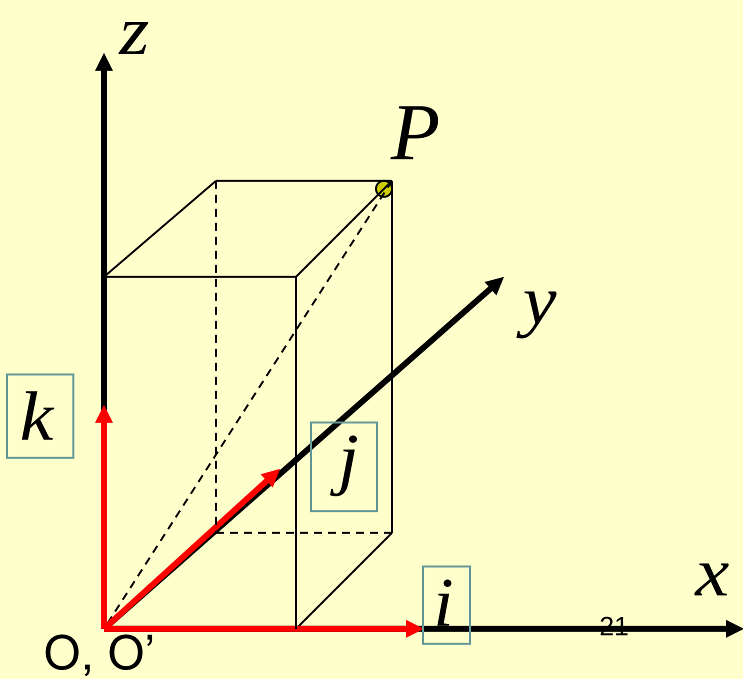
یک نقطه در فضا با سه مقدار مربوط به تصویر بردار مربوطه در محورهای سه گانه مشخص میشود.

Point represented in OXYZ:

$$P_{xyz} = [p_x, p_y, p_z]^T$$

Vector represented in OXYZ:

$$\vec{P}_{xyz} = p_x \mathrm{i}_{\mathrm{x}} + p_y \mathrm{j}_{\mathrm{y}} + p_z \mathrm{k}_{\mathrm{z}}$$

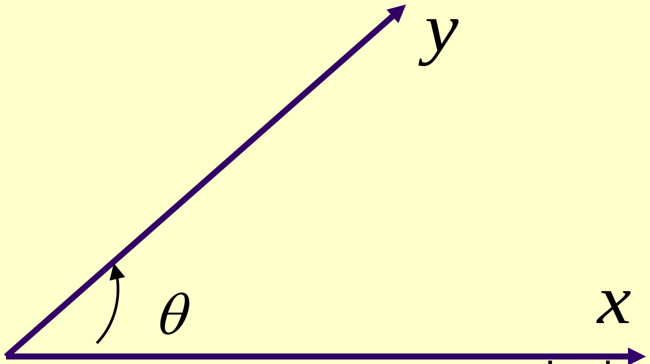


ضرب داخلی

یاد آوری ضرب داخلی بدلیل کاربرد ان در تبدیل مختصات مفید است.

Let x and y be arbitrary vectors in R^3 and θ be the angle from x to y, then

$$x \cdot y = |x||y|\cos\theta$$



Where θ is the **angle** between the vectors and $|x|$ is the **norm**.

X.Y=0 if **X** is **perpendicular** to **Y**.

ضرب داخلی

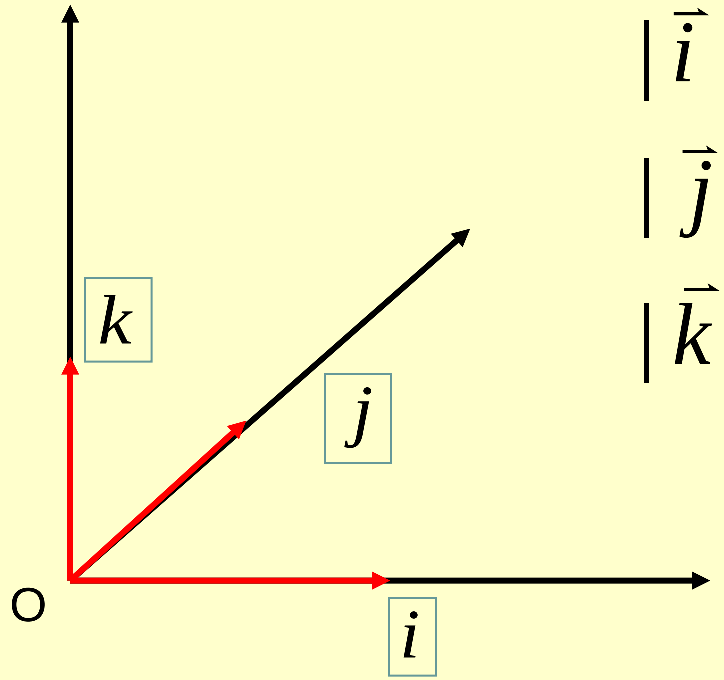
ویژگی های فریم مختصات متعامد

- Mutually perpendicular

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$



- Unit vectors

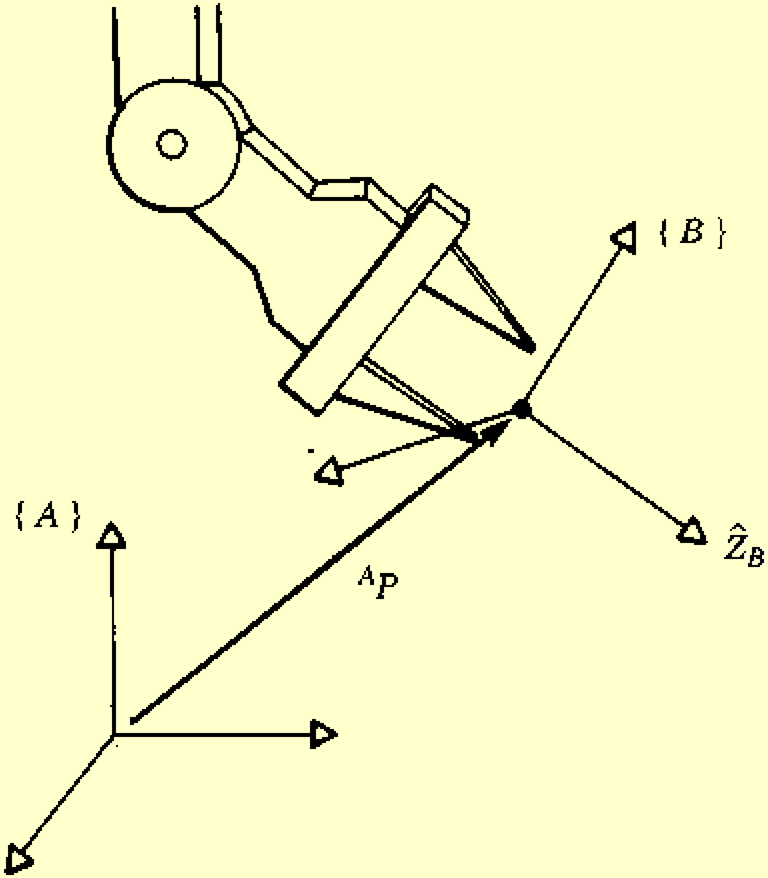
$$|\vec{i}| = 1$$

$$|\vec{j}| = 1$$

$$|\vec{k}| = 1$$

نمایش جهت

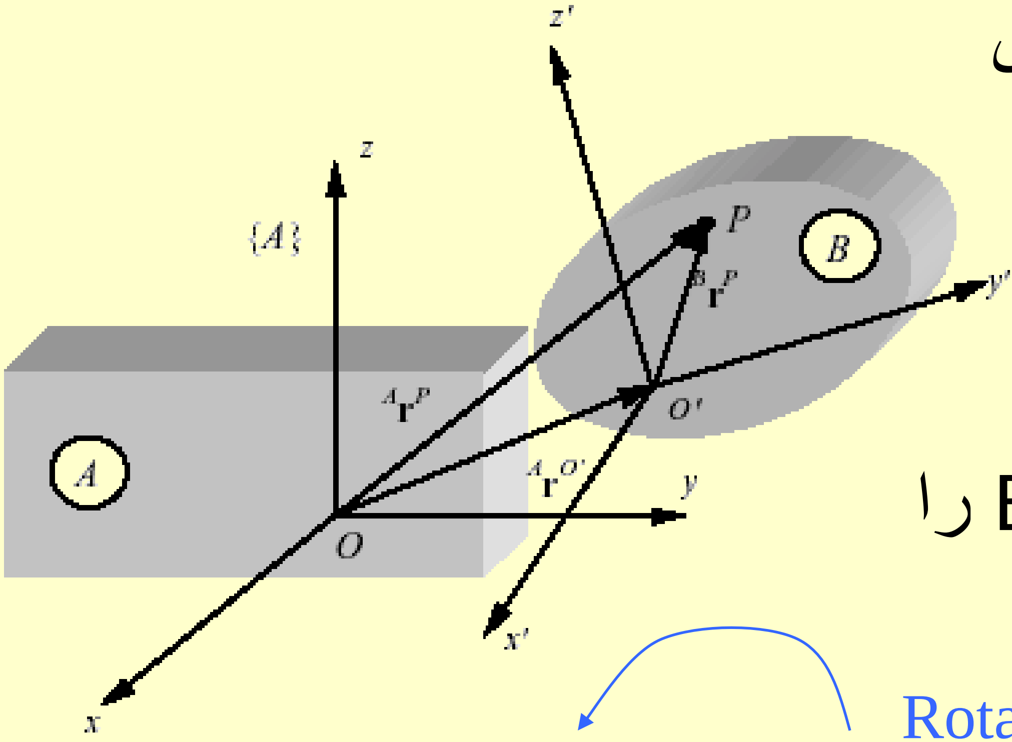
- برای اینکه بازوی روبات به نقطه P در شکل زیر برسد چند راه وجود دارد؟
- اگر روبات به اندازه کافی درجه آزادی داشته باشد میتواند از جهات مختلف به یک نقطه نزدیک شود.
- اگر چه یک نقطه را میتوان با مختصات آن در فضا نشان داد ولی برای نشان دادن یک جسم در فضا به جهت آن نیز نیاز داریم.



تبدیل مختصات

- جسمی با محور مختصات {B} چسبده به آن را در نظر بگیرید.

برای اینکه نقطه P بر روی
این جسم را در مرجع
مختصات {A} نشان دهیم
لازم است مقدار انتقال و
چرخش مرجع مختصات B را
نسبت به Aبدانیم



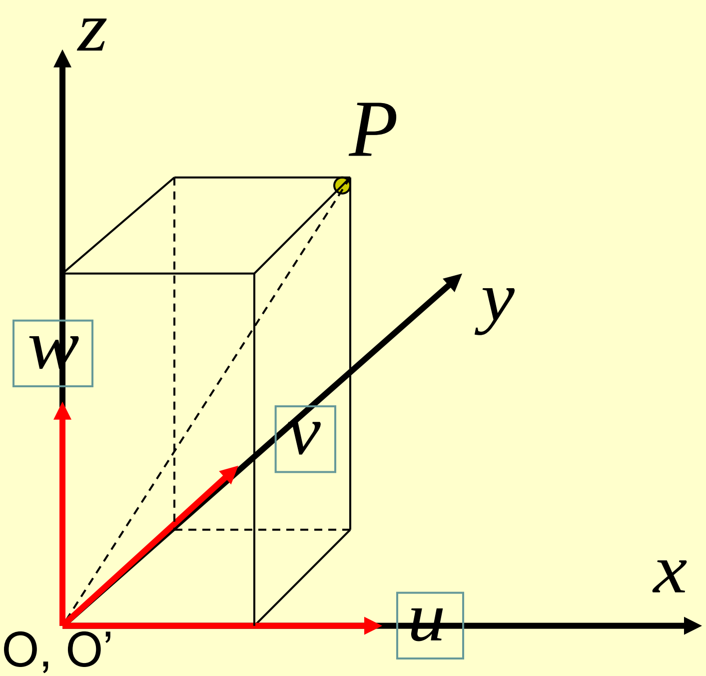
Rotation of $\{B\}$ with respect to $\{A\}$

$$^{A}\mathbf{r}^{P} = \boxed{^{A}\mathbf{R}_{B}}\,{}^{B}\mathbf{r}^{P} + \boxed{^{A}\mathbf{r}^{O'}}$$

Translation of the origin of $\{B\}$ with respect to origin of $\{A\}$

تبدیل مختصات

حالتی را در نظر بگیرید که یک نقطه در دو محور منطبق بر هم نشان داده شده باشد:
یکی محور مرجع OXYZ و دیگری محور مختصاتی که به جسم متصل شده است O'uvw



Point represented in O'uvw:

$$\vec{P}_{uvw} = p_u \mathrm{i_u} + p_v \mathrm{j_v} + p_w \mathrm{k_w}$$

Two frames coincide ==> $p_u = p_x \quad p_v = p_y \quad p_w = p_z$

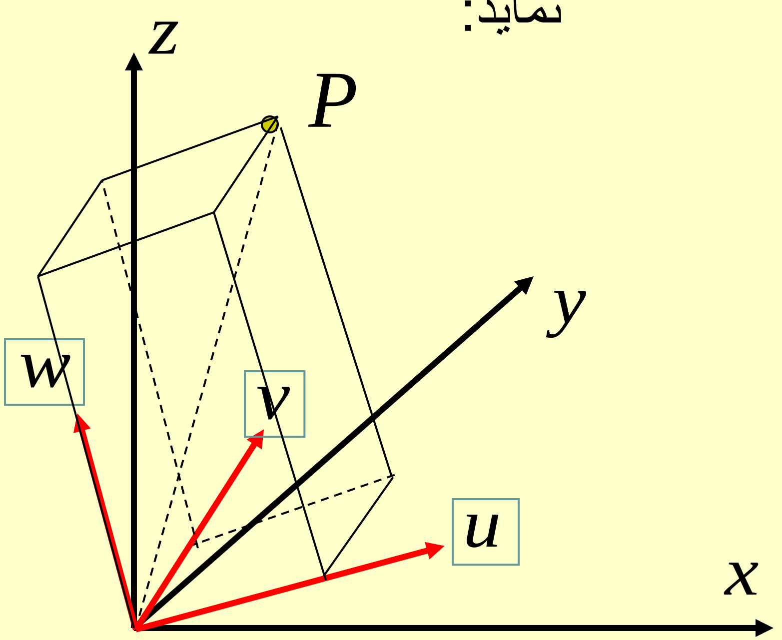
تبدیل مختصات

- حال اگر جسم نسبت به محور مرجع دوران نماید:

$$\vec{P}_{xyz} = p_x \mathrm{i}_\mathrm{x} + p_y \mathrm{j}_\mathrm{y} + p_z \mathrm{k}_\mathrm{z}$$

$$\vec{P}_{uvw} = p_u \mathrm{i}_\mathrm{u} + p_v \mathrm{j}_\mathrm{v} + p_w \mathrm{k}_\mathrm{w}$$

$$P_{xyz} = RP_{uvw}$$



[چگونه میتوان مختصات نقاط ایندو محور مختصات را به هم ربط داد؟]()

حالت دوران ساده

P_x , P_y , and P_z represent the projections of $\boldsymbol{P}$ onto OX, OY, OZ axes, respectively

Since

$$P = p_u \mathrm{i_u} + p_v \mathrm{j_v} + p_w \mathrm{k_w}$$

$$p_x = \mathrm{i_x} \cdot P = \mathrm{i_x} \cdot \mathrm{i_u} p_u + \mathrm{i_x} \cdot \mathrm{j_v} p_v + \mathrm{i_x} \cdot \mathrm{k_w} p_w$$

$$p_y = \mathrm{j_y} \cdot P = \mathrm{j_y} \cdot \mathrm{i_u} p_u + \mathrm{j_y} \cdot \mathrm{j_v} p_v + \mathrm{j_y} \cdot \mathrm{k_w} p_w$$

$$p_z = \mathrm{k_z} \cdot P = \mathrm{k_z} \cdot \mathrm{i_u} p_u + \mathrm{k_z} \cdot \mathrm{j_v} p_v + \mathrm{k_z} \cdot \mathrm{k_w} p_w$$

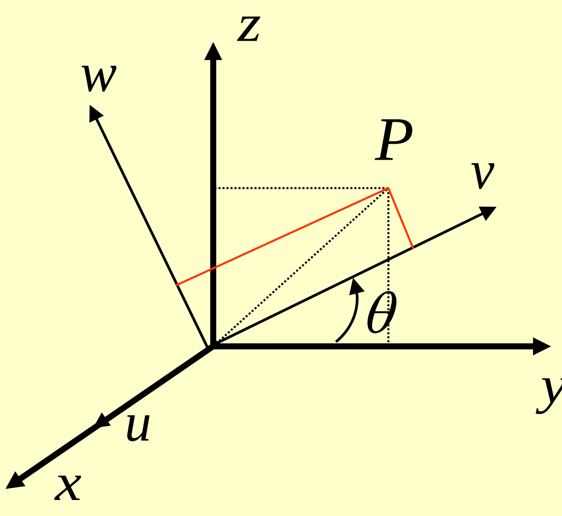
ماتریس دوران پایه

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i_x} \cdot \mathrm{i_u} & \mathrm{i_x} \cdot \mathrm{j_v} & \mathrm{i_x} \cdot \mathrm{k_w} \\ \mathrm{j_y} \cdot \mathrm{i_u} & \mathrm{j_y} \cdot \mathrm{j_v} & \mathrm{j_y} \cdot \mathrm{k_w} \\ \mathrm{k_z} \cdot \mathrm{i_u} & \mathrm{k_z} \cdot \mathrm{j_v} & \mathrm{k_z} \cdot \mathrm{k_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

$$P_{xyz} = RP_{uvw}$$

- Rotation about x-axis with

$$Rot(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

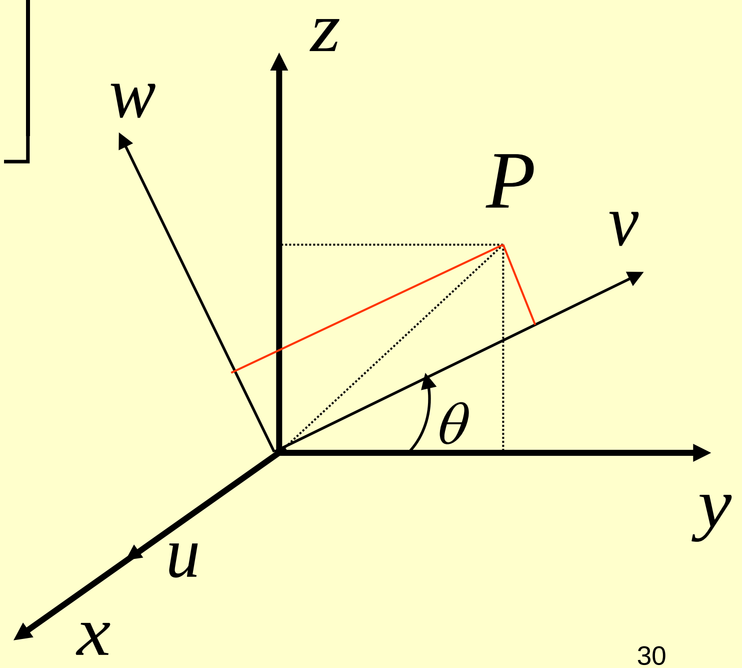


دوران نسبت به محور x به اندازه θ را میتوان با ماتریس دوران فوق نشان داد

ماتریس دوران پایه

Rotation about x axis with θ

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$



$$p_x = p_u$$

$$p_y = p_v \cos\theta - p_w \sin\theta$$

$$p_z = p_v \sin\theta + p_w \cos\theta$$

ماتریس های دوران پایه

به همین ترتیب میتوان ماتریس دوران نسبت به محورهای دیگر را بدست آورد

Rotation about x-axis with θ

$$Rot(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & C\theta & -S\theta\\ 0 & S\theta & C\theta\end{bmatrix}$$

Rotation about y-axis with θ

$$Rot(y,\theta)=\begin{bmatrix}C\theta & 0 & S\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -S\theta & 0 & C\theta\end{bmatrix}$$

Rotation about z-axis with θ

$$P_{xyz}=RP_{uvw}$$

$$Rot(z,\theta)=\begin{bmatrix}C\theta & -S\theta & 0\\ S\theta & C\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ماتریس دوران پایه برای تبدیل در مرجع مختصات دیگر

اگر ماتریس تبدیل از مرجع uvw به مرجع xyz را داشته باشیم میتوان با توجه به روابط زیر ماتریس تبدیل معکوس را بدست آورد.

$$R = \begin{bmatrix} \mathrm{i_x \cdot i_u} & \mathrm{i_x \cdot j_v} & \mathrm{i_x \cdot k_w} \\ \mathrm{j_y \cdot i_u} & \mathrm{j_y \cdot j_v} & \mathrm{j_y \cdot k_w} \\ \mathrm{k_z \cdot i_u} & \mathrm{k_z \cdot j_v} & \mathrm{k_z \cdot k_w} \end{bmatrix}$$

$$P_{xyz} = RP_{uvw}$$

Obtain the coordinate of P_{uvw} from the coordinate of P_{xyz}

Dot products are commutative!

$$\begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i_u \cdot i_x} & \mathrm{i_u \cdot j_y} & \mathrm{i_u \cdot k_z} \\ \mathrm{j_v \cdot i_x} & \mathrm{j_v \cdot j_y} & \mathrm{j_v \cdot k_z} \\ \mathrm{k_w \cdot i_x} & \mathrm{k_w \cdot j_y} & \mathrm{k_w \cdot k_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$P_{uvw} = QP_{xyz}$$
$$P_{xyz} = RP_{uvw}$$

$$\Rightarrow QR = R^T R = R^{-1} R = I_3$$ <== 3X3 identity matrix

$$Q = R^{-1} = R^T$$

مثال

- A point $a_{uvw} = (4,3,2)$ is attached to a rotating frame, the frame rotates 60 degree about the OZ axis of the reference frame. Find the coordinates of the point relative to the reference frame after the rotation.

$$a_{xyz} = Rot(z,60)a_{uvw}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.598 \\ 4.964 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مثال

- A point $a_{xyz} = (4,3,2)$ is the coordinate w.r.t. the reference coordinate system, find the corresponding point a_{uvw} w.r.t. the rotated OU-V-W coordinate system if it has been rotated 60 degree about OZ axis.

$$a_{uvw} = Rot(z,60)^T a_{xyz}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 \\ -0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.598 \\ -1.964 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس دوران ترکیبی

- اگر تعدادی دوران بدنبال هم رخ داده باشد میتوان هر دوران را با یک ماتریس دوران مشخص نمود اما از آنجائیکه دنباله ای محدود از ماتریس های دوران دارای خاصیت جابجائی نیستند در چنین مواقعی از قوانین زیر استفاده میشود:

  - If rotating coordinate O-U-V-W is rotating about principal axis of OXYZ frame, then ***pre-multiply*** the previous (resultant) rotation matrix with an appropriate basic rotation matrix
  - If rotating coordinate OUVW is rotating about its own principal axes, then ***post-multiply*** the previous (resultant) rotation matrix with an appropriate basic rotation matrix

مثال

- ماتریس دوران عملیات زیر را بیابید:

Rotation ϕ about OY axis

Rotation θ about OW axis

Rotation α about OU axis

Answer...

$$R = Rot(y,\phi) I_3 Rot(w,\theta) Rot(u,\alpha)$$

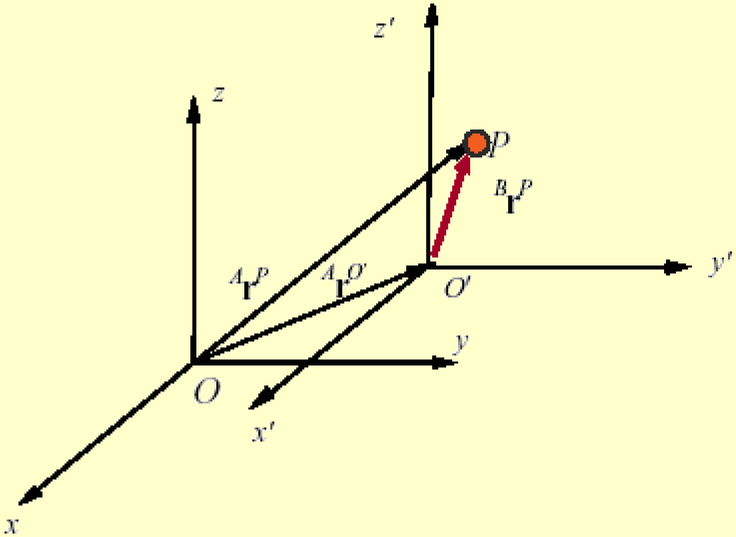
$$= \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & S\phi S\alpha - C\phi S\theta C\alpha & C\phi S\theta S\alpha + S\phi C\alpha \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha \\ -S\phi C\theta & S\phi S\theta C\alpha + C\phi S\alpha & C\phi C\alpha - S\phi S\theta S\alpha \end{bmatrix}$$

Pre-multiply if rotate about the OXYZ axes
Post-multiply if rotate about the OUVW axes

انتقال

- حالتی که فقط مبدا دو فریم مختصات انتقال داشته باشیم. برای مثال اگر دو مرجع مختصات $\{B\}$ و $\{A\}$ با هم موازی باشند خواهیمداشت:



$$ {}^{A}r^{P} = {}^{B}r^{P} + {}^{A}r^{o'} $$

تبدیل مختصات

- جسمی با محور مختصات $\{B\}$ چسبده به آن را در نظر بگیرید.

برای اینکه نقطه P بر روی

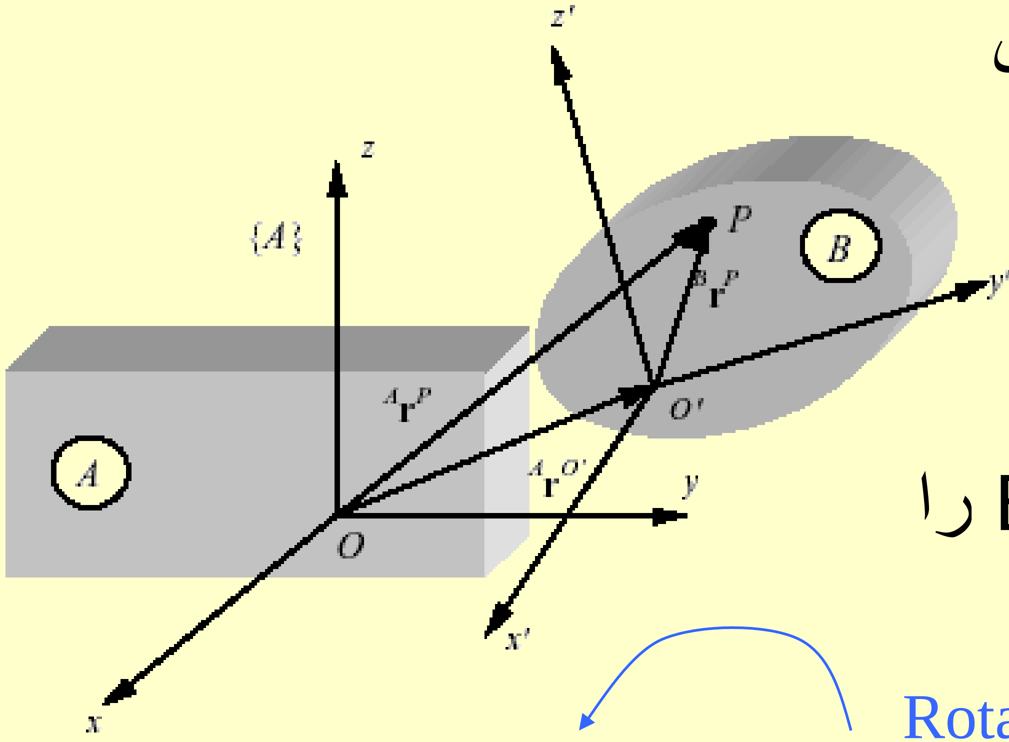
این جسم را در مرجع

مختصات $\{A\}$ نشان دهیم

لازم است مقدار انتقال و

چرخش مرجع مختصات B را

نسبت به Aبدانیم



Rotation of $\{B\}$ with respect to $\{A\}$

$$ {}^{A}\mathbf{r}^{P} = \boxed{{}^{A}\mathbf{R}_{B}}\,{}^{B}\mathbf{r}^{P} + \boxed{{}^{A}\mathbf{r}^{O'}} $$

Translation of the origin of $\{B\}$ with respect to origin of $\{A\}$

حالت های خاص

- Two special cases

$$^{A}r^{P} = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}r^{P} + {}^{A}r^{o'}$$

1. Translation only

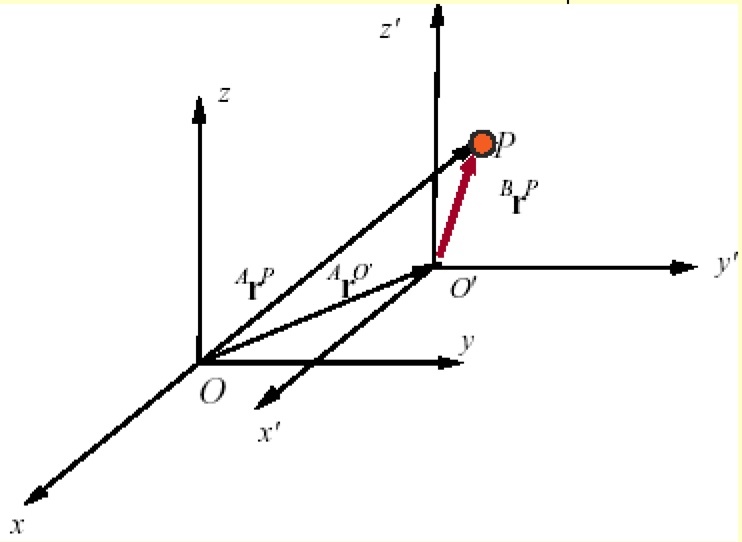
Axes of {*B*} and {*A*} are parallel

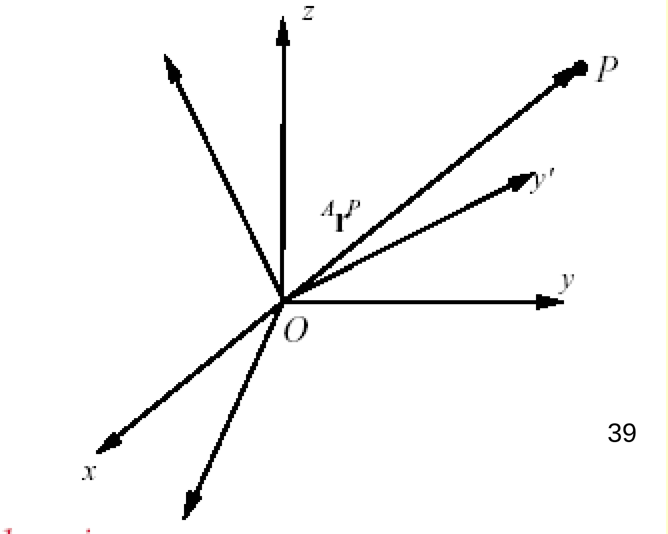
$$^{A}R_{B} = 1$$

2. Rotation only

Origins of {*B*} and {*A*} are coincident

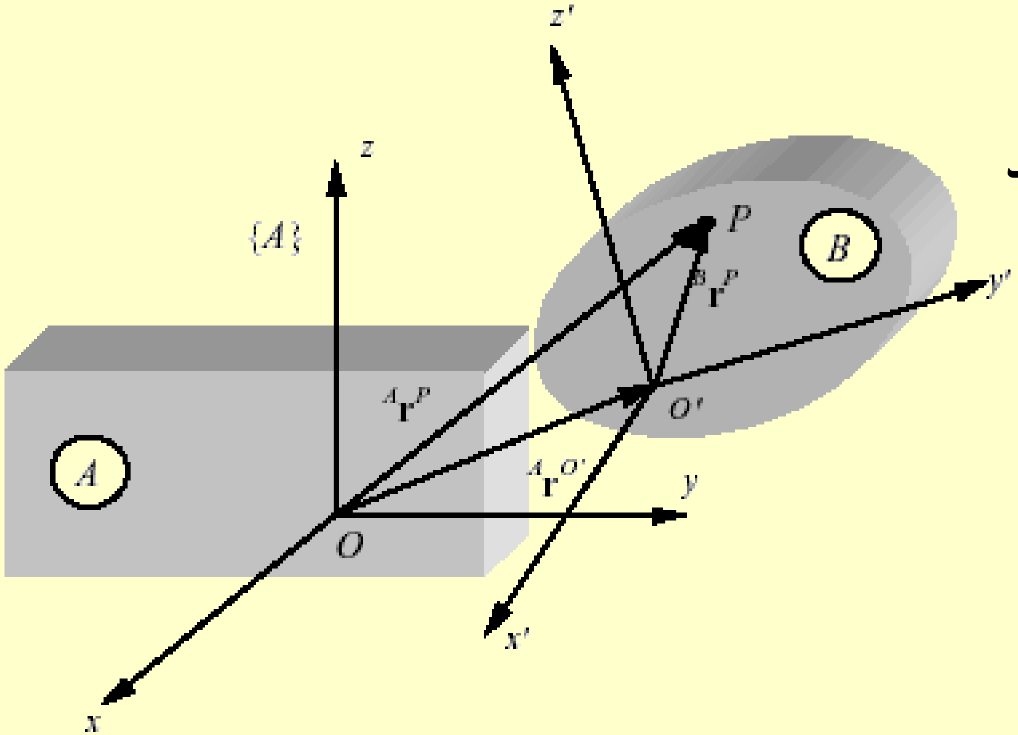
$$^{A}r^{o'} = 0$$





نمایش همگن

- برای سهولت محاسبات و ایجاد یکنواختی در آن میتوان بجای انجام یک عمل انتقال و یک دوران مجزا هز دو را با یک ماتریس همگن نشان داد.
- اینکار با افزودن یک بعد به ماتریس های انتقال و دوران انجام میشود.



$$^{A}\mathbf{r}^{P} = {}^{A}\mathbf{R}_{B}\,{}^{B}\mathbf{r}^{P} + {}^{A}\mathbf{r}^{O'}$$

نمایش همگن

- Coordinate transformation from $\{B\}$ to $\{A\}$

$$^{A}r^{P} = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}r^{P} + {}^{A}r^{o'}$$

یک بعد به ماتریس ها اضافه میشود

$$\begin{bmatrix} ^{A}r^{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^{A}R_{B} & ^{A}r^{o'} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{B}r^{P} \\ 1 \end{bmatrix}$$

نتیجه را میتوان فقط با یک
ماتریس نشان داد

- Homogeneous transformation matrix

$$^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} ^{A}R_{B} & ^{A}r^{o'} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{R_{3\times3}} & \boxed{P_{3\times1}} \\ 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Rotation matrix

Position vector

Scaling

نمایش همگن

- حالات خاص

1. Translation

$$ {}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} I_{3\times 3} & {}^{A}r^{o'} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} $$

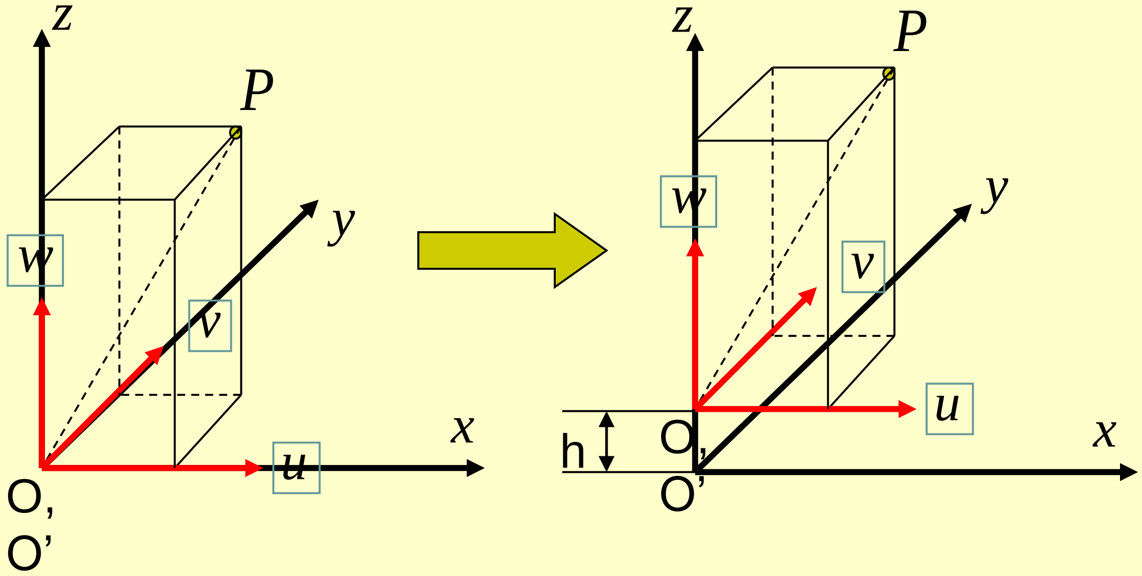
2. Rotation

$$ {}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B} & 0_{3\times 1} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} $$

مثال

- Translation along z-axis with h:

$$Trans(z,h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w + h \\ 1 \end{bmatrix}$$

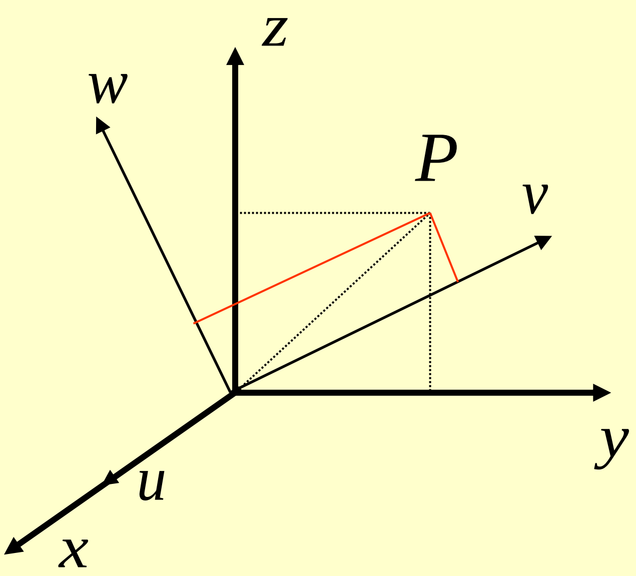


مثال

- Rotation about the x-axis by

$$Rot(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & C\theta & -S\theta & 0\\ 0 & S\theta & C\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & C\theta & -S\theta & 0\\ 0 & S\theta & C\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_u\\ p_v\\ p_w\\ 1\end{bmatrix}$$



نمایش همگن

- اگر چند انتقال متوالی داشته باشیم میتوان با استفاده از قانون زیر ماتریس های همگن انتقال مربوط به هر انتقال مجزا را در هم ضرب نموده و ماتریس کلی را بدست آورد:
- Rules:
  - Transformation (rotation/translation) w.r.t (X,Y,Z) (OLD FRAME), using pre-multiplication
  - Transformation (rotation/translation) w.r.t (U,V,W) (NEW FRAME), using post-multiplication

مثال

- Find the homogeneous transformation matrix (T) for the following operation:

Rotation α about OX axis

Translation of a along OX axis

Translation of d along OZ axis

Rotation of θ about OZ axis

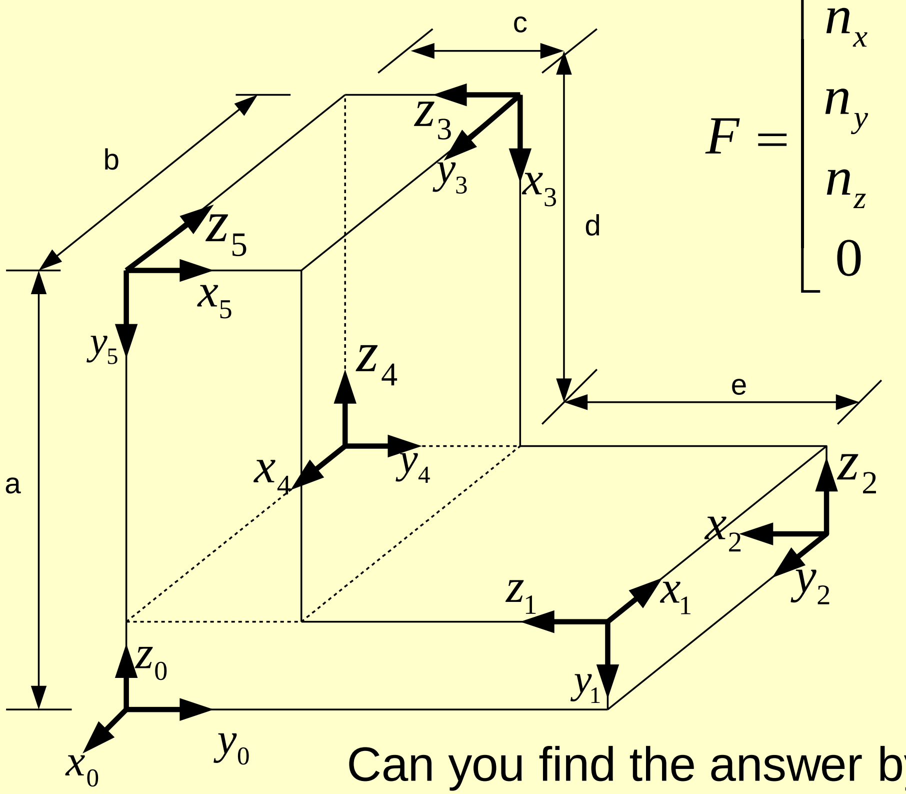
$$T = T_{z,\theta} T_{z,d} T_{x,a} T_{x,\alpha} I_{4\times4}$$

Answer :

$$= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال

- For the figure shown below, find the 4x4 homogeneous transformation matrices ${}^{i-1}A_i$ and ${}^{0}A_i$ for i=1, 2, 3, 4, 5



$$F = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & e+c \\ 0 & -1 & 0 & a-d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & a-d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{0}A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -b \\ -1 & 0 & 0 & e+c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Can you find the answer by observation based on the geometric interpretation of homogeneous transformation matrix?

نمایش جهت

$$F=\begin{bmatrix} R_{3\times3} & P_{3\times1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ماتریس چرخش برای نمایش چرخش کامل یک جسم صلب نیاز به 9 پارامتر دارد.آیا روش ساده تری برای اینکار وجود دارد؟
- Any easy way?

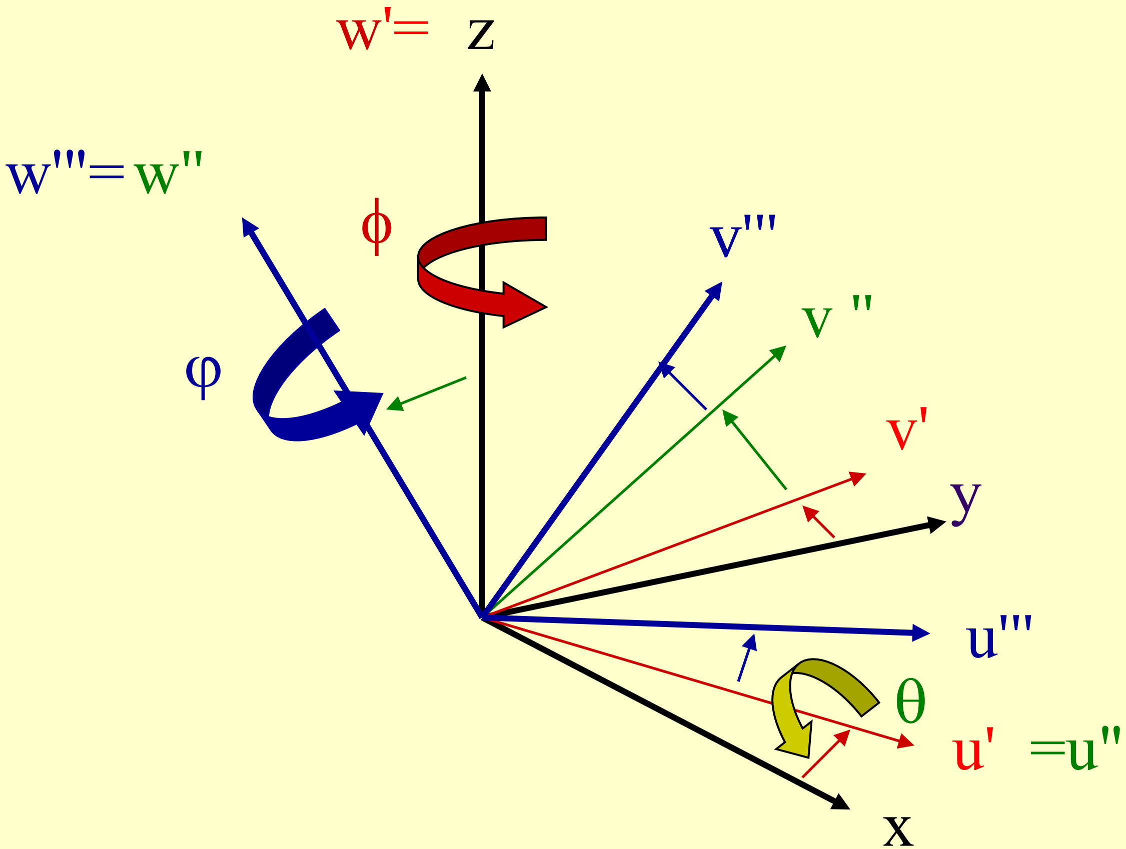
Euler Angles Representation

Orientation Representation

- Euler Angles Representation (ϕ, θ, ψ)
  - Many different types
  - Description of Euler angle representations

	Euler Angle I	Euler Angle II	Roll-Pitch-Yaw
Sequence	ϕ about OZ axis	ϕ about OZ axis	ψ about OX axis
of	θ about OU axis	θ about OV axis	θ about OY axis
Rotations	ψ about OW axis	ψ about OW axis	ϕ about OZ axis

Euler Angle I



Orientation Representation

- Euler Angle I

$$R_{z\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{u'\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_{w''\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

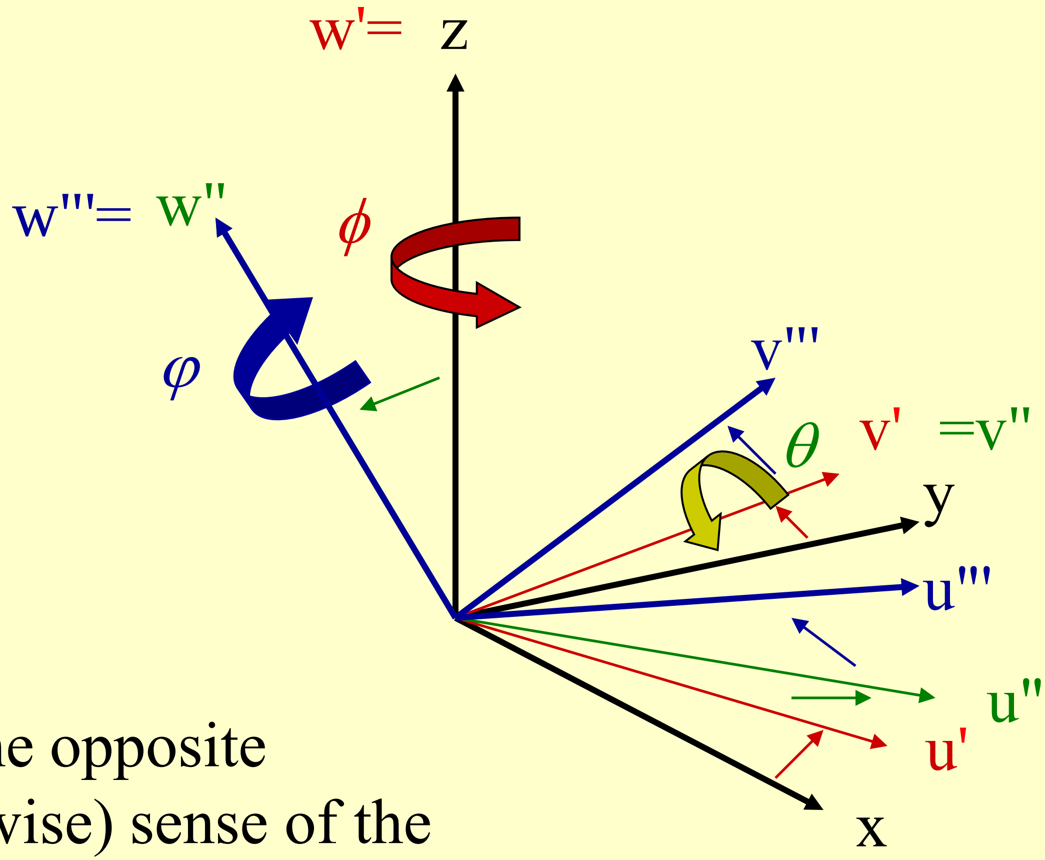
Euler Angle I

Resultant eulerian rotation matrix:

$$R = R_{z\phi} R_{u'\theta} R_{w''\varphi}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\varphi - \sin\phi\sin\varphi\cos\theta & -\cos\phi\sin\varphi - \sin\phi\cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\varphi + \cos\phi\sin\varphi\cos\theta & -\sin\phi\sin\varphi + \cos\phi\cos\varphi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Euler Angle II



Note the opposite (clockwise) sense of the third rotation, ϕ.

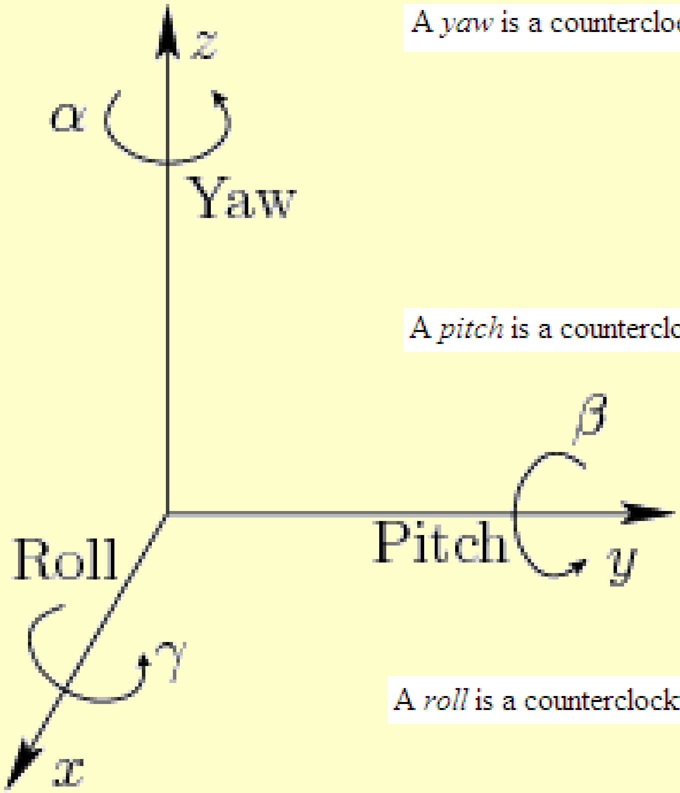
Orientation Representation

- Matrix with Euler Angle II

$$\begin{pmatrix} -\sin\phi\sin\varphi + \cos\phi\cos\varphi\cos\theta & -\sin\phi\cos\varphi - \sin\phi\cos\varphi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\varphi + \sin\phi\cos\varphi\cos\theta & \cos\phi\cos\varphi - \sin\phi\cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Orientation Representation

- Description of Roll Pitch Yaw



A *yaw* is a counterclockwise rotation of α about the z-axis. The rotation matrix is given by

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A *pitch* is a counterclockwise rotation of β about the y-axis. The rotation matrix is given by

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

A *roll* is a counterclockwise rotation of γ about the x-axis. The rotation matrix is given by

$$R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$