درس پنجم (روش جزء به جزء)

فرمول این روش به صورت زیر به دست می‌آید

$$pq = pq \Rightarrow d(pq) = p\ dq + q\ dp \Rightarrow \int d(pq) = \int p\ dq + \int q\ dp \Rightarrow pq = \int p\ dq + \int q\ dp$$

و در آخر به فرمولی می‌رسیم که در کادر زیر آمده است که استفاده از آن انتگرال جزء به جزء نام دارد.

$$\boxed{\int p\ dq = pq - \int q\ dp}$$

برای استفاده از فرمول بالا قسمتی از انتگرال که انتگرال‌گیری آن ممکن است را برابر dq قرار می‌دهیم و از آن انتگرال می‌گیریم و بقیه انتگرال را برابر p می‌گیریم و از p دیفرانسیل می‌گیریم. لازم به ذکر است که برای دیفرانسیل‌گیری از تابع $y = f(x)$ قرار می‌دهیم $dy = f'(x)\ dx$ یعنی مشتق می‌گیریم سپس dx را می‌نویسیم

مثال ۸۳. تابع اولیه‌ی $f(x) = \ln x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = \ln x \Rightarrow dp = \frac{1}{x}dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = dx \Rightarrow q = x \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int \ln x\ dx = pq - \int q\ dp = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x}\ dx = x \ln x - \int 1\ dx = x \ln x - x$$

مثال ۸۴. تابع اولیه‌ی $f(x) = \arctan x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = \arctan x \Rightarrow dp = \frac{1}{1+x^2}dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = dx \Rightarrow q = x \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\begin{aligned}\int \arctan x\ dx &= pq - \int q\ dp = x \arctan x - \int x \times \frac{1}{1+x^2}\ dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$

انتگرال آخر از فرمول $\int \frac{u'}{u} = \ln u$ محاسبه شده است.

مثال ۸۵. تابع اولیه‌ی $f(x) = \arcsin x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = \arcsin x \Rightarrow dp = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = dx \Rightarrow q = x \text{ انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\, dx &= pq - \int q\, dp = x\arcsin x - \int x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

انتگرال آخر از فرمول $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = \int u'u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{-1}{2}+1}u^{\frac{-1}{2}+1} = 2u^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u}$ محاسبه شده است.

مثال ۸۶. تابع اولیه‌ی $f(x) = x\sin x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = x \Rightarrow dp = dx \text{ دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = \sin x\, dx \Rightarrow q = -\cos x \text{ انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int x\sin x\, dx = pq - \int q\, dp = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x$$

به طور کلی هر وقت چندجمله‌ای‌ها در کنار توابع $\sin x$، $\cos x$ و e^x بیاید باید مشابه مثال قبل حل شود.

مثال ۸۷. تابع اولیه‌ی $f(x) = x^2\cos x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = x^2 \Rightarrow dp = 2x\, dx \text{ دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = \cos x\, dx \Rightarrow q = \sin x \text{ انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int x\sin x\, dx = pq - \int q\, dp = x^2\sin x - 2\int x\sin x\, dx = x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x)$$

در این مثال $\int x\sin x\, dx$ از مثال قبلی استفاده شده است اما دانشجو در برگه‌ی امتحان باید دو بار جزء به جزء را بنویسد. به همین ترتیب اگر x^3 در کنار توابع $\sin x$، $\cos x$ و e^x بیاید باید سه بار از جزء به جزء استفاده شود چون هر بار جزء به جزء یکی از توان x کم می‌کند.

مثال ۸۸. تابع اولیه‌ی $f(x) = x\tan^2 x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = x \Rightarrow dp = dx \text{ دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = \tan^2 x\, dx \Rightarrow q = \tan x - x \text{ انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int x\tan^2 x\, dx = pq - \int q\, dp = x(\tan x - x) - \int \tan x - x\, dx = x(\tan x - x) + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2$$

مثال ۸۹. تابع اولیه‌ی $f(x) = x\arctan x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = \arctan x \Rightarrow dp = \frac{1}{1+x^2}dx \text{ دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = x\, dx \Rightarrow q = \frac{1}{2}x^2 \text{ انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\,dx &= pq-\int q\,dp=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\,(x-\arctan x)\end{aligned}$$

انتگرال آخر با روش تجزیه کسرها حل شده است که فقط صورت به مخرج تقسیم شده است.

مثال ۹۰. تابع اولیه‌ی $f(x)=e^x\sin x$ را حساب کنید.

حل: چنین انتگرال‌هایی با دوبار جزء به جزء حل می‌شوند که در جدول زیر آمده است. p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

بار دوم	بار اول
دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=\cos x\Rightarrow dp=-\sin x\,dx$	دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=\sin x\Rightarrow dp=\cos x\,dx$
انتگرال گرفته‌ایم $dq=e^x\,dx\Rightarrow q=e^x$	انتگرال گرفته‌ایم $dq=e^x\,dx\Rightarrow q=e^x$

پس از دوبار جزء به جزء به صورت زیر می‌شود

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$$

یعنی پس از دوبار جزء به جزء دوباره خود انتگرال اولی ظاهر شده است. با قرار دادن $A=\int e^x\sin x\,dx$ متغیر A در یک معادله‌ی درجه‌ی اول قرار می‌گیرد و مانند زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}A=e^x\sin x-e^x\cos x-A\quad&\Rightarrow\quad A+A=e^x\sin x-e^x\cos x\Rightarrow A=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{2}\\ &\Rightarrow\quad\int e^x\sin x\,dx=A=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{2}\end{aligned}$$

مثال ۹۱. تابع اولیه‌ی $f(x)=e^{2x}\sin 5x$ را حساب کنید.

حل: این انتگرال مشابه انتگرال مثال قبل است فقط چند عدد اضافه دارد. p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

بار دوم	بار اول
دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=\cos 5x\Rightarrow dp=-5\sin 5x\,dx$	دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=\sin 5x\Rightarrow dp=5\cos 5x\,dx$
انتگرال گرفته‌ایم $dq=e^{2x}\,dx\Rightarrow q=\frac{1}{2}e^{2x}$	انتگرال گرفته‌ایم $dq=e^{2x}\,dx\Rightarrow q=\frac{1}{2}e^{2x}$

پس از دوبار جزء به جزء به صورت زیر می‌شود

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin 5x\,dx &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x-\frac{5}{2}\int e^{2x}\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 5x+\frac{5}{2}\int e^{2x}\sin 5x\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x-\frac{5}{4}e^{2x}\cos 5x-\frac{25}{4}\int e^{2x}\sin 5x\,dx\end{aligned}$$

یعنی پس از دوبار جزء به جزء دوباره خود انتگرال اولی ظاهر شده است. با قرار دادن $A=e^{2x}\sin 5x\,dx$ متغیر A در یک معادله‌ی درجه‌ی اول قرار می‌گیرد و مانند زیر به دست می‌آید.

$$A=\frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin ۵x-\frac{۵}{۴}e^{۲x}\cos ۵x-\frac{۲۵}{۴}A \Rightarrow A+\frac{۲۵}{۴}A=\frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin ۵x-\frac{۵}{۴}e^{۲x}\cos ۵x$$
$$\Rightarrow A\left(۱+\frac{۲۵}{۴}\right)=\frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin ۵x-\frac{۵}{۴}e^{۲x}\cos ۵x$$
$$\Rightarrow \frac{۲۹}{۴}A=\frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin ۵x-\frac{۵}{۴}e^{۲x}\cos ۵x$$
$$\Rightarrow A=\frac{۴}{۲۹}\left(\frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin ۵x-\frac{۵}{۴}e^{۲x}\cos ۵x\right)$$
$$\Rightarrow A=\frac{۲}{۲۹}e^{۲x}\sin ۵x-\frac{۵}{۲۹}e^{۲x}\cos ۵x$$

مثال ۹۲. تابع اولیه‌ی $f(x)=(\ln x)^{۲}$ را حساب کنید.

حل: چنین انتگرالی با دوبار جزء به جزء حل می‌شوند که در جدول زیر آمده است. p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

بار اول	بار دوم
دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=(\ln x)^{۲} \Rightarrow dp=\frac{۲}{x}\ln x\, dx$	دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=\ln x \Rightarrow dp=\frac{۱}{x}dx$
انتگرال گرفته‌ایم $dq=dx \Rightarrow q=x$	انتگرال گرفته‌ایم $dq=dx \Rightarrow q=x$

پس از دوبار جزء به جزء به صورت زیر می‌شود

$$\int (\ln x)^{۲}\,dx = x(\ln x)^{۲}-\int x\times\frac{۲}{x}\ln x\,dx = x(\ln x)^{۲}-۲\int \ln x\,dx = x(\ln x)^{۲}-۲(x\ln x-x)$$
$$= x(\ln x)^{۲}-۲x\ln x+۲x$$

برای حل $(\ln x)^{۳}\,dx$ به طور مشابه سه بار انتگرال می‌گیریم که به عنوان تمرین در آخر بخش به دانشجو واگذار شده است.

مثال ۹۳. تابع اولیه‌ی $f(x)=\sin\sqrt{x}$ را حساب کنید.

حل: برای حل این انتگرال باید ابتدا آن را در $۲\sqrt{x}$ ضرب و تقسیم کنیم و p و dq مانند زیر انتخاب کنیم

$$p=۲\sqrt{x} \Rightarrow dp=\frac{۱}{\sqrt{x}}dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$
$$dq=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx \Rightarrow q=-\cos\sqrt{x} \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int ۲\sqrt{x}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx = -۲\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= -۲\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+۲\int\frac{\cos\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}\,dx = -۲\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+۲\sin\sqrt{x}$$

انتگرال آخر با فرمول $\int u'\cos u\,dx=\sin u$ حل شده است. به طور مشابه $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ و $\int \cos\sqrt{x}\,dx$ را می‌توانیم با روش این مثال حل کنیم.

تمرینات

انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

۱) $\int \operatorname{arccot} x \, dx$

۲) $\int \arccos x \, dx$

۳) $\int x \cos x \, dx$

۴) $\int x^2 \sin x \, dx$

۵) $\int x \cot^2 x \, dx$

۶) $\int x \operatorname{arccot}^2 x \, dx$

۷) $\int e^x \cos x \, dx$

۸) $\int (\ln x)^3 \, dx$

۹) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

۱۰) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

۱۱) $\int e^{-x} \sin x \, dx$

۱۲) $\int e^{3x} \cos 6x \, dx$

۱۳) $\int x^2 \ln x \, dx$

۱۴) $\int e^{-3x} \cos 6x \, dx$

۱۵) $\int x^n \ln x \, dx$