پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران

سوال اول– رشته نزدیک

الف) کافی است توجه کنیم که اگر دو رشته A و C در جایگاه i ام با هم اختلاف داشته باشند حداقل یکی از دو جفت (A,B) یا (B,C) در جایگاه i ام با هم اختلاف دارند. در نتیجه هر اختلافی که در $d(A,C)$ شمرده می‌شود حداقل در یکی از $d(A,B)$ یا $d(B,C)$ نیز شمرده می‌شود که حکم مسئله را نتیجه می‌دهد.

ب) p_j را نزدیکترین رشته به رشته M در بین ۱۳۹۲ رشته در نظر می‌گیریم و D_{p_j} را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{p_j} = \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(p_i, p_j) \le \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(p_i, M) + d(M, p_j) = D_M + \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(M, p_j) \quad (1)$$

اما با توجه به نحوه انتخاب p_j به ازای هر i می‌دانیم $d(M,p_j) \le d(M,p_i)$ و از این موضوع نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(M, p_j) \le \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(M, p_i) = D_M \quad (2)$$

از (1) و (2) خواهیم داشت $D_{p_j} \le 2D_M$.

پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران

سوال دوم– مرتب‌ساز پشته‌ای

مشاهده۱. تبدیل مساله‌ی پشته به مساله‌ی آرایه

عملیات گفته شده مانند این است که یک آرایه از اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ داشته باشیم. سپس از دو عنصر اول آرایه یعنی a_1 و a_2 شروع کنیم و آن دو را با هم مقایسه کنیم. اگر a_1 بزرگتر بود جای آن دو را با هم عوض کنیم. سپس به سراغ دو عنصر بعدی برویم و همین‌طور تا آخرین دو عنصر آرایه، این کار را انجام دهیم. هدف این است که در اتنها آرایه مرتب شود. یعنی: $a_1 <= a_2 <= \ldots <= a_n$

نکته خارج از راه‌حل: درواقع این عملیات، بخشی از مرتب‌سازی حبابی است. در مرتب‌سازی حبابی با n بار انجام این عملیات مطمئن می‌شویم که آرایه مرتب شده است.

با توجه به مشاهده۱ کافی است ببینیم که به ازای چه آرایه‌هایی از اعداد ۱ تا n، با k بار انجام دادن عملیات بالا، در انتها به یک آرایه‌ی مرتب شده می‌رسیم.

لم۱. اگر در آرایه‌ی A با عناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ که جایشگتی از اعداد ۱ تا n هستند، شرط زیر برقرار باشد، با k بار انجام دادن عملیات مذکور در مشاهده۱، دنباله مرتب می‌شود و در غیر این صورت دنباله در انتها نامرتب خواهد بود:

- به ازای هر $1 \le i \le n$، تعداد اعدادی که بیشتر از a_i هستند و در آرایه قبل از آن قرار دارند، حداکثر k باشد.

اثبات. در ابتدا نشان می‌دهیم درصورتی که شرط گفته شده برقرار نباشد، در انتها جایگشت مرتب‌شده نخواهد بود. فرض کنید قبل از a_i بیشتر از k عدد باشند که از آن بیشتر هستند. در هر بار اجرای عملیات بالا، حداکثر یکی از این اعداد از a_i رد می‌شود و بعد از آن قرار می‌گیرد. بنابراین در انتها حداقل یکی از آنها قبل از a_i باقی می‌ماند و بنابراین جایشگت مرتب نمی‌شود.

حال نشان می‌دهیم درصورتی که شرط گفته شده برقرار باشد، در انتها دنباله مرتب می‌شود. این فرض را با استقرا روی n نشان می‌دهیم.

حالت پایه: وقتی است که $n=1$ که مرتب است.

گام استقرا:

عدد ۱ را در دنباله در نظر بگیرید. با توجه به شرط لم، حداکثر k عدد دیگر قبل از عدد یک قرار دارند. از طرفی چون عدد یک، کوچکترین عدد دنباله است، در هر مرحله جایگاه‌اش یک واحد به سمت چپ انتقال پیدا می‌کند تا وقتی که به سمت چپ‌ترین نقطه برسد. بنابراین بعداز k مرحله، عدد یک در جایگاه درست قرار می‌گیرد.

حال اگر عدد یک را در نظر نگیریم، بقیه‌ی اعداد مستقلا باید شرط لم را داشته باشند (چون عدد یک کوچکترین عدد است). از طرفی جایگاه عدد یک در ترتیب مقایسه‌ی این اعداد تاثیری ندارد. بنابراین طبق فرض استقرا اگر روی آنها k مرحله عملیات گفته شده را انجام دهیم مرتب می‌شوند. بنابراین بعداز k مرحله کل دنباله مرتب خواهد شد.

قضیه. تعداد جایگشت‌هایی که با k بار انجام عملیات گفته شده ($k \leq n$) قابل مرتب شدن هستند، برابر است با $k! * \left(k + ۱\right)^{n-k}$.

اثبات.

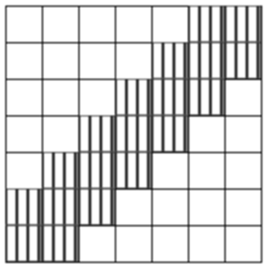
اثبات را با استقرا روی n انجام می‌دهیم:

پایه: n=k. در این صورت با توجه به لم۱ همه‌ی جایشگت‌ها قابل مرتب شدن هستند.

گام استقرا: برای اینکه دنباله مرتب شود باید شرط لم۱ را داشته باشد. از طرفی با حذف عدد یک از دنباله، دنباله‌ای که باقی می‌ماند، مستقل از عدد یک باید همچنان شرط لم۱ را داشته باشد. بنابراین بدون در نظر گرفتن عدد یک، $n - ۱$ عدد داریم که طبق فرض استقرا $k! * (k + 1)^{n-1-k}$ جایگشت از آنها قابل مرتب شدن هستند. حال به ازای هر جایگشت، برای اینکه شرط لم۱ برقرار بماند، دقیقا $k + 1$ حالت برای اضافه کردن عدد یک وجود دارد. پس در کل $k! * (k + 1)^{n-k}$ جایگشت قابل مرتب شدن هستند.

سوال سوم– شکلات تخت

شکل زیر را در نظر بگیرید:



در واقع قطر فرعی به همراه دو قطر پایینی و بالایی آن هاشور خورده‌اند. می‌خواهیم نشان دهیم نفر دوم همیشه می‌تواند طوری عمل کند که شکل نسبت به قطر فرعی قرینه باشد و هیچ یک از مربع‌های قسمت هاشور خورده، خورده نشده باشند. توجه کنید که در صورتی که بازی به جدولی به اندازه ۱ یا ۲ با خاصیت فوق برسد براحتی می‌توان نشان داد که نفر دوم می‌تواند برنده شود(چرا؟).

فرض کنید یک جدول قرینه نسبت به قطر فرعی که خانه‌های هاشور خورده آن سالم است به نفر اول می‌رسد(در اول کار این شرط برقرار است). در این صورت برای حرکت نفر اول دو حالت وجود دارد:

۱- هیچ یک از خانه‌های هاشور خورده، خورده نمی‌شوند.

۲- مستطیل خورده شده توسط نفر اول شامل حداقل یک خانه‌ی هاشور خورده می‌باشد.

در حالت اول نفر دوم می‌تواند قرینه حرکت نفر اول را نسبت به قطر فرعی انجام دهد(چرا؟)

در حالت دوم یا کل جدول خورده شده است یا نفر دوم می‌تواند یک جدول کوچکتر با شرایط گفته شده ایجاد کند(چرا؟).

همانطور که می‌دانیم در هر حرکت حداقل یک خانه خورده می‌شود در نتیجه تعداد خانه‌های باقی‌مانده در حال کم شدن است و حتما در جایی یا نفر اول کل شکلات را می‌خورد یا به یک شکلات ۲×۲ یا ۱×۱ می‌رسد.

سوال چهارم– کارت‌های همانی

قسمت الف)

راه حل اول-

نوید می‌تواند به !۹۹ حالت دسته‌بندی سعید را شماره گذاری کند. . نشان می‌دهیم حتما در یکی از این !۹۹ حالت شماره گذاری، ۱۵ کارت همانی وجود دارد. دسته‌ها را در دسته‌بندی دوم به ترتیب $A_1, A_2, \ldots, A_{99}$ نام گذاری می کنیم.

جدولی با !۹۹ سطر و ۹۹ ستون در نظر بگیرید. ستون i ام این جدول را نماینده دسته A_i و سطر j ام این جدول را نماینده حالت j ام شماره گذاری دسته‌ها توسط نوید در نظر بگیرید. در خانه تقاطع سطر j ام و ستون i ام این جدول، تعداد کارت‌های همانی که در دسته A_i در ترتیب j ام وجود دارد را یادداشت می‌کنیم.

حال مجموع اعداد جدول را به صورت ستون به ستون محاسبه می کنیم. می دانیم ستون j ام معرف دسته A_j است. ادعا می کنیم مجموع اعداد ستون j ام برابر است با $|A_j| * !۹۸$. یک کارت خاص موجود در دسته A_j را در نظر بگیرید و آن را x بنامید . x در صورتی همانی است که شماره دسته‌اش در شماره گذاری نوید نیز برابر با j باشد. پس آن دسته‌ای که حاوی تیله x است (در ترتیب نوید) باید شماره‌اش j شود و بقیه ۹۸ دسته می‌توانند هر شماره دلخواهی پیدا کنند. پس x در !۹۸ شماره گذاری مختلف همانی است. با توجه به این استدلال واضح است که مجموع اعداد ستون j ام برابر است با $|A_j| * !۹۸$. پس مجموع اعداد جدول برابر است با :

$$\sum_{i=۱}^{۹۹} |A_i| \times ۹۸! = ۹۸! \times \sum_{i=۱}^{۹۹} |A_i| = ۹۸! \times ۱۳۹۲$$

از طرفی چون این جدول !۹۹ سطر دارد، طبق اصل لانه کبوتر، سطری با مجموع $۱۵ = \left\lceil \frac{۹۸! \times ۱۳۹۲}{۹۹!} \right\rceil$ وجود خواهد داشت. اما همانطور که در ابتدا گفتیم، هر سطر نشان‌دهنده‌ی یک روش شماره‌گذاری توسط نوید بود. این یعنی نوید می‌تواند طوری دسته‌هایش را شماره گذاری کند که حداقل ۱۵ کارت همانی وجود داشته باشد و حکم ثابت شد.

توجه: در این راه از اینکه در دسته‌بندی دوم هیچ دو کارت هم‌دسته در دسته‌بندی اول هم‌دسته نیستند استفاده نشده است.

راه‌حل دوم-

این مسئله را می‌توان با گراف و مسئله تطابق مدل کرد. از روی دسته‌بندی‌های سعید می‌توان یک گراف دوبخشی ساخت. در این گراف دوبخشی هر بخش متناظر با یکی از دسته‌بندی‌ها خواهد بود و در هر بخش ۹۹ راس متناظر با ۹۹ دسته‌ی دسته‌بندی وجود دارد. حال بین هر دو راسی که دسته‌های متناظر آنها شامل یک کارت مشترک است یک یال می‌گذاریم.

مشاهده۱. این گراف یال چندگانه ندارد (چرا؟).

مشاهده۲. در هر شیوه شماره‌گذاری کارت‌های همانی معادل یک تطابق در گراف دو بخشی هستند(چرا؟).

قضیه. در گراف فوق تطابق بیشنه حداقل ۱۵ یال دارد.

اثبات. یک راه برای اثبات این قضیه اثبات از طریق برهان خلف می‌باشد.

راه حل سوم-

در این روش از شیوه احتمالاتی[۱] استفاده شده است، که انتظار نمی‌رود دانش‌آموزان از این روش مسئله را حل کنند، لیکن برای آشنایی علاقه‌مندان این روش نیز بیان می‌گردد.

اگر یک شماره‌گذاری تصادفی را در نظر بگیریم احتمال اینکه یک کارت، کارت همانی باشد برابر با $\frac{۱}{۹۹}$ خواهد بود. حال اگر X را متغیر تصادفی تعداد کارت‌های همانی در یک شماره گذاری بنامیم. می‌دانیم:

$$X = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_{۱۳۹۲}$$

که X_i متغیرتصادفی شاخص همانی بودن کارت i ام خواهد بود و می‌دانیم امید ریاضی X_i برابر است با:

$$E[X_i] = \Pr\left[X_i = ۱\right] = \frac{۱}{۹۹}$$

واما برای امیدریاضی X خواهیم داشت:

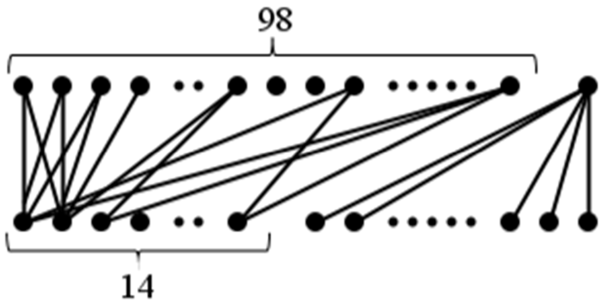
$$E[X] = E\left[\sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} X_i\right] = \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} E[X_i] = \frac{۱۳۹۲}{۹۹} > ۱۴$$

اما با توجه به اینکه همیشه حالتی وجود دارد که $X \geq E[X]$ و اینکه مقدار X عدد صحیح می‌باشد پس شماره‌گذاری وجود دارد که در آن X یعنی تعداد کارت‌های همانی بیشتر از ۱۴ باشد.

[1] Probabilistic Method

قسمت ب)

از راه‌حل دوم قسمت الف استفاده می‌کنیم و یک گراف دوبخشی به شکل زیر می‌سازیم.



در گراف نشان داده شده ۹۵ راس از بخش پایین به یک راس از بخش بالا وصل شده اند و بقیه یال‌ها بین دسته ۱۴تایی و ۹۸ تایی قرار می‌گیرد. می‌دانیم که می‌توانیم ۱۳۸۶ = ۱۴ * ۹۹ یال از نوع دوم داشته‌باشیم که بیشتر از نیاز ما نیز می‌باشد. اما در این گراف تطابق بیشینه حداکثر برابر با ۱۵ خواهد بود و با توجه به قسمت الف می‌دانیم این مقدار دقیقا برابر ۱۵ می‌باشد.

سوال پنجم– کار گروهی

قسمت اول

گراف روابط دوستی دانش‌آموزان را در نظر می‌گیریم. در واقع مسئله از ما خواسته است تا اثبات کنیم گرافی nk راسی با $\binom{k}{۲}n^۲$ یال وجود دارد که افراز آن به خوشه‌های k راسی یکتا مشخص شود. برای اثبات این حکم از استقرا روی n استفاده می کنیم.

پایه: حکم برای $n = ۱$ برقرار است چرا که $\binom{k}{۲}$ یال دقیقا یک خوشه را تشکیل می‌دهند.

فرض می‌کنیم برای کلاسی با nk دانش‌آموز چنین حالتی وجود داشته باشد.

کلاسی با $(n+۱)k$ نفر را در نظر بگیرید. ابتدا k نفر از کلاس حذف و برای nk نفر باقی‌مانده تعداد $\binom{k}{۲}\mathrm{n}^۲$ رابطه‌ی دوستی در نظر می‌گیریم. حال k نفر را به nk نفر بر می‌گردانیم. برای این که شرایط مساله بر قرار باشد لازم است $\binom{k}{۲}((n+1)^2-n^2) = \binom{k}{۲}(۲n+۱) = \binom{k}{۲} + (k-۱)*(nk)$ رابطه‌ی دوستی به روابط دوستی اضافه کنیم. به $\binom{k}{۲}$ رابطه دوستی که برای گروه کردن k دانش‌آموز نیاز داریم. پس $(k-۱)*(nk)$ رابطه‌ی دوستی باقی می‌ماند که آنها را باید به شکلی نسبت دهیم. با کمی دقت در میابیم که کافی است از شکل همین عبارت این ایده به ذهن می رسد که از آن k نفر، یک نفر را کنار گذاشته ایم و بقیه را با تمام nk نفر دوست کرده‌ایم. حال ادعا می‌کنیم که با این ساختار گروه بندی یکتا است (چرا؟).

قسمت دوم

طبق آنچه در صورت سوال آمده، تعداد روابط دوستی حداقل $\binom{k}{۲}n^۲ + ۱$ می‌باشد و حداقل یک گروه‌بندی وجود دارد. روابط دوستی غیر از رابطه‌ی هم گروه‌ها در این گروه‌بندی را در نظر بگیرید. تعداد این رابطه‌ها حداقل برابر است با $\binom{k}{۲}n^2 + ۱ - n\binom{k}{۲} = \binom{k}{۲}n(n-۱) + ۱$.

اما تعداد زوج گروه‌ها برابر با $\binom{n}{2}$ است و $\binom{k}{2}n(n-1)+1$ رابطه دوستی بین این $\binom{n}{2}$ زوج گروه قرار دارد. پس طبق اصل لانه‌کبوتر حداقل یک زوج گروه وجود دارد که تعداد روابط دوستی بین اعضای آن بیشتر از یا مساوی با $\left\lceil \frac{\binom{k}{2}n(n-1)+1}{\binom{n}{2}} \right\rceil = k*(k-1)+1$ باشد. از سوی دیگر کل روابط دوستی بین اعضای این دو گروه با یکدیگر

حداکثر $k*k$ تا بوده و حالا تنها $k-1$ رابطه‌ی دوستی از کل این رابطه‌ها را نداریم. پس در هر گروه عضوی هست که با تمامی اعضای گروه دیگر دوست باشد و در نتیجه با عوض کردن جای این دو نفر می‌توان یک گروه بندی جدید ایجاد کرد. با توجه به آنچه گفته شد در صورتیکه تعداد یال‌ها بیشتر از $\binom{k}{2}n^2$ باشد و حداقل یک گروه‌بندی وجود داشته باشد، نمی‌توان گروه‌بندی را بصورت یکتا مشخص کرد.