تعریف مجموعه: هر دسته‌ی «کاملاً مشخص» و «غیرتکراری» از اشیاء را یک مجموعه می‌نامیم.

مجموعه‌ها را با حروف انگلیسی بزرگ مثل A و B و C و . . . نام‌گذاری می‌کنند.

دانش‌آموز گرامی دقت کن که تعریف‌های زیر یک مجموعه را مشخص نمی‌کنند.

- اعداد خیلی بزرگ
- سه عدد زوج متوالی
- چهار عدد فرد متوالی
- گل‌های زیبا

عناصری که یک مجموعه را تشکیل می‌دهد، اعضای مجموعه نامیده می‌شوند.

عضوهای یک مجموعه را داخل $\{\}$ قرار می‌دهند که به این علامت «آکلاد» می‌گویند.

اگر a عضوی از مجموعهٔ A باشد، آن را به صورت $a \in A$ و اگر b به مجموعه‌ی A تعلق نداشته باشد، آن را به صورت $b \notin A$ نشان می‌دهند.

در مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوها مهم نیست، یعنی با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی مشخص نمی‌شود. برای مثال اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۷ را می‌توان به صورت $\{۴,۲,۶\} = \{۶,۴,۲\} = \{۲,۴,۶\}$ نشان داد.

دقت کنید عضوهای تکراری فقط یک عضو حساب می‌شوند، به طور مثال $A = \{۲,۳,\sqrt{۴},۵\}$ سه عضو دارد، زیرا $\sqrt{۴}$ همان ۲ می‌باشد که یکبار حساب شده است.

صورت‌های مختلف یک مجموعه :

هر مجموعه را می‌توان به سه صورت نمایش داد:

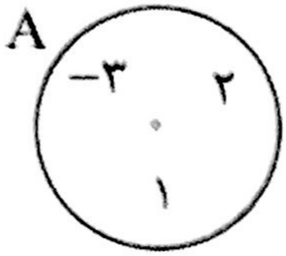
۱) نمایش هندسی (نمودار وِن)

۲) نمایش تفضیلی (با عضوها)

۳) نمایش توصیفی (با علائم ریاضی)

نمودار وِن (نمایش هندسی) :

در این روش عضوهای مجموعه را داخل یک منحنی بسته قرار می‌دهند.



نمایش تفضیلی :

$$A = \{-۳, ۰, ۱, ۲\}$$

در روش تفضیلی، اعضای مجموعه را با کاما«،» یا «و» داخل آکلاد قرار می‌دهند. $B = \{-۱, ۰, ۱, ۲\}$

اگر تعداد عضوهای یک مجموعه قابل شمارش باشد، آن مجموعه را «متناهی» یا «با پایان» می‌گوئیم و اگر تعداد عضوهای یک مجموعه غیر قابل شمارش باشد، آن را «نامتناهی» یا «بی‌پایان» می‌نامیم. به طور مثال مجموعه اعداد طبیعی زوج چهار رقمی باپایان است زیرا: $\{۱۰۰۰, ۱۰۰۲, ۱۰۰۴, \cdots, ۹۹۹۸\}$ ولی مجموعه اعداد طبیعی بزرگتر از ۱۰ بی‌پایان است، زیرا: $\{۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, \cdots\}$

یادآوری: نماد « $\cdots$ » یعنی عضوها با همین الگو ادامه پیدا می‌کنند.

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد، مجموعه تهی نامیده می‌شود و آن را با نماد $\{\}$ یا $\varnothing$ نشان می‌دهند.

نکته مهم : دقت کنید مجموعه‌ی $\{\varnothing\}$ تهی نیست، بلکه یک عضو دارد.

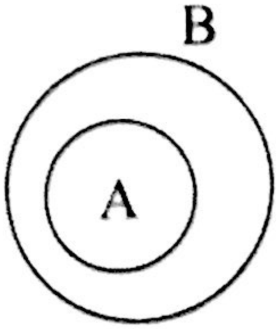
تساوی دو مجموعه : دو مجموعه A و B را در صورتی مساوی می‌گوئیم که، هر عضو A ، عضو B باشد و هر عضو B نیز عضو A باشد.

به طور مثال دو مجموعه‌ی $A=\{۳,۵,۱۰\}$ و $B=\{\sqrt{۹},\frac{۲۰}{۲},\frac{۲۰}{۴}\}$ باهم مساویند. ولی دو مجموعه‌ی $C=\{۳,۵\}$ و $D=\{۳,۴\}$ باهم مساوی نیستند.

زیرمجموعه:

مجموعه‌ی A را زیرمجموعه‌ی B می‌گوئیم درصورتی که تمام عضوهای A در B باشد و آنرا با نماد $A\subseteq B$ نشان می‌دهند.

به عنوان مثال اگر $A=\{۳,۷\}$ و $B=\{۱,۵,۳,۷\}$ باشد: $A\subseteq B$



ولی اگر $C=\{۳,۵\}$ و $D=\{۱,۵,۷\}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی C زیرمجموعه‌ی D نیست، زیرا عدد ۳ عضو C هست، ولی عضو D نیست. این مطلب را به زبان ریاضی به صورت $C \not\subseteq D$ نشان می‌دهند.

هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خودش هست مثلاً $B\subseteq B$ و $A\subseteq A$

مجموعه تهی، زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها می‌باشد، $\varnothing\subseteq B$ و $\varnothing\subseteq A$

اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ باشد، حتماً $A=B$

دو نکته مهم در مورد مقسوم‌علیه‌ها و مضارب اعداد:

۱- اگر A مجموعه‌ی شمارنده‌های ۲۴ و B مجموعه‌ی شمارنده‌های ۱۲ باشد، آنگاه $B\subseteq A$

۲- اگر A مجموعه‌ی مضارب عدد ۲۴ و B مجموعهٔ مضارب عدد ۱۲ باشد، آنگاه $A\subseteq B$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با : ۲^n

مثال: همهٔ زیرمجموعه‌های ، مجموعه $A = \{۳,۵,۷\}$ را بنویسید:

حل) می‌دانیم تعداد آن‌ها $۸ = ۲^۳$ تا می‌باشد، فرض می‌کنیم B زیرمجموعه‌ای از A باشد، تمام حالت‌های B به صورت زیر است:

$$B_۱ = \{\} \quad B_۲ = \{۳\} \quad B_۳ = \{۵\} \quad B_۴ = \{۷\} \quad B_۵ = \{۳,۵\}$$

$$B_۶ = \{۳,۷\} \quad B_۷ = \{۵,۷\} \quad B_۸ = \{۳,۵,۷\}$$

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n + ۵$ عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $n - ۱$ عضوی است: ۶۴ برابر زیرا :

$$\frac{۲^{n+۵}}{۲^{n-۱}} = \frac{۲^n \times ۲^۵}{۲^n \times ۲^{-۱}} = ۲^۶ = ۶۴$$

زیرمجموعه محض :

همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه به جز، خود مجموعه را زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه می‌نامند.

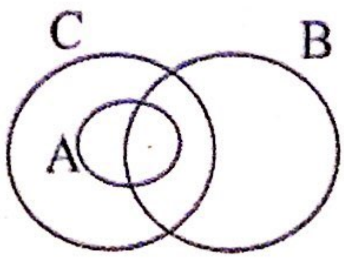
تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با : $۲^n - ۱$

به طور مثال: یک مجموعهٔ ۵ عضوی ۳۱ زیرمجموعه محض دارد، زیرا:

$$۲^۵ - ۱ = ۳۲ - ۱ = ۳۱$$

اگر $B \subseteq A$ و $C \subseteq B$ باشد، حتماً $A \subseteq C$

اگر $B \not\subseteq A$ و $C \not\subseteq B$ نمی‌توان گفت $C \not\subseteq A$ مانند نمودار مقابل :



تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با:

$$\frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times ۲\times ۳}$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۱\times ۲\times ۳\times ۴}$$

الگوی بالا را می‌توانید برای بقیه هم بسازید!!

نمایش توصیفی (با علائم ریاضی) :

در این روش، یک متغیر را به عنوان نماینده‌ی اعضای مجموعه انتخاب می‌کنیم و عضوهای مجموعه‌ی مورد نظر را با توصیفی به آن متغیر، نسبت می‌دهیم. اما لازم است مجموعه‌هایی که در سال قبل با آن‌ها آشنا شده‌اید را یکبار دیگر یادآوری کنیم:

مجموعه‌ی اعداد طبیعی که با« $\mathbb{N}$ » نشان می‌دهیم: $N = \{۱, ۲, ۳, ۴, \cdots\}$

مجموعه‌ی اعداد حسابی که با حرف « W » نشان می‌دهیم:

$W = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \cdots\}$

مجموعه اعداد صحیح که با حرف « $\mathbb{Z}$ » نشان می‌دهیم:

$Z = \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\}$

مثال: مجموعه‌ی $A = \{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ را به صورت توصیفی می‌توان بصورتهای زیر نشان داد:

$A = \{x \mid x \in Z, -۴ < x < ۳\}$ یا

$A = \{x \mid x \in Z, -۳ \leq x \leq ۲\}$ یا

$A = \{x \mid x \in Z, -۴ < x \leq ۲\}$ و یا $A = \{x \mid x \in Z, -۳ \leq x < ۳\}$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج را با (E) و مجموعه اعداد طبیعی فرد را با (o) نمایش می‌دهیم:

$$E = \{۲, ۴, ۶, ۸, \cdots\} = \{۲x \mid x \in \mathbb{N}\}$$
$$O = \{۱, ۳, ۵, ۷, \cdots\} = \{۲x - ۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$$

دقت کنید به جای x می‌توانید از هر حرف دیگر مانند (K) یا (n) هم استفاده کنید.

مجموعه‌ی مضرب‌های عدد طبیعی عدد ۲۵ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\{۲۵K \mid K \in N |= \{۲۵, ۵۰, ۷۵, \cdots\}$$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۵ را بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\{x \mid x \in N, \frac{۲۵}{x} \in N\} = \{۱, ۵, ۲۵\}$$

مجموعه اعداد $\{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \cdots\}$ به زبان ریاضی به صورت $\{x^۲ \mid x \in N\}$ نشان داده می‌شود که همان مربعات اعداد طبیعی است.

مجموعه‌ی اعداد گویا را با حرف Q نشان می‌دهیم که شامل تمام اعداد صحیح و تمام کسرهای متعارفی(مثبت و منفی و صفر) است.

و به زبان ریاضی بصورت زیر است: $Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq ۰\}$

دقت کنید: $\boxed{N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q}$

مجموعه مرجع: در هر بحث ریاضی، مجموعه‌ای که شامل مجموعه‌های دیگر باشد، مجموعه‌ی مرجع نامیده می‌شود و با حرف (M) آن را نشان می‌دهیم به طور مثال وقتی می‌گوئیم اعداد طبیعی بین ۳ و ۵ را بنویسید، پاسخ شما $\{۴\}$ می‌باشد. با این که عددهایی مثل ۳/۵ و ۳/۲ و ۴/۹ و . . . بین ۳ و ۵ هستند، ولی آن‌ها را نمی‌نویسید، چون عالم سخن شما و یا مجموعه‌ی مرجع اعداد طبیعی می‌باشد و هر عددی که طبیعی نباشد، جزء بحث شما نیست.

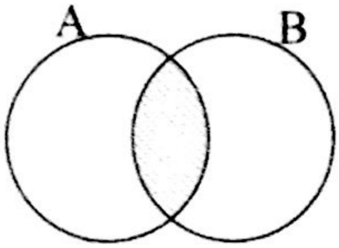
متمم یک مجموعه :

متمم مجموعه‌ی A که آن را با A' نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در M باشد ولی در A نباشد. به طور مثال وقتی در مورد اعداد طبیعی کوچکتر از ۷ حرف می‌زنیم مجموعه‌ی مرجع $M = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ حالا اگر بگوئیم $A = \{۲,۳\}$ بنابراین A' می‌شود، عضوهای مجموعه‌ی M به جز ۲ و ۳ یعنی $A' = \{۱,۴,۵,۶\}$

اشتراک دو مجموعه :

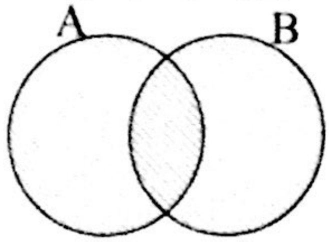
اشتراک دو مجموعه‌ی A و B که آن را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که عضوهای آن هم در A باشند و هم در B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$



اجتماع دو مجموعه:

اجتماع دو مجموعه‌ی A و B که آنرا با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم:
مجموعه‌ای است که عضوهای آن یا در A باشند یا در B و یا در هر دو



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

به طور مثال: اگر $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{۲,۳,۵,۷\}$ در این صورت :

$A \cap B = \{۲,۳\}$ (اشتراک)

$A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۷\}$ (اجتماع)

اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه :

الف) اجتماع این دو می‌شود B $\qquad A \cup B = B$

ب) اشتراک آنها می‌شود A $\qquad A \cap B = A$

نکات مربوط به اجتماع و اشتراک:

- اجتماع هر مجموعه‌ای مانند B با خودش، B می‌شود. $\qquad B \cup B = B$
- اشتراک هر مجموعه‌ای مانند B با خودش، B می‌شود. $\qquad B \cap B = B$
- اشتراک هر مجموعه‌ای مانند B با تهی، می‌شود تهی $\qquad B \cap \varnothing = \varnothing$
- اجتماع هر مجموعه‌ای مانند B با تهی، می‌شود B $\qquad B \cup \varnothing = B$
- اجتماع و اشتراک دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی دارد: $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

- اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارند:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- «اجتماع نسبت‌به اشتراک» و «اشتراک نسبت‌به اجتماع» خاصیت پخشی(توزیع‌پذیری) دارد:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- دقت کنید که اگر $A \cup B = A \cup C$ باشد، نمی‌توانید نتیجه بگیرید $B = C$

به مثال زیر دقت کنید: $\qquad A = \{۲, ۳, ۵\} \quad B = \{۳, ۷\} \quad C = \{۲, ۷\}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = \{۲, ۳, ۵, ۷\} \\ A \cup C = \{۲, ۳, ۵, ۷\} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ولی}} B \neq C$$

** نکته : دقت کنید اگر $A \cap C = A \cap B$ باشد، نمی‌توانید نتیجه بگیرید $B = C$

به مثال زیر دقت کنید:

$$A = \{۲,۳,۵\} \quad B = \{۳,۹\} \quad C = \{۳,۱۱\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = \{۳\} \\ A \cap C = \{۳\} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ولی}} B \neq C$$

تفاضل دو مجموعه :

مجموعه‌ی $A - B$ (می‌خوانیم A منهای B) مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A باشد، ولی در B نباشد.

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

دقت کنید که $B - A$ مجموعه‌ای است که عضوهای آن در B باشد، ولی در A نباشد.

به طور مثال :

$$\begin{array}{l} A = \{۳,۷\} \\ B = \{۲,۳,۵\} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A - B = \{۷\} \\ B - A = \{۲,۵\} \end{array}$$

در تست‌ها دقت کنید همیشه $A - B$ زیرمجموعه‌ی A می‌باشد.

دو مجموعه‌ی جدا ازهم :

دو مجموعه‌ی A و B را جدا از هم می‌گوئیم درصورتی که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند یعنی: $A \cap B = \varnothing$

- اگر دو مجموعه‌ی A و B جدا از هم باشند، در این صورت :

$$A - B = A \qquad B - A = B$$

عدد اصلی یک مجموعه :

تعداد عضوهای یک مجموعه‌ی متناهی (با پایان) مانند A را عدد اصلی مجموعه‌ی A می‌گویند و با $n(A)$ نشان می‌دهند. بدیهی است که $n(\varnothing) = ۰$

مثال :

$$B = \{۱,۲,۳,\cdots,۱۰۰\} \Rightarrow n(B) = ۱۰۰$$

$$A = \{۲,۴,۷\} \Rightarrow n(A) = ۳$$

مجموعه‌ها و احتمال :

آزمایش قطعی: آزمایشی است که نتیجه‌ی آن بطور یقین، قبل از انجام آزمایش کاملاً مشخص است. مثال: سکه‌ای که دورویش خط حک شده است را پرتاب کنید حتماً خط می‌آید.

آزمایش تصادفی: آزمایشی است که قبل از انجام آن، نتیجه را بطور قطع نتوان پیش‌بینی کرد. اگرچه مجموعه کل نتیجه‌های ممکن مشخص است.

به طور مثال می‌دانیم هر سکه دو رو دارد(شیر یا خط) ولی نمی‌دانیم در هر پرتاب کدام نتیجه قطعی می‌شود.

فضای نمونه: مجموعه‌ی کل حالت‌های ممکن در محقق شدن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می‌نامیم و با حرف (S) و تعداد آنرا با $n(S)$ نشان می‌دهیم.

به طور مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$$

دقت کنید که فضای نمونه در حالت کلی دو دسته گسسته و پیوسته دارد که امسال فقط با فضای نمونه‌ای گسسته آشنا می‌شوید.

تعریف احتمال: اگر بتوان به هر پیشامد از فضای نمونه‌ای حاصل از یک پیشامد تصادفی، عددی حقیقی و نامنفی کوچکتر یا مساوی یک نسبت داد که بیان‌گر میزان اطمینان و نوع آن پیشامد باشد، آن عدد را احتمال وقوع آن پیشامد می‌نامیم.

- احتمال وقوع پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم.
- احتمال وقوع هر پیشامد مانند A از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$\text{احتمال رخدادن پیشامد}A = \frac{\text{تعداد حالتهای مطلوب}}{\text{تعداد کل حالتهای ممکن}}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

- احتمال وقوع هر پیشامدی مانند A، عددی از صفر تا یک است:

$$0 \le P(A) \le 1$$

- اگر احتمال وقوع پیشامد A، صفر باشد، آنرا پیشامد «غیرممکن» یا «نشدنی» می‌نامیم. به طور مثال در پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد ۷ ظاهر شود (صفر) است.

- در یک فضای نمونه‌ای غیرتهی، اگر احتمال رخ دادن پیشامد A (یک) باشد آنرا پیشامد «حتمی» می‌نامیم یعنی اگر تعداد حالتهای مطلوب با تعداد کل حالتهای فضای نمونه‌ای مساوی باشد، در این صورت قطعاً آن پیشامد رخ خواهد داد. به طور مثال در پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد ظاهر شده کمتر از ۷ باشد می‌شود(یک) زیرا هر ۶ حالت قابل قبول است:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$

فصل دوم

روش نوشتن چند کسر بین دو کسر :

همانطور که می‌دانید بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. برای این کار معمولاً از یکی از چهار روش زیر می‌توانید استفاده کنید.

روش اول: هم مخرج کردن: برای اینکار ابتدا ک.م.م مخرج‌ها را بدست می‌آوریم و کسرها را هم‌مخرج می‌کنیم، اگر فاصلهٔ بین صورت‌ها کم بود و می‌خواستیم n عدد گویا بین آنها بنویسیم، صورت و مخرج‌ها را در $n+1$ ضرب می‌کنیم.

مثال: بین دو عدد $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ پنج عدد گویا بنویسید.

همانطور که مشخص است ک.م.م مخرج‌ها ۱۲ می‌باشد و دو کسر داده شده تبدیل به $\frac{۸}{۱۲}$ و $\frac{۹}{۱۲}$ می‌شوند و اگر صورت و مخرج آنها را در ۶ ضرب کنیم، تبدیل به $\frac{۴۸}{۷۲}$ و $\frac{۵۴}{۷۲}$ می‌شوند و ۵ کسر بین آنها را به راحتی می‌توانید بنویسید.

$$\frac{۴۸}{۷۲} < \frac{\boxed{۴۹}}{۷۲} < \frac{\boxed{۵۰}}{۷۲} < \frac{\boxed{۵۱}}{۷۲} < \frac{\boxed{۵۲}}{۷۲} < \frac{\boxed{۵۳}}{۷۲} < \frac{۵۴}{۷۲}$$

روش دوم: هم‌صورت کردن کسرها : برای اینکار می‌توانید ک.م.م. صورت‌ها را بیابید و سپس کسرهای مساوی با آنها را بنویسید و اگر فاصله بین صورت‌ها کم بود مجدداً در $(n + ۱)$ ضرب کنید.

مثال: بین دو کسر $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۴}$ دو عدد گویا بنویسید:

همانطور که مشخص است ک.م.م صورت‌ها عدد ۶ می‌باشد پس دو کسر تبدیل به $\frac{۶}{۹}$ و $\frac{۶}{۸}$ می‌شوند و اگر صورت و مخرج آنها را در ۳ ضرب کنید، تبدیل به $\frac{۱۸}{۲۷}$ و $\frac{۱۸}{۲۴}$ می‌شوند و به راحتی می‌توانید دو کسر در بین آنها بنویسید:

$$\frac{۱۸}{۲۷} < \frac{۱۸}{\boxed{۲۶}} < \frac{۱۸}{\boxed{۲۵}} < \frac{۱۸}{۲۴}$$

روش سوم: استفاده از میانگین دو کسر :

چون می‌دانیم میانگین دوعدد همواره عددی بین آن دو می‌باشد، می‌توانید دو کسر داده شده را باهم جمع کرده و حاصل را بر ۲ تقسیم کنید.

مثال: بین دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۴}$ یک عدد گویا بنویسید:

$$\frac{\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}}{۲}=\frac{\frac{۸+۹}{۱۲}}{۲}=\frac{\frac{۱۷}{۱۲}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

عدد $\frac{۱۷}{۲۴}$ دقیقاً بین آنها قرار دارد.

همانطور که ملاحظه کردید این روش محاسبه لازم دارد و اگر بخواهید چند عدد گویا بین دو کسر بنویسید، زمان بیشتری صرف خواهد شد.

روش چهارم: جمع صورت‌ها با هم و جمع مخرج‌ها با هم:

یکی از ساده‌ترین روش‌هایی که می‌توانید بین دو کسر متعارفی، هرچند کسر دلخواه را بنویسید، این است که صورتها را باهم و مخرج‌ها را باهم جمع کنید: به زبان ریاضی:

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\ (b,d\neq ۰)\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

به طور مثال: بین دوکسر $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۴}$ یک کسر بنویسید.

$$\frac{۲}{۳}<\frac{۲+۳}{۳+۴}<\frac{۳}{۴}\ \Rightarrow\ \text{بین آنهاست}\ \frac{۵}{۷}$$

دقت کنید هر چند که دوست داشتید می‌توانید این عمل را تکرار کنید تا تعداد کسرهای بیش‌تری را به دست آورید:

انواع عددهای اعشاری و تبدیل کسر به عدد اعشاری:

هر عدد گویا را می‌توان به دو صورت عدد اعشاری «مختوم» یا «متناوب» نوشت.

عددی اعشاری مختوم(متناهی): دستهٔ اول کسرهایی هستند که به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، به باقی‌مانده صفر می‌رسیم و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف میشود مانند $\frac{۳}{۵} = ۰/۶$ یا $\frac{۹}{۸} = ۱/۱۲۵$

به طور کلی اگر کسرها را تا حد امکان ساده کنید و سپس مخرج آنها را تجزیه کنید و فقط در مخرج عامل ۲ یا ۵ (یا هر دو) ظاهر شوند، عدد اعشاری مربوط به این کسرها مختوم و متناهی می‌باشد. (به این نوع عددها اعشاری تحقیقی نیز می گویند.)

مثال: در عمل تقسیم مشخص کنید عدد اعشاری کدام‌یک از کسرهای $\frac{۱۳}{۳۹۰}$ و $\frac{۳۱}{۴۰}$ مختوم است؟

حل) کسر $\frac{۳۱}{۴۰}$ ساده نمی‌شود و تجزیهٔ مخرج آن به صورت $۲^۳ \times ۵$ می‌باشد و چون از عامل‌های ۲ یا ۵ تشکیل شده است، لذا مختوم است.

کسر $\frac{۱۳}{۳۹۰}$ راابتدا بر ۱۳ ساده کنید و می‌شود $\frac{۱}{۳۰}$ و تجزیهٔ مخرج به صورت $۲ \times ۳ \times ۵$ می‌باشد که به غیر از عامل‌های ۲ و ۵ دارای عامل اول دیگری هم(مثل ۳) است پس مختوم نیست.

عددهای اعشاری متناوب: دستهٔ دوم کسرهایی هستند که وقتی صورتشان را بر مخرجشان تقسیم می کنیم هیچ گاه به باقی‌مانده‌ی صفر نمی‌رسیم و در خارج‌قسمت بعد از ممیز یک یا چند رقم به طور متناوب تکرار می‌شوند که این ارقام را «دورهٔ گردش» می‌نامند و نماد اعشاری این کسرها را (متناوب) می گویند.

این دسته از کسرها خود به دو دسته تقسیم می‌شوند: «متناوب ساده» و «متناوب مرکب»

متناوب ساده: در برخی از آنها هنگام تبدیل به نماد اعشاری بلافاصله بعد از ممیز دوره‌ی گردش آغاز می‌شود مانند $\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶۶...$ که آن را به صورت $\frac{۲}{۳}=۰/\overline{۶}$ نشان می‌دهند.

متناوب مرکب: در بعضی دیگر از کسرها هنگام تقسیم صورت بر مخرج بلافاصله بعد از ممیز، دوره‌ی گردش آغاز نمی‌شود، بلکه یک یا چند رقم می‌آیند و سپس دوره‌ی گردش آغاز می‌گردد مانند $\frac{۱۶}{۴۵}=۰/۳۵۵۵...$ که آن را بصورت $\frac{۱۶}{۴۵}=۰/۳\overline{۵}$ نشان می‌دهند.

برای اینکه بدون عمل تقسیم کردن تشخیص دهیم که نماد اعشاری یک کسر «متناوب ساده» یا «مرکب» است به این ترتیب عمل می‌کنیم که ابتدا کسرها را تا حد امکان ساده می‌کنیم سپس مخرج را تجزیه می‌کنیم، اگر در تجزیهٔ مخرج عامل‌های ۲ و ۵ نباشد و عددهای اولی به جز ۲ و ۵ باشد، عدد اعشاری مربوط به آنها «متناوب ساده» است و اگر در تجزیه‌ی مخرج عامل‌های ۲ یا ۵ و یا هر دو باشند و علاوه بر آن‌ها عدد یا اعداد اول دیگری هم باشد عدد اعشاری مربوط به آن «متناوب مرکب» خواهد بود.

مثال :

ابتدا بدون عمل تقسیم صورت بر مخرج مشخص کنید نماد اعشاری کدام یک از کسرهای $\frac{۴}{۱۸}$ و $\frac{۲۱}{۴۵}$ و $\frac{۳}{۶۰}$ (مختوم) یا (متناوب ساده) و یا (متناوب‌مرکب) است سپس با کمک ماشین حساب آنها را به صورت اعشاری بنویسید.

حل) کسر $\frac{۴}{۱۸}$ را ساده کنید می‌شود $\frac{۲}{۹}$ و مخرج را تجزیه کنید می‌شود $۹ = ۳^۲$ که عامل‌های غیر از ۲ و ۵ یعنی $\boxed{۳}$ را در مخرج دارد، پس متناوب ساده است.

کسر $\frac{۲۱}{۴۵}$ را ساده کنید می‌شود $\frac{۷}{۱۵}$ و در تجزیهٔ مخرج $۱۵ = ۳ \times ۵$ علاوه بر عامل ۵ عامل دیگری نیز دارد(مثل ۳) لذا نماد اعشاری کسر $\frac{۲۱}{۴۵}$ ، متناوب مرکب است.

کسر $\frac{۳}{۶۰}$ را ساده کنید می‌شود $\frac{۱}{۲۰}$ و مخرج آن $۲۰ = ۲^۲ \times ۵$ فقط از عاملهای ۲ یا ۵ تشکیل شده است، بنابراین، نماد اعشاری کسر $\frac{۳}{۶۰}$، مختوم است.

عدداعشاری مختوم $\frac{۳}{۶۰} = ۰/۰۵$

متناوب ساده: $\frac{۴}{۱۸} = ۰/۲۲۲۲... = ۰/\overline{۲}$

متناوب مرکب: $\frac{۲۱}{۴۵} = ۰/۴۶۶۶۶... = ۰/۴\overline{۶}$

تبدیل عدد اعشاری به کسر :

الف) درصورتی‌که عدد اعشاری مختوم باشد کل عدد را در صورت نوشته، اگر یک رقم اعشار داشته باشد، مخرج آن ۱۰ و اگر دو رقم اعشار داشت، مخرج آن ۱۰۰ و .... قرار می‌دهیم و در صورت لزوم ساده می‌کنیم.

مثال: $۵/۷۲۱ = \frac{۵۷۲۱}{۱۰۰۰}$ و $۳/۴۲ = \frac{۳۴۲}{۱۰۰} \overset{\text{ساده}}{=} \frac{۱۷۱}{۵۰}$ و

$۱/۵ = \frac{۱۵}{۱۰} \overset{\text{ساده}}{=} \frac{۳}{۲}$

ب) در صورتی که عدد اعشاری «متناوب ساده» باشد، عدد صحیح آن را کنار کسر نوشته و سپس ارقام دوره گردش را در صورت کسر نوشته و در مخرج به تعداد ارقام دوره گردش $\boxed{۹}$ می‌گذاریم. مثال: $۳/\overline{۸۷} = ۳\frac{۸۷}{۹۹} \overset{\text{ساده}}{=} ۳\frac{۲۹}{۳۳}$

$$۰/\overline{۱۳} = \frac{۱۳}{۹۹} \qquad ۰/\overline{۰۰۷} = \frac{۷}{۹۹۹} \qquad ۲/\overline{۴} = ۲\frac{۴}{۹}$$

ج) در صورتی که عدد اعشاری «متناوب مرکب» باشد، به این ترتیب عمل می‌کنیم که، عدد صحیح را نوشته و خط کسری قرار می‌دهیم سپس در صورت کسر، تمام ارقام بعد از ممیز را منهای ارقام غیر گردش می‌کنیم و در مخرج به تعداد ارقام دوره‌ی گردش $\boxed{۹}$ و به تعداد ارقام غیر دوره گردش جلوی آن رقم $\boxed{۰}$ قرار می‌دهیم. مثال:

$$۳/۱\overline{۷۹} = ۳\frac{۱۷۹-۱}{۹۹۰} = ۳\frac{۱۷۸}{۹۹۰} \overset{\text{ساده}}{=} ۳\frac{۸۹}{۴۹۵}$$

$$۰/۲\overline{۵} = \frac{۲۵-۲}{۹۰} = \frac{۲۳}{۹۰}$$

$$۰/۳\overline{۷۲} = \frac{۳۷۲-۳}{۹۹۰} = \frac{۳۶۹}{۹۹۰} \overset{\text{ساده}}{=} \frac{۴۱}{۱۱۰}$$

$$۰/۳۷\overline{۲} = \frac{۳۷۲-۳۷}{۹۰۰} = \frac{۳۳۵}{۹۰۰} \overset{\text{ساده}}{=} \frac{۶۷}{۱۹۸}$$

$$۶/\overline{۱۲۳} = ۶\frac{۱۲۳-۱}{۹۹۰} = ۶\frac{۱۲۲}{۹۹۰} = ۶\frac{۶۱}{۴۹۵}$$

عددهای گنک (اصم یا ناگویا):

همانطور که دیدید ممکن است تعداد ارقام اعشاری عددی نامتناهی(بی‌پایان) باشد، اما با نظم خاصی تکرار شود که دارای تناوب یا دوره گردش است و می‌توانیم کسر مربوط به این عدد را بنویسیم پس این اعداد گویا هستند، مانند:

$$۰/۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱... = ۰/\overline{۴۲۸۵۷۱} = \frac{۴۲۸۵۷۱}{۹۹۹۹۹۹} \overset{\text{ساده کنید}}{=} \frac{۳}{۷}$$

اکنون به عددهای اعشاری زیر دقت کنید که دارای تعداد ارقام اعشاری نامتناهی هستند، و این رقم‌های اعشاری دارای دورهٔ تناوب یا دارای نظم خاصی در تکرار رقم‌ها نیستند به این عددها «گنگ» یا «اصم» یا «ناگویا» می‌گویند.

$$\sqrt{۲} \cong ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳۰۹... \qquad \sqrt{۵} \cong ۲/۲۳۶.۶۷۹۷۷۴۹۹۷...$$

عدد پی $\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳...$

مجموعه‌ی اعداد گنگ را با حرف Q' یا Q^c نمایش می‌دهیم.

دقت کنید که ممکن است عددی، علی‌رقم این‌که حالتی موزون دارد ، اما گویا نباشد

مانند: $۰/۱۲۳۴۵۶...$ یا $۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰...$

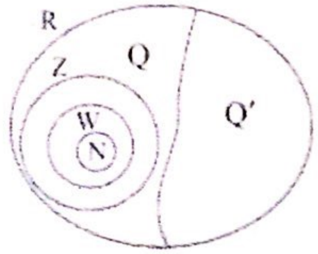
به طور کلی اگر عدد اعشاری یافت شود که تعداد ارقام اعشاری آن نامتناهی بوده و نتوان به صورت عددی گویا نشان داد، آنرا یک عدد گنگ (اَصم) می‌نامیم.

جذر اعدادی که مربع کامل نیستند، گنگ می‌باشند. مانند $\sqrt{۶۰}$ یا $\sqrt{۵۰}$ یا ....

قرینه‌ی هر عدد گنگ، گنگ است، مثلاً $-\sqrt{۲}$ نیز گنگ است.

مجموعه اعداد حقیقی

مجموعه‌ی متشکل از اعداد گویا و گنگ را مجموعه اعداد حقیقی نامیده و آنرا با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم. $Q \bigcup Q' = \mathbb{R}$



به طور کلی می‌توان گفت هر عدد حقیقی یا گویاست یا گنگ.

مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گنگ هیچ عضو مشترکی ندارند.

$$Q \bigcap Q' = \varnothing$$

هر عدد حقیقی که گویا نباشد، گنگ است و برعکس، هر عدد حقیقی که گنگ نباشد، گویاست.

تمام اعداد حقیقی را می‌توان روی یک محور نمایش داد، یعنی هر نقطه از محور، متناظر با یک عدد حقیقی است.

حاصل جمع هر عدد گویا با هر عدد گنگ، عددی گنگ است، مثلاً $\sqrt{۲}$ گنگ است پس $\sqrt{۲} + ۳$ و $\sqrt{۲} + ۵-$ و $\sqrt{۲} - ۱$ نیز گنگ هستند.

حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیر صفر، در هر عدد گنگ، عددی گنگ است مثلاً $\sqrt{۵}$ گنگ است، پس $۳\sqrt{۵}$ و $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ نیز گنگ هستند.

نکته مهم:

دانش‌آموز گرامی دقت کنید گاهی در تست‌ها بیان می‌شود که «حاصل ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ، عددی گنگ است» که این جمله نادرست است، زیرا عدد صفر گویاست و در هر عدد گنگ ضرب شود، پاسخ صفر می‌شود که عددی گویاست.

مجموع دو عدد گویا، گویاست.

جمع و تفریق و ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است گویا و ممکن است گنگ شود.

مثال:

$$\left.\begin{array}{r} \text{گنگ}\ \sqrt{۳} \\ \text{گنگ}\ \sqrt{۵} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} \sqrt{۳}+\sqrt{۵} \qquad \text{گنگ}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{گنگ}\ ۳+\sqrt{۵} \\ \text{گنگ}\ ۱۲-\sqrt{۵} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} ۳+\sqrt{۵}+۱۲-\sqrt{۵}=۱۵ \qquad \text{گویا}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{گنگ}\ \sqrt{۲} \\ \text{گنگ}\ \sqrt{۸} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضرب}} \sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۱۶}=۴ \qquad \text{گویا}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{گنگ}\ ۷+\sqrt{۲} \\ \text{گنگ}\ \sqrt{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} ۷+\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۷ \qquad \text{گویا}$$

قدر مطلق: فاصله‌ی نقطه‌ی نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد تا مبدا را «قدر مطلق» آن عدد می‌نامند، برای مثال فاصله‌ی دو عدد ۲ و ۲- تا مبدا $\boxed{۲}$ واحد است، پس قدر مطلق هر دو عدد می‌شود $\boxed{۲}$

اگر a یک عدد حقیقی باشد، قدرمطلق آن را با نماد $|a|$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} a \geq ۰ \ \text{اگر} \Rightarrow |a| = a \\ a < ۰ \ \text{اگر} \Rightarrow |a| = -a \end{cases}$$

مثال : $|-۵| = -(-۵) = ۵$ $\qquad |۵| = ۵$

دقت کنید در حالت کلی قدرمطلق هر عدد، غیر صفر، عددی مثبت است.

قدر مطلق صفر، صفر است. $|۰| = ۰$

قدر مطلق حاصل ضرب دوعدد مساوی است با حاصل‌ضرب قدرمطلق‌های آن دو عدد: $|ab| = |a| \times |b|$

دقت کنید قدرمطلق حاصل‌جمع دو عدد همواره مساوی نیست با حاصل‌جمع قدرمطلق‌های آن دو عدد:

$$\begin{aligned}&|a+b| \neq |a|+|b| \\ &|-۵+۲| \neq |-۵|+|۲|\end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{مثال}} \quad \left.\begin{aligned}&|-۵+۲|=|۳|=۳ \\ &|-۵|+|۳|=۵+۳=۸\end{aligned}\right\}$$

اگر a یک عدد حقیقی باشد، آنگاه: $\sqrt{a^۲}=|a|$ مثال:

$$\sqrt{(-۵)^۲}=|-۵|=۵ \qquad \sqrt{۵^۲}=|۵|=۵$$

فصل سوم

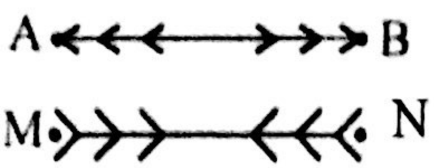
استدلال: استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده کردن ازدانسته‌های قبلی(معلومات مسئله) برای مشخص کردن موضوعی که در ابتدا معلوم نبوده است. (حکم مسئله)

در سالهای آینده می‌خوانید که استدلال به ۴ روش : شهودی، تمثیلی یا قیاسی،استقرایی و استنتاجی انجام می‌شود. که فعلاً استدلال استنتاجی را مورد استفاده قرار می‌دهیم که به اختصار آنرا استدلال می گوییم.

به استدلالی که درستی موضوعی یا مسئله‌ای را مشخص کند«اثبات» می گوییم.

رسم شکل مناسب در هندسه کمک زیادی به فهم مسئله و تشخیص راه حل می کند.

باید دقت کنید که مشاهدات شما برای تشخیص اندازه ها، قابل اطمینان نیست و گاهی ممکن است شما از آنها، نتایج نادرستی بگیرید. می‌توانید خطاهای دید را با کمک اینترنت، جستجو کنید و بسیاری از آنها را ملاحظه کنید، برای نمونه دو پاره خط AB و MN را ملاحظه کنید، هم‌اندازه‌اند، ولی خطای دید باعث می‌شود که تصور دیگری کنید!؟



برای اثبات یا مشخص کردن هر موضوع یا مسئله‌ای در هندسه،
ابتدا باید ببینید که چه اطلاعاتی در مورد مسئله داریم.
به این اطلاعات داده شده «فرض مسئله» می‌گویند
سپس دقت کنید چه چیزی را می‌خواهید اثبات کنید که به آن «حکم مسئله» می‌گویند.

سعی کنید برای هر مسئله فرض و حکم را بنویسید.

همنهشتی مثلث‌ها

هرگاه دو مثلث به گونه‌ای باشند که دقیقاً برهم منطبق شوند و یکدیگر را بپوشانند، آن دو مثلث را «همنهشت» می‌گویند.

اگر دو مثلث هم نهشت باشند، اضلاع و زاویه‌های نظیر در آن دو مثلث باهم برابرند.

چنانچه دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ هم‌نهشت باشند، آنرا با نماد $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ یا گاهی با نماد $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ نمایش می‌دهند.

دو مثلث در سه حالت زیر با یکدیگر هم‌نهشت هستند:

۱- هرگاه دو ضلع و زاویهٔ بین این دو ضلع در دو مثلث برابر باشند. (ض ز ض)

۲- هرگاه دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در دو مثلث برابر باشند. (ز ض ز)

۳- هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشند. (ض ض ض)

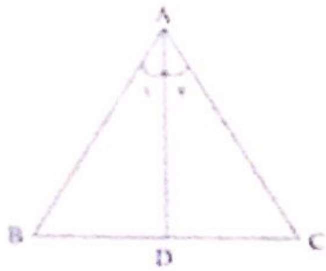
نکته مهم : در خصوص مثلث قائم‌الزاویه، علاوه بر ۳ حالت فوق، ۲ حالت زیر نیز برای هم‌نهشتی آنها وجود دارد.

الف) هرگاه وتر و یک زاویه تنددر دو مثلث قائم‌الزاویه باهم برابر باشند. (و ز)

ب) هرگاه وتر و یک ضلع دیگر در دو مثلث قائم‌الزاویه باهم برابر باشند. (و ض)

برای حل مسئله در هندسه، ابتدا صورت مسئله را کاملاً خوب بخوانید و سپس با رسم یک شکل مناسب برای حل آن اقدام کنید. توجه کنید که مفاهیم تشکیل دهندهٔ مسئله بسیار مهم‌اند.

به طور مثال: در شکل مقابل اگر گفته شود که AD منصف ضلع BC است،



فقط می‌توانید در فرض مسئله $\overline{BD} = \overline{DC}$ را استفاده کنید و نمی‌توانید بنویسید:

$$\overline{AC} = \overline{AB} \text{ یا } \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

ولی دقت کنید که در بعضی مسئله‌ها، شما با توجه به معلومات می‌توانید ثابت کنید که این روابط برقرار هستند که به آنها اجزاء متناظر دو مثلث می‌گویند.

شکل‌های متشابه:

دو چند ضلعی در صورتی متشابه‌اند که: «تعداد اضلاع آنها مساوی، ضلع‌های متناظر آنها باهم متناسب و زاویه‌های متناظر آنها مساوی» باشند.

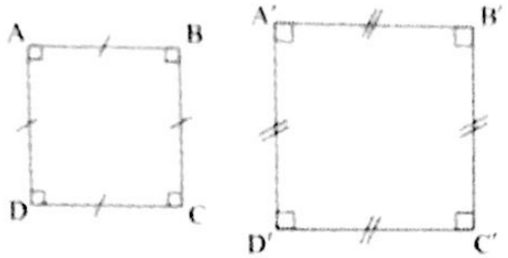
یادآوری: اگر دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند، می‌گوییم این دو کسر متناسب‌اند. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

دو مربع دلخواه، همواره با هم متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های نظیر آن‌ها با هم برابر و ضلع‌های نظیر آنها، متناسب‌اند. (به دلیل مساوی بودن هر چهار ضلع)

اگر دو چهارضلعی ABCD و A'B'C'D' متشابه باشند، آنرا با نماد زیر نمایش می‌دهند. نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه را نسبت تشابه می‌گویند.

$$ABCD \sim A'B'C'D'$$

به عنوان مثال نشان دهید دو مربع زیر متشابه‌اند:



a b

$\hat{A} = \hat{A}' = ۹۰^\circ$ $\hat{C} = \hat{C}' = ۹۰^\circ$

$\hat{B} = \hat{B}' = ۹۰^\circ$ $\hat{D} = \hat{D}' = ۹۰^\circ$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{a}{b} \Rightarrow ABCD \sim A'B'C'D'$$

عدد $\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$ را نسبت تشابه این دو مربع می گویند.

اگر دو n ضلعی منتظم با اندازه‌های متفاوت داشته باشیم، حتماً متشابه‌اند، بطور مثال :

هر دو پنج ضلعی منتظم دلخواه متشابه‌اند. هردوشش‌ضلعی‌منظم دلخواه‌متشابه‌اند

دقت کنید هر دو لوزی دلخواه متشابه نیست، زیرا زاویه‌های متناظر آنها ممکن است مساوی نباشد.

دقت کنید هر دو مستطیل دلخواه متشابه نیست، زیرا نسبت بین اضلاع آنها ممکن است مساوی نباشد. $\frac{AB}{A'B'} \neq \frac{BC}{B'C'}$

در صورتی دو لوزی دلخواه متشابه‌اند که یک زاویه مساوی داشته باشند.

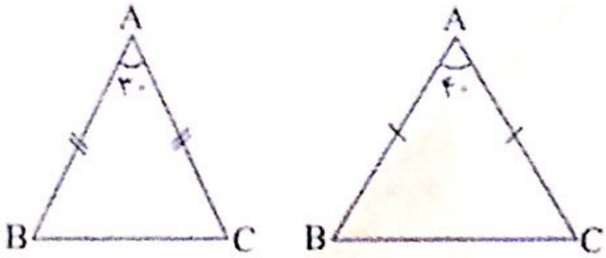
در صورتی دو مستطیل دلخواه متشابه‌اند که نسبت بین عرضهای آن‌ها با نسبت بین طولهایشان برابر باشد.

نقشهٔ هر مکان، با آن مکان متشابه است و نسبت تشابه آنها را «مقیاس نقشه» می‌گویند.

زاویهٔ بین دو خط در نقشه، با زاویهٔ بین خطهای متناظرشان در طبیعت مساوی است.

هر دو شکل هم‌نهشت باهم متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها «یک» می‌باشد. ولی عکس این مطلب درست نیست، یعنی هر دو شکل متشابه، هم‌نهشت نیستند(زیرا ممکن است یکی به یک نسبتی بزرگتر یا کوچکتر شده باشد)

هر دو مثلث متساوی‌الساقین دلخواه متشابه نیستند، زیرا ممکن است زاویه‌های راس آنها متفاوت باشد.



فصل چهارم

یادآوری: اگر a و b دو عدد حقیقی مخالف صفر و m و n دو عدد طبیعی باشند:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \qquad a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \xrightarrow{\text{مثال}} (۳^۷)^۲ = ۳^{۱۴}$$

$$a^{m^n} = a^{(m^n)} \xrightarrow{\text{مثال}} ۳^{۷^۲} = ۳^{(۷^۲)} = ۳^{۴۹}$$

در عبارت $(a^m)^n$ اگر جای دو توان را عوض کنید، حاصل تفاوتی نمی‌کند

ولی در عبارت a^{m^n} ممکن است با جابه‌جایی m و n عدد دیگری حاصل شود، پس در حل مسئله‌ها دقت کنید:

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn} \qquad \begin{matrix}(۵^۲)^۳ = ۵^۶ \\ (۵^۳)^۲ = ۵^۶\end{matrix} \Rightarrow (۵^۲)^۳ = (۵^۳)^۲$$

$$a^{m^n} \neq a^{n^m} \qquad \left.\begin{matrix}۵^{۲^۳} = ۵^{(۲^۳)} = ۵^۸ \\ ۵^{۳^۲} = ۵^{(۳^۲)} = ۵^۹\end{matrix}\right\} \Rightarrow ۵^{۲^۳} \neq ۵^{۳^۲}$$

توان منفی:

هر عدد(به جز صفر) به توان منفی، برابر است با معکوس همان عدد به توان مثبت:

$$(a \neq ۰) \Rightarrow a^{-m} = \frac{۱}{a^m} = (\frac{۱}{a})^m \xrightarrow{\text{مثال}} ۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^۳} = (\frac{۱}{۲})^۳$$

$$(\frac{۲}{۳})^{-۷} = (\frac{۳}{۲})^۷$$

اگر صورت یا مخرج کسری دارای توان منفی بود، با انتقال عدد دارای توان منفی، از صورت به مخرج و یا به عکس، علامت آن توان مثبت می‌شود: مثال :

$$\frac{۲^{-۷} \times ۳^۴}{۳^{-۹} \times ۲^۶} = \frac{۳^۹ \times ۳^۴}{۲^۷ \times ۲^۶} = \frac{۳^{۱۳}}{۲^{۱۳}} = (\frac{۳}{۲})^{۱۳}$$

می‌توانید برای محاسبهٔ حاصل اعداد توان‌دار با توان منفی یا مقایسهٔ اعداد با توان منفی، ابتدا توان‌ها را مثبت کنید.

اگر عدد منفی به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی و اگر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت است:

$$(K \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (-a)^{۲K} = a^{۲K} \quad , \quad (-a)^{۲K+۱} = -a^{۲K+۱}$$

مثال ← $(-۵)^{۴} = ۵^{۴} = ۶۲۵ \qquad (-۵)^{۳} = -۵^{۳} = -۱۲۵$

از نکته بالا برای عدد (۱-) بسیار استفاده می‌شود:

$$(-۱)^{۱۰۰} = ۱ \qquad (-۱)^{۱۰۱} = -۱$$

اگر توان عدد منفی باشد، نمی‌توانید بگویید که حتماً آن عدد منفی است، حتی اگر پایه‌اش هم منفی باشد. مثال:

$$(-۳)^{-۴} = (-\frac{۱}{۳})^{۴} = +\frac{۱}{۸۱} \qquad (-\frac{۲}{۵})^{-۲} = (-\frac{۵}{۲})^{۲} = (+\frac{۲۵}{۴})$$

$$۲^{-۳} = (\frac{۱}{۲})^{۳} = \frac{۱}{۸}$$

برای حل تستها به نکته‌های زیر دقت کنید:

$$۰/۲ = ۵^{-۱} \qquad ۰/۵ = ۲^{-۱}$$

$$۰/۰۴ = ۵^{-۲} \qquad ۰/۲۵ = ۲^{-۲}$$

$$۰/۰۰۸ = ۵^{-۳} \qquad ۰/۱۲۵ = ۲^{-۳}$$

نماد علمی اعداد:

دانشمندان برای محاسبهٔ فاصله‌های خیلی دور و یا جرم اجسام بزرگ مانند سیارات و یا جرم اجسام بسیار کوچک مانند جرم یک اتم از یک عنصر به اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک نیاز دارند که نوشتن و خواندن آنها دشوار است. برای رهایی از این مشکل، مُدلی را برای عددنویسی قرارداد کرده‌اند که به آن «نماد علمی» می گویند.

نماد علمی هر عدد مثبت به صورت $K \times ۱۰^{n}$ می‌باشد که در آن K عددی است اعشاری از یک تا قبل از ده $(۱ \le K < ۱۰)$ و n نیز یک عدد صحیح می‌باشد. $(n \in \mathbb{Z})$

به عنوان مثال: یک سال نوری چند کیلومتر است؟ آن را به صورت نماد علمی بنویسید.

حل : یک سال نوری مسافتی است که نور(با سرعت ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه) درمدت یک‌سال طی می‌کند. میدانیم هر سال به طور معمول ۳۶۵ روز و هر روز ۲۴ ساعت و هر ساعت ۶۰ دقیقه و هر دقیقه ۶۰ ثانیه است پس:

$$\text{یکسال نوری} = ۳۰۰۰۰۰ \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰ = ۹۴۶۰۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$

$$= ۹/۴۶۰۸ \times ۱۰^{۱۲}$$

مثال ۲: فاصله زمین تا خورشید حدود ۱۵۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ متر و همچنین شعاع مدار الکترون یک اتم هیدروژن ۰/۰۰۰,۰۰۰,۰۰۵۳ سانتی‌متر است. آنها را با نماد علمی نشان دهید.

$\text{شعاع مدار الکترون} = ۵/۳ \times ۱۰^{-۹}$ $\qquad$ $\text{فاصله‌زمین تاخورشید} = ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱}$

ریشه‌گیری:

همانطور که در سال‌های قبل خوانده‌اید عددهای ۳ و ۳- را ریشه‌های دوم ۹ می‌گویند. به طور کلی هر عدد حقیقی مثبت مانند a ، دارای دو ریشه یکی مثبت $\sqrt{a}$ و دیگری $-\sqrt{a}$ می‌باشد.

اعداد منفی ریشه دوم ندارند، زیرا مجذور هیچ عددی منفی نمی‌شود.

عدد صفر فقط یک ریشه دوم دارد که آن هم خود صفر است.

هر عدد به توان ۳ را مکعب یک عدد می‌گویند، به طور مثال مکعب عدد ۵ میشود: $۵^{۳} = ۱۲۵$

ریشه سوم عدد a را بصورت $\sqrt[۳]{a}$ نمایش می‌دهند، بطور مثال:

$$\sqrt[۳]{۱۲۵} = ۵$$

در عبارت $\sqrt[n]{a}$ به عدد n ریشه یا فرجه گفته می‌شود.

اعداد منفی ریشهٔ سوم دارند، به طور مثال: $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

برای هر دو عدد مثبت a و b داریم: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

مثال : $\sqrt{64 \times 81} = \sqrt{64} \times \sqrt{81} = 8 \times 9 = 72$

مثال: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow \sqrt{\frac{100}{121}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{121}} = \frac{10}{11}$

برای هر دو عدد حقیقی a و b ($b \neq 0$) داریم:

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

مثال: $\sqrt[3]{27 \times 64} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{64} = 3 \times 4 = 12$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$

ساده کردن رادیکال‌ها :

اگر n عددی زوج و a و b دو عدد نامنفی باشند،آنگاه $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
و اگر n فرد باشد رابطهٔ فوق همواره برقرار است: از این رابطه برای ساده کردن رادیکال‌ها استفاده می‌شود. به مثالهای زیر دقت کنید:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \times 2} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{-250} = \sqrt[3]{(-5)^3 \times 2} = -5\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$$

رادیکال‌های متشابه: دو رادیکال را متشابه می‌گوییم، در صورتی که فرجه‌ها مساوی و عبارت زیر **رادیکال یکسان باشند. به عنوان مثال:** $\sqrt[۳]{۷}$, $۴\sqrt[۳]{۷}$, $-۹\sqrt[۳]{۷}$ **متشابه‌اند. اما** $\sqrt{۵}$, $\sqrt[۳]{۵}$ **متشابه نیستند. پس متشابه بودن عبارت‌های حذف رادیکالی به ضرایب آنها بستگی ندارد.**

جمع و تفریق رادیکال‌ها

رادیکال‌های متشابه را می‌توان باهم جمع یا تفریق کرد، برای این منظور، ضرایب رادیکالها را جمع یا تفریق کرده و یکی از رادیکالها را می‌نویسیم.

مانند : $۵\sqrt{۷}+۹\sqrt{۷}-۳\sqrt{۷}=۱۱\sqrt{۷}$

گاهی اوقات باید رادیکال‌ها را ساده کنید سپس جمع یا تفریق را انجام دهید.

مثال: $\sqrt{۲۰}+\sqrt{۱۲۵}=\sqrt{۴\times ۵}+\sqrt{۲۵\times ۵}=۲\sqrt{۵}+۵\sqrt{۵}=۷\sqrt{۵}$

گویا کردن مخرج کسرها:

گاهی اوقات لازم است تا در محاسبات کسری، مخرج کسرهایی که شامل عبارت رادیکالی می‌باشند، به گونه‌ای نوشته شوند که مخرج فاقد رادیکال باشد. این کار را گویا کردن مخرج کسر می‌نامند.

برای گویا کردن مخرج کسرهایی که عبارت مخرج آنها به صورت $\sqrt[n]{a^m}$ (با شرط $m<n$) می‌باشد، باید مخرج کسر را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کنید.

مثال:

$$\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۰\sqrt{۵}}{۵}=۲\sqrt{۵}$$

$$\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}}=\frac{۱۰\sqrt[۳]{۵^۲}}{۵}=۲\sqrt[۳]{۲۵}$$

گاهی اوقات ابتدا باید رادیکال‌ها را ساده کنید سپس عمل گویا کردن مخرج را انجام دهید

مثال:
$$\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{۵۴}}=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{۲۷\times۲}}=\frac{۱۰}{۳\sqrt[۳]{۲}}\overset{\text{گویا کردن مخرج}}{=}\frac{۱۰}{۳\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}=\frac{۱۰\sqrt[۳]{۴}}{۳\times۲}=\frac{۵\sqrt[۳]{۴}}{۳}$$

فصل پنجم

عبارت ریاضی که روی مجموعهٔ اعداد بیان شده، عبارت جبری نامیده می‌شود.

در هر عبارت جبری، حرف‌هایی که جانگهدار اعدادی غیر مشخص باشند، «متغیر» نامیده می‌شوند.

یک جمله‌ای:

به عبارت‌های جبری مانند $۷x^۳$ و $-\frac{۲}{۵}x$ و $\sqrt{۳}ab$ و $-۱۲a^۳b^۴$ یک‌جمله‌ای می‌گویند. هر یک جمله‌ای از حاصل‌ضرب اعداد حقیقی در متغیرها بدست می‌آید.

در یک جمله‌ای، توان متغیرها باید عدد صحیح نامنفی باشد.

هر یک‌جمله‌ای از دو قسمت : الف) ضریب عددی ب) عبارت حرفی تشکیل شده است.

دقت کنید که اعداد حقیقی هم به تنهایی یک جمله‌ای محسوب می‌شوند.

عبارت‌هایی مانند $\frac{۷}{b}$ و $\frac{۴x}{y}$ و $\sqrt{x}$ و $۵a^{-۳}$ و $b^{-۱}$ یک‌جمله‌ای نیستند.

در یک جمله ای $\frac{۵ab^۳}{۷}$، ضریب عددی $\frac{۵}{۷}$ و قسمت حرفی $ab^۳$ می‌باشد.

درجهٔ یک چندجمله‌ای نسبت به یک متغیر، برابر بزرگترین توان آن متغیر در چند جمله‌ای داده شده است.

درجه یک‌جمله‌ای نسبت به متغیری که در یک جمله‌ای نیست، صفر است. به همین دلیل اعداد حقیقی(به جز صفر) یک‌جمله‌ای از درجه صفراند، برای مثال یک‌جمله‌ای ۵ را می‌توان بصورت $۵x^{\circ}y^{\circ}$ نوشت.

برای عدد حقیقی صفر درجه تعریف نمی‌شود.

یک جمله‌ای متشابه :

دو یا چند،یک جمله‌ای را متشابه می‌گویند، درصورتیکه متغیرهایشان (حروف‌هایشان) یکسان و توان حروف مثل هم، دقیقاً مساوی باشد مانند: $۷a^۲b$ و $-\frac{۳}{۵}a^۲b$

متشابه بودن یک جمله‌ایها به ضریب عددی آن‌ها بستگی ندارد، مانند: $\sqrt{۳}x, \frac{۲}{۵}x$

یک‌جمله‌ای‌های $۲x$ و $۲x^۲$ و $۲x^۳$ متشابه نیستند(توان حروف فرق دارد)

دقت کنید $ab^۲$ و $ba^۲$ نیز متشابه نیستند.

جمع یا تفریق یک جمله‌ایها:

دو یا چند یک‌جمله‌ای را در صورتی می‌توان باهم جمع و یا تفریق کرد که «متشابه» باشند. برای این کار کافی است که ضرایب عددی جمله‌ها را با هم جمع و یا تفریق کرد.

مثال: $۷ab + ۳ab - ۴ab = (۷ + ۳ - ۴)ab = ۶ab$

ضرب یک‌جمله‌ایها :

برای ضرب دو یک‌جمله‌ای،کافی است ضرایب عددی را درهم و حروف متناظر را نیز درهم ضرب کنیم.

مثال: $(۵x^۲y^۳) \times (۲x^۳y^۴z) = ۱۰x^۵y^۷z$

چندجمله‌ای: از جمع (یا تفریق) دو یا چند یک‌جمله‌ای غیرمتشابه، چندجمله‌ای حاصل می‌شود. برای مثال $3x + 4y$ دوجمله‌ای می‌باشد.

درجهٔ چندجمله‌ای

درجهٔ چندجمله‌ای عبارتست از درجهٔ جمله‌ای از آن که نسبت به دیگر جمله‌های آن بزرگترین درجه را داشته باشد. مثلاً در عبارت $x^4 + 11x^2y^3 - 2xy + 7$ درجه نسبت به متغیر x عدد $\boxed{4}$ و نسبت به متغیر y عدد $\boxed{3}$ ولی درجهٔ خود چند جمله‌ای $\boxed{5}$ می‌باشد.

چندجمله‌ای استاندارد:

هرگاه همهٔ جمله‌های یک چند جمله‌ای برحسب توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر، مرتب باشد، به آن چندجمله‌ای «استاندارد» گفته می‌شود.

ضرب چند جمله‌ای‌ها:

برای ضرب دو چندجمله‌ای A و B کافی است هریک از جمله‌های A را در هریک از جمله‌های B ضرب کرده و حاصل‌ضرب را در صورت امکان ساده کنیم

مثال:

$$(5x + 2)(3x - 11) = 15x^2 - 55x + 6x - 22 = 15x^2 - 49x - 22$$

اتحادها:

اتحادها تساوی‌های جبری هستند که به ازای هر مقدار عددی که به جای متغیرهایشان قرار دهیم، همواره برقرار باشند. به عنوان مثال: تساوی $x(x + 1) = x^2 + x$ به ازای هر مقدار x برقرار است.

لذا یک اتحاد می‌باشد، اما تساوی $x^۲ + ۱ = ۲x$ فقط به ازای $x = ۱$ برقرار است، بنابراین اتحاد نیست.

تفاوت معادله و اتحاد جبری در این است که اتحاد به ازای تمام مقادیر برقرار است ولی معادله به ازای تعداد محدودی از اعداد حقیقی برقرار است.

اتحاد مربع دوجمله‌ای: برای هر دو عدد حقیقی a و b همواره داریم:

$$(a + b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \qquad (a - b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

تجزیه: تبدیل جمع یا تفریق یک عبارت جبری را به ضرب، تجزیه می گویند.

۱) تجزیه با استفاده از فاکتورگیری: $ab + ac = a(b + c)$

۲)تجزیه با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای:

اگر سه‌جمله‌ای $x^۲ + ۲xy + y^۲$ را به صورت $(x + y)^۲$ بنویسیم، در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده‌ایم:

$$x^۲ + ۲xy + y^۲ = (x + y)^۲ = (x + y)(x + y)$$

اتحاد مزدوج: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(a + b)(a - b) = a^۲ - b^۲$$

اتحاد جملهٔ مشترک :

$$(x + a)(x + b) = x^۲ + (a + b)x + ab$$

۳- تجزیه با استفاده از اتحاد مزدوج : اگر عبارت $x^۲ - y^۲$ را بصورت $(x + y)(x - y)$ بنویسیم، درواقع عبارت را تجزیه کرده‌ایم.

۴- تجزیه با استفاده از اتحاد جملهٔ مشترک: به عبارت $x^۲ + ۱۳x + ۳۶$ توجه کنید، حالا دو عدد پیدا کنید که جمع آنها ۱۳+ و ضربشان ۳۶+ شود و سپس به صورت مقابل بنویسید. $x^۲ + ۱۳x + ۳۶ = (x + ۴)(x + ۹)$

به این کار تجزیه با کمک اتحاد جمله مشترک می گویند.

نابرابری و نامعادله :

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت‌های زیر برقرار است:

الف) a بزرگ‌تر از b $\qquad a > b$

ب) a کوچک‌تر از b $\qquad a < b$

ج) a مساوی b $\qquad a = b$

اگر عدد حقیقی a منفی نباشد، در این صورت یا مثبت است $(a > 0)$ و یا صفر $(a = 0)$ که در ریاضی نوشته می‌شود: $a \geq 0$

دقت کنید $5 \geq 5$ یک جملهٔ درست است.

اگر a کوچکتراز b و x عددی دلخواه بین دو عدد حقیقی a و b باشد، می‌نویسیم: $a < x < b$

خواص نابرابری‌ها (نامساوی‌ها)

۱- اگر دوطرف یک نامساوی را با عددی مانند c جمع یا تفریق کنید، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \qquad\qquad a < b \Rightarrow a - c < b - c$$

۲- اگر دوطرف یک نامساوی را در عددی مثبت ضرب (یا تقسیم) کنید، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

$$a < b \xrightarrow{c>0} ac < bc$$

$$mx < my \xrightarrow{m>0} x < y$$

۳- اگر دوطرف یک نامساوی را در عددی منفی ضرب (یا تقسیم) کنید، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$a < b \xrightarrow{c<0} ac > bc$$

$$mx < my \xrightarrow{m<0} x > y$$

دانش آموز گرامی دقت کنید که اگر $a < b$ و $b < c$ باشد،می‌توانید نتیجه بگیرید $a < c$

نامعادله:

اگر یک نامساوی شامل متغیر (مجهول) باشد به آن نامعادله می گویند. به طور مثال نامساوی $۲x + ۳ > ۹$ یک نامعادلهٔ یک مجهولی درجه اول است.

به مجموعهٔ مقادیری که به ازای آنها، نامعادله به یک نابرابری درست تبدیل می‌شود، مجموعهٔ جواب نامعادله می گویند.

فصل ششم

معادلهٔ خط:

صورت کلی معادلهٔ خط راست به شکل $y = ax + b$ می‌باشد.

این معادله دارای بی‌شمار جواب است و هریک از این جواب‌ها مختصات یک نقطه است که اگر آنها را به هم وصل کنید، یک خط راست بدست می‌آید. به همین دلیل می گویند که x و y رابطهٔ خطی دارند.

در معادلهٔ $y = ax + b$ ، عدد a را شیب خط و عدد b را عرض از مبداء خط می‌نامند.

خط $y = ax$ از مبداء مختصات می گذرد.

برای رسم یک خط کافی است دو نقطه از خط را بیابید، سپس خط را رسم کنید.

معادلهٔ یک خط در واقع بیان‌کنندهٔ رابطهٔ بین طول و عرض نقاط یک خط است.

شیب خطی که از نقطهٔ $A = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ و مبداء مختصات می‌گذرد، برابر است با $\frac{n}{m}$ و معادله این خط $y = \frac{n}{m}x$ خواهد شد.

اگر در دو نقطه نسبت عرض به طول ثابت باشد، خط گذرنده از این دو نقطه حتماً از مبداء مختصات هم می‌گذرد.

اگر مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ خط داده شده جایگزین کنید و دو طرف تساوی برابر شوند، نقطهٔ A روی خط داده شده، قرار دارد.

اگر طول نقطه‌ای صفر باشد آن نقطه روی محور عرض‌ها قرار دارد.

اگر عرض نقطه‌ای صفر باشد، آن نقطه روی محور طول‌ها قرار دارد.

اگر طول نقطه‌ای از یک خط صفر باشد، عدد عرض مربوط به آن نقطه را عرض از مبداء خط می‌گویند.

اگر عرض نقطه‌ای از یک خط صفر باشد، عدد طول مربوط به آن نقطه را طول از مبداء آن خط می‌گویند.

به طور کلی نسبت تغییر ارتفاع به مسافت طی شده را شیب خط می‌گویند.

اگر $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ دونقطه از یک خط باشند، در این صورت : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$ شیب خطی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد

در خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آن‌ها، عرض نقاط نیز اضافه شود، شیب مثبت است

در خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آنها، عرض نقاط کاهش یابد، شیب منفی است.

اگر شیب دوخط مساوی باشد، آن دو خط موازی‌اند.

اگر شیب دوخط، عکس و قرینهٔ یکدیگر باشند، آن دو خط برهم عمودند.

گاهی اوقات خط را به صورت $ax + by = c$ نشان می‌دهند که برای پیدا کردن شیب این نوع خط‌ها ابتدا طرفین را بر ضریب y تقسیم کنید و سپس x ها را به سمت راست ببرید تا شیب و عرض از مبداء آنها مشخص شوند.

اگر معادلهٔ خطی به صورت $y = c$ باشد(c یک عدد ثابت) در این صورت این خط موازی محور x ها است. و عمود بر محور y هاست و در تمام نقاط این خط مقدار y عدد ثابت c می‌باشد. شیب این خط‌ها مساوی صفر است.

اگر معادلهٔ خطی بصورت $x = c$ باشد(c یک عدد ثابت) در این صورت این خط موازی محور y ها است. و بر محور طول‌ها عمود می‌شود. تمامی نقاطی که روی این خط قرار دارند، دارای طولی برابر c هستند. شیب این خط‌ها تعریف نشده(نامعین) است.

معادلهٔ خط محور طول‌ها(x ها) می‌شود $y = ۰$

معادلهٔ خط محور عرض‌ها(y ها) می‌شود $x = ۰$

دستگاه معادله‌های خطی

دو خط راست در صفحه نسبت به هم سه حالت دارند:

۱) متقاطع‌اند. ۲) موازی‌اند. ۳) منطبق‌اند.

برای اینکه محل برخورد دو خط $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ را بیابید، باید دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را حل کنید که سه حالت زیر را دارد:

۱) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، دراین صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب منحصر بفرد دارد.

۲) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد، در این صورت این دو خط موازی‌اند و دستگاه جواب ندارد.

۳) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، در این صورت این دو خط برهم منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را به سه روش زیر می‌توان حل کرد:

الف) رسم کردن دقیق دو خط ب) روش حذفی ج) روش جایگزینی

معادلهٔ توانی:

اگر در یک معادله، مجهول در توان عدد باشد، آن معادله را توانی می گویند. برای حل اینگونه معادله‌ها سعی می‌کنیم پایه های دو عدد را مساوی کنیم سپس معادلهٔ بین توانها را بنویسیم و حل کنیم

اگر در معادله‌های توانی، پایه‌ها، دو عدد متفاوت و غیر قابل تجزیه باشند، توان‌های دوعدد باید مساوی صفر باشند.

فصل هفتم

به طور کلی یک عبارت گویا به کسری گفته می‌شود که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند.

اگر مخرج کسری، صفر باشد، آن کسر تعریف نشده یا نامعین است.

دامنهٔ تعریف یک عبارت گویا یعنی مشخص کردن مقادیری که به ازای آن‌ها، عبارت گویا تعریف شده باشد. برای این کار ابتدا مخرج را مساوی صفر قرار دهید سپس آنرا حل کنید و در نهایت:

دامنهٔ تعریف $D=\mathbb{R}-$ {مقادیری که‌مخرج‌راصفرمی کند}

ساده کردن عبارت‌های گویا: اگر عامل مشترکی به شکل ضرب در صورت و مخرج کسری باشد، می‌توان آنرا از صورت و مخرج حذف کرد و عبارت

گویای ساده‌تری نوشت که با عبارت اولیه مساوی است. به این عمل ساده کردن می گویند.

دقت کنید در ساده‌کردن عبارتهای گویا عمل تجزیه کردن به روش‌های گفته شده، کاربرد زیادی دارد

مثال :
$$\frac{x^۲+۷x+۱۲}{x^۲-۹}=\frac{(\cancel{x+۳})(x+۴)}{(\cancel{x+۳})(x-۳)}=\frac{x+۴}{x-۳}$$

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

دقت کنید قبل از ضرب کردن ممکن است ساده شوند.

جمع و تفریق عبارتهای گویا :

در صورت امکان ابتدا ساده می‌کنید و سپس مخرج مشترک گرفته و حل می‌کنید:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad x-\frac{y}{z}=\frac{xz-y}{z}$$

عبارتهای مرکب: کسری که صورت و مخرج آن عبارت‌های گویا باشند، «عبارت گویای مرکب» نامیده می‌شود.

برای محاسبهٔ حاصل یک عبارت گویای مرکب، ابتدا جداگانه صورت و مخرج را ساده می‌کنید سپس حاصل صورت را بر مخرج تقسیم کنید.

تقسیم یک‌جمله‌ای بر یک‌جمله‌ای: برای تقسیم دو یک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و قوانین مربوط به ساده کردن عبارتهای تواندار استفاده می‌شود. مثال:

$$\frac{۶x^۴y^۵}{۲xy}=۳x^۳y^۴ \qquad \frac{۸x^۵y^۲z^۳}{۴x^۳yz}=۲x^۲yz^۲$$

تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای:

برای تقسیم یک چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای می‌توانیم هریک از جمله‌های، چند جمله‌ای را بر یک جمله‌ای تقسیم کنیم. به این روش قاعدهٔ تفکیک می‌گویند.

مثال:

$$\frac{۱۴x^{۳}yz-۶xy+۳x^{۲}y^{۲}z^{۲}}{۲x^{۲}y^{۲}z}=\frac{۱۴x^{۳}yz}{۲x^{۲}y^{۲}z}-\frac{۶xy}{۲x^{۲}y^{۲}z}+\frac{۳x^{۲}y^{۲}z^{۲}}{۲x^{۲}y^{۲}z}$$

$$=\frac{۷x}{y}-\frac{۳}{xyz}+\frac{۳z}{۲}$$

چندجمله‌ای A بر یک‌جمله‌ای B بخش‌پذیر است، در صورتی که هریک از جمله‌های چندجمله‌ای A بر یک جمله‌ای B بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر حاصل تقسیم خود یک چندجمله‌ای باشد.

مثال:

$$\frac{۶x^{۴}-۳x^{۳}+۹x^{۲}}{۳x^{۲}}=\frac{۶x^{۴}}{۳x^{۲}}-\frac{۳x^{۳}}{۳x^{۲}}+\frac{۹x^{۲}}{۳x^{۲}}=۲x^{۲}-x+۳$$

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای :

اگر بخواهیم چندجمله‌ای A را بر چندجمله‌ای B تقسیم کنیم، ابتدا هر دو چند جمله‌ای را بر حسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم سپس اولین جملهٔ مقسوم را بر اولین جملهٔ مقسوم‌علیه تقسیم کرده و خارج‌قسمت را مشخص می‌کنیم. آنگاه خارج‌قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و از مقسوم کم می‌کنیم. سپس این باقی‌مانده را بر مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب آن قدر ادامه می‌دهیم تا درجهٔ باقیمانده از درجهٔ مقسوم علیه کمتر شود.

تعریف دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که همهٔ آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصلهٔ ثابت و مشخص هستند. به این اندازهٔ ثابت، شعاع دایره می گوییم.

تعریف کره: کره مجموعه نقاطی از فضا است که همهٔ آن نقطه‌ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع کُره می گوییم.

حجم استوانه به شعاع R و ارتفاع h $\boxed{V = \pi R^{۲} h}$

حجم کره به شعاع R $\boxed{V = \frac{۴}{۳} \pi R^{۳}}$

اگر یک کرهٔ چوبی توپُر را به طور دقیق به دو نیم‌کره تبدیل کنید، سطح مقطع این نیم‌کره‌ها به شکل یک دایره است که شعاع این دایره با شعاع کره مساوی است. به این دایره «دایرهٔ عظیمهٔ کره» و رویهٔ گنبدی شکل نیمکره را «عرق‌چین نیم‌کره» می گویند.

مساحت کره‌ای به شعاع R برابر است با : $S = ۴\pi R^{۲}$

اگر بخواهید مساحت نیم‌کرهٔ توپُر به شعاع R را حساب کنید، باید مساحت عرق‌چین را با مساحت دایرهٔ عظیمه جمع کنید:

$$\text{مساحت نیمکرهٔ توپر } ۲\pi R^{۲} + \pi R^{۲} = ۳\pi R^{۲}$$

هرم یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعدهٔ هرم به شکل چندضلعی است.

اگر چندضلعی قاعدهٔ هرم یک چندضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های هم‌نهشت باشند، آنگاه هرم را منتظم می گویند.

اگر قاعدهٔ هرم، مرکز تقارن داشته باشد، در این صورت پای ارتفاع هرم روی مرکز تقارن قاعده قرار می گیرد.

اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم‌مساحت و ارتفاع مساوی باشند، حجم آن‌ها باهم برابر است.

حجم هرم از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده هرم} \times \text{ارتفاع هرم} \Rightarrow V = \frac{۱}{۳} S.h$$

نامگذاری هرم براساس شکل قاعدهٔ آن صورت می گیرد.

مخروط، شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعدهٔ آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع h از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \underbrace{(\pi R^{۲})}_{\text{مساحت دایره}} \times h = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲} h$$

محل یادداشت