

فصل اول

قرار داد: حرکت به سمت راست را با علامت مثبت و حرکت به سمت

چپ را با علامت منفی نشان می دهیم
چنانچه ابتدا و انتهای حرکت یک نقطه باشد جای پای وجود ندارد و در واقع حرکت صفر است

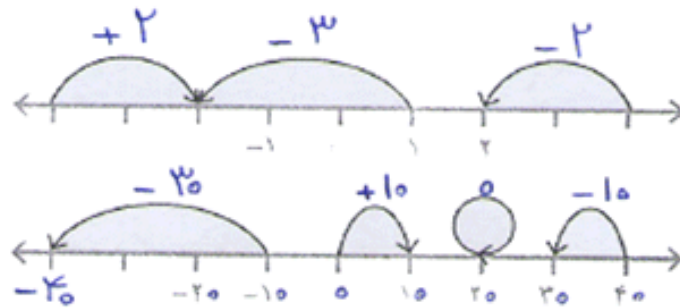
یادآوری عددهای صحیح

فعالیت



با انجام دادن تمرین های زیر، آنچه را در سال گذشته درباره عددهای صحیح یاد گرفته اید، مرور کنید.

۱- برای هر حرکت روی محور، یک عدد بنویسید.



۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

عدد صحیح	۶	-۲	$-(-۷)$	۰	۸	-۵	۲
قرینه آن	-۶	+۲	-۷	۰	-۸	۵	-۲

۳- حاصل عبارت های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

$$۵ - (-۹) = ۵ + ۹ = ۱۴$$

$$-۱۶ + ۱۲ = -۴ \quad ۸ - ۱۲ = -۴ \quad -۲ + ۹ = +۷ \quad -۴ - ۸ = -۱۲$$

$$-۳ \times ۷ = -۲۱ \quad -۸ \div (-۴) = +۲ \quad -۱۲ \div ۲ = -۶ \quad -۴ \times (-۲) = +۸$$

۴- حاصل عبارت ها را با توجه به ترتیب انجام عملیات به دست آورید.

$$-۸ - ۳ \times ۵ = -۸ - ۱۵ = -۲۳ \quad -۱۶ \div ۲ \times ۳ - ۴ = -۸ \times ۳ - ۴ = -۲۴ - ۴ = -۲۸$$

$$۱ - ۲ \times (۱ - (۸ - ۹)) = ۱ - ۲ \times (۱ + ۱) = ۱ - ۲ \times ۲ = ۱ - ۴ = -۳$$

$$-۴ \div ۴ - ۴ \times ۳ = (-۱) - (۱۲) = -۱۳$$

الویت ها به ترتیب عبارت اند از: ۱- پرانتز و کروشه (داخلی ترین پرانتز) ۲- توان و ریشه گیری

۳- ضرب و تقسیم ۴- جمع و تفریق

نکته: اگر در یک عبارت ضرب و تقسیم آمده باشد الویت از سمت چپ می باشد

$$\begin{array}{r} 43 \\ + 29 \\ \hline 72 \end{array} \xrightarrow{\text{قرینه}} \begin{array}{r} -43 \\ - 29 \\ \hline -72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ - 37 \\ \hline 35 \end{array} \xrightarrow{\text{قرینه}} \begin{array}{r} -72 \\ + 37 \\ \hline -35 \end{array}$$

$$43 + 29 - 37 = 72 - 37 = 35 \xrightarrow{\text{قرینه}} -43 - 29 + 37 = -35$$

۵- عبارت $-43 + 29 - 29$ را چهار دانش آموز محاسبه کرده اند. راه حل هریک را توضیح دهید.

راه حل علی: $-43 + 37 - 29 = -23 - 29 + 37 = -72 + 37 = -35$

توضیح: $37 - 29 = 37 + (-29) = -29 + 37$ (۱) $-43 - 29 = -72$ (۲) $-72 + 37 = -35$ (۳)

راه حل مجتبی: $-43 + 37 - 29 = -23 + 8 = -35$

توضیح: $37 - 29 = +8$ (۱) $-43 + 8 = -35$ (۲)

راه حل مرتضی: $-43 + 37 - 29 = -6 - 29 = -35$

توضیح: $-43 + 37 = -6$ (۱) $-6 - 29 = -35$ (۲)

د	ی
۴	۳
۳	۷
۲	۹

راه حل مصطفی: ۱- بسط عدد ۲ حاصل یلی ها $-40 - 3$

توضیح: داده یایی ها را جداگانه محاسبه می کنیم $+30 + 7$

۳- جواب نهایی را بدست می آوریم $-20 - 9$

شما کدام راه حل را می پسندید؟ چرا؟ $-30 - 5 = -35$

آیا راه حل دیگری برای پیدا کردن حاصل این عبارت سراغ دارید؟

۱- حاصل عبارت های زیر را با روش مورد نظر خود به دست آورید.

$$\begin{array}{r} 17 \\ - (-17) + 14 - 13 - 19 = 31 - 32 = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +7 \\ - (-7) - 2 + (-9) = 7 - 11 = -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -18 - (-4) - (-19) = -18 + 4 + 19 = 4 + 1 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -24 - 17 + 100 - 23 = -24 - 120 + 100 = -24 - 20 = -44 \end{array}$$

۲- حاصل عبارت $10 + 3 - 7 - 2$ را به دو روش حساب کرده ایم. کدام درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

نادرست $10 + 3 - 7 - 2 = 13 - 5 = 8$

درست $10 + 3 - 7 - 2 = 13 - 9 = 4$

$$\begin{array}{l} -7 - 2 \neq -5 \\ -7 - 2 = -9 \end{array}$$

۳- قبل از انجام دادن محاسبات، در عبارت های داده شده خوب دقت کنید و با دسته بندی مناسب، راه ساده ای پیدا کنید. راه حل خود را با راه حل های دوستانتان مقایسه کنید و آن گاه با ماشین حساب درستی پاسخ های خود را بررسی کنید.

$$\begin{array}{r} -40 + 35 + 80 - 17 - 40 = 35 - 17 = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -22 - 21 + 12 + 2 \times 7 = -32 + 14 = -20 \end{array}$$

$$-40 + 80 - 40 = 0$$

$$-21 + 21 = 0$$

اگر طرح سوال را آدم ماهوشی فرض کنیم، هیچ وقت حاصل ضرب این همه عدد را از ما نمی خواهد

پس باید دنبال نکته ای که در سوال گفته است باشیم

نکته: اگر دقیق به عبارت نگاه کنیم در این عبارت جایی $1-1=0$ را داریم چال ضرب صفر در هر عددی برابر صفر می شود

۴- یکی از ریاضی دانان بزرگ در کودکی جمع عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را با روشی ابتکاری

محاسبه کرد.

$$1+2+3+\dots+98+99+100=$$

نصف تعداد

چند جفت عدد با هم جمع شده اند؟ ۵۰ جفت

حاصل جمع هر جفت عدد چند است؟ ۱۰۱ (حاصل جمع اولی و آخری)

حاصل عبارت چند می شود؟ $50 \times 101 = 5050$

۵- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید. روش کار را توضیح دهید.

$$-2+4-6+8-10+12 = (-2-10+12) + (4+8-6) = 0+4=4$$

$$(10-1)(9-1)(8-1)\dots(-9-1)(-10-1) = 0$$

بالای صفر

۶- ابتدا در مربع های خالی علامت های «+» یا «-» بگذارید. سپس، عبارت داده شده را

محاسبه کنید و همه عددهای صحیح ممکن را که به دست می آیند، از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$-3 \square -7 \square -2 = -12$$

$$-2 \square (+7) \square 2$$

$$-3 \square -7 \square +2 = -8$$

$$-3 \square +7 \square +2 = 4, -3 \square +7 \square -2 = 2$$



۲، ۴، -۸، -۱۲

در جاهای خالی علامت «+» یا «-» را طوری قرار دهید که حاصل عبارت زیر، بزرگ ترین

مقدار ممکن شود. نکته: علامت ها را طوری انتخاب می کنیم که اعداد بعد از عدداول همگی مثبت باشند

$$-5 \square (-6) \square (+3) \square (-9) = -5+4+3+9=13$$

در زیر، چهار پاسخ به این مسئله داده شده که فقط یکی از آنها درست است. آن را مشخص

کنید و دلیل نادرست بودن پاسخ های دیگر را هم توضیح دهید.

$$-5 \square (+) \square (-6) \square (+) \square (+3) \square (-9) = -5-6+3-9 = -11-6 = -17 \quad \text{پاسخ اول:}$$

$$-5 \square (+) \square (-6) \square (-) \square (+3) \square (-9) = -5-6-3-9 = -23 \quad \text{پاسخ دوم:}$$

$$-5 \square (-) \square (-6) \square (+) \square (+3) \square (-9) = -5+6+3+9 = 1+12 = 13 \quad \text{پاسخ سوم:}$$

$$-5 \square (+) \square (-6) \square (+) \square (+3) \square (-9) = -5-6+3+9 = -11+12 = 1 \quad \text{پاسخ چهارم:}$$

نکته: این سوال در مجموع ۱ جواب دارد

$$-5 + (-6) - (+3) - (-9) = -5-6-3+9 = -5$$

$$-5 - (-6) + (+3) + (-9) = -5+6+3-9 = -5$$

$$-5 - (-6) - (+3) - (-9) = -5+6-3+9 = +7$$

$$-5 - (-6) - (+3) + (-9) = -5+6-3-9 = -11$$

سرکشی: اعداد ۸- الی ۷ را طوری در مربع 4×4 قرار دهید که حاصل جمع هر ردیف و

هر ستون و هر قطر مساوی باشد

-۸	۶	۵	-۵	= -۲
۳	-۳	-۲	۰	= -۲
-۱	۱	۲	-۴	= -۲
۴	-۶	-۷	۷	= -۲

۲، ۱، ۰، -۱، -۲، -۳، -۴، -۵، -۶، -۷، -۸

۵، -۶، -۷، ...

۲، ۱، ۰، -۱، -۲، ...

۱- عددهای صحیح بین ۳ و -۵ را بنویسید.

* عددهای صحیح کوچکتر از -۴ را بنویسید.

* عددهای صحیح بزرگتر از -۳ را بنویسید.

۲- مانند نمونه، جدول را کامل کنید.

عدد	+۳	۰	۵²	$\sqrt{4}$	$\frac{3}{1}$	$-(-2)$	$-\frac{2}{3}$	۰/۷
طبیعی	✓	×	✓	✓	✓	✓	×	×
صحیح	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-8 - 12 + 22) + (4 + 14 - 20) = 2$$

$$-8 + 6 - 12 + 14 - 20 + 22 =$$

$$-8 + 7 - 6 + 8 - 7 + 6 =$$

$$(-8 + 8) + (7 - 7) + (-6 + 6) = 0$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 = 1 - 4 + 9 - 16 = -10 \quad 2 - (1 - 7) - 1 = 3 - (2 + 4 - 1) = 3 - 7 = -4$$

$$2 - 4 \times 5 = 3 - 20 = -17$$

$$-8 - 4 \div 2 = -8 - 2 = -10 \quad \leftarrow \text{الویت اول با تقسیم می باشد}$$

۴- هر یک از عبارت‌های زیر چه عددی را نشان می‌دهد؟

کوچک‌ترین عدد طبیعی: ۱

بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی: -۱

کوچک‌ترین عدد زوج طبیعی: ۲

کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت: +۱

بزرگ‌ترین عدد زوج طبیعی سه رقمی: ۹۹۸

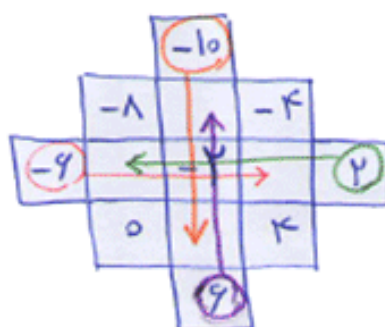
کوچک‌ترین عدد فرد طبیعی دو رقمی: ۱۱

۵- جدول زیر را کامل کنید؛ طوری که حاصل جمع عددهای هر ردیف، با مجموع عددهای هر ستون

و هر قطر مساوی باشد.

-۸	۶	-۴	= -۶
۲	-۲	-۶	= -۶
۰	-۱۰	۴	= -۶
۱۱	۱۱	۱۱	= -۶
-۶	-۶	-۶	= -۶

مربع و قطر 3×3



-۸	۶	-۴
۲	-۲	-۶
۰	-۱۰	۴

اشتباه رایج

$$-2\frac{1}{3} = \frac{-2 \times 3 + 1}{3} = \frac{-6 + 1}{3} = -\frac{5}{3}$$

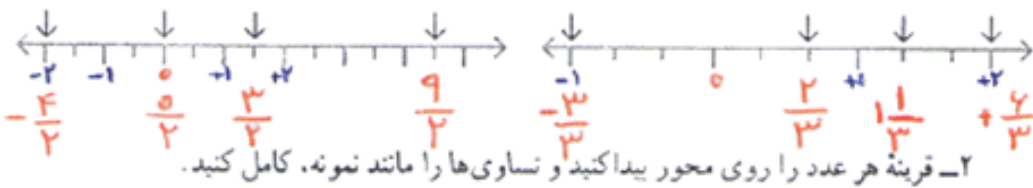
$$-2\frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad 2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$$

معرفی عددهای گویا

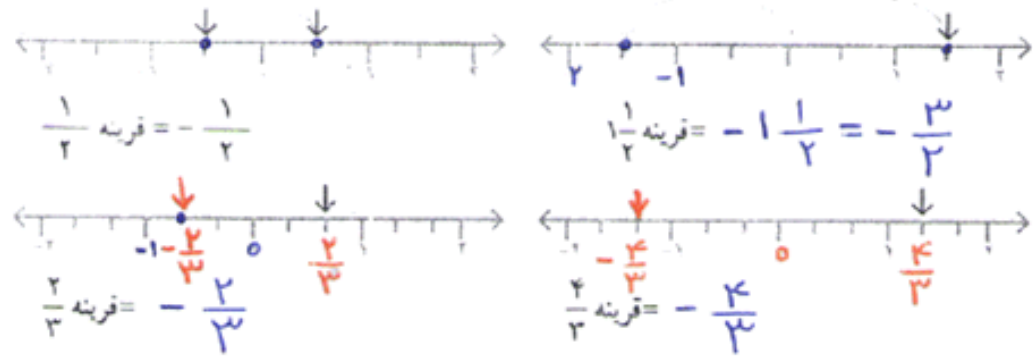
فعالیت



۱- نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نشان می‌دهند؟



۲- قرینه هر عدد را روی محور پیدا کنید و تساوی‌ها را مانند نمونه، کامل کنید.



۳- به این ترتیب، می‌توانید قرینه همه کسرهایی که با آنها آشنا شده‌اید را بنویسید:

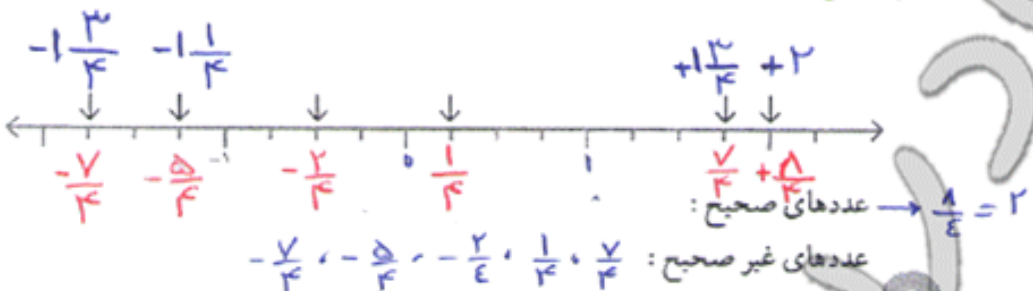
$$0 = \text{قرینه صفر} \quad 1\frac{9}{10} = \text{قرینه } -1\frac{9}{10} \quad 2\frac{1}{5} = \text{قرینه } -2\frac{1}{5}$$

۴- کسرها را به عدد مخلوط و عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید.

$$+3\frac{1}{4} = +\frac{13}{4} \quad -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5} \quad +\frac{14}{3} = +4\frac{2}{3} \quad -2\frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$$

۵- نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نمایش می‌دهند؟ از این عددها،

کدام صحیح و کدام غیر صحیح‌اند؟



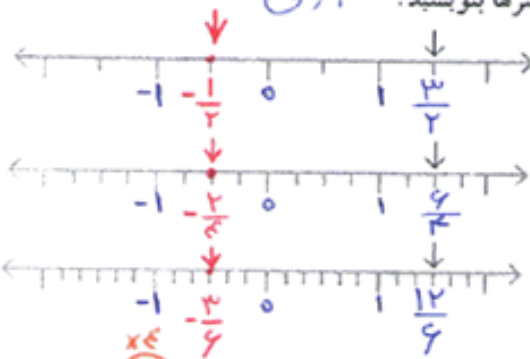
عددهای صحیح: $2 = \frac{4}{2}$

عددهای غیر صحیح: $-\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}$

$$-\frac{1}{V} \square - \frac{11}{2}$$

$$-\frac{\omega}{r_0} \boxed{>} -\frac{VV}{r_0}$$

6, 5



$$\frac{12}{4} = \frac{9}{3} = \frac{15}{5}$$

محور نمایش دهید. $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{3}{6}$

$$\frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma}{x} = \gamma \wedge$$

۷- مقدار x را به دست آورید.

$$\frac{2x-10}{3-6} = x = 15$$

کار در کلاس

$$(90, 124) = 18$$

$$-\frac{1 \cancel{A}}{\cancel{A}} = -\frac{1A}{1}$$

تبدیل

$$+\frac{11}{\cancel{22}} = +\frac{11}{\cancel{22}} \checkmark$$

$$-\frac{90}{126} = -\frac{\Delta}{V}$$

The image shows four semi-circular protractors, each with a different angle marked. The first protractor on the left shows an angle of 15° with an arrow pointing to the 15-degree mark. The second protractor shows an angle of -15° with an arrow pointing to the 15-degree mark on the left side. The third protractor shows an angle of -10° with an arrow pointing to the 10-degree mark on the left side. The fourth protractor on the right shows an angle of -9° with an arrow pointing to the 9-degree mark on the left side.

$$-\frac{r_1}{v_0} \leq -\frac{r_2}{v_0} \leq -\frac{r_3}{v_0} \leq -\frac{r}{v}, \frac{r}{0}, \frac{1}{1}, \dots, r, -\frac{1}{r}, -\frac{r}{0} \leq -\frac{r}{v} \leq -\frac{1}{r} \leq -\frac{r}{v} < 0 < \frac{1}{1_0} < \frac{r}{0} < r$$
$$\frac{3}{5} \otimes \cdot / 25 = \frac{1}{5} \quad -\frac{1}{5} \otimes -\frac{11}{5} \quad -\frac{3}{5} \oplus -\cdot / 5 = -\frac{1}{5}$$
$$\frac{1V}{V}, \frac{1}{1\Delta}, -1\frac{r}{\Delta}, -r/\Delta, -\frac{r\Delta}{\delta}, +r\frac{\Delta}{V}, r\frac{V}{1\Delta}, -r\frac{1}{1V}, -V\frac{r}{1\Delta}$$

کوچک تر از ۳	بین ۲ و ۳	بین ۱ و ۲	بین ۰ و ۱	بین ۰ و ۱	بین ۱ و ۲	بزرگ تر از ۲
$x < 3$	$2 < x < 3$	$1 < x < 2$	$0 < x < 1$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
$-\frac{31}{17}, -\frac{72}{10}$						$\frac{27}{10}, \frac{35}{17}$

نکته:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

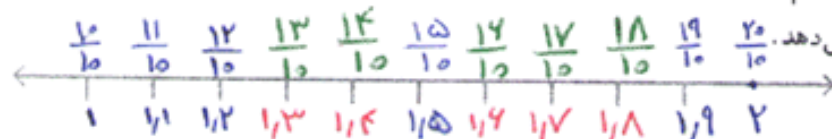
$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \dots < \frac{1}{2}$$



۱- روی محور روبه‌رو فاصله بین عددهای ۱ و ۲ را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. نقطه مشخص شده چه عددی را نشان می‌دهد؟

۲- اگر فاصله عددهای ۱ و ۲ را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم، نقطه‌های مشخص شده چه عددهایی را نشان می‌دهند؟ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

۳- در شکل زیر، فاصله بین دو عدد ۱ و ۲ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم اما آن را بزرگ تر رسم کرده‌ایم تا شما نقطه‌ها را بهتر ببینید. اکنون مانند نمونه مشخص کنید که هر نقطه چه عددی را نشان می‌دهد.



در تساوی زیر، عدد اعشاری $\frac{1}{2}$ را به صورت کسری نوشته‌ایم. شما هم در محور بالا

عددهای اعشاری را به صورت کسری نشان دهید.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{1 \times 2} = \frac{2}{2}$$

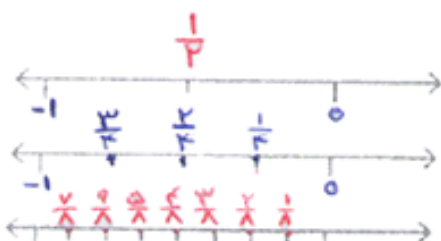
۴- چگونه می‌توانیم بین دو عدد ۱ و ۲، تعداد بیشتری عدد کسری بنویسیم؟ توضیح دهید.

می‌توانیم آن را به صد قسمت مساوی تقسیم کنیم. آیا می‌توانیم بگوییم بین دو عدد ۱ و ۲ کسرهای بی‌شماری وجود دارد؟

آیا همین نتیجه را می‌توان برای عددهای ۱- و ۲- نیز تکرار کرد؟

آیا می‌توانیم به طور کلی نتیجه بگیریم که «بین هر دو عدد صحیح، بی‌شمار کسر وجود دارد»؟

کارد در کلاس



با توجه به محورهای روبه‌رو و تقسیم شدن فاصله بین دو عدد ۰ و ۱- کسرهای مختلفی بین این دو عدد بنویسید.

توضیح دهید چگونه می‌توانیم بین هر دو عدد کسری، کسرهای بی‌شماری پیدا کنیم. تقسیم فاصله بین کسرها به قسمت‌های مساوی و این کار را مرتب ادامه می‌دهیم.

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{6} < \frac{3}{6} \xrightarrow{\times 100} \frac{200}{600} < \frac{300}{600}$$

$$\frac{200}{600} < \frac{201}{600}, \frac{202}{600}, \frac{203}{600}, \dots, \frac{299}{600} < \frac{300}{600}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

مهم

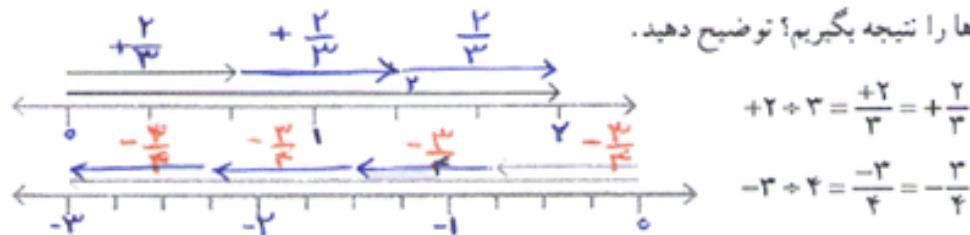
روش دوم

همان طول که در شکل دوم پیدا است بردار 3 - با 4 تا بردار $\frac{3}{4}$ - برابر است
لذا خواهیم داشت $\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$ بردار 3 - بردار 4 -



توضیح

۱- چگونه می توانیم به کمک بردارهایی که در شکل نمایش داده شده اند، درستی تساوی ها را نتیجه بگیریم؟ توضیح دهید.



۲- با توجه به سوال بالا و مانند نمونه، کسر مساوی هر کسر را بنویسید.

$$\frac{-2}{3} = -2 \div 3 = -(2 \div 3) = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{-5} = 3 \div (-5) = -(3 \div 5) = -\frac{3}{5}$$

$$-\frac{4}{5} = -(-4 \div 5) = -(-\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$$

$$-\frac{3}{-4} = -3 \div (-4) = +(3 \div 4) = +\frac{3}{4}$$

به هر عدد کسری به صورت $\frac{a}{b}$ که در آن a و b عددهای صحیح باشند و $b \neq 0$ باشد، عدد گویا می گوئیم.

تعریف اعداد گویا

۱- آیا می توان گفت هر عدد صحیح و هر عدد طبیعی نیز یک عدد گویاست؟ چرا؟

۲- در هر یک از حالت های زیر تعیین کنید $\frac{x}{a}$ بزرگ تر است، یا $\frac{x}{b}$.

الف) وقتی x عدد صحیح مثبت است $\frac{x}{8} < \frac{x}{5}$ ب) وقتی x عدد صحیح منفی است $\frac{x}{8} > \frac{x}{5}$
۳- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

عدد	نوع	$-(+2)$	$-\frac{6}{2}$	$\sqrt{9}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{3}{5}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{8}{-3}$	$-\frac{2}{-2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{12}{-4}$
طبیعی		✓	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×
صحیح		✓	✓	✓	×	✓	×	×	×	✓	×	✓
گویا		✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓

۴- ابتدا علامت هر عبارت را تعیین و سپس آن را ساده کنید.

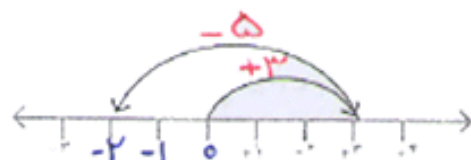
$$\frac{-8 \times (-18)}{12 \times 16} = + \frac{8 \times 18}{12 \times 16} = + \frac{3}{4}$$

$$\frac{-10 \times (-2)}{-7 \times 25} = - \frac{10 \times 2}{7 \times 25} = - \frac{4}{35}$$

جمع و تفریق عددهای گویا

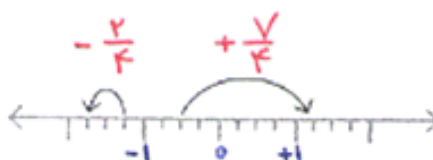
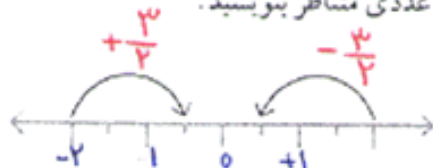
فعالیت

۱- با توجه به درس سال گذشته برای حرکت‌های روی محور، یک جمع عددهای

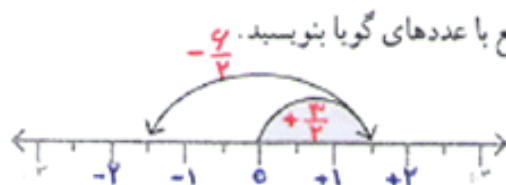
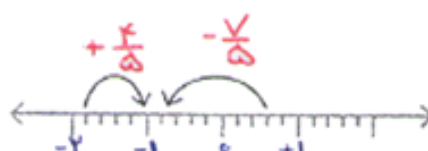
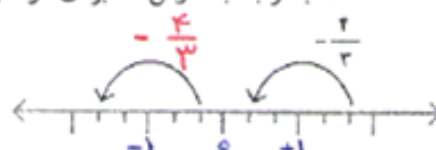


$$(+3) + (-5) = (-2)$$

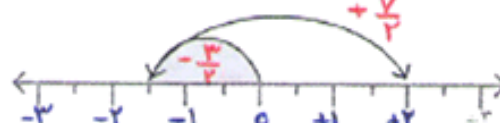
۲- با توجه به سؤال ۱، برای هر حرکت روی محور، عددی متناظر بنویسید.



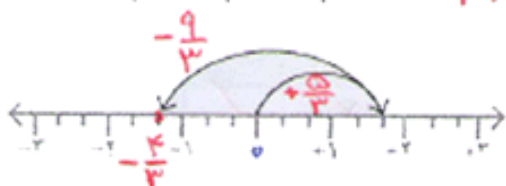
$$(-2) + (-3) = -5$$



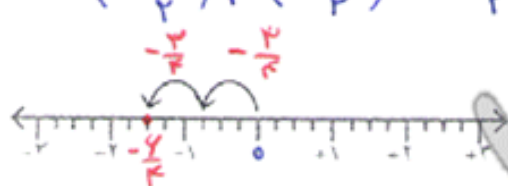
$$\left(+\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{6}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-1\frac{1}{2}\right)$$



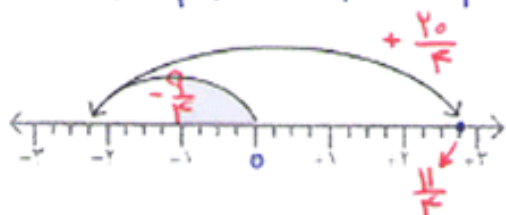
$$\left(-\frac{5}{2}\right) + \left(+\frac{7}{2}\right) = +\frac{2}{2} = +1$$



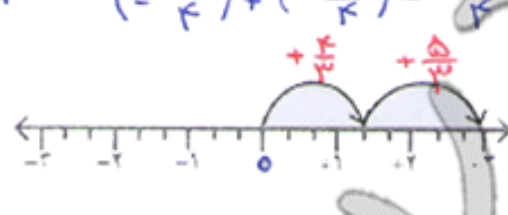
$$\left(+\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{9}{3}\right) = -\frac{4}{3} = \left(-1\frac{1}{3}\right)$$



$$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{8}{4} = -2$$



$$\left(-\frac{9}{5}\right) + \left(+\frac{20}{5}\right) = \left(+\frac{11}{5}\right) = \left(+2\frac{1}{5}\right)$$



$$\left(+\frac{4}{3}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right) = \frac{9}{3} = 3$$

۴- عبارت‌های زیر را مانند نمونه به صورت جمع دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{8} = \frac{5}{8} + \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{2}{8} \quad -\frac{5}{8} - \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{5}{8} + \left(-\left(-\frac{7}{8}\right)\right) = -\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = +\frac{2}{8}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5} \quad -\frac{3}{5} - \left(+\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} + \left(-\left(+\frac{4}{5}\right)\right) = -\frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{7}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{10} + \left(-\frac{85}{100}\right) &\leftarrow -\frac{5}{10} - \frac{85}{100} = -\frac{5}{10} + \left(-\frac{85}{100}\right) = -\frac{50}{100} - \frac{85}{100} = -\frac{135}{100} \\ \frac{123}{10} + \frac{7}{1} &\leftarrow -\frac{123}{10} - (-7) = -\frac{123}{10} + \left(-(-7)\right) = -\frac{123}{10} + 7 = -\frac{123}{10} + \frac{70}{10} = -\frac{53}{10} \end{aligned}$$

۵- مانند نمونه، عددها را ابتدا به طور تقریبی به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد کنید. سپس، حاصل

عبارت را به دست آورید.

$$-17/9 - (-8/0.1) + 12/87 \approx -18 - (-8) + 12 = -18 + 8 + 12 = -10 + 12 = 2$$

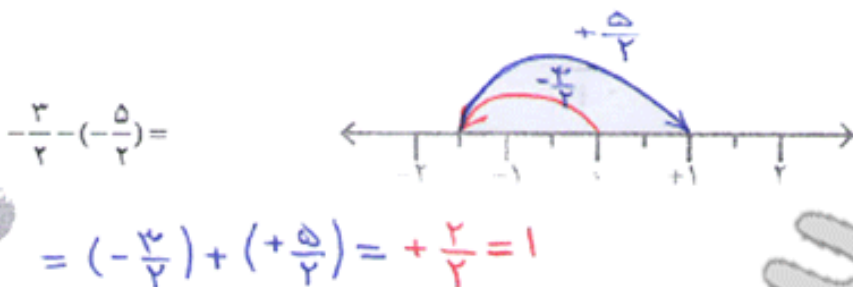
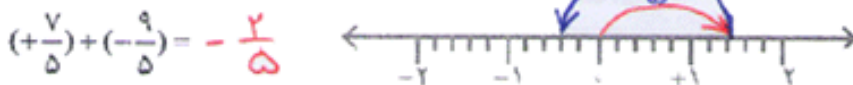
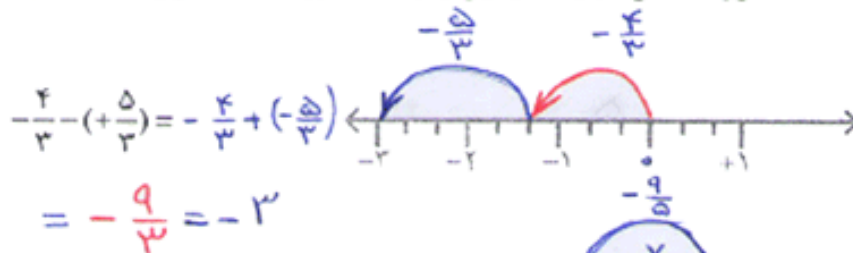
$$-1\frac{14}{15} + 2\frac{1}{17} - 3\frac{2}{19} = -2 + 2 - 3 = -3$$

کار در کلاس



به کمک محور، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. ابتدا تفریق‌ها را به صورت جمع

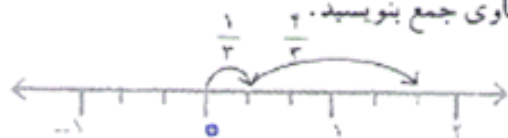
بنویسید.



فعالیت



۱- برای هر کدام از محورهای یک تساوی جمع بنویسید.



$$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$



$$\frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

حاصل عبارت رویه‌رو را به دست آورید و با حاصل جمع بالا مقایسه کنید.
 $\frac{1+(-3)}{3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

حاصل یکی است

با توجه به تساوی‌های زیر، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم حاصل جمع و تفریق دو عدد گویا را با استفاده از جمع و تفریق دو عدد صحیح به دست آوریم.

طریقی

$$-\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{-3+2}{5}$$

$$-\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-3-(-4)}{5} = \frac{-3+4}{5}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

خلاصه درس

۲- مانند نمونه، ابتدا مخرج‌ها را یکی کنید. سپس، جمع و تفریق‌ها را انجام دهید.

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{4} = \frac{20}{28} - \frac{21}{28} = \frac{20-21}{28} = \frac{-1}{28} = -\frac{1}{28}$$

$$\frac{6}{5} + \frac{7}{5} = \frac{6+7}{5} = \frac{13}{5}$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{-9+8}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-3-2}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{15} - \frac{10}{15} = \frac{-4-10}{15} = \frac{-14}{15} = -\frac{14}{15}$$

کار در کلاس



۱- مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌ها را به دست آورید.

$$\left(+\frac{7}{9}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{7}{9}\right) - \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{-7-(-4)}{9} = \frac{-7+4}{9} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{6}{11}\right) + \left(+\frac{8}{11}\right) = \frac{-6+8}{11} = +\frac{2}{11}$$

$$\left(-\frac{6}{11}\right) - \left(+\frac{8}{11}\right) = \frac{-6-(+8)}{11} = \frac{-6+(-8)}{11} = -\frac{14}{11}$$

$$-\frac{6}{11} - \frac{8}{11} = \frac{-6-8}{11} = \frac{-14}{11} = -\frac{14}{11}$$

$$\left(-\frac{6}{5}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right) = \frac{-30-12}{25} = -\frac{42}{25}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{-36+35}{63} = -\frac{1}{63}$$

$$-\frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{-4+4}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$-\frac{3}{4} - \frac{15}{8} = \frac{-6-15}{8} = \frac{-21}{8} = -\frac{21}{8}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4 + \frac{3}{5} = 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$$

$$4 + \left(-\frac{3}{5}\right) = 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5} \quad -4 + \left(-\frac{3}{5}\right) = -4\frac{3}{5} = -\frac{23}{5}$$

$$-4 + \frac{3}{5} = -4\frac{3}{5} = -\frac{23}{5}$$

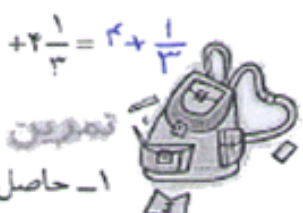
$$4 - \frac{3}{5} = 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$$

$$-4 - \frac{3}{5} = -4\frac{3}{5} = -\frac{23}{5}$$

حالا مانند نمونه، هر عدد مخلوط را به صورت دو عدد صحیح و کسری در آورید و با هم جمع کنید.

$$-2\frac{1}{2} = -2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 - \frac{1}{2}$$

$$-3\frac{3}{4} = -3 + \left(-\frac{3}{4}\right) = -3 - \frac{3}{4}$$



۱- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

$$-\frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{0}{15} = 0$$

$$-\frac{3}{8} - \frac{10}{24} = \frac{-9-10}{24} = \frac{-19}{24}$$

$$-2 - \frac{5}{3} = -2\frac{5}{3} = -3\frac{2}{3}$$

$$-2 + \frac{2}{5} = -1\frac{8}{5} = -2\frac{3}{5}$$

$$-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 1 + \frac{-1+3}{2} = 1 + \frac{2}{2} = 2$$

$$-2\frac{1}{5} - 2\frac{1}{2} = -4\frac{7}{10} = -4\frac{7}{10}$$

$$7\frac{1}{3} - 10\frac{1}{4} = -3 + \frac{4-3}{12} = -2\frac{11}{12}$$

$$-\frac{5}{2} + \frac{10}{3} = \frac{-15+20}{6} = \frac{5}{6}$$

۲- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

$$\begin{cases} -25 + 75 = 50 \\ -0.25 + 0.75 = 0.50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 + 3 = -6 \\ -0.9 + 0.3 = -0.6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 12 = -5 \\ 0.7 - 1.2 = -0.5 \end{cases}$$

بین این تساوی‌ها چه رابطه‌ای را مشاهده می‌کنید؟

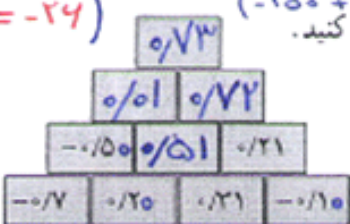
۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$12/8 - 15/4 = -2\frac{1}{4} \quad (128-154=-24)$$

$$-25 + 7/2 = -17\frac{1}{2} \quad (-250+72=-178)$$

$$-4/1 - 2/7 = -7\frac{8}{7} \quad (-41-27=-68)$$

۴- به کمک الگویابی جاهای خالی شکل را پر کنید.



ضرب و تقسیم عددهای گویا



۱- مانند نمونه، ضرب عددهای گویا را به ضرب عددهای صحیح تبدیل کنید. با توجه به حاصل عبارت‌ها، جدول را برای ضرب دو عدد گویا کامل کنید.

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \times (+\frac{3}{4}) &= \frac{-2}{3} \times \frac{+3}{4} = \frac{(-2) \times (+3)}{3 \times 4} = -\frac{2 \times 3}{3 \times 4} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \times (+\frac{5}{7}) &= \frac{-3}{4} \times \frac{+5}{7} = -\frac{3 \times 5}{4 \times 7} = -\frac{15}{28} \\ -\frac{2}{9} \times (-\frac{4}{5}) &= \frac{-2}{9} \times \frac{-4}{5} = +\frac{2 \times 4}{9 \times 5} = +\frac{8}{45} \\ -\frac{3}{5} \times (-\frac{10}{9}) &= \frac{-3}{5} \times \frac{-10}{9} = +\frac{3 \times 10}{5 \times 9} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9} \\ \frac{4}{3} \times (-\frac{9}{4}) &= \frac{4 \times (-9)}{3 \times 4} = -\frac{36}{12} = -3 \end{aligned}$$

$\times$	+	-
+	+	-
-	-	+

۲- با توجه به جدول بالا، ابتدا علامت حاصل ضرب را تعیین کنید. سپس، مانند نمونه، با ضرب کسرها حاصل را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} \times (-\frac{8}{15}) &= +\frac{3}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{3 \times 8}{4 \times 15} = \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} \times (+\frac{2}{3}) &= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = -\frac{1 \times 2}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

کاردر کلاس

با توجه به نتیجه‌ای که از فعالیت قبل گرفته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (+\frac{3}{5}) \times (-\frac{4}{7}) &= -\frac{12}{35} & (+\frac{2}{3}) \times (-\frac{5}{7}) &= -\frac{10}{21} \\ (-\frac{6}{35}) \times (-\frac{21}{8}) &= +\frac{6 \times 21}{35 \times 8} = \frac{9}{20} & -\frac{4}{7} \times (+12) &= -\frac{48}{7} \\ (-\frac{3}{11}) \times (+\frac{11}{6}) &= -\frac{1 \times 1}{1 \times 2} = -\frac{1}{2} & -1/2 \times (-0/1) &= +(\frac{1}{2} \times \frac{0}{1}) = \frac{0}{2} = 0 \\ -1 \times \frac{2}{8} &= -\frac{1 \times 2}{1 \times 8} = -\frac{1}{4} & -2 \times (-\frac{1}{3}) &= +\frac{2 \times 1}{1 \times 3} = \frac{2}{3} \\ & & -\frac{12}{10} \times (-\frac{1}{10}) &= +\frac{12 \times 1}{10 \times 10} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$



۱- همان طور که می دانید، تقسیم را می توانیم به ضرب تبدیل کنیم. پس، مانند نمونه ابتدا علامت حاصل تقسیم را بگذارید و سپس آن را به ضرب دو عدد تبدیل کنید.

$$\begin{aligned} (+\frac{2}{3}) \div (-\frac{5}{7}) &= -(\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}) = -\frac{14}{15} \\ -\frac{6}{25} \div (-\frac{8}{21}) &= +(\frac{6}{25} \times \frac{21}{8}) = +\frac{9}{20} \\ -\frac{15}{12} \div (+\frac{10}{18}) &= -(\frac{15}{12} \times \frac{18}{10}) = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

۲- معکوس کسر $\frac{2}{3}$ برابر با $\frac{3}{2}$ است. معکوس عددهای گویای زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5} &\rightarrow -\frac{5}{3} & +\frac{2}{7} &\rightarrow +\frac{7}{2} & -3 &\rightarrow -\frac{1}{3} & +\frac{7}{3} &\rightarrow +\frac{3}{7} \\ -2\frac{1}{3} &\rightarrow -\frac{7}{3} & 0/1 &\rightarrow \frac{1}{0} & +1\frac{1}{4} &\rightarrow +\frac{5}{4} & -1 &\rightarrow -1 \end{aligned}$$

مانند نمونه هر عدد بالا را در معکوس خود ضرب کنید و حاصل را به دست آورید.

$$-\frac{3}{5} \times (-\frac{5}{3}) = +1 \quad +\frac{2}{7} \times (+\frac{7}{2}) = +\frac{2 \times 7}{7 \times 2} = +1$$

پایین

چه نتیجه ای می گیرید؟ حاصل ضرب هر عدد (در غیر صفر) در معکوسش برابر یک می شود

۳- جاهای خالی را با کسر مناسب پر کنید.

$$\begin{aligned} -2\frac{1}{2} \times (-\frac{2}{5}) &= 1 \\ +1\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5} \times (-\frac{5}{3}) &= 1 \\ +\frac{1}{4} \times \frac{4}{1} &= 1 \end{aligned}$$

صفر تنها عددی است که معکوس ندارد؛ چون کسری که مخرج آن صفر باشد تعریف نشده است.

$$\begin{aligned} 15 \quad -\frac{3}{1} \times (-\frac{1}{3}) &= +\frac{3 \times 1}{1 \times 3} = +1, \quad +\frac{7}{3} \times +\frac{3}{7} = +\frac{7 \times 3}{3 \times 7} = +1 \\ -2\frac{1}{3} \times -\frac{3}{7} &= +(\frac{7}{3} \times \frac{3}{7}) = +1, \quad 0/1 \times \frac{1}{0} = +(\frac{1}{0} \times \frac{0}{1}) = 1 \\ +1\frac{1}{4} \times (+\frac{4}{5}) &= +(\frac{5}{4} \times \frac{4}{5}) = +1, \quad (-\frac{1}{1}) \times (-\frac{1}{1}) = +1 \end{aligned}$$

در کسر ساده نشدن $\frac{a}{b}$ اگر $b = 2 \times 5 \times n$ و m و n اعداد حسابی نباشند آنگاه $\frac{a}{b}$ تعداد محدودی

$$\frac{9}{4} = 2,25$$

رتبه اعشاری دارد (اعداد اعشاری تحقیقی دارد) مثال

کسر ساده نشدن $\frac{a}{b}$ اگر $b = 2^x \times 5^y \times p^k$ یعنی درخرج خود عوامل ۲ و ۵ نداشته باشد و حداقل یک عامل اول

$$\frac{3}{7} = 0,428571$$

دیگر داشته باشد آنگاه $\frac{a}{b}$ اعداد اعشاری متناوب ساده دارد مثال

کار در کلاس



۱- حاصل تقسیم های زیر را حساب کنید.

$$-\frac{8}{9} \div (-8) = +\frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{9}$$

$$-\frac{4}{7} \div (-\frac{5}{7}) = +\frac{4}{7} \times \frac{7}{5} = +\frac{4}{5}$$

$$-\frac{3}{8} \div (-\frac{3}{8}) = +\frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = +1$$

$$1 \div (-\frac{2}{3}) = -1 \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$(+\frac{4}{5}) \div (-5) = -\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = -\frac{4}{25}$$

$$-0,8 \div 4 = -\frac{8}{10} \times \frac{1}{4} = -0,2 = -\frac{1}{5}$$

۲- طرف دیگر تساوی ها را بنویسید.

$$1 \div \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$$

$$1 \div (-\frac{3}{4}) = -\frac{4}{3}$$

$$1 \div (-\frac{7}{2}) = -\frac{2}{7}$$

$$\frac{3}{5} \text{ معکوس} = \frac{5}{3}$$

$$-\frac{3}{4} \text{ معکوس} = -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{7}{2} \text{ معکوس} = -\frac{2}{7}$$

حاصل تقسیم عدد یک بر هر عدد غیر صفر چیست؟ توضیح دهید. برابر معکوس آن عدد می شود.

(اعداد اعشاری)



۱- کسرها را مانند نمونه و به کمک ماشین حساب، به عددهای اعشاری تبدیل کنید.

۱- اعداد اعشاری مختوم (تحقیق)

$$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0,4$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333...$$

$$\frac{3}{7} = 0,428571428571...$$

۲- اعداد اعشاری متناوب

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

$$\frac{5}{4} = 1,25$$

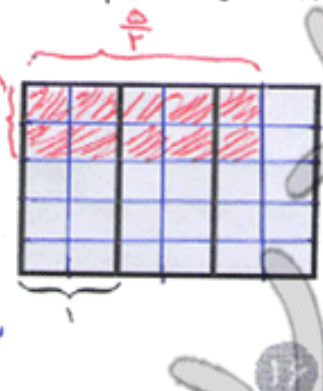
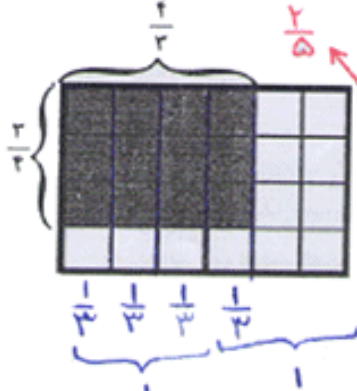
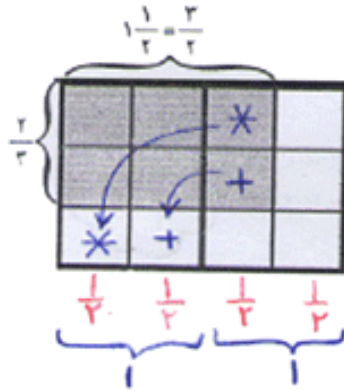
$$\frac{5}{6} = 0,8333...$$

۳- اعداد اعشاری متناوب

بین عددهای حاصل چه تفاوتی مشاهده می کنید؟ آیا می توانید کسرها را طبقه بندی کنید؟

۲- مانند نمونه، ضرب یک کسر در معکوسش را روی شکل نشان دهید. چگونه می توانیم از

روی شکل نشان دهیم که حاصل ضرب کسر در معکوسش، یک می شود؟



$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$$

اگر کسر ساده نشدن $\frac{a}{b}$ درخرج خود علاوه بر ۲ یا ۵ یک عامل اول دیگر نداشته باشد آنگاه $\frac{a}{b}$ اعداد اعشاری متناوب مرکب دارد مثال $\frac{5}{9} = 0,5555...$

تصویر



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(-\frac{6}{17}\right) + \left(-\frac{-8}{17}\right) = \frac{-4+8}{17} = \frac{4}{17} \quad \left(-\frac{12}{35}\right) - \left(+\frac{11}{32}\right) = \frac{-72-35}{210} = \frac{-107}{210} = -\frac{107}{210}$$

$$\left(-\frac{2}{63}\right) - \left(-\frac{5}{72}\right) = \frac{-14+35}{504} = +\frac{19}{504} \quad -\frac{7}{12} + (-3) = \frac{-7-36}{12} = -\frac{43}{12} = -3\frac{7}{12}$$

$$\left(+\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{6}{9}\right) = -\frac{4}{33} \quad \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(+\frac{8}{12}\right) = -\frac{1}{15}$$

$$-8 \div (+5) = -\frac{8}{5} = -1\frac{3}{5} \quad (-12) \div (-28) = +\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

$$\left(-\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{28}{27}\right) = +\frac{7}{9} \times \frac{27}{28} = +\frac{3}{4} \quad -2\frac{1}{4} \div 1\frac{1}{2} = -2$$

۲- عددهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$-\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{5}{8} \quad -\left(\frac{14}{-19}\right) = \frac{14}{19} \quad -\left(\frac{-5}{-13}\right) = -\frac{5}{13} \quad -\frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(\frac{3}{5} - \left(+\frac{2}{5}\right)\right) \times \frac{5}{12} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{12} = \frac{1}{12} \quad \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right) = -\frac{3}{5} \times \frac{30}{-12+25} = -\frac{18}{13}$$

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5} - \frac{7}{5} + \frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3} \quad \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{6} - \frac{8}{9}\right) \div \frac{-7}{24} = \frac{-27+12-64}{216} \times \left(-\frac{24}{7}\right) = +\frac{79}{21}$$

$$\left(-2 + 3 - 7\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right) = -6 \quad -1\frac{1}{2} \times \left(-3\frac{1}{3}\right) = +\left(\frac{3}{2} \times \frac{10}{3}\right) = 5$$

$$= -6 + \frac{-5+4-1}{10} = -6 + \frac{-2}{10} = -6\frac{1}{5}$$

$$-2\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2} = -\frac{4}{2} \times \frac{2}{5} = -\frac{16}{5} \quad -1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} \times \frac{-8}{5} = -\frac{5}{3} + \frac{5}{4} \times \frac{8}{5} = -\frac{5}{3} + 2$$

$$= \frac{-5+4}{3} = -\frac{1}{3}$$

فصل دوم

جواب سؤال ۱ نسبت دوم

یک گروه پانزده نفره
سه گروه پنج نفره
پنج گروه سه نفره
پانزده گروه یک نفره

$$15 = 1 \times 15$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$15 = 5 \times 3$$

$$15 = 15 \times 1$$

مولف: math-home.ir

یادآوری عددهای اول

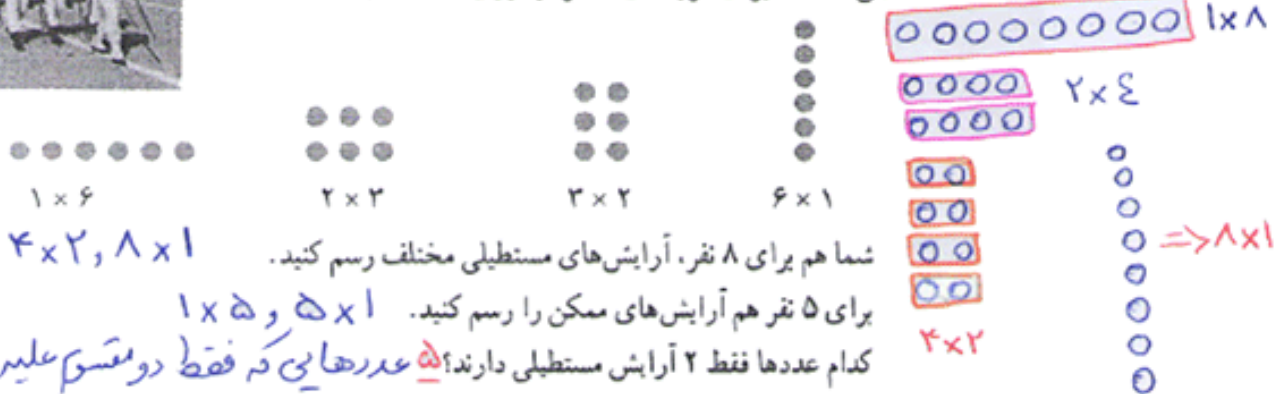
بله، گروه‌های ۱، ۳، ۵، ۱۵ نفره



۱- می‌خواهیم ۱۹ نفر از دانش‌آموزان را برای انجام کارهای مختلف به گروه‌های کوچک تقسیم کنیم. آیا می‌توانیم این تعداد را به گروه‌های مساوی تقسیم کنیم؟
اگر تعداد دانش‌آموزان ۷ نفر باشد، چه گروه‌هایی را می‌توانیم تشکیل دهیم؟ همه حالت‌های ممکن را بنویسید.
گروه‌های ۷ نفره و یک نفره
اگر تعداد آنها ۱۵ نفر باشد، چه گروه‌هایی را می‌توانیم تشکیل دهیم؟
گروه‌های ۱۵، ۵، ۳، ۱ نفره



۲- تعدادی از سربازان می‌خواهند رژه بزنند. فرمانده آنها آرایش‌های مستطیلی مختلف برای گروه‌های ۶ نفره را روی کاغذ کشیده است.

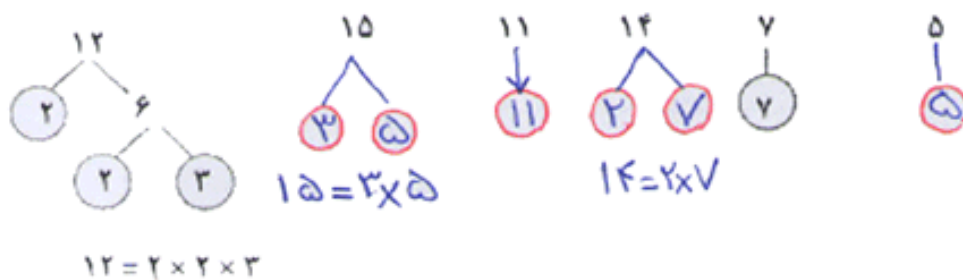


شما هم برای ۸ نفر، آرایش‌های مستطیلی مختلف رسم کنید. $1 \times 8, 2 \times 4, 4 \times 2, 8 \times 1$

برای ۵ نفر هم آرایش‌های ممکن را رسم کنید. $1 \times 5, 5 \times 1$

کدام عددها فقط ۲ آرایش مستطیلی دارند؟ ۵ عددهایی که فقط دو مقسم علیه دارند (اعداد اول)

۳- مانند نمونه‌ها با رسم نمودارهای درختی، عددهای داده شده را به صورت ضرب شمارنده‌های اول بنویسید (تجزیه کنید).



هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارنده طبیعی به جز یک و خودش نداشته باشد عدد اول نامیده می‌شود.

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ...

اعداد اول

جواب سؤال ۲



یک عددی اول نمی باشد زیرا از حاصل ضرب یک در خودش عدد جدیدی حاصل نمی شود
 می دانیم از حاصل ضرب هر عدد اول در خودش و یا یک عدد اول دیگر، عددی مرکب حاصل می شود
 جواب دوم: زیرا اعدادی اول اند که فقط دو شمارنده ی طبیعی داشته باشد و عدد یک فقط یک شمارنده ی طبیعی دارد
 عدد ۱ مرکب نیست زیرا نمی توانیم آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک بنویسیم

مؤلف: math-home.ir

کار در کلاس



اگر بتوانیم عددی طبیعی و بزرگ تر از یک را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک

بنویسیم، عدد مورد نظر اول نخواهد بود و به چنین عددی، عدد مرکب می گویند. برای مثال، ۲۴
 عددی مرکب است، چون: $24 = 6 \times 4$
 $14 = 2 \times 7$, $18 = 3 \times 6$, $20 = 4 \times 5$, $21 = 3 \times 7$
 $22 = 2 \times 11$, $24 = 4 \times 6$, $25 = 5 \times 5$, $26 = 2 \times 13$
 همه عددهای مرکب بین ۱۵ و ۳۰ را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک بنویسید.
 $27 = 3 \times 9$
 $28 = 4 \times 7$



اعداد مرکب بین ۱۵ و ۳۰
 ۱۴، ۱۸، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸
 ۱- عددهای طبیعی از ۱ تا ۳۰ را بنویسید و دور عددهای اول خط بکشید.

آیا عدد ۱ اول است؟ چرا؟ خیر
 ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲

آیا عدد ۱ مرکب است؟ چرا؟ خیر
 ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰

۲- با توجه به سؤال بالا، عددهای طبیعی را به سه دسته تقسیم کنید و ویژگی های هر کدام را

بنویسید. (الف) عدد ۱ که نه اول است و نه مرکب (ب) اعداد اول: **عددهایی که فقط ۱**

دو شمارنده طبیعی دارند (ج) اعداد مرکب: **عددهایی که بتوان آن ها را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک**

۳- مضرب های طبیعی عدد ۲ در زیر نوشته شده است. در صورت امکان، آنها را مانند نمونه نوشت

به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از ۱ بنویسید.

۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۴ ، ...
 2×2 2×3 2×4 2×5 2×6 2×7

به همین ترتیب، مضرب های طبیعی عددهای ۳ و ۴ را بنویسید و در صورت امکان آنها را به صورت ضرب دو عدد طبیعی و بزرگ تر از ۱ بنویسید.

مضرب های طبیعی عدد ۳: ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ...

مضرب های طبیعی عدد ۴: ۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ...

۴- با توجه به سؤال بالا، آیا می توانیم بگوییم که همه مضرب های یک عدد طبیعی مرکب اند؟ چرا؟

خیر زیرا ۲ مضرب هست اما مرکب نیست
 عدد ۱ نه اول است نه مرکب؛ به این ترتیب، عددهای طبیعی را می توان به سه بخش تقسیم کرد:

عددهای اول، عددهای مرکب و عدد یک

۲۱

مضرب های طبیعی عدد ۴: ۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ...

2×2 2×4 2×6 2×8



۱- کدام عددهای طبیعی را می‌شناسید که همه مضرب‌هایشان عددهای مرکب باشند؟

۲- عدد ۱۷ چند مضرب دارد؟ بی‌شمار
چند تا از مضرب‌های آن عدد اول هستند؟ بی‌شمار
عدد‌های مرکب برای مثال مضرب‌های ۴

فقط خود ۱۷

۳- اگر a یک عدد اول باشد، آیا همه مضرب‌هایش مرکب‌اند؟ خیر، خود a اول است و مضرب a

نیز می‌باشد



۱- ب.م.م جفت عددهای داده شده را بنویسید.

$$(15, 6) = 3$$

$$(2, 8) = 2$$

$$(3, 9) = 3$$

$$(1, 4) = 1$$

$$(18, 12) = 6$$

$$(5, 12) = 1$$

$$(15, 4) = 1$$

$$(3, 5) = 1$$

$$(24, 25) = 1$$

$$(15, 16) = 1$$

$$(7, 8) = 1$$

$$(3, 3) = 3$$

تکته: (ب.م.م) دو عدد متوالی برابر یک است

اگر ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه [شمارنده] مشترک) دو عدد برابر یک باشد، می‌گوییم آن دو عدد نسبت به هم اول هستند. برای مثال، عددهای ۸ و ۹ هر دو مرکب‌اند اما چون $(8, 9) = 1$ می‌گوییم این دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

$$(5, 7) = 1$$

۲- دو عدد اول متفاوت انتخاب کنید و ب.م.م آنها را بنویسید.

آیا می‌توان گفت هر دو عدد اول نسبت به هم اول‌اند؟ آری

$$(5, 9) = 1$$

۳- یک عدد اول و یک عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.

۴- دو عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند. $(8, 9) = 1$

۵- آیا دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول می‌شوند؟ بله

۶- اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها چگونه به دست می‌آید؟

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آن‌ها برابر است با حاصل ضرب آن‌ها

$$(8, 9) = 1 \Rightarrow [8, 9] = 8 \times 9 = 72$$

نکته: اگر مجموع دو عدد، عدد فرد باشد، نگاه کنی از آن دو عدد فرد دیگری زوج است

$$\text{زوج} = \text{زوج} + \text{زوج} \quad \text{فرد} = \text{زوج} + \text{فرد} \quad \text{زوج} = \text{فرد} + \text{فرد}$$

نکته: اگر مجموع دو عدد اول عددی فرد باشد حتماً یکی از آن دو عدد زوج می باشد

مؤلف: math-home.ir



۱- برای تساوی روبه رو، چهار پاسخ مختلف به دست آورید. $(\square \text{ و } 2) = 1$

$$(1, 4) = 1, (3, 4) = 1, (5, 4) = 1, (7, 4) = 1$$

۲- عددهای اول بین دو عدد ۴۰ و ۶۰ را بنویسید. ۴۱, ۴۳, ۴۷, ۵۳, ۵۹

۳- اگر تعداد عددهای اولی کمتر از ۲۰، هشت عدد باشند، تعداد عددهای مرکب کوچک تر از ۲۰

$$\text{چندتا است؟ چرا؟} \quad 1 \text{ نه اول است و نه مرکب} \quad 19 - (1+1) = 15$$

۴- آیا جمله زیر درست است؟ چرا؟ **خیر**، زیرا عدد ۱ طبیعی است و فقط یک شمارنده دارد.
«هر عدد طبیعی دست کم ۲ شمارنده دارد.»

۵- مجموع دو عدد اول ۹۹ است. آن دو عدد را مشخص کنید و توضیح دهید که چگونه آنها را

$$\square + \triangle = 99 \Rightarrow \triangle = 2 \Rightarrow \square = 99 - 2 = 97$$

۶- پنج عدد بنویسید که غیر از ۲ و ۳ شمارنده اول دیگری نداشته باشند.

۷- عددهای ۱ و ۴ دو شمارنده یک عددند. شش عدد دیگر پیدا کنید که به طور حتم شمارنده های

$$34 \rightarrow 4, 9$$

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 34\}$$

خواندنی

هر دو عدد طبیعی و فرد که ۲ واحد اختلاف داشته باشند و هر دو اول باشند را یک جفت عدد اول دوقلو می نامند مانند (۳, ۵) یا (۱۱, ۱۳) یا (۱۰۱, ۱۰۳) ریاضیدانان بر این باورند (حدس می زنند) که برای دوقلوهای اول پایانی وجود ندارد.

همچنین هر سه عدد فرد و متوالی که هر سه اول نیز باشند را اعداد اول سه قلو می نامند که فقط یک سه قلو اول در بین اعداد طبیعی وجود دارد یعنی (۳, ۵, ۷) و سه قلو دیگری یافت نمی شود!

$$19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5$$

★ زیرا، از هر سه عدد فرد متوالی یکی مضرب سه می باشد

پس به غیر ۳, ۵, ۷، هیچ سه قلو دیگری یافت نمی شود

نکته

$$2 \times 3 = 6, 2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$

اعداد اول دوقلو

اعداد اول سه قلو

تعیین عددهای اول

فعالیت



مؤلف: math-home.ir

می‌خواهیم عددهای اول بین ۱ تا ۵۰ را تعیین کنیم.
ابتدا عددهای ۱ تا ۵۰ را می‌نویسیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰

حالا عددهای غیر اول را خط می‌زنیم تا عددهای اول باقی بمانند.

۱- آیا عدد ۱ را خط زدید؟ **بله** چرا؟ **زیرا عدد ۱ نه اول است و نه مرکب**

۲- آیا مضرب‌های عدد ۲ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **زیرا ۲ اول است و خط نمی‌خورد**
مضرب‌های مرکب عدد ۲ را به صورت / خط بزنید.

بله، به غیر خود عدد ۲
زیرا همگی به جزء ۲ مرکب
می‌باشند

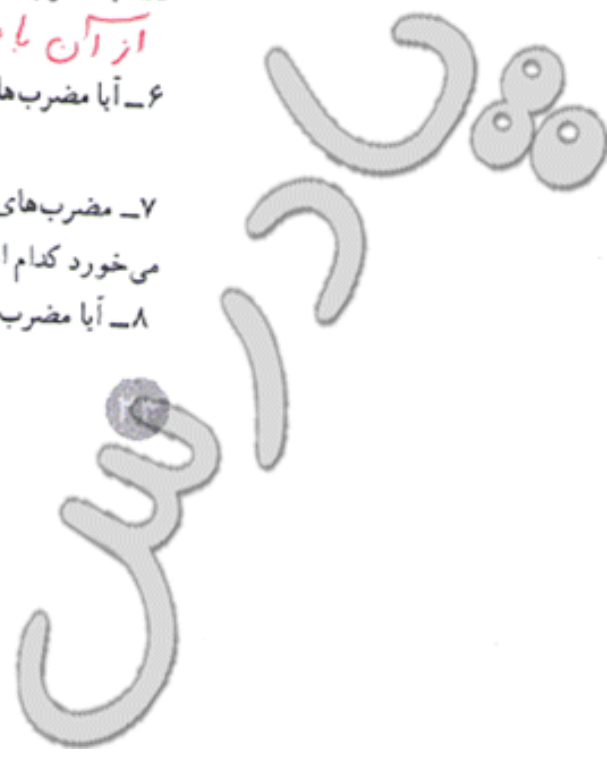
مضرب‌های مرکب عدد ۳ را خط بزنید.
۳- آیا لازم است مضرب‌های عدد ۴ را خط بزنیم؟ **خیر** چرا؟ زیرا اگر عددی مضرب ۴ باشد، پیش از آن به عنوان مضرب ۲ خط خورده است.

۴- آیا مضرب‌های عدد ۵ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **زیرا ۵ اول است و نباید خط بخورد**
مضرب‌های مرکب عدد ۵ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۵ که برای اولین بار خط می‌خورد، کدام است؟ **$۲۵ = ۵ \times ۵$**

۵- آیا مضرب‌های عدد ۶ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **زیرا اگر عددی مضرب ۶ باشد، پیش از آن با مضرب‌های ۲ خط خورده است**
۶- آیا مضرب‌های عدد ۷ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **چون ۷ اول است و خط نمی‌خورد**

۷- مضرب‌های مرکب عدد ۷ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۷ که برای اولین بار خط می‌خورد کدام است؟ **$۴۹ = ۷ \times ۷$**

۸- آیا مضرب‌های اعداد ۸ و ۹ و ۱۰ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **زیرا قبلاً خط خورده‌اند**



۹- اگر بخواهیم مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم، کدام مضرب ۱۱ برای اولین بار خط خواهد خورد؟ $11^2 = 121$

مؤلف: math-home.ir

۱۰- به این ترتیب، آیا لازم است مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم؟ **خیر**

۱۱- آیا عددهای باقی مانده، اول هستند؟ **بله**

برای تعیین عددهای اول، فقط مضرب‌های مرکب عددهای اول را خط می‌زنیم و خط‌زدن را تا عدد اولی ادامه می‌دهیم که مربع آن عدد اول، بین عددهای نوشته شده نباشد.



کار در کلاس



نتایج فعالیت قبل که به آن روش غربال می‌گویند، در نمودار زیر خلاصه شده است.



این نمودار را برای $n = 40$ دنبال کنید و همه مرحله‌ها را یک به یک انجام دهید. هر مرحله از نمودار را برای خود توضیح دهید. برای مثال، جمله «عددهای ۱ تا n را بنویسید» را بخوانید و عددهای ۱ تا ۴۰ را در کادر زیر بنویسید. عدد ۱ را خط بزنید. عدد خط نخورده بعدی را که عدد ۲ است، در نظر بگیرید. آیا مربع عدد ۲ در بین عددها هست؟ مضرب‌های مرکب آن را خط بزنید، دوباره به مرحله قبلی برگردید و به همین ترتیب کار را ادامه دهید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰		
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	

۲	مربع ۲	۴	در بین اعداد هست	مضرب مرکب ۲	/
۳	مربع ۳	۹	در بین اعداد هست	مضرب مرکب ۳	/
۵	مربع ۵	۲۵	در بین اعداد هست	مضرب مرکب ۵	/
۷	مربع ۷	۴۹	در بین اعداد نیست		

- ① $\sqrt{a} = M$ عدد a را بر تمام اعداد اول تا M تقسیم کنیم
 ② اگر باقیانده‌ی یکی از تقسیم‌ها صفر نشود آنگاه در یویم عدد a مرکب است
 ③ اگر باقیانده‌ی هیچ‌یک از تقسیم‌ها صفر نشود آنگاه در یویم عدد a اول است



مؤلف: math-home.ir

می‌خواهیم مشخص کنیم ۴۷ اول است یا نه. مانند روش غربال، که در صفحه قبل توضیح داده شد، فرض کنید عددهای ۱ تا ۴۷ نوشته شده‌اند.

$$\begin{array}{r} 47 \overline{) 2} \\ 42 \\ \hline 1 \end{array}$$

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۲ خط می‌خورد؟ **خیر** با انجام دادن چه عملی می‌توانید به این سؤال پاسخ دهید؟ **عمل تقسیم**

$$\begin{array}{r} 47 \overline{) 3} \\ 45 \\ \hline 2 \end{array}$$

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۳ خط می‌خورد؟ **خیر** چرا؟

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۵ خط می‌خورد؟ **خیر** چرا؟ چون $27 < 5$ بر ۵ بخش پذیر نیستی باشد

آیا لازم است بررسی کنیم که عدد ۴۷ با مضرب‌های ۷ خط می‌خورد یا نه؟ **خیر** چرا؟ زیرا $49 = 7^2 > 47$

زیرا مربع ۷ یعنی ۴۹ در بین اعداد وجود ندارد

آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که عدد ۴۷ را فقط بر عددهای اول تقسیم می‌کنیم؟ **خیر** چرا؟ فقط بر اعداد اول

۲، ۳، ۵ باید تقسیم کنیم و نیاز نیست بر کل اعداد اول تقسیم کنیم چرا تقسیم کردن را تا عدد اولی که مربع آن از ۴۷ بزرگ‌تر شود ادامه می‌دهیم؟ توضیح دهید.

ویرادر روش غربال اولین عدد مرکبی که خط می‌خورد مربع عدد اول است



کارد در کلاس و اگر ۴۷ مرکب بود قطعاً باریکی از مضرب‌های ۲ یا ۳ یا ۵ خط

مانند نمونه، بررسی کنید که عددهای داده شده (۹۷، ۱۳۱ و ۱۴۳) اول یا مرکب هستند.

می‌خورد

$$\sqrt{97} \approx 9 \rightarrow$$

پس باید آن را به عددهای اول ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} 97 \overline{) 2} \\ 96 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 97 \overline{) 3} \\ 96 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 97 \overline{) 5} \\ 95 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 97 \overline{) 7} \\ 91 \\ \hline 6 \end{array}$$

چون تمام تقسیم‌ها باقی مانده دارند، پس ۹۷ مضرب هیچ‌کدام نیست؛ یعنی عددی اول است.

$$\sqrt{131} \approx 11 \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 131 \overline{) 2} \\ 130 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 131 \overline{) 3} \\ 129 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 131 \overline{) 5} \\ 130 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 131 \overline{) 7} \\ 91 \\ \hline 4 \\ 54 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 131 \overline{) 11} \\ 11 \\ \hline 21 \\ 11 \\ \hline 10 \end{array}$$

چون ۱۳۱ بر هیچ‌کدام از اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷

بخش پذیر نیست و $131 > 13^2$ می‌باشد

لذا عدد ۱۳۱ عددی اول می‌باشد

پس باید بر اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تقسیم کنیم

$$143 \div 2$$

$$143 \div 3$$

$$143 \div 5$$

$$143 \div 7$$

$$143 \div 11$$

$$143 \div 13$$

$$\begin{array}{r} 143 \\ 140 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 143 \\ 11 \\ \hline 13 \end{array}$$

۱۴۳ عددی مرکب است

چون ۱۴۳ بر ۱۱ بخش پذیر است

math-home.ir مولف: $\sqrt{143} = 12$

$$143 = 11 \times 13$$



۱- از روش غربال برای عددهای ۱ تا ۶۰ استفاده کنید و عددهای اول کمتر از ۶۰

را پیدا کنید. ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳

۲- مشخص کنید که عددهای ۱۰۷ و ۲۵۱ اول اند یا مرکب. ۱۰۷ و ۲۵۱ هر دو اول هستند

۳- برای اینکه بفهمیم عددهای کمتر از ۱۰۰ اول اند یا نه، کافی است آنها را به عددهای ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تقسیم کنیم.

پاسخ

آیا این جمله درست است؟ چرا؟ $121 = 11^2$ بین اعداد زوج باشد

$$12 = 121 > 120$$

۴- عددی از ۱۲۰ کوچک تر و از ۱۰۰ بزرگ تر است. برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا نه،

حداکثر چند تقسیم انجام می دهیم؟ چرا؟ ۴ تقسیم، تقسیم بر ۲، ۳، ۵، ۷ کافی است

۵- عددهای ۱ تا ۱۰۰ را بنویسید و غربال کنید. سپس، به سؤال های زیر پاسخ دهید.

$$7^2 = 49$$

• اولین عددی که خط خورد: عدد یک

• در مرحله حذف مضرب های ۷، اولین مضرب ۷ که به عنوان مضرب های سایر عددها خط نخورد: ۴۹

• عددی که با مضرب های آن عدد ۲۴ خط خورد: عدد ۲

• تمام مضرب های ۵ که در مرحله حذف مضرب های ۵ برای اولین بار خط خوردند:

$$25, 35, 55, 65, 85, 95$$

$$5 \times 5, 5 \times 7, 5 \times 11, 5 \times 13, 5 \times 17, 5 \times 19$$

خواندنی

توزیع و نوع قرار گرفتن اعداد اول در بین اعداد طبیعی بسیار نامنظم بوده و از قانون خاصی تبعیت

نمی کنند ولی همین اعداد اول که به صورتی نامنظم در بین اعداد طبیعی رویده اند، می توانند هر عدد

طبیعی و بزرگ تر از یک را بسازند و به عنوان بلوک های ساختمانی برای اعداد طبیعی به کار بروند.

$$36 = 2^2 \times 3^2, \quad 100 = 2^2 \times 5^2$$

$$27 = 3^3, \quad 5 = 5^1, \quad 12 = 2^2 \times 3$$

۲۷

$$\sqrt{107} \approx 10 \Rightarrow \{2, 3, 5, 7\}$$

۱۰۷ اول است

جواب سؤال ۲

بخش پذیری

$$\sqrt{251} \approx 15 \Rightarrow \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

۲۵۱ عددی اول است

بخش پذیری

~~۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۸, ۲۹, ۳۰~~
~~۳۱, ۳۲, ۳۳, ۳۴, ۳۵, ۳۶, ۳۷, ۳۸, ۳۹~~

/ → مضرب‌های ۵ / → مضرب‌های ۲
 / → مضرب‌های ۳

● ● مرور فصل ۲ ● ●

مفاهیم و مهارت‌ها

مؤلف: math-home.ir

واژه‌های زیر در این فصل به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید معنی هر واژه را توضیح دهید و توصیف کنید و برای هر کدام مثال بزنید.

- نمودار درختی • عدد مرکب • نسبت به هم اول • روش غربال
- روش‌های اصلی زیر در این فصل مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و خلاصه درس را در دفتر خود بنویسید.
- پیدا کردن عددهای اول با روش‌های تقسیم، ضرب و بخش پذیری
- تشخیص عددهای اول و مرکب
- تعیین عددهای اول به کمک روش غربال
- دنبال کردن یک دستورالعمل و نمودار
- تعیین اینکه یک عدد، اول یا مرکب است.

کاربرد

این درس در فصل مربوط به توان و جذر کاربرد دارد. از تبدیل پایه‌های مرکب به پایه‌های عدد اول برای ساده کردن عبارت‌های توان‌دار استفاده می‌شود.

تمرین‌های ترکیبی

۱- یک عدد مرکب بنویسید که شمارنده‌های اول غیر از ۲ و ۳ نداشته باشند. آیا این عدد و عددی که شمارنده‌های اول آن ۲ و ۵ است، نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟

زیرا عدد ۲ شمارنده‌ی مشترک این دو عدد است $(2, 10) = 2$

۲- با روش غربال، عددهای اول بین ۲۰ و ۴۰ را پیدا کنید. در این روش، کار را از خط زدن مضرب‌های کدام عدد شروع می‌کنید و با مضرب‌های کدام عدد پایان می‌دهید؟

با خط زدن مضرب‌های ۲ شروع و با خط زدن مضرب‌های ۵ پایان می‌دهیم

۳- آیا عدد ۱۳۷ اول است؟ چرا؟

آری، چون ۱۳۷ بر اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ بخش پذیر نیستی باشد $\sqrt{137} \approx 11,7$

۴- ۲ عدد مرکب بنویسید که نسبت به هم اول باشند.

$$(25, 49) = 1 \quad \text{و} \quad (34, 121) = 1$$

فصل سوم

یستم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره خط تشکیل شده باشد (چندضلعی):

چندضلعی‌ها و تقارن

مؤلف: math-home.ir

تعریف چندضلعی



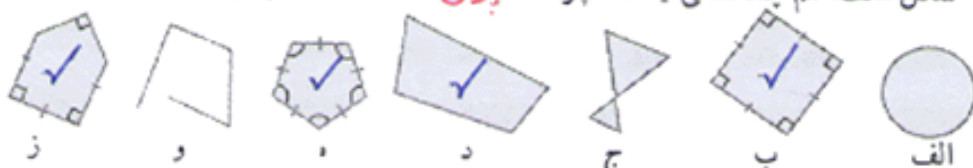
۱- در هندسه به هر خط شکسته بسته، چندضلعی گفته می‌شود به شرط آنکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند. شکل‌های «ب»، «د»، «ه»، «و» و «ز» چندضلعی

نی‌باشند

شکل «ج» چندضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شکل «و» چندضلعی نیست. چرا؟ چون خط بسته نیست

شکل «الف» هم چندضلعی نیست. چرا؟ چون خط شکسته نیست



۲- اگر در یک چندضلعی همه ضلع‌ها با هم و همه زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منتظم است.

تعریف چندضلعی منتظم

از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چندضلعی منتظم‌اند؟ «ب» و «د»

۳- یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید. مبنی، درباره تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها

و... توضیح دهید تا دوستان شما را که انتخاب کرده‌اید، پیدا کند. خط شکسته بسته ولی چندضلعی نیست. مبنی به توضیحات دوستان گوش کنید و شکلی را که او انتخاب کرده است، پیدا کنید.

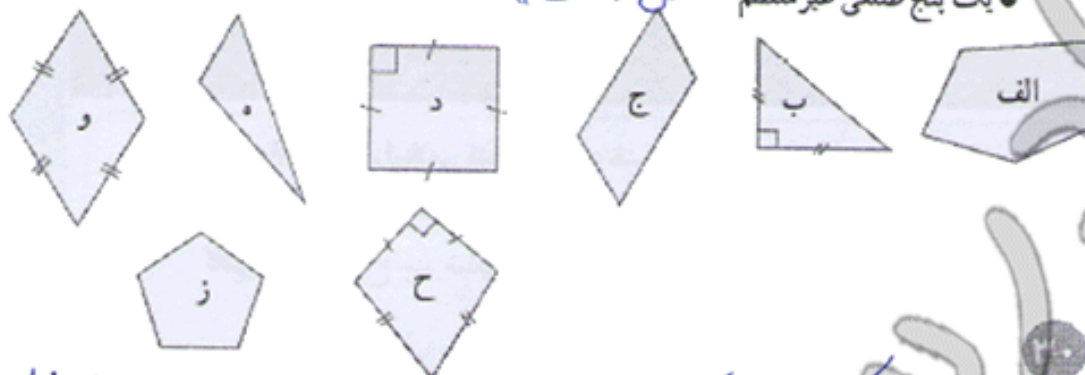
جواب: شکل «ج»

کار در کلاس



۱- هر یک از عبارت‌های زیر مربوط به کدام چندضلعی است؟

- یک لوزی با زاویه قائمه (شکل «د»)
- یک مثلث با زاویه باز (شکل «ه»)
- یک پنج ضلعی غیر منتظم (شکل «الف»)



جواب سؤال سه: (۲) خط شکسته بسته که ۵ ضلع برابر و ۵ زاویه برابر دارد و چندضلعی است «ه»

(۳) خط شکسته‌ی باز که ۴ ضلع دارد «و»

(۴) شکلی که چندضلعی نیست ولی بسته است «الف درج»

شباهت‌ها: اندازه‌ی اضلاع برابر است، چند ضلعی هستند. چه هارون دارند

(۴)

تفاوت‌ها: (۱) شکل الف منتظم ولی ب وج منتظم نمی باشد (۲) الف مرکز تقارن دارد ولی ب وج مرکز تقارن ندارد (۳) شکل الف ۲ محور تقارن دارد ولی شکل‌های ب وج فقط یک محور تقارن دارند (۴) الف محدب ولی ب وج مقعر است

۲- چند ضلعی‌های زیر را در صفحه شطرنجی رسم کنید.



الف) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین « a »

ب) مستطیلی با ضلع‌های مساوی « b »

ج) یک دوزنقه قائم الزاویه « c »

د) یک شش ضلعی با دقیقاً سه زاویه قائمه

« d, e »

۳- به شکل‌های زیر نگاه کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را بنویسید. کطای ← پاسخ‌های متفاوت



۴- به چند ضلعی‌ای که زاویه‌های آن کوچک‌تر از 180° درجه باشد، چند ضلعی محدب (کوز) و به

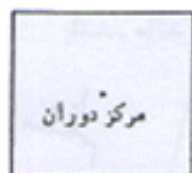
چند ضلعی‌ای که دست کم یک زاویه آن بزرگ‌تر از 180°

درجه باشد، چند ضلعی مقعر (کاو) گفته می‌شود.

با توجه به شکل‌های سؤال بالا

جدول روبه‌رو را کامل کنید.

شکل	منتظم	غیر منتظم	محدب	مقعر
الف	✓	✗	✓	✗
ب	✗	✓	✗	✓
ج	✗	✓	✗	✓

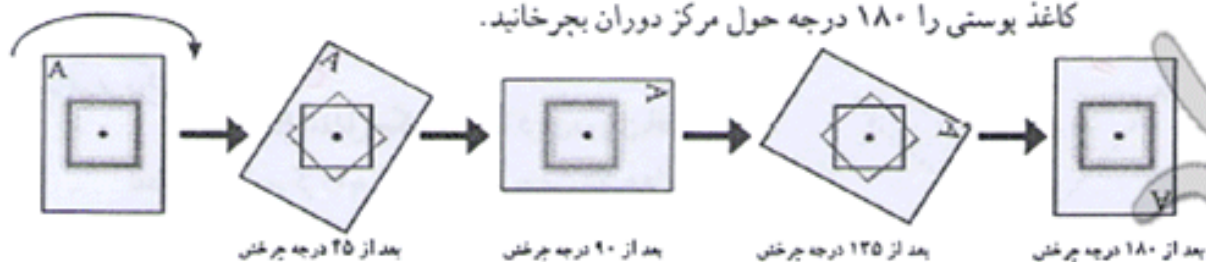


۱- یک ورق کاغذ پوستی روی مربع روبه‌رو قرار دهید

و تصویر مربع را روی آن رسم کنید.

نوک مدادتان را روی مرکز دوران بگذارید و مانند شکل‌های زیر،

کاغذ پوستی را 180° درجه حول مرکز دوران بچرخانید.



آیا تصویر روی شکل منطبق می‌شود؟ پله، در دوران‌های 90° درجه

۳۱

و 180° شکل دوران یافته روی شکل اول منطبق می‌شود

نویسید سؤال ۲: یک پنج ضلعی منتظم با دوران هائی که مضرب ۲۱ باشد روی شکل اول منطبق

می شود و می دانیم $2 \times 72 = 144$ و $3 \times 72 = 216$ یا $180 \div 72 = 2, 5$
 لذا با دوران 180° شکل روی شکل اول منطبق نمی شود پس مرکز تقارن ندارد

نکته: اگر تعداد رئوس فرد باشد آنگاه شکل مرکز تقارن ندارد زیرا هر رأس یک رأس دیگر خواهد بود

پس هر جفت رأس قرین می یابد پس تعداد رئوس باید زوج باشد
 اگر نتیجه دوران 180° در جهای یک شکل حول یک نقطه روی آن منطبق شود، می گوئیم شکل مرکز تقارن دارد و نقطه مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.



۲- شکل روبه رو مثلثی متساوی الاضلاع است. یک ورق کاغذ پوستی روی آن قرار دهید و مراحل فعالیت (۱) را تکرار کنید. نشان دهید که نقطه مشخص شده مرکز تقارن شکل نیست. دوران یافته ی شکل روی آن منطبق نمی شود (دوران 180° درجه)

۳- در کدام یک از چندضلعی های منظم زیر، نقطه مشخص شده مرکز تقارن است؟

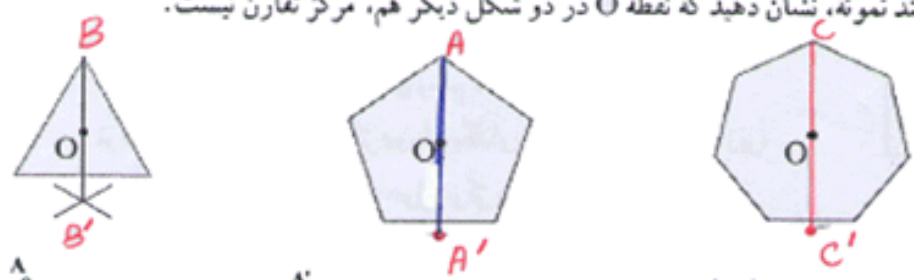
$180 \div 72 = 2, 5$

$180 \div 60 = 3$

$\frac{180}{45} = 4$ بالا

به نظر شما نه ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد؟ خیر
 ده ضلعی منتظم چگونه؟ از این فعالیت چه نتیجه ای می گیرید؟ بله، اگر تعداد اضلاع زوج باشد مرکز تقارن دارد (در چند ضلعی های منتظم)

۴- یکی از راه های تشخیص اینکه نقطه O در مثلث متساوی الاضلاع مرکز تقارن نیست، این است که می توان روی شکل نقطه ای پیدا کرد که قرینه آن نسبت به نقطه O روی خود شکل قرار نگرفته باشد. مانند نمونه، نشان دهید که نقطه O در دو شکل دیگر هم، مرکز تقارن نیست.



نکته: هر n ضلعی منتظم n فرد باشد، مرکز تقارن ندارد و n زوج باشد مرکز تقارن دارد

۵- شکل مقابل چگونگی پیدا کردن دوران یافته نقطه A حول مرکز O به اندازه 90° در جهت عقربه های ساعت را نشان می دهد.
 کدام یک از شکل های فعالیت (۳) با دوران 90° حول نقطه مشخص شده، در جهت عقربه های ساعت روی خودش می افتد؟ هشت ضلعی منتظم

$90 \div 45 = 2$

هشت ضلعی منتظم با دوران هائی که مضرب ۲۵ باشد روی خودش می افتد
 تشخیص ضلعی با دوران هائی مضرب ۶۰ - مثلث متساوی الاضلاع با دوران هائی مضرب ۱۲۰
 نه ضلعی منتظم با دوران هائی مضرب ۴۰ درجه - ده ضلعی منتظم با دوران هائی مضرب ۳۶ درجه

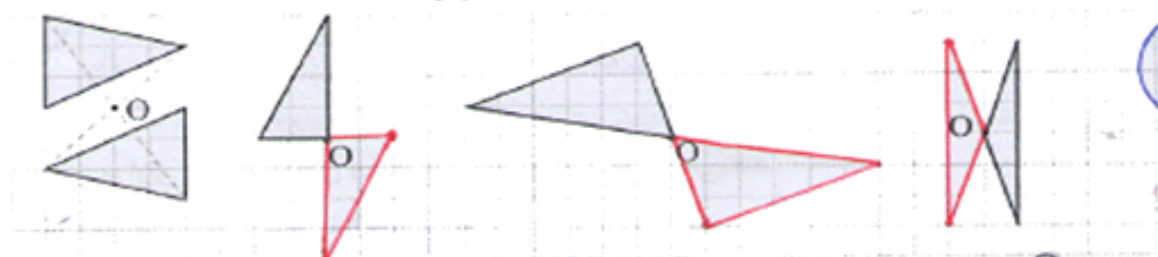
① هر n ضلعی منتظم n خط تقارن دارد

اگر n فرد باشد خط‌های تقارن از راس به وسط ضلع مقابل عمودی شوند
اگر n زوج باشد قطر ها و خط‌های که وسط اضلاع مقابل را بهم وصل می‌کنند خط‌های تقارن می‌باشند

مؤلف: math-home.ir

کار در کلاس

مانند نمونه هر شکل را طوری کامل کنید که نقطه O مرکز تقارن باشد.



تبدیل است

تمرین

۱- الف) تعداد خط‌های تقارن هریک از چند ضلعی‌های منتظم زیر را پیدا کنید.



۳ خط تقارن

۴ خط تقارن

۵ خط تقارن

۶ خط تقارن

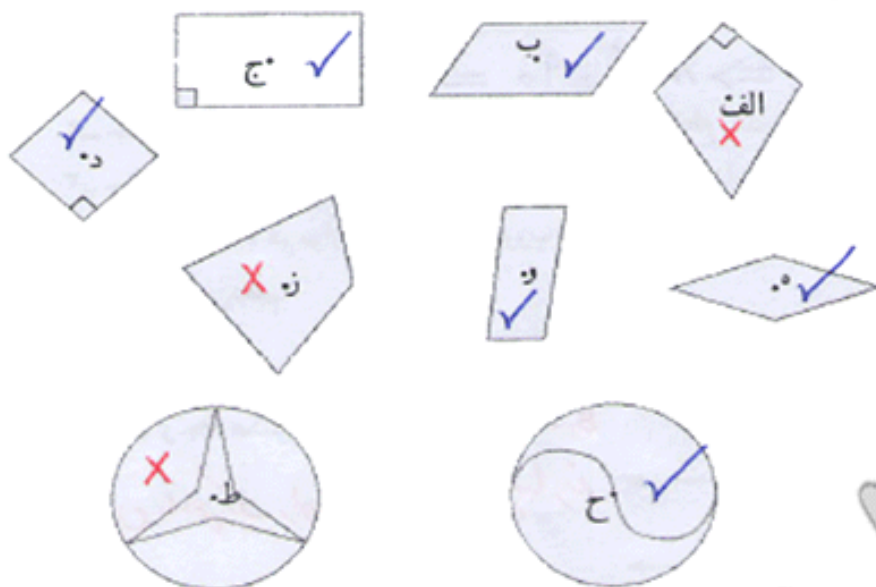
۷ خط تقارن

۸ خط تقارن

بالا ↑

ب) به نظر شما نه ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ده ضلعی منتظم چگونه؟
۹ محور تقارن - ۱۰ محور تقارن

۲- در هر شکل، بررسی کنید که نقطه مشخص شده مرکز تقارن شکل هست یا نه.



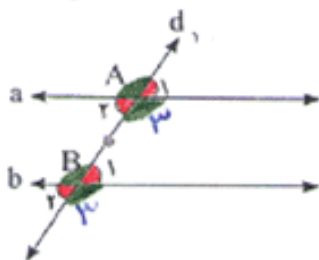
جواب سوال ۲ چون با پی از دو خط موازی زاویه ی ۹۰ می سازد با دیگری نیز زاویه ی

۹۰ در هر دو سار پس خط d_1 بر خط b عمود است

تعریف قدیم: دو خط که همدیگر را قطع نکنند دو خط موازی نام دارند (در صفحه)

توازی و تعامد
فعالیت
مؤلف: math-home.ir
خط های a و b با هم موازی اند، اگر خطی مثل d_1 آنها را با زاویه های مساوی قطع کرده

تعریف جدیدی از
دو خط موازی



$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow a \parallel b$$

باشند.

به خط d_1 خط مورب می گویند.

موازی بودن خط های a و b را به صورت $a \parallel b$ نمایش می دهند.

هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها زاویه های مساوی می سازد.

$$(a \parallel b, d_1 \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

تعریف

۱- اگر $\hat{A}_1 = 60^\circ$ باشد، زاویه های خواسته شده را پیدا کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

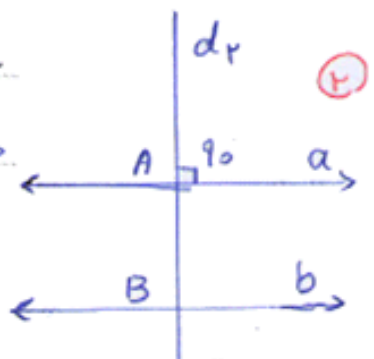
چون زاویه $\hat{A}_1$ است $\hat{A}_r = 180 - 60 = 120$

چون a, b موازی اند و d_1 مورب $\hat{B}_1 = 60$

چون با زاویه $\hat{B}_1$ متقابل به راس است $\hat{B}_r = 60$

چون مکمل $\hat{B}_r$ است $\hat{B}_r = 120$ $180 - 60 = 120$

جواب ۲: $d_1 \perp b \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 90 \Rightarrow (a \parallel b, d_1 \text{ مورب})$

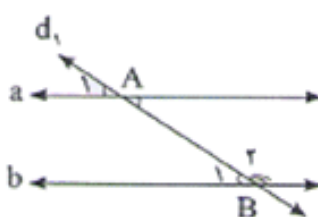


۲- خط d_1 را بر a عمود کنید و ادامه دهید تا خط b را قطع کند. چرا d_1 بر b هم عمود است؟

۳- خط d_1 با خط b زاویه 70° ساخته است. خط d_1 با خط a چه زاویه ای می سازد؟ 70° درجه

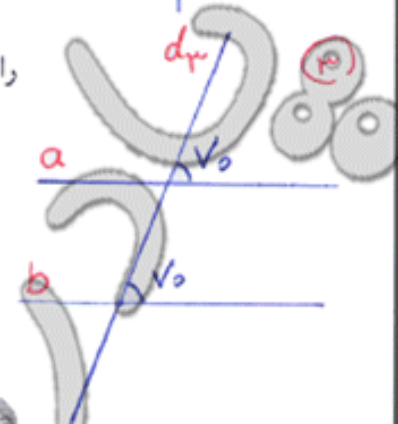
۴- دو خط a و b با هم موازی اند و خط d مورب است. پس زاویه های $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ با هم مساوی اند. این مطلب را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$(a \parallel b, d \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$



چرا $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_r$ مکمل اند؟ $\hat{B}_1 + \hat{B}_r = 180^\circ$

چون با هم یک زاویه ی نیم صفحه می سازند



$$\left. \begin{aligned} (a \parallel d, d_1 \text{ مورب } d_2) &\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{B}_1 + \hat{B}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$$

غادر یا غن

چرا A_1 و B_2 مکمل اند؟ چون دوزاوی می $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_2$ مساوی اند، $\hat{B}_1$ مکمل $\hat{B}_2$ است

استدلال شمری

math-home.ir

مؤلف:

اگر خط a را روی صفحه انتقال دهیم تا روی خط b قرار گیرد و نقطه A روی B بیفتد، زاویه A_1 روی

کدام زاویه قرار می گیرد؟ روی زاویه B_1 قرار می گیرد پس $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$

چگونه از این طریق می توان نتیجه کرد که زاویه A_1 و زاویه B_2 مکمل یکدیگرند؟ توضیح دهید. چون $\hat{B}_1$ مکمل $\hat{B}_2$ است و $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ پس $\hat{A}_1$ مکمل $\hat{B}_2$ می باشد

کار در کلاس * روی $\hat{A}_1$ قرار گیر و آنگاه با $\hat{B}_2$ زاویه نیم منته می سازد پس مکمل

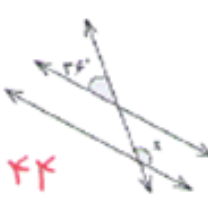


بیدارند

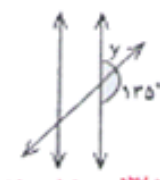
۱- در هر شکل یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کرده است. اندازه زاویه های

مجهول را به دست آورید.

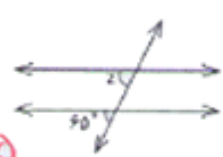
$$Z = 65$$



$$x = 180 - 34 = 146$$

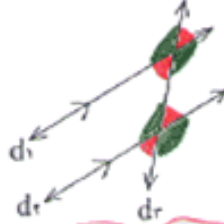


$$y = 180 - 135 = 45$$



$$t = 180 - 60 = 120$$

۲- موازی بودن دو خط را مانند شکل، با علامت گذاری آنها مشخص می کنیم. عبارت «خط



$d_1 \parallel d_2$ را به صورت $d_1 \parallel d_2$ می نویسیم.

الف) عبارت های $a \parallel b$ و $a \parallel c$ را بخوانید.

ب) زاویه های مساوی را در شکل ها با

علامت گذاری مشخص کنید.

$a \parallel b \rightarrow$ (خط a و b موازی هستند)

$a \parallel c \rightarrow$ (خط a و c متقاطع هستند)

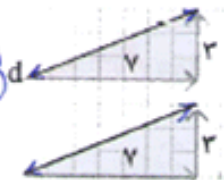
فعالیت



۱- می خواهیم در صفحه شطرنجی خطی موازی خط d رسم کنیم. راه حل سه

دانش آموز را مشاهده کنید و توضیح دهید هر کدام از آنها چگونه خط موازی را رسم کرده است.

معمول شیب

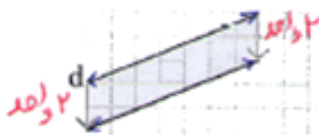


دو نقطه از خط را در نظر گرفته

و حالت افقی و قائم بین

این دو نقطه را از نقطه ای دیگر

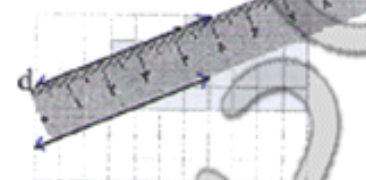
شبیه سازی کرده



دو نقطه از آن را بید

اندازه انتقال داده است

مفهوم انتقال



از لبه های موازی خط کش

استفاده کرده است

۲- عمود بودن دو خط را با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم و عبارت «خط l_1 بر خط l_2 عمود است» را به صورت $l_1 \perp l_2$ می‌نویسیم.

مؤلف: math-home.ir



مانند نمونه، برای هر کدام شکل بکشید و جاهای خالی را پر کنید.

استدلال رسمی

الف

$$\left. \begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow b \parallel c$$

دو خط عمود بر یک خط **باهم موازی اند**

ج

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel c \\ d \parallel f \end{array} \right\} \Rightarrow c \parallel f$$

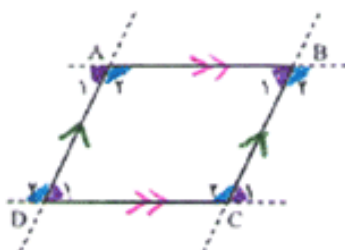
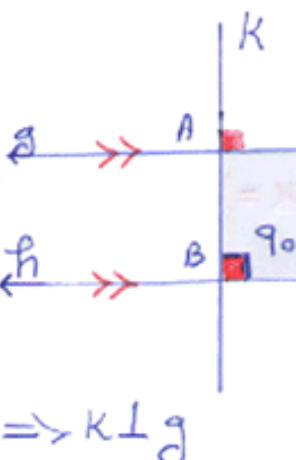
در خط موازی با یک خط **باهم موازی اند**

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel e \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \\ d \parallel f \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow e \parallel f$$

ب

$$\left. \begin{array}{l} g \parallel h \\ k \perp h \end{array} \right\} \Rightarrow k \perp g$$

اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود **بر دیگری نیز عمود است**

$$\left. \begin{array}{l} g \parallel h \\ k \perp h \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow k \perp g$$


۳- در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو باهم موازی‌اند. چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است. الف) ضلع‌های موازی را با علامت گذاری مشخص کنید. ب) در رابطه‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید.

(مورب AD و AB || DC) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1, \hat{A}_2 = \hat{D}_2$

(مورب DC و AD || BC) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1, \hat{D}_2 = \hat{C}_2$

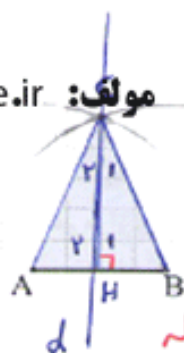
(مورب RC و AB || DC) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1, \hat{B}_2 = \hat{C}_2$

(مورب AB و AD || BC) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1, \hat{A}_2 = \hat{B}_2$

مردانیم مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰ درجه است
 خط d عمود منصف AB است $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ①
 خط d تقارن است $\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$ ②
 خط d تقارن است $\Rightarrow \overline{AH} = \overline{BH}$ ③

مولف: math-home.ir

کار در کلاس



۱- الف) یک مثلث متساوی الساقین بکشید؛ طوری که پاره خط AB قاعده آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) خط تقارن مثلث را رسم کنید.

ج) آیا دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند؟ **بله**

د) آیا خط تقارن، عمود منصف قاعده و نیمساز زاویه مقابل آن است؟ **بله**

۲- متوازی الاضلاعی رسم کنید که نقاط A, B, C و A', B', C' سه تا از رأس های آن باشند.

پاسخ خود را با پاسخ های دوستانتان مقایسه کنید.

برای این سؤال چند پاسخ مختلف می توانید پیدا کنید؟

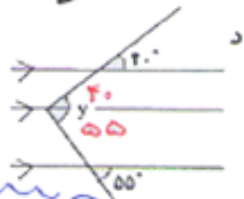
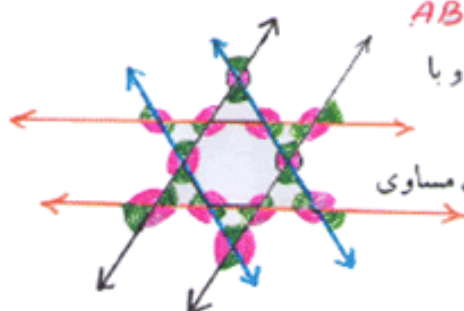
سه تا جواب دارد
 $ABA'C, ABCB', ACBC'$



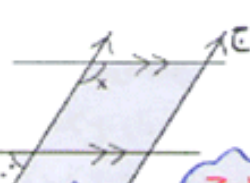
۱- در شش ضلعی منظم، ضلع های روبه رو دو به دو با هم موازی اند.

مانند نمونه، ضلع های موازی دیگر را امتداد دهید و زاویه های مساوی را مشخص کنید.

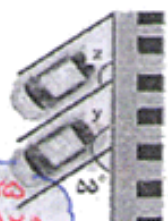
۲- در هر قسمت، اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



$$y = 95$$



$$x = 120$$

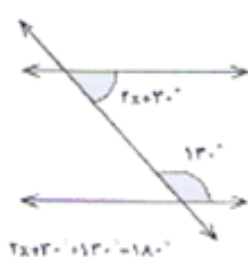


۳- مانند نمونه، با تشکیل معادله، مقدار x را پیدا کنید.



$$x = 180 - 32$$

$$x = 148$$

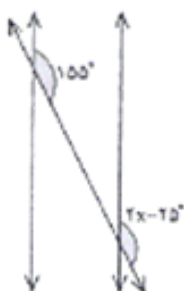


۳۷

$$2x + 30 + 130 = 180$$

$$\Rightarrow 2x + 140 = 180$$

$$\Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

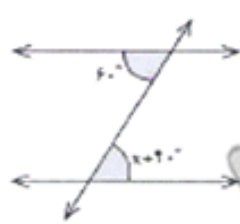


$$2x - 25 = 155$$

$$\Rightarrow 2x = 155 + 25$$

$$\Rightarrow 2x = 180$$

$$\Rightarrow x = 90$$



$$x + 40 = 60$$

$$\Rightarrow x = 60 - 40$$

$$\Rightarrow x = 20$$

هندسه و جید

ترکیب فکر هندسی و فکر جید

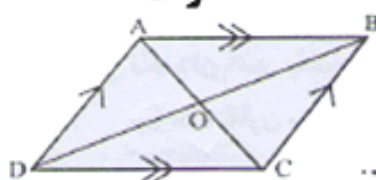
تعریف متوازی الاضلاع

فعالیت

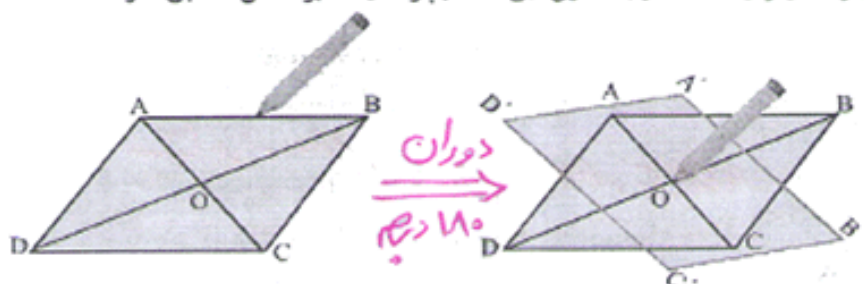


چهارضلعی ای که ضلع های روبه روی آن دو به دو با هم موازی اند، متوازی الاضلاع نام دارد.

دستواری



- متوازی الاضلاعی را رسم و مانند شکل نام گذاری کنید.
یک ورق کاغذ پوستی روی آن بگذارید و تصویر متوازی الاضلاع را رسم کنید.
نوک مدادتان را روی نقطه O (محل برخورد قطر ها و مرکز تقارن شکل) قرار دهید و مانند شکل های زیر تصویر را ۱۸۰ درجه حول این نقطه بچرخانید تا بر شکل منطبق شود.



- با توجه به انطباق شکل و تصویر، تساوی ها را کامل کنید.

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \hat{B} = \hat{D} \quad \overline{AB} = \overline{DC} \quad \overline{BC} = \overline{AD}$$

هر یک از عبارت های زیر، یکی از خاصیت های متوازی الاضلاع را بیان می کند. با توجه به تساوی های بالا، این دو عبارت را کامل کنید.

در هر متوازی الاضلاع، زاویه های روبه رو **با هم مساوی اند**

در هر متوازی الاضلاع، ضلع های روبه رو **با هم مساوی اند**

- ۳- پاره خط OA بر کدام پاره خط منطبق شده است؟ **پاره خط OC** پس $\overline{OA} = \overline{OC}$ ①
- پاره خط OB بطور؟ **پاره خط OD** پس $\overline{OB} = \overline{OD}$ ②

با توجه به پاسخ این دو پرسش، یک خاصیت دیگر متوازی الاضلاع را پیدا کنید و بنویسید.

در هر متوازی الاضلاع، **قطر ها یکدیگر را نصف می کنند** ① ②

۷) کلاسی **جواب:** چون در متوازی الاضلاع زوایای مقابل مساوی اند و زوایای مجاور مکمل پس تمام زوایای قائمه است
 نتیجه سوال ۲ کار در کلاس: مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است

مؤلف: math-home.ir

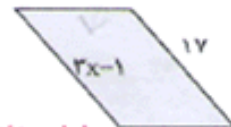
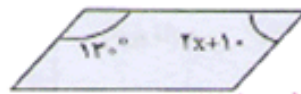
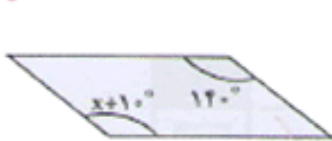
کار در کلاس



۱- شکل های زیر متوازی الاضلاع اند. با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید.

$$x + 10 = 140$$

$$x = 130$$



$$3x - 1 = 17$$

$$\Rightarrow 3x = 18$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$2x + 10 + 130 = 180$$

$$\Rightarrow x = 20$$

$$2x - 2 = 7 \Rightarrow x = 5$$



۲- در صفحه شطرنجی متوازی الاضلاعی رسم کنید که یکی از زوایای قائمه (۹۰ درجه) باشد. چرا زوایای دیگر آن هم حتماً قائمه اند؟ توضیح دهید.

بالا ↑

$$\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = 90$$

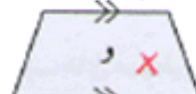
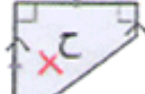
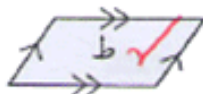
$$\hat{A} = 90$$

$$(\hat{A} + \hat{D} = 180, \hat{A} = 90) \Rightarrow \hat{D} = 90, \hat{B} = 90$$

در همین ترتیب فعالیت



۱- با توجه به تعریف متوازی الاضلاع، کدام یک از شکل های زیر متوازی الاضلاع



است؟

جواب: شکل های الف، ج، ه و ط متوازی الاضلاع می باشند

۲- در اینجا چند چهارضلعی دیگر هم تعریف شده اند. هر تعریف را بخوانید و از میان چهارضلعی های فعالیت قبل، مثال هایی برای هر یک پیدا کنید.

مستطیل متوازی الاضلاعی است که زوایای قائمه دارد. **شکل «ج» و «ه»**

مربع متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زوایای قائمه دارد. **شکل «ه»**

لوزی متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند. **شکل «الف» و «ه»**

۲- می دانیم که «در هر متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می کنند»

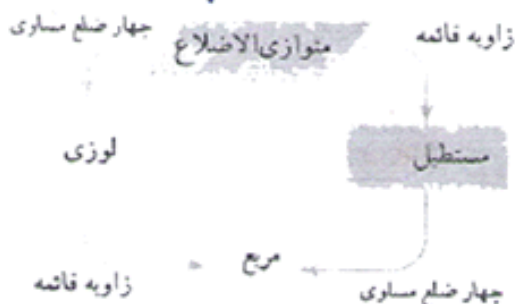
آیا می توانیم نتیجه بگیریم که «در هر لوزی هم قطرها یکدیگر را نصف می کنند؟» چرا؟

۳۹

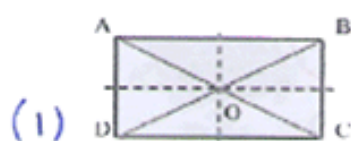
بله؛ چون هر لوزی، متوازی الاضلاع است



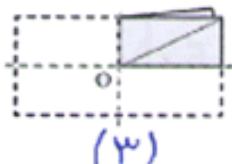
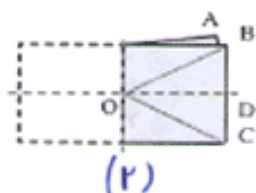
۱- با توجه به نمودار روبه‌رو، در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.



موازی الاضلاع	لوزی	مستطیل	مربع	
✓	✓	✓	✓	
✓	-	✓	-	
✓	✓	-	-	
✓	-	-	-	



۲- روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور آن را ببرید. مستطیل را مانند شکل نام‌گذاری کنید. سپس آن را ابتدا روی یکی از خط‌های تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر ناکشید.



استدلال شهودی

اثبات غیر رسمی

این فرمال

مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به دست آمده چگونه هر یک از خاصیت‌های مستطیل را نشان می‌دهد.

• در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون OA روی OC و OB روی OD قرار گرفته است. چون پاره‌های OA، OC، OB و OD روی هم قرار گرفته‌اند (الف) در مستطیل همه زایوه‌ها با هم برابرند؛ چون روی هم قرار گرفته‌اند.

(ب) در مستطیل ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، چون طبق شکل (۲)، BC روی AD منطبق شده است.

(ج) در مستطیل قطرها با هم برابرند؛ چون نصف هر قطر روی نصف قطر دیگر افتاده است.

$$OA = OB = OC = OD \Rightarrow AC = BD$$

اگر شکل را روی خط تقارن دیگر تا بنیم مشاهده می‌کنیم $AB = DC$ است

سوال ۲
 ۱) هر زاویه روی هم قرار گرفته اند و با هم مساوی اند پس $90^\circ = 4 \times 22.5^\circ$ ، لذا قطرهای برهم عمودند
 ۲) هر زاویه راس به دو قسمت مساوی تقسیم شده پس قطرهای نیم ساز زاویه ها نیز می باشند
 ۳) زاویه $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3, \hat{O}_4$ دست ورزی $\Rightarrow$ تقد خلاق



۳- در یک طرح کاشی کاری، مربع ABCD دیده می شود. چهار ضلعی MNPQ هم با وصل شدن وسط ضلع های این مربع تشکیل شده است. دو دانش آموز توضیح داده اند که MNPQ چه نوع چهار ضلعی ای است. نظر این دو دانش آموز در اینجا آمده است.

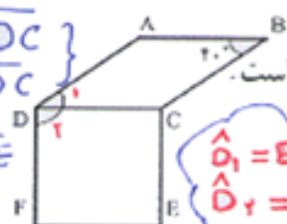
هادی
 ABCD مربع است. این مربع را روی دو قطر آن، که محور تقارن نیز هستند، تا می کنیم. همه زاویه های چهار ضلعی MNPQ روی هم می افتند. پس با هم برابرند. چون مجموع آنها 360° است، پس هر کدام 90° می شوند. در نتیجه این چهار ضلعی مستطیل است.

مبین
 ABCD مربع است. این مربع را روی دو خط تقارنی، که موازی ضلع های آن هستند، تا می کنیم. همه ضلع های چهار ضلعی MNPQ روی هم می افتند. پس، این چهار ضلعی لوزی است.

دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می توانم نتیجه بگیرم که MNPQ مربع است.

چهار ضلعی که ضلع هایش با هم برابر و زاویه هایش برابر 90° درجه باشد

$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{DC}$
 $\Rightarrow \overline{CE} = \overline{DC}$
 $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{CE}$



۱- چهار ضلعی ABCD لوزی و چهار ضلعی DCEF مربع است.
 الف) چرا $\overline{AD} = \overline{CE}$ ؟ ب) چرا $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ ؟
 ج) زاویه ADF چند درجه است؟
 ۲- روی کاغذ، لوزی دلخواهی رسم کنید و دور آن را ببرید.

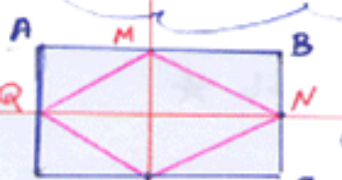


$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 $\Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{DC}$
 $\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{EF}$

این لوزی کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به دست آمده چه نتایجی در مورد قطرهای لوزی به دست می آید.
 ۳- وسط ضلع های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می کنیم. چهار ضلعی به دست آمده چه نوع چهار ضلعی ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید.
 ۴- درستی یا نادرستی هریک از جمله های زیر را بررسی کنید.

- الف) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی اند. ✓
- ب) قطرهای هر لوزی با هم مساوی اند. ✗
- ج) قطرهای هر مستطیل بر هم عمودند. ✗
- د) قطرهای هر لوزی بر هم عمودند. ✓

چون اکثر مستطیل را روی خط های تقارنش تا کنیم ضلع های این چهار ضلعی برهم منطبق می شوند



خط تقارن MP $\Rightarrow \overline{MN} = \overline{MQ}, \overline{PQ} = \overline{PN}$
 خط تقارن QN $\Rightarrow \overline{PQ} = \overline{MQ}, \overline{PN} = \overline{MN}$

و با ضلع برابرند پس MNPQ مستطیل لوزی است

نکته: زمانی می توانیم باید نوع کاشی، کاشی کاری کنیم نه مجموع زاویه هایی که کنار هم

قرار می گیرند برابر 360° باشد

مثال: با مثلث های هم نهشت، مربع های مساوی و سس صلعی ها هم نهشت منتظم

می توانیم کاشی کاری کنیم

در با این صلعی منتظم بر آ صلعی منتظم همان طور که در فعالیت مشاهده می کنید این کار غیر ممکن است

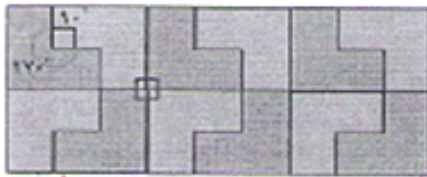
زاویه های داخلی

فعالیت

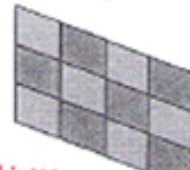


مؤلف: math-home.ir

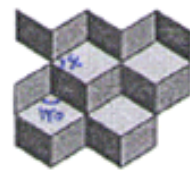
۱- در کاشی کاری، کاشی ها را طوری کنار هم قرار می دهند که روی هم نیفتند و جای خالی هم بین آنها نباشد. در اینجا چند نمونه کاشی کاری را مشاهده می کنید که هر کدام تنها با یک نوع کاشی انجام شده است. ۱- روی هم قرار نگیرند ۲- فضای خالی بین آن ها نباشد



کاشی صورت ال (۱)



کاشی متوازی الاضلاع

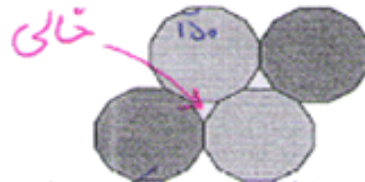
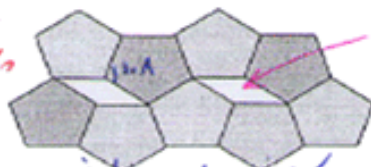


کاشی لوزی

حالا به شکل های زیر توجه کنید. در هر مورد توضیح دهید، چرا کاشی کاری با یک نوع کاشی

$$3 \times 108 = 324 < 360$$

$$4 \times 108 = 432 > 360$$



انجام نمی شود؟

$$150 \times 2 = 300 < 360$$

$$150 \times 3 = 450 > 360$$

چون در هیچ کدام 360° مضرب یک زاویه این کاشی ها نمی باشد

۲- سطح زیر با مثلث هایی هم نهشت با مثلث ABC کاشی کاری شده است.

مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است.
مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.



زاویه های متناظر با هریک از زاویه های مثلث ABC را در این دو مثلث مشخص کنید.

در کاشی کاری بالا، قسمتی را که نشان می دهد $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ پیدا کنید.

کار در کلاس: همان طور که مشاهده می کنید مجموع سه زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر 180° است

در کدام شکل کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است؟



الف



ب



ج



د

در شکل های «الف»، «ب» و «د» همان طور که مشاهده می کنید

کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام شده است، چون مجموع زاویه های گوشه ها 360° است

★ با هر سه صلعی هم نهشت یا چوبه صلعی هم نهشت می توان کاشی کاری را انجام داد

سعی کنیم دانش آموزان را هدایت کنیم تا رابطه‌ها را کشف کنند

مؤلف: math-home.ir



زاویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، زاویه‌های داخلی آن چندضلعی نامیده می‌شوند. مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° درجه است.

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶
شکل				
تعداد مثلث‌ها	۱	۲	۳	۴
مجموع زاویه‌های داخلی	$1 \times 180^\circ = 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$3 \times 180^\circ = 540^\circ$	$4 \times 180^\circ = 720^\circ$

جدول بالا نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی با مجموع زاویه‌های داخلی دو تا مثلث برابر است؛ پس مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° می‌شود.

الف) با کامل کردن جدول، مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های دیگر را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ $5 \times 180 = 900$

یک هشت ضلعی چطور؟ چرا؟ $6 \times 180 = 1080$ چون با مجموع زاویه‌های داخلی ۶ تا مثلث برابر است

ج) عبارت جبری زیر را طوری کامل کنید که نشان‌دهنده مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی باشد.

$$= (n - 2) \times 180^\circ$$

اکنون با کامل کردن جدول زیر اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنید.

تعداد ضلع‌ها	مجموع زاویه‌های داخلی	اندازه هر زاویه
۳	180°	$\frac{180}{3} = 60^\circ$
۴	360°	$360 \div 4 = 90$
۵	540	$540 \div 5 = 108$
۶	720	$\frac{720}{6} = 120^\circ$

یک عبارت جبری بنویسید که نشان‌دهنده اندازه هر یک از زاویه‌های یک n ضلعی منتظم باشد.

۴۳

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی یک } n \text{ ضلع منتظم} = \frac{(n-2) \times 180}{n}$$

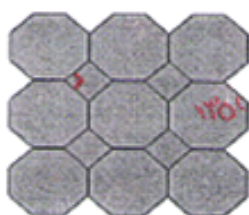


۱- مجموع زاویه‌های هریک از چندضلعی‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) هفت ضلعی منتظم $7 \times 180 = 1260$ (ب) دوازده ضلعی منتظم $12 \times 180 = 2160$

۲- به کمک جواب قسمت (ب) سؤال قبل، اندازه هر یک از زاویه‌های دوازده ضلعی منتظم

را حساب کنید. $2160 \div 12 = 180$

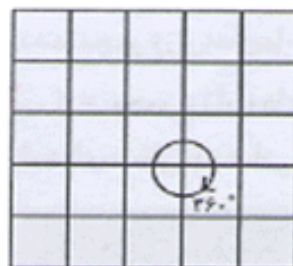
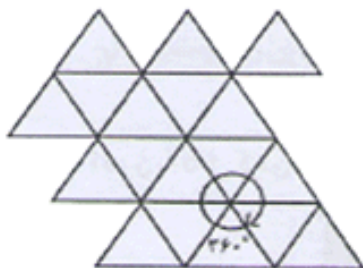


۳- سطح روبه‌رو با دو نوع کاشی منتظم کاشی کاری شده است.

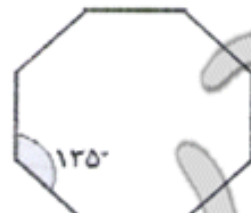
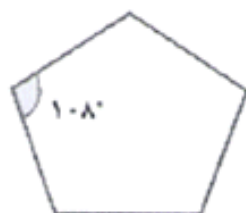
اندازه زاویه‌های هر دو نوع کاشی را محاسبه کنید.

$$\frac{(8-2) \times 180}{8} = 135 \quad \text{و } 135 \text{ درج}$$

۴- کاشی‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم داریم و می‌خواهیم سطحی را فقط با یک نوع از آنها کاشی کاری کنیم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که با سه ضلعی و چهارضلعی منتظم (یعنی مثلث متساوی الاضلاع و مربع) می‌توان کاشی کاری کرد.



یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی کاری کرد.



$$360 \div 120 = 3, \quad 360 \div 90 = 4, \quad \text{و} \quad 360 \div 60 = 6$$

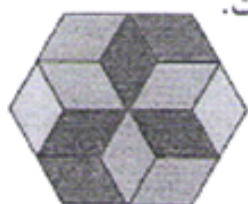
نکته: اگر زاویه n ضلعی منتظم یکی از مضامین باشد می‌توانیم از آن در کاشی کاری استفاده کنیم از سه و ۴ و ۶ ضلعی منتظم می‌توان در کاشی کاری توسط یک نوع کاشی، استفاده کرد

math-home.ir :مؤلف



$$\frac{18 \times 9}{(20-2) \times 18} = 142$$

۱- اندازه هر یک از زاویه های یک بیست ضلعی منتظم را پیدا کنید.



۲- در کاشی کاری رویه رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است.

الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی ای است؟ **لوزی**

ب) اندازه هر یک از زاویه های آن چقدر است؟ **۱۲۰ و ۶۰**

۱۳۵°

۳- شکل رویه رو قسمتی از یک بشقاب قدیمی است.

حدس می زنید این بشقاب چندضلعی بوده است؟ چرا؟

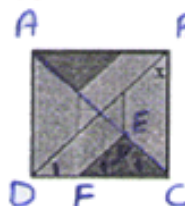
$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = 135 \Rightarrow n=8$$

۴- به کاشی کاری زیر توجه کنید. این کاشی با سه نوع کاشی مختلف انجام شده است.

شکل سمت راست قسمتی از این طرح را به صورت بزرگ تر نمایش داده است. اندازه زاویه های

مشخص شده را به دست آورید. $x = 45$ $\Rightarrow$ قطر BD $\Rightarrow$ مربع $ABCD$

در مربع قطر ها نیم ساز زاویه ها نیز می باشند



$$x = 45$$

$$y = 90$$

۵- مجموع زاویه های داخلی هر شکل را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.
 $\Rightarrow EC = EF \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{F}_1 = 45 \Rightarrow y = 90$
آزمون تساوی السایح یا شش



(ب)



(الف)

$$2 \times 180 = 360$$

$$\left. \begin{array}{l} BD \text{ قطر است} \Rightarrow \hat{D}_1 = 45 \\ (BD \parallel EF, DC \text{ بر} BD) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{F}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{F}_1 = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} AC \text{ قطر است} \Rightarrow \hat{C}_1 = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{y} = 90$$

روشن دوم

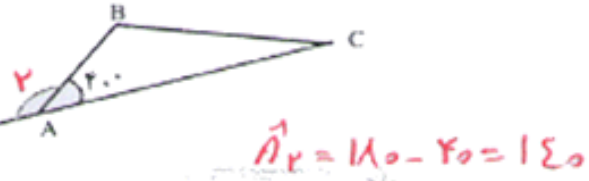
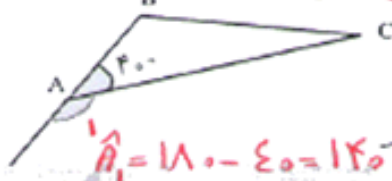
زاویه های خارجی

فعالیت



math-home.ir

در شکل سمت چپ، زاویه خارجی رأس A از مثلث ABC از امتداد ضلع AB تشکیل شده است. در شکل سمت راست، زاویه خارجی رأس A از امتداد یافتن ضلع AC تشکیل شده است. چرا این دو زاویه مساوی اند؟ **هر دو مثلث زاویه های A می باشند**

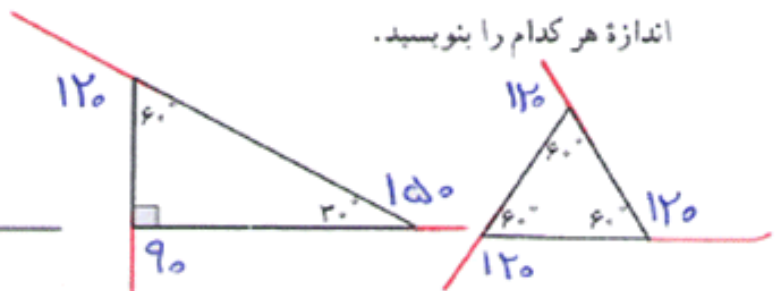
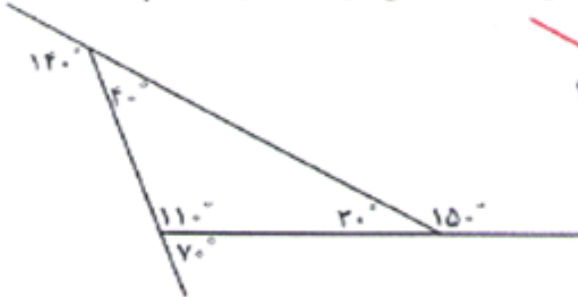


زاویه ای که در هر رأس یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می شود، زاویه خارجی آن رأس نامیده می شود.

کار در کلاس



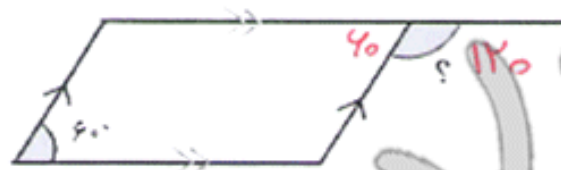
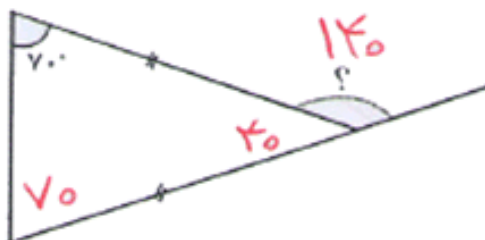
۱- الف) مانند نمونه، در هر یک از مثلث های زیر زاویه خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه هر کدام را بنویسید.



ب) مجموع زاویه های خارجی هر یک از مثلث ها را پیدا کنید. چه رابطه ای میان آنها دیده می شود؟ **برای ۳۴۰**
۲- چند ضلعی های زیر منتظم اند. اندازه زاویه های خواسته شده را پیدا کنید.



۳- با توجه به شکل، اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



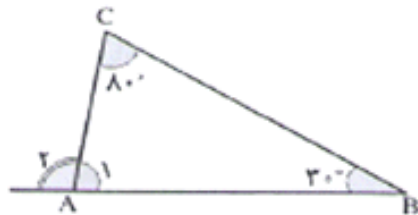


math-home.ir موالف:

هدی برای یافتن زاویه خارجی یکی از رأس‌های مثلث به ترتیب زیر عمل کرد.

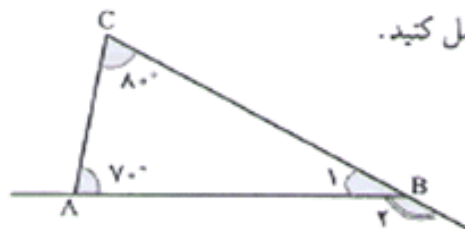
او را کامل کنید.

اثبات استقرائ



$$\hat{A}_1 = 180^\circ - (30^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$



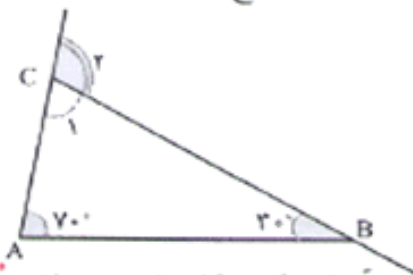
$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\hat{B}_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

او رابطه جالبی را مشاهده کرد. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای؟

هدی با خودش فکر کرد: «آیا هر زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن

مثلث است؟» با یک مثال دیگر حدس خود را بررسی کرد.



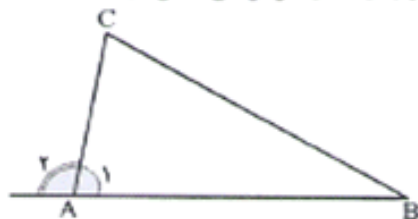
$$\hat{C}_1 = 180^\circ - (70^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{C}_2 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

اثبات منظم

این آزمایش نیز حدس او را تأیید کرد. آیا حدس زدن و آزمایش کردن کافی است؟ چرا؟
یکی از دوستان هدی راه حل او را به صورت کلی و بدون در نظر گرفتن مثال نوشت تا به این

ترتیب درستی حدس او را اثبات کند.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

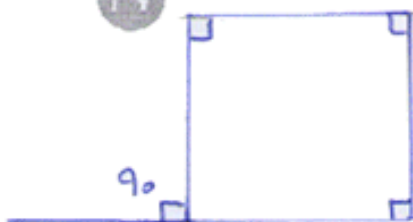
بنابراین در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن است.

کار در کلاس

— مثالی بیاورید که نشان دهد جمله زیر نادرست است.

«هر زاویه خارجی یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر آن است.»

۴۷



$$90 + 90 + 90 = 270 \neq 90$$

۲- اندازه دو زاویه یک مثلث را می‌دانیم، پس می‌توانیم اندازه زاویه سوم آن را پیدا کنیم.

مؤلف: math-home.ir

(چگونه؟) مجموع آن دو را از ۱۸۰ کم می‌کنیم

برای اینکه بتوانیم اندازه همه زاویه‌های هر یک از شکل‌های زیر را پیدا کنیم، دست کم چندتا

از آنها باید معلوم باشند؟ الف) لوزی ب) چهارضلعی با ضلع‌های نامساوی سه زاویه

یک زاویه

فقالیت



سطر اول جدول زیر نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر ۳۶۰ است.

تعداد ضلع‌ها	شکل	مجموع زاویه‌های داخلی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های خارجی
۳		$1 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۴		$2 \times 180^\circ$	$4 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۵		$3 \times 180^\circ$	$5 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۶		$4 \times 180^\circ$	$6 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$

الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ ۳۶۰

یک هشت ضلعی چگونه؟ ۳۶۰

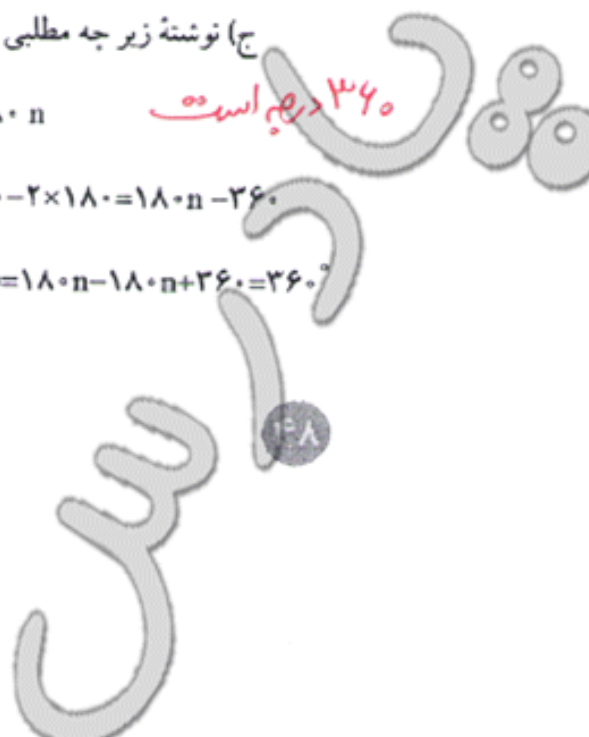
ج) نوشته زیر چه مطلبی را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید. مجموع زاویه‌های خارجی هر چند ضلعی

$$n \times 180^\circ = 180^\circ n = \text{مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی } n \text{ ضلعی}$$

۳۶۰ درجه است

$$n \times 180^\circ - 2 \times 180^\circ = 180^\circ n - 360^\circ = (n-2) \times 180^\circ = \text{مجموع زاویه‌های داخلی } n \text{ ضلعی}$$

$$180^\circ n - (180^\circ n - 360^\circ) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ = \text{مجموع زاویه‌های خارجی } n \text{ ضلعی}$$



نکته: ۱) اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی یک n ضلعی منتظم برابر است با $\frac{360}{n}$

۲) اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} \quad \text{یا} \quad 180 - \frac{360}{n} = \text{اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی}$$

(اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی)

مؤلف: math-home.ir

کار در کلاس



۱- مجموع زاویه‌های خارجی چند ضلعی‌های زیر را حساب کنید.

الف) هشت ضلعی 360° درجه (ب) ده ضلعی منتظم 360° درجه

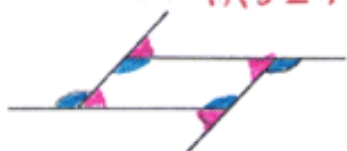
۲- به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل،

$$360 \div 10 = 36$$

الف) اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

ب) اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

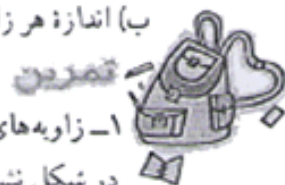
$$180 - 36 = 144$$



۱- زاویه‌های خارجی یک متوازی‌الاضلاع

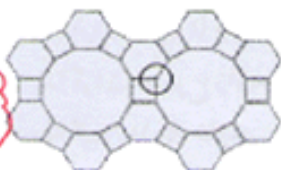
در شکل نشان داده شده‌اند.

زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

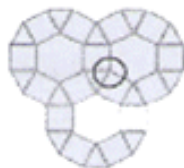


۲- هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه‌ی

زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه‌ی مشخص شده در هر شکل 360° درجه است.



$$90 + 120 + 150 = 360$$



$$90 + 90 + 90 + 120 = 360$$

۳- لاک پشتی روی لبه باغچه‌ای حرکت می‌کند. او در هر گوشه می‌چرخد و روی لبه بعدی

فرار می‌گیرد.

زاویه‌ی خارجی



الف) این لاک پشت در هر گوشه به اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی می‌چرخد یا زاویه‌ی خارجی؟

ب) او حرکتش را از نقطه A شروع کرده است.

تا وقتی دوباره به A برگردد، روی هم چند درجه می‌چرخد؟ 360° درجه

ج) این لاک پشت برای پیمودن محیط هر یک از باغچه‌های منتظم زیر با شروع از نقطه مشخص شده چند

درجه می‌چرخد؟ 360° درجه



د) در پاسخ قسمت قبل چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید. مجموع زوایای خارجی هر چند ضلعی

●●● مرور فصل ۳ ●●●

مفاهیم و مهارت‌ها

math-home.ir: مولف:

در این فصل دایره‌های زیر یک‌گانه گردانند. مشخص کنید که می‌توانید یا نه. همچنین می‌توانید به این شکل‌ها توصیف کنید و برای هر کدام مثال بزنید.

- چندضلعی محدب
- چندضلعی مقعر
- مرکز تقارن
- چندضلعی منتظم
- زاویه داخلی
- زاویه خارجی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه‌ای درسی را بنویسید.

- بررسی مرکز تقارن یک شکل
- پیدا کردن زاویه‌های مساوی در خط‌های موازی و مورب
- تعریف متوازی‌الاضلاع
- تعریف مستطیل
- تعریف لوزی
- تعریف مربع
- رابطه چهارضلعی‌ها
- خاصیت‌های چهارضلعی‌ها
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه خارجی یک رأس مثلث

کاربرد

این درس به شما در درک بهتر شکل‌های هندسی و رابطه بین آنها کمک می‌کند. ما در انواع صنایع دستی و آثار معماری کشور خود شکل‌های مختلف هندسی را می‌توانیم ببینیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- هر خانه جدول زیر را با علامت × یا ✓ کامل کنید.

ضلع‌های روبه‌رو برابر	ضلع‌های روبه‌رو موازی	زاویه‌های روبه‌رو برابر	قطرها منصف	قطرها برابر
✓	✓	✓	✓	×
✓	✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓	×
✓	✓	✓	✓	✓

۲- اندازه زاویه‌های داخلی و خارجی یک هشت ضلعی منتظم را پیدا کنید.

هر زاویه خارجی $180 - 135 = 45$ و $\frac{(8-2) \times 180}{8} = 135$ هر زاویه داخلی

فصل چہارم

$$\begin{array}{c} (1) \quad \boxed{} \\ 1+3 \\ (2) \quad \boxed{} \boxed{} \\ 1+3+3 \\ (3) \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ 1+3+3+3 \\ (4) \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ 1+3+3+3+3 \end{array} \xrightarrow{\text{شکل } n} 1+3n$$

$$\begin{array}{c} (1) \quad \boxed{} \\ 3 \\ (2) \quad \boxed{} \boxed{} \\ \varepsilon + 1 \times 3 \\ (3) \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ \varepsilon + 2 \times 3 \\ (4) \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ \varepsilon + 3 \times 3 \end{array} \xrightarrow{\text{شکل } n} \varepsilon + (n-1) \times 3$$

$$\begin{array}{c} (1) \quad \boxed{} \\ 1+1+1 \\ (2) \quad \boxed{} \boxed{} \\ 1+2+2+2 \\ (3) \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ 1+3+3+3+3 \\ (4) \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ 1+4+4+4+4+4 \end{array} \xrightarrow{\text{شکل } n} 1+n+n+n = 1+3n$$

math-home.ir

تبدیل عبارت های کلامی به عبارت های جبری

فعالیت



۱- در سال گذشته، با درس توان آشنا شدید. عبارت های کلامی را به صورت جبری و عبارت های

جبری را به صورت کلامی بنویسید.

• هر عدد به توان یک، برابر خود عدد می شود. $a^0 = 1 (a \neq 0)$

• یک به توان هر عدد، برابر یک می شود. $1^a = 1$

• صفر به توان هر عدد غیر صفر، برابر صفر می شود. $0^a = 0 (a \neq 0)$

• در ضرب دو عبارت توان دار با پایه های مساوی، یک پایه را می نویسیم و توان ها را با هم جمع می کنیم.

• مربع یا مجذور عدد a a^2

$$b^a \times c^a = (bc)^a$$

۲- الف) در عبارت جبری $2n-1$ به جای n عددهای طبیعی $(1, 2, 3, \dots)$ قرار دهید و الگوی

عددی متناظر را بنویسید.

ب) در عبارت جبری $2m+1$ به جای m عددهای حسابی $(0, 1, 2, 3, \dots)$ قرار دهید و الگوی

عددی متناظر را بنویسید.

معرفی اعداد حسابی

۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...

تفاوت در ورودی ها است $\Rightarrow$ آیا دو الگوی عددی با هم تفاوت دارند؟ خیر، هر دو اعداد فرد طبیعی را می سازند (خردم هر نویسی)

۳- شکل های زیر با چوب کبریت و با الگویی مشخص ساخته شده اند. شکل n ام با چند چوب

m یک عدد حسابی است کبریت ساخته می شود؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

در اینجا پاسخ چهار دانش آموز را می بینید. توضیح دهید هر کدام از آنها پاسخ خود را چگونه به دست آورده است. سپس مانند نمونه ها، شکل هایی رسم کنید که روش ماهرش را مشخص کند و بین شکل ها و

عبارت های جبری رابطه برقرار کنید.

۱- پاسخ ماهرش: $2n+1$

۲- پاسخ ماهرش: $4 + (n-1) \times 3$

۳- پاسخ ماهرش: $1 + n + n + n$

۴- پاسخ ماهرش: $n+1 + (n \times 2) \leftarrow 2 + (1 \times 2), 3 + (2 \times 2), 4 + (3 \times 2), 5 + (4 \times 2)$

پس پاسخ های ماهرش، ماهر و مهناب را ساده کنید. آیا با پاسخ ماهرش یکی هستند؟

آیا شما هم روشی برای شمارش چوب کبریت ها و یافتن جمله n ام دارید؟

بلایه باین

$2n$ (صورتی)

کاربرد ساده ترین عبارت های جبری

توضیح در بالا



$$4n - (n-1) = 4n - n + 1 = 3n + 1$$

منابع حذف شده

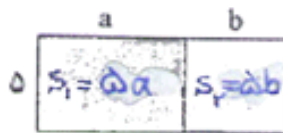
تعداد مثلث ها

دو جمله اشتباه گوئیم اگر ① قسمت حرفی مثل هم باشد
 ② توان حروف متناظر مساوی باشد
 دو جمله $5x^2y$ و $7xy^2$ متساوی نباشند
 دو جمله $\frac{3}{v}xy^2z^3$ و $\sqrt{2}y^2z^3x$ متساوی نباشند

کار در کلاس



۱- در سال گذشته، ضرب یک عدد در پراتز را با شکل زیر یاد گرفتید.



$$5(a+b) = 5a + 5b$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$5(a+b) = 5a + 5b$$

این تساوی چگونه به کمک شکل به دست آمده است؟ توضیح دهید.

عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$2(2x-1) + 2(x+3) = 4x - 2 + 2x + 6 = 6x + 4$$

$$-2(y-1) + 2(1-y) = -2y + 2 + 2 - 2y = -4y + 4$$

$$-(a-b+1) + 2(2a+b-3) = -a + b - 1 + 4a + 2b - 6 = 3a + 3b - 7$$

۲- شما همچنین جمع و تفریق جمله های متشابه (جمله هایی که همه قسمت های حرفی

آنها یکی هستند) را یاد گرفتید. جمله های متشابه را پیدا کنید.

$$2x^2y \quad yx^2 \quad 2yx \quad -5x \quad +5y \quad -2xy \quad +4x \quad y$$



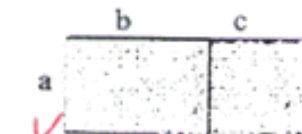
۱- حاصل ضرب دو جمله را مانند نمونه به دست آورید. از کدام قانون ساده کردن

عبارت های توان دار استفاده می کنید؟ توضیح دهید. اگر در ضرب اعداد توان دار پایه ها مساوی باشند می توانیم از

$$(-2ba)(2a^3b^2) = -4a^4b^3 \quad a^2 \times a^3 = a^5 \quad b \times b^2 = b^3$$

$$2a \times 2b = 4ab \quad -6a \times 2a^3 = -12a^4 \quad 2ba \times 2b^3 = 4b^4a$$

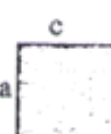
۲- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت ها در دو قسمت، یک تساوی جبری نتیجه بگیرید.



$$S = a(b+c) \Rightarrow a(b+c) = ab + ac$$



$$S_1 = ab$$



$$S_2 = ac$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$\Rightarrow a(a+b) = ab + ac$$

با توجه به نتیجه ای که گرفته اید، ضرب های زیر را انجام دهید.

$$2a(a+b) = 2a^2 + 2ab$$

$$2x(2x-1) = 4x^2 - 2x$$

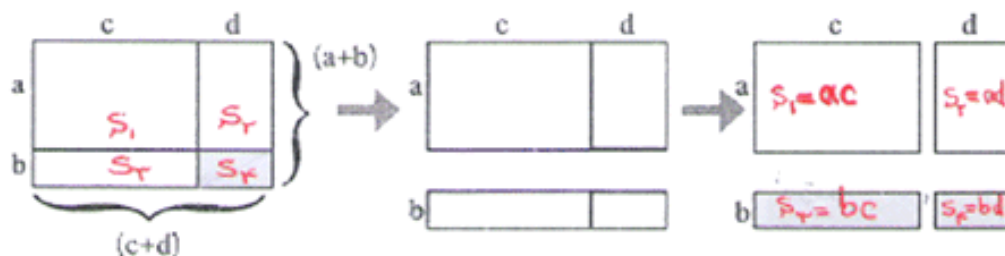
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

مساحت کل

طول $\times$ عرض

مساحت هر چیز به صورت جداگانه

۲- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت‌ها در دو قسمت، تساوی جبری را کامل کنید.



$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

برای یافتن حاصل ضرب دو عبارت جبری، باید جمله‌های دو عبارت را در هم ضرب و سپس

$$(x+y)(x-y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

$$(x-1)(x+1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1$$

$$(2x-2)(2x-2) = 4x^2 - 9x - 4x + 4 = 4x^2 - 13x + 4$$

ساده کنید.

اتحاد مزدوج

کار در کلاس

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$4ax + a^2 + ax = 5ax + a^2$$

$$2ab + b^2 - a^2 - 5ab = -3ab + b^2 - a^2$$

$$2a - 8xy + 2xy = 2a - 6xy$$

$$9x + 7x - 8x - 2 + 11x + 5 = 19x + 3$$

$$5(-2a) = -10a \quad \frac{2}{3}(4b) = \frac{8}{3}b$$

$$(-7)(-2x) = +14x \quad (-\frac{2}{5})(2y) = -\frac{4}{5}y$$

$$2a(-5x) = -10ax \quad -\frac{1}{2}a(2b) = -\frac{1}{2}ab$$

$$(-a)(-b) = +ab \quad (-a)(-a) = +a^2$$

$$2x(2a-b) = 4ax - 2bx$$

$$2y(2x-5y) = 4xy - 10y^2$$

$$(x+2)(x+1) = x^2 + 3x + 2$$

$$(a+6)(a-6) = a^2 - 36$$

۲- عدد ۴۷ را می‌توان به صورت $40 + 7$ یا $4 \times 10 + 7$ نوشت. به همین ترتیب، عددهای زیر را

به صورت گسترده بنویسید.

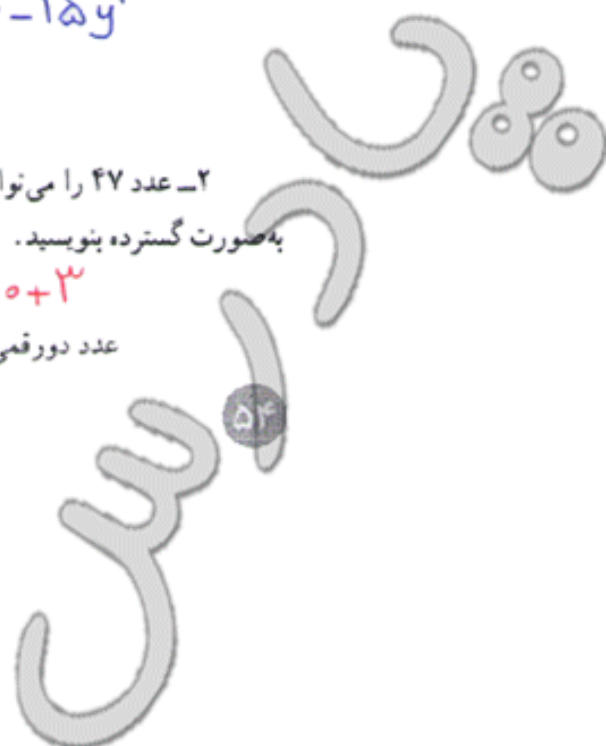
$$92 = 9 \times 10 + 2$$

$$75 = 7 \times 10 + 5 \quad 33 = 3 \times 10 + 3$$

$$\overline{ab} = 10a + b$$

عدد دورقمی ab را با نماد $\overline{ab}$ نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

بسط اعشاری عدد (عائش اعشاری)



شماره	۱	۲	۳	...	n
عدد	۱	۴	۹	...	n^2
رابطه	1^2	2^2	3^2	...	n^2

شماره	۱	۲	۳	...	n
عدد	۱	۸	۲۷	...	n^3
رابطه	1^3	2^3	3^3	...	n^3

معرفی مقلوب بر عدد



استدلال می‌دهی

۱- عدد دو رقمی $\overline{ab}$ را در نظر بگیرید. عدد $\overline{ba}$ را مقلوب $\overline{ab}$ می‌گویند؛ چون در آن جای رقم‌ها عوض شده است. مجموع یک عدد و مقلوبش را به صورت گسترده بنویسید و حاصل جمع را ساده کنید.

نتیجه: حاصل جمع هر عدد و مقلوب آن برابر ۱۱ بخش پذیر است

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a+b)$$

۲- جمله n ام هر یک از الگوهای جبری زیر را بنویسید.

دو رقمی: $1, 8, 27, 64, 125, \dots, n^3$

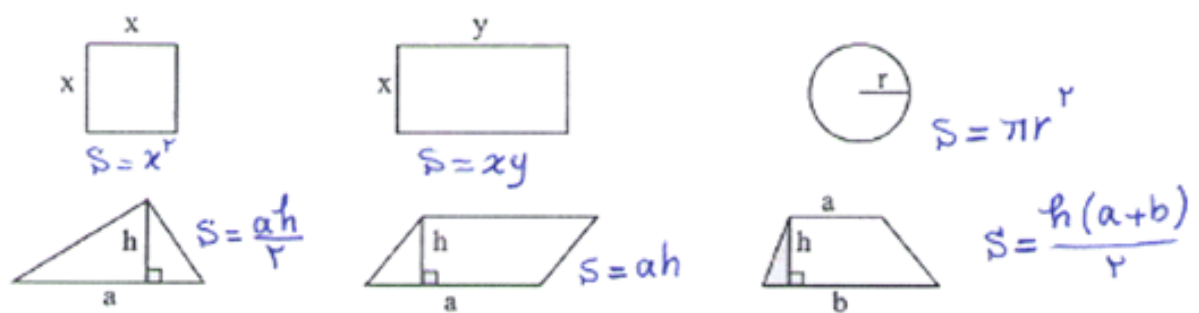
سه رقمی: $1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2$

۳- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+3)(a+3) = a^2 + 6a + 9 \quad (a-b)(a-b) = a^2 + b^2 - 2ab \quad (a+3)(a-3) = a^2 - 9$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 \quad (2x-3y)(2x-3y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

۴- مساحت هر شکل را با یک عبارت جبری بیان کنید.



۵- دانش‌آموزی عبارت‌های جبری زیر را به صورت نادرست ساده کرده است. اشتباه او را پیدا کنید.

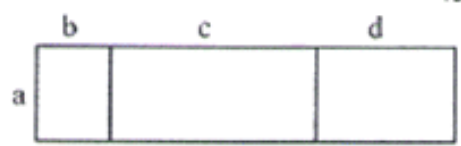
الف) $a(b+c) = ab + c$ (غلط)

ب) $2x + 3y - (2x - y) = 2x + 3y - 2x - y = 2y$ (غلط)

ج) $2x + 3y - (2x - y) = 2x + 3y - 2x + y = 4y$ (درست)

د) a باید در c نیز ضرب شود

ه) علامت قرینه (منفی) در y نیز ضرب می‌شود



۶- با توجه به شکل، یک تساوی جبری بنویسید.

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad$$

بیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

مفاهيم معادله اول : مفاهيم تابع

۱- مانین عددساز  عدد ورودی را در عدد داخل مانین ضرب می‌کند.
مانین عددساز  عدد ورودی را با عدد داخل مانین جمع می‌کند. مانند نمونه، خروجی هر مانین را مشخص کنید یا عدد داخل مانین را بنویسید.

Y : ورودی $\rightarrow -3 \rightarrow$ خروجی: $Y \times (-3) = -21$ a : ورودی $\rightarrow +4 \rightarrow$ خروجی: $a + 4$

خروجی: $5 \rightarrow$ ورودی: 4 $\therefore 4 \times 5 = 20$ خروجی: $0 \rightarrow$ ورودی: -5 $\therefore 0 + (-5) = -5$

b : ورودی $\rightarrow$ $\times$ $\rightarrow$ خروجی: $b \times 2 = 2b$ c : ورودی $\rightarrow$ $+$ $\rightarrow$ خروجی: $c + 0 = c$

۸: ورودی $\rightarrow$ ~~۰~~ $\rightarrow$ خروجی: ۰
 $8 \times 0 = 0$

۲- خروجی یک ماشین $\times$ را به ورودی یک ماشین $+$ می‌بندیم و یک ماشین ترکیبی می‌سازیم. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید.

تَرْكِيبِ دَوَّالْتِیْنِ

۱: خروجی $\rightarrow -5 \xleftarrow{2} 3 \xleftarrow{6} 2$ ورودی: ۲
 $2 \times 3 + (-5) = 1$

۲: خروجی $\rightarrow -5 \xleftarrow{3x} 3 \xleftarrow{2x} x$ ورودی: x
 $3x + (-5) = 3x - 5$

V : ورودی $\rightarrow -1 \Rightarrow + \rightarrow$ خروجی: 1 x : ورودی $\rightarrow -1 \Rightarrow +^{-x} \rightarrow$ خروجی: $-x + 1$
 $Vx(-1) + 1 = -V + 1 = 1$

خروجی: $10 \Rightarrow 2 \rightarrow$ ورودی: 5
 $5 \times 10 + 2 = 52$

به این ترتیب، می‌توانیم عملکرد هر ماشین ترکیبی را به شکل خلاصه، مانند مثال زیر، بنویسیم:

عملکرد پائین تر کپی

x : ورودی $\rightarrow$ $\times$ $\Rightarrow$ $+$ $\rightarrow$ خروجی: y

$$y = Vx + f$$

کار در کلاس



۱- عدد x به مانسین های زیر وارد و عدد y از آنها خارج می شود. با توجه به کاری که

این مانسین ها انجام می دهند، عددهای خروجی را بنویسید. $3x(-2)-1 = -7$

$$-2 \rightarrow \boxed{3x-1} \rightarrow -7$$

$$4 \rightarrow \boxed{-2x+1} \rightarrow -2 \times 4 + 1 = -8 + 1 = -7$$

$$0 \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}x+1} \rightarrow \frac{1}{2} \times 0 + 1 = 1$$

$$\frac{4}{7} \rightarrow \boxed{-7x+2} \rightarrow -7 \times \frac{4}{7} + 2 = -4 + 2 = -2$$

۲- با توجه به جدول های زیر و رابطه x و y ، جاهای خالی جدول ها را پر کنید:

x	y
۱	۴
۲	۷
۵	۱۴

$$y=3x+1$$

x	y
۳	۱۵
-۲	-۱۵
-۴	-۲۵
۵	۲۵

$$y=5x$$

x	y
۴	-۳
-۲	-۹
۷	۰
-۷	-۱۴

$$y=x-7$$

x	y
۴	۵
-۲	-۷
۱,۵	۰
۴	۵

$$y=2x-3$$

۳- با توجه به عددهای ورودی و خروجی، در هر ردیف کاری را که مانسین

انجام می دهد حدس بزنید.

$$2 \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow 6 \text{ و } -7 \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow -14 \text{ و } 5 \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow 10 \quad y = 2x$$

$$5 \rightarrow \boxed{+3} \rightarrow 8 \text{ و } 11 \rightarrow \boxed{+3} \rightarrow 14 \text{ و } -4 \rightarrow \boxed{+3} \rightarrow -1 \quad y = x+3$$

شروع استدلال های چیری



۱- به عددهای زوج زیر توجه کنید. همان طور که می بینید، هر عدد زوج را می توان

به صورت $2 \times n$ نشان داد.

۲	۴	۶	۸	۱۰
↓	↓	↓	↓	↓
2×1	2×2	2×3	2×4	2×5

n
↓
 $2n$

نتیجه: هر عدد زوج را می توان به صورت $2n$ (عدد طبیعی) نمایش داد

۲- عددهای زوج زیر را به صورت $2n$ (n یک عدد طبیعی باشد) نشان دهید.

$$\begin{array}{ccccc} 44 & 80 & 700 & 10000 & 2000 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 \times 22 & 2 \times 40 & 2 \times 350 & 2 \times 5000 & 2 \times 1000 \end{array}$$

۳- در عبارت های زیر به جای حروف m, k, a و n عددهای طبیعی مختلفی قرار دهید. آیا

عددهای حاصل زوج اند؟ هر عدد زوج را می توان به صورت $2n$ یا $2k$ یا $2a$ یا $2m$... نمایش داد

پاسخ باز

$$\begin{array}{cccccc} & & 2m & & 2k & \\ \swarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 \times 5 & 2 \times 7 & 2 \times 10 & 2 \times 15 & 2 \times 100 & 2 \times 500 \\ 10 & 14 & 20 & 30 & 200 & 1000 \end{array}$$

هر عدد طبیعی m, a, k, n اعداد طبیعی باشند

۴- a, b, c را عددهای طبیعی در نظر بگیرید و به سوال های زیر پاسخ دهید:

- ۱- آیا عبارت $2b$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ **بله**
- ۲- آیا عبارت $4c$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟ **بله**
- ۳- آیا عبارت $2ab$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟ **بله**

$4c = 2 \times (2c) \Rightarrow$ یک عدد زوج

$2ab \Rightarrow$ یک عدد زوج

۵- آیا حاصل ضرب هر دو عدد زوج عددی زوج است؟ **بله**

برای پاسخ دادن به این سوال، ابتدا مانند نمونه چند مثال بزنید.

$$\begin{array}{ccc} 4 \times 2 = 8 & 8 \times 4 = 32 & 10 \times 20 = 200 \\ 20 \times 40 = 800 & 14 \times 10 = 140 & 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

برای اینکه بدون مثال و در حالت کلی اثبات کنیم که جمله بالا درست است، دو عدد زوج را

به صورت $2m$ و $2n$ در نظر می گیریم و حاصل ضرب آنها را می نویسیم.

$2m \times 2n = 2(m \times 2 \times n) \Rightarrow$ عددی زوج است

چگونه این تساوی ثابت می کند که حاصل ضرب دو عدد زوج عددی زوج است؟ توضیح دهید.

حاصل ضرب یک عدد طبیعی در عدد ۲ یک عدد زوج می سازد

کاردر کلاس

مانند سوال ۵ فعالیت بالا، ثابت کنید که حاصل ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی

زوج است. $3 \times 4 = 12$ $7 \times 20 = 140$

(الف) چند مثال بزنید. (ب) به صورت جبری ثابت کنید: $2m - 1$ = عدد فرد

عدد زوج = $2n$ حاصل ضرب عدد زوج در عدد فرد = $2n \times (2m - 1)$

$= 2(2nm - n) \Rightarrow$ زوج است

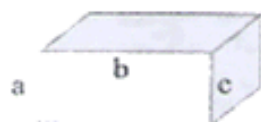
عدد طبیعی حاصل ضرب هر عدد طبیعی در عدد ۲، عددی زوج است

M جرم جسم و واحد آن در سیستم SI، نیوتون است

g = شتاب جاذبه‌ی زمین که مقدار آن برابر است با $10 \text{ m/s}^2 \approx 9.8 \text{ m/s}^2$

h = ارتفاع از سطح بناسیل که واحد آن در سیستم SI، متر باشد

$$U = mgh \Rightarrow U \text{ واحد} = \text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \text{m} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Jol}$$



۱- مساحت کل مکعب مستطیل رویه‌رو

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

=> اگر $a = 2$ و $b = 6$ و $c = 3$ باشند، مساحت کل جقدر می‌شود؟

۲- مساحت قاعده منشوری ۲۰ و ارتفاع آن ۴ است. حجم این منشور را با نوشتن رابطه

$$V = S_{\text{قاعده}} \times h_{\text{ارتفاع}} \Rightarrow V = 20 \times 4 = 80$$

۳- قاعده‌های دوزنقه‌ای ۴ و ۷ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۲ سانتی‌متر است. مساحت این دوزنقه

$$\frac{(a+b)h}{2} = \frac{(4+7) \times 2}{2} = 11$$

۴- آیا $x = 2$ و $x = -2$ پاسخ معادله $x^2 = 4$ هستند؟ چرا؟

۵- طول یک لوله x متر است. طول لوله دیگر y برابر لوله اول است. طول لوله دوم را

$$y = 2x$$

به صورت جبری بنویسید.

۶- یک زمین والیبال مستطیل شکل، دارای x متر عرض

و $2x$ متر طول است. مساحت این زمین را به صورت جبری نشان

دهید. اگر عرض این زمین ۹ متر باشد، مساحت آن چند متر مربع است؟

$$S = 2x \times x \Rightarrow S = 2x^2$$

۷- در درس علوم یاد می‌گیرید که انرژی پتانسیل ذخیره شده در یک جسم، از رابطه $U = mgh$

به دست می‌آید که در آن، U انرژی پتانسیل، m جرم جسم، g شتاب زمین و h ارتفاع جسم است. در صورتی

که جسمی به جرم ۲۵ کیلوگرم تا ارتفاع ۴ متر بالا برود، مقدار انرژی پتانسیل آن را پیدا کنید. (شتاب زمین

$$U = 25 \times 10 \times 4 \Rightarrow U = 1000$$

را ۱۰ فرض کنید.)

۸- با توجه به رابطه x و y، مقدار y را برای x های مختلف پیدا کنید.

x	y
۱	-۲
۰	-۳
۲	-۱
-۱	-۴

$$y = x - 3$$

x	y
۱	-۱
۰	۱
۲	-۳
-۱	۳

$$y = -2x + 1$$

x	y
۲	۴
-۲	۴
۰	۰
-۱	۱

$$y = x^2$$

توضیح

بالای صفحه

درس

$$\frac{1393 \times 7 + 1393 \times 2}{1393 \times 5 - 1393 \times 2} = \frac{1393(7+2)}{1393(5-2)} = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{مثال مهم کابیر فاکتورگیری}$$

تجزیه عبارت های جبری **فالتوریری** ← با استفاده از ریز تجزیه و تبدیل
بعضی اسانه تر آموزش دهید

فعالیت 

۱- در دوره دبستان یاد گرفتید که با تبدیل صورت و مخرج کسر به ضرب عددها، می توان کسر را ساده کرد.

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

کسرهای زیر را مانند نمونه ساده کنید.

$$\frac{12}{18} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \frac{2}{3} \quad \frac{15}{25} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{3}}{\cancel{5} \times \cancel{5}} = \frac{3}{5}$$

۲- بعضی از عبارت های جبری را نیز می توان به صورت ضرب دو یا چند عبارت نوشت:

$$a(b+c) = ab+ac \quad \text{خاصیت توزیع پذیری}$$

★ **عکس توزیع پذیری را تجزیه کردن یا فالتوریری می نامیم**

$$ab + ac = a(b + c)$$

(تبدیل به ضرب) تجزیه کردن

با توجه به تساوی بالا، عبارت ها را به ضرب تبدیل کنید.

$$2ab + 4a^2b^3 = 2ab(1 + 2ab^2)$$

$$x + xy = x(1 + y)$$

$$5ab + 8ac = a(5b + 8c)$$

$$2a + ab = a(2 + b)$$

$$4a^2 + 2ab = 2a(2a + b)$$

$$5ab + 2b = b(5a + 2)$$

۳- برای تجزیه یک عبارت جبری، عامل یا بخش مشترک دو یا چند عبارت را پیدا می کنیم و

بیرون براتر می نویسیم. برای تشخیص قسمت مشترک، می توان عبارت ها را به صورت ضرب نوشت:

$$(9, 9) = 3^2 \quad (x^2, x^3) = x^2 \quad (y^3, y^2) = y^2$$

$$\downarrow \text{پایین}$$

$$6x^2y^2 + 9x^3y^2 = 2 \times 2 \times x \times x \times x \times y \times y \times y + 3 \times 2 \times x \times x \times x \times x \times y \times y$$

$$= 2 \times 2 \times x^2 \times y^2 \times xy + 3 \times 2 \times x^2 \times y^2 \times x = 2x^2y^2(2y + 3x) = 2x^2y^2(2y + 3x)$$

با توجه به تساوی بالا، عامل مشترک دو جمله عبارت جبری چیست؟

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله اول عبارت ساخته می شود؟

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله دوم عبارت ساخته می شود؟

حالا این تساوی را کامل کنید.

$$6x^2y^2 + 9x^3y^2 = 3x^2y^2(2y + 3x)$$

ما با تجزیه کردن جمله ها اجازه دهید تا دانش آموز کشف کند چرا در عبارت

توان کمتر عامل مشترک است

$$6x^2y^2 + 9x^3y^2 = 2 \times 3 \times x \times x \times y \times y \times y + 3 \times 3 \times x \times x \times x \times y \times y$$

$$= 3 \times x \times x \times y \times y (2y + 3x) = 3x^2y^2(2y + 3x)$$

$$ab + ac = a(b+c) \quad , \quad ab - ac = a(b-c)$$

$$5ab + 2abc = 5ab + 2abc = ab(5+2c)$$

$$4ab + 2a^2 = 2 \times 2ab + 2aa = 2a(2b+a)$$

$$2x^2y + 4xy^2 = 2 \times 2xxy + 2 \times 2xyy = 2xy(2x+2y)$$

$$8x^2y^3 - 2xy^2 = 2 \times 4xxy^3y - 2xy^2 = 2xy^2(4xy-1)$$

۴- با توجه به سؤال بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$ab+ac = a(b+c)$$

$$ab-ac = a(b-c)$$

$$5ab+2abc = ab(5+2c)$$

$$4ab+2a^2 = 2a(2b+a)$$

$$2x^2y+4xy^2 = 2xy(2x+2y)$$

$$8x^2y^3-2xy^2 = 2xy^2(4xy-1)$$

بالا

۵- ابتدا صورت و مخرج کسر را به ضرب دو عبارت تجزیه و سپس آن را ساده کنید.

$$\frac{ab+ac}{ab-ac} = \frac{a(b+c)}{a(b-c)} \quad (a \neq 0, b \neq c)$$

$$\frac{a^2-a}{ab-b} = \frac{a(a-1)}{b(a-1)} = \frac{a}{b} \quad (a \neq 1, b \neq 0)$$

$$= \frac{b+c}{b-c}$$

کار در کلاس



توضیحات پایین

۱- عبارت‌های زیر را به ضرب تبدیل کنید.

$$xx^2a - yx^2a = x^2a(x-y)$$

$$22xy^3 - 35x^2y^2 = 7xy^2(4y-5x)$$

$$2^4 \times 2^3 - 2^3 \times 2^2 = 2^3(2^4 - 2^2)$$

$$-a^2 + 2a^3 = a^2(-1 + 2a)$$

۲- با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج کسر را ساده کنید. $(a \neq b, ab \neq 0)$

$$\frac{a^2b - ab^2}{a^2b^2 - a^2b^2} = \frac{ab(a-b)}{a^2b^2(a-b)} = \frac{1}{ab}$$

۳- آیا تساوی $-a-b = -(a+b)$ همواره برقرار است؟ **بله**

۴- چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج می‌شود؟

$2n$: عدد زوج

$2m$: عدد زوج دیگر

$$2n + 2m = 2(n+m) \Rightarrow \text{زوج است}$$

●●● خواندنی

خوارزمی در کتاب جبر و مقابله خود برای عددهای علامت‌دار اصطلاحاتی به کار برده است. برای مثال

۵- را «بنج ناقص» و $+5$ را «بنج زائد» خوانده است. با اینکه در زمان خوارزمی کاربرد حروف متداول

نبوده است، او در حل معادله‌های جبری، مجهول را «شبینی» و مجذور مجهول را «مال» نامیده است.

$$61 \quad x \times 2^a - y \times 2^a = 2^a(x-y)$$

$$22xy^3 - 35x^2y^2 = 7x \sqrt{x} \times y^3y - 5x \sqrt{x} \times x \times y^2 = 7xy^2(4y-5x)$$

$$2^4 \times 2^3 - 2^3 \times 2^2 = 2^3 \times 2^4 - 2^3 \times 2^2 = 2^3(2^4 - 2^2)$$

$$-a^2 + 2a^3 = (-1) \times a^2 + 2a^2 \times a = a^2(-1 + 2a)$$

سؤال ۱

$$(a+b)^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3$$

تفاوت x^2 و $2x$ چیست؟ نکته: جمع توان در هر جمله برابر ۳ است

$$(a+b)^4 = a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + a^0b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + a^0b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6b^0 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6a^1b^5 + a^0b^6$$

۱- تفاوت x^2 و $2x$ چیست؟ در x^2 ، x ضرب می شود و در $2x$ مقدار x دو برابر می شود 

$$x^2 = x \times x$$

$$2x = 2 \times x$$

۲- مانند نمونه، طرف دیگر تساوی ها را بنویسید.

$$3^2 = 3 \times 3$$

$$(-5)^2 = -5 \times (-5) \quad a^2 = a \times a$$

$$\square^2 = \square \times \square$$

$$\triangle^2 = \triangle \times \triangle \quad (a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$$

۳- جدول زیر را برای مقدارهای مختلف a و b کامل کنید.

a	۱	۲	۰	۲	-۱
b	۱	۰	-۲	۴	-۲
$(a+b)^2$	$2^2=4$	$2^2=4$	$(-2)^2=4$	$4^2=16$	$(-2)^2=4$
$a^2 + b^2$	$1+1=2$	$4+0=4$	$0+4=4$	$4+16=20$	$1+4=5$

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

از مقایسه دو ردیف آخر، چه نتیجه ای می گیرید؟

۴- مانند نمونه، عبارت ها را ساده کنید.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

کار در کلاس

۱- مانند نمونه، تساوی ها را کامل کنید.

$$x^4 = x \times x \times x \times x$$

$$-x^2 = -x \times x$$

$$(-x)^2 = (-x) \times (-x)$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$$

۲- چرا $ba = ab$ است؟ (از کدام خاصیت ضرب استفاده می شود؟) جایابی (توضیح پذیری)

۳- عبارت زیر را ساده کنید. چون ضرب جایابی دارد

$$-(a+b)^2 = -(a+b)(a+b) = -a^2 - 2ab - b^2$$

آیا منفی به توان ۲ می رسد؟ خیر چرا؟ چون توان مال $(a+b)$ است

و علامت منفی به توان نمی رسد

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

نکته: 

$$2n + (2m+1) = 2n + 2m + 1 = 2(n+m) + 1$$

زوج فرد

عددی فرد

دو برابر یک عدد طبیعی به علاوه یک عدد فرد است

$$(2k+1) + (2t+1) = 2k + 2t + 2 = 2(k+t+1) \Rightarrow \text{مضرب ۲} \Rightarrow \text{زوج است}$$

حوا - ۳

تمرین چون عدد و عدد فرد می شوند (هر دو جمله)



$$-(a-b) = -a+b$$

۱- آیا $b-a = -(a-b)$ است؟ چرا؟ بیل

زوج + فرد = فرد
بالا

۲- چرا مجموع دو عدد فرد، عددی زوج می شود؟

۳- مجموع دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد، زوج می شود یا فرد؟ چرا؟ فرد

۴- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x+7)(x-7) = x^2 - 49$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$a^2 + b^2 - (a-b)^2 = +2ab$$

$$(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

۵- با توجه به پیکان های رسم شده، عبارت را ساده کنید.

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

۶- نشان دهید که تفاضل هر عدد دو رقمی از مقلوبش، مضرب ۹ است.

↓ پایین

۷- اگر دو پراش زیر را در هم ضرب کنیم، چند جمله خواهیم داشت؟ چرا؟ $3 \times 3 = 9$ جمله ۹

$$(a+b+c)(z+y+x) = az + ay + ax + bz + by + bx + cz + cy + cx$$

جمله ۳ جمله ۳

خواندنی

خوارزمی

ابو عبدالله محمد بن موسی خوارزمی حدود سال ۱۲۵ هجری قمری در شهر خوارزم (که امروز خیوه نامیده می شود) متولد شد. وی یکی از مفاخر علمی ایران و جهان و از بزرگ ترین دانشمندان مسلمان در قرن های گذشته است.

یکی از آثار خوارزمی کتاب جبر و مقابله است. این کتاب نخستین کتابی است که نام جبر را بر خود دارد و نام جبر به عنوان بخشی از ریاضی، از نام این کتاب گرفته شده است. از این نظر، خوارزمی را می توان یکی از بنیان گذاران علم جبر دانست. امروز جبر به شاخه ای مهم از ریاضی گفته می شود.

کتاب حساب خوارزمی در قرن دوازدهم هجری به زبان های اروپایی ترجمه شد و به «الخوارزمی» یا «الگوریتم» که از نام «الخوارزمی» گرفته شده بود، شهرت یافت. بعدها الگوریتم با الگوریتم (Algorithm) به معنای فن محاسبه (یعنی حساب) به کار رفت. امروزه الگوریتم به روشی از محاسبه گفته می شود که در آن محاسبه مرحله به مرحله انجام می گیرد و محاسبه هر مرحله به مراحل قبلی بستگی دارد.

۶۳

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a)$$

$$= 10a + b - 10b - a$$

$$= 9a - 9b = 9(a-b)$$

مضرب ۹ می باشد

۴ مثال

$$92 - 29 = 63 = 9 \times 7$$

$$15 - 51 = 27 = 9 \times 3$$

$$72 - 27 = 45 = 9 \times 5$$

معادله



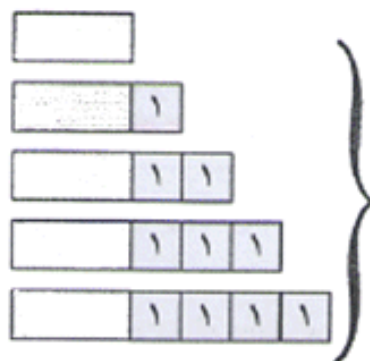
۱- حاصل جمع پنج عدد متوالی طبیعی ۶۵ شده است. عدد وسط چه عددی است؟
چهار دانش‌آموز این مسئله را با راهبردهای مختلف حل کرده‌اند. راه حل هر کدام را کامل کنید و توضیح دهید.

راه حل سمیه: راهبرد حدس و آزمایش

حاصل جمع	عدد پنجم	عدد چهارم	عدد سوم	عدد دوم	عدد اول
۲۵	۹	۸	۷	۶	۵
۴۵	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
۶۵	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱

حدس و بررسی

راه حل فریده: راهبرد رسم شکل



$$65 \rightarrow 5 \square + 10 = 65$$

$$65 - 10 = 55$$

$$55 \div 5 = 11$$

راه حل فهیمه: راهبرد روش‌های نمادین

$$\bigcirc + (\bigcirc + 1) + (\bigcirc + 2) + (\bigcirc + 3) + (\bigcirc + 4) = 65$$

$$5\bigcirc + 10 = 65$$

عدد وسطی را در تساوی بالا مشخص کنید.

$$5\bigcirc = 65 - 10 = 55 \Rightarrow \bigcirc = 55 \div 5 = 11$$

راه حل مهدیه: راهبرد تشکیل معادله

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 65$$

$$5x + 10 = 65$$

$$\Rightarrow 5x = 65 - 10 = 55 \Rightarrow x = 11$$

راه حل فرشته: راهبرد تشکیل معادله

$$(x-2) + (x-1) + x + (x+1) + (x+2) = 65$$

تفاوت راه‌حل‌های فرشته و مهدیه را توضیح دهید.

فرشته عدد وسطی را مجهول گرفته (x) و بقیه اعداد را بر حسب آن نوشته
ولی مهدیه عدد اول را مجهول در نظر گرفته (x) و بقیه اعداد را بر حسب آن نوشته

است

۲- مهدیه با توجه به آنچه سال گذشته آموخته بود، معادله خود را به صورت زیر حل کرد:

$$\begin{array}{l} 5x+10=65 \\ \downarrow -10 \\ 5x+10-10=65-10 \\ 5x=55 \\ \downarrow \times \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \times 5x = \frac{1}{5} \times 55 \\ x=11 \end{array}$$

از دو طرف معادله را با واحد یک ضرب کنیم

دو طرف را در عدد $\frac{1}{5}$ ضرب کنیم

معلم راه حل مهدیه را به صورت زیر خلاصه کرد. توضیح دهید در این روش معنی یکسان‌ها چیست؟

$$\begin{array}{l} 5x+10=65 \\ 5x=65-10 \\ 5x=55 \rightarrow x=\frac{55}{5}=11 \end{array}$$

۳- با توجه به سؤال بالا، روش حل معادله را توضیح دهید. سپس معادله‌های دیگر را به همین ترتیب حل کنید.

$$\begin{array}{l} 2x-2=x+5 \\ \Rightarrow 2x-x=5+2 \\ \Rightarrow x=7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x-1=x-7 \\ \Rightarrow 2x-x=-7+1 \\ \Rightarrow x=-6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2(x-1)=2(x+4) \\ 2x-2=2x+8 \\ \Rightarrow -2=8 \\ \Rightarrow -2-8=8-8 \\ \Rightarrow -10=0 \end{array}$$

کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{l} 5(x-2)=8 \\ \Rightarrow 5x-10=8 \\ \Rightarrow 5x=18 \Rightarrow x=3.6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1-2x=-(x-1)+2 \\ \Rightarrow 1-2x=-x+1+2 \\ \Rightarrow -2x+x=3-1 \\ \Rightarrow -x=2 \\ \Rightarrow x=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+4=16 \\ x=16-4 \\ x=12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2(x-1)=2(1-x) \\ \Rightarrow 2x-2=2-2x \\ \Rightarrow 2x+2x=2+2 \\ \Rightarrow 4x=4 \\ \Rightarrow x=1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x-2=2x-1+5x \\ \Rightarrow 2x-2=7x-1 \\ \Rightarrow 2x-7x=-1+2 \\ \Rightarrow -5x=1 \\ \Rightarrow x=-\frac{1}{5} \end{array}$$



۱- معادله زیر را دو دانش آموز حل کرده اند. راه حل آنها را توضیح دهید. ویژگی های هر کدام از روش ها را بگویید و در کلاس با یکدیگر در این باره گفت و گو کنید.

راه حل یگانه

راه حل یکتا

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}$$

$$6 \times \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \right) = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{6}$$

$$6 \times \frac{1}{2}x - 6 \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{14}{6}$$

$$3x - 2 = 5$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

دو طرف را در عدد ۶ ضرب کرد

انجام ضرب ها و ساده کردن

دو طرف را در ۱/۲ ضرب کرد

دو طرف ۲ واحد اضافه کرد

چرا یکتا عدد ۶ را برای ضرب کردن انتخاب کرده است؟ کوچک ترین مضرب مشترک این سه عدد است

$$\{2, 3, 6\} = 6$$

۲- دو دانش آموز کسر $\frac{x+3}{2}$ را به صورت زیر در ۶ ضرب کرده اند. کدام یک اشتباه کرده است؟ اشتباه او را توضیح دهید.

علامت منفی که پشت خط کسری هست کل صورت

$$6 \times \left(-\frac{x+3}{2} \right) = -3x - 9$$

$$6 \times \left(-\frac{x+3}{2} \right) = -3x + 9$$

درست

نادرست

کار در کلاس

معادله های زیر را حل کنید.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\times 6} 4x - 3 = 1 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\times 20} 12x - 10 = 15 \Rightarrow 12x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{12}$$

$$-\frac{6}{25}x - \frac{4}{15} = \frac{8}{3} \xrightarrow{\times 75} -18x - 20 = 200$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x+2}{3} \xrightarrow{\times 6} 3x + 3 = 2x + 4$$

$$\Rightarrow -18x - 20 = 200$$

$$\Rightarrow 3x + 3 = 2x + 4$$

$$\Rightarrow -18x = 220$$

$$\Rightarrow 3x - 2x = 4 - 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{-220}{18} = \frac{-110}{9}$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$(x-1) + x + (x+1) = 27 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow \text{عدد کوچکتر} = 8$$

جواب ۴

$$= 2x \Rightarrow x + 2 = \text{علی} \Rightarrow x = \text{برادر}$$

جواب ۷

$$\text{مجموع سه نفر} = x + (x+2) + 2x = 4x+2$$



۱- معادله های زیر را حل کنید.

$$-\frac{3}{8}x + 5 = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{114}{9}$$

$$\frac{5}{12}x - \frac{7}{18} = 2 \Rightarrow x = \frac{14}{15}$$

$$4x + \frac{2}{7} = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = -\frac{4}{35}$$

$$2x - \frac{2}{3} = 5x + 3 \Rightarrow x = -\frac{11}{9}$$

$$1 - \frac{x+1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2x-1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 0$$

$$2(x+5) = 24 \Rightarrow x = 7$$

۲- عرض مستطیلی ۵ سانتی متر و محیط آن ۲۴ سانتی متر است. طول این مستطیل چقدر است؟

$$2x + 2 = 24 \Rightarrow x = 11$$

۳- حاصل جمع سه عدد متوالی طبیعی ۲۷ شده است. کوچک ترین این عددها را پیدا کنید.

$$x + (x+1) + (x+2) = 27 \Rightarrow x = 8$$

۴- اگر مربع عددی به آن عدد اضافه شود، عدد حاصل، ۴۲ خواهد بود. کدام یک از مقادیر

$$x^2 + x = 42 \Rightarrow x(x+1) = 42 \Rightarrow x = 6, x = -7$$

الف) ۴۲ ب) ۱۲ ج) -۶ د) -۷ ه) ۵

۷- تعداد کتاب های محمد دو برابر تعداد کتاب های بهرام است. علی ۶ کتاب بیشتر از بهرام دارد.

اگر بهرام x تا کتاب داشته باشد، یک عبارت جبری بنویسید که مجموع کتاب های این سه نفر را نشان دهد.

۸- پدری ۴۵ سال دارد. دو فرزند او ۹ و ۱۴ ساله اند. پس از چند سال سن پدر با مجموع

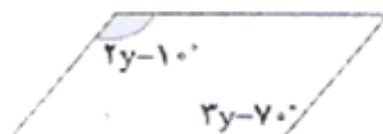
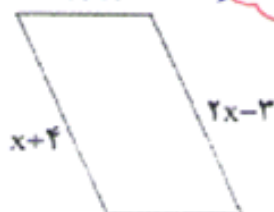
$$45 + x = (9+x) + (14+x) \Rightarrow x = 22$$

۹- در درس علوم یاد گرفتید که کار انجام شده برابر است با مقدار نیرو در اندازه جابه جایی.

این رابطه را با تساوی $W = F \cdot d$ نشان می دهیم. اگر کار انجام شده ۱۲ و مقدار نیرو ۴ باشد، مقدار

$$12 = 4 \times d \Rightarrow d = 3$$

۱۰- معادله ها را با توجه به شکل های زیر حل کنید.



$$x+4 = 2x-3$$

$$2y-10 = 3y-70$$

$$\Rightarrow -x = -7$$

$$\Rightarrow -y = -60$$

$$\Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow y = 60$$

● ● مرور فصل ۴ ● ●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثال بزنید.

- جمله‌های متشابه
- معادله
- تجزیه کردن (تبدیل به ضرب)

در این فصل، روش‌های مختلفی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- تبدیل عبارت جبری به عبارت کلامی و برعکس
- ساده کردن یک عبارت جبری یا جمع جمله‌های متشابه
- ضرب جمله در پرانتز
- پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت
- تبدیل یک عبارت به ضرب
- بیان رابطه جبری برای الگوهای مساحت و محیط و...
- ضرب جمله در جمله
- ضرب پرانتز در پرانتز
- حل معادله‌های کسری

کاربرد

موضوع‌های این فصل علاوه بر کاربردهایی که در ریاضی دارد، به شما در حل مسئله‌های روزمره نیز کمک می‌کند. شما با تشکیل معادله و حل آن می‌توانید مسائل زیادی را حل کنید. به همین ترتیب، می‌توانید در سایر درس‌ها، مثل علوم، نیز از رابطه‌ها و معادله‌های جبری استفاده کنید.

تمرین ترکیبی

۱- عبارت جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - (a^2 + b^2 - 2ab) = 4ab = 4 \times (2) \times (-2) = -16$$

مقدار عددی عبارت حاصل را به ازاء $a = 2$ و $b = -2$ به دست آورید.

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6} \quad \times 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3 - 2x - 2 = 1$$

$$\Rightarrow x - 5 = 1$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$2x - 1 = 3x - 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3x - 3$$

$$\Rightarrow 2x - 3x = 1 - 3$$

$$\Rightarrow -x = -2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

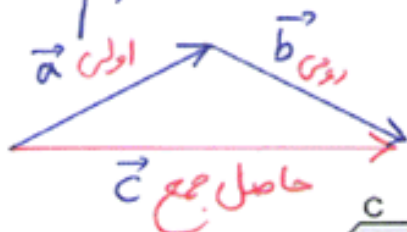
فصل پنجم

برایند: چون بردار c کار دو بردار a و b را با هم انجام می دهد پس بردار c

برایند دو بردار a و b می باشد

مجموع دو بردار متوالی:

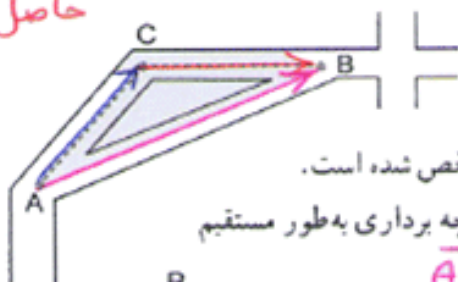
حاصل جمع دو بردار متوالی برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می کند (جهت از بردار اول به سمت بردار دوم)



جمع بردارها



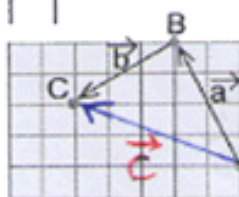
۱- شخصی در نقطه A ایستاده است.



مسیر حرکت او برای رسیدن به نقطه B در شکل مشخص شده است.

این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به طور مستقیم

به نقطه B می رسد؟ آن را رسم کنید. بردار $\vec{AB}$



۲- نقطه A ابتدا با بردار انتقال a به نقطه B و سپس با بردار انتقال b به نقطه C منتقل شده است. نقطه A با چه برداری به طور مستقیم به نقطه C منتقل می شود؟ $\vec{AC}$

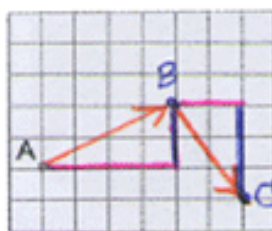
نام آن را بردار c بگذارید. آیا می توانیم بگوییم بردار c کار دو بردار

انتقال a و b را انجام می دهد؟ بله $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

به بردار c بردار برآیند یا حاصل جمع می گویند.

بازی دوطرفه

۳- روبانی فقط به صورت افقی یا عمودی حرکت می کند. این روبان اکنون روی نقطه A است. با فرمان $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ۴ واحد به



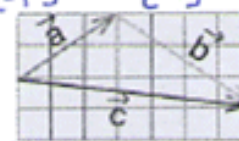
سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می کند.

نقطه جدید را B نام گذاری کنید.

روبان ما با فرمان $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ از B به نقطه C می رسد.

با چه فرمانی به طور مستقیم از نقطه A به C می رسد؟ فرمان $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$



۴- مختصات بردارهای a , b و c را بنویسید. آیا بردار c با جمع

دو بردار a و b برابر است؟ به ابتدا و انتهای بردارهای a و b توجه کنید.

در چه صورت برداری که از ابتدای $\vec{a}$ به انتهای $\vec{b}$ رسم می شود، بردار c .

حاصل جمع بردارهای a و b است؟ توضیح دهید. بردار حاصل جمع (برداری) ابتدایش بردار a و انتهایش بردار b است.

در فعالیت ۲ مشاهده کردید که نتیجه جمع دو بردار a و b بردار c است. بنابراین، می توان یک

نسای برداری به صورت $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ را نوشت.

با توجه به نسای $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ می توان مختصات بردار c را از نسای مختصاتی زیر به دست

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+t \end{bmatrix}$$

نتیجه: بردار $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ برداری است که مختصاتی برابر

مجموع مختصات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است

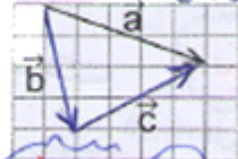
کار در کلاس



در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد، برای رسم حاصل جمع با برآیند این دو بردار می‌توانیم برداری از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کنیم.

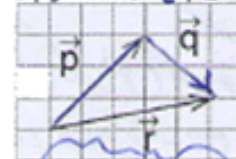
ابتدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل جمع دو بردار دیگر است. سپس برای هر شکل، یک

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

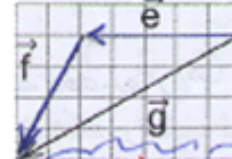


$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



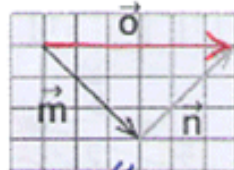
$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$$



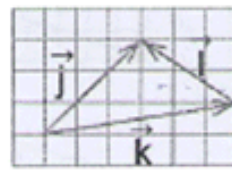
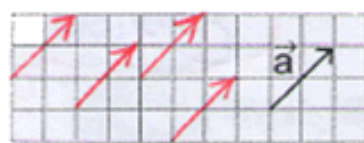
$$\vec{e} + \vec{f} = \vec{g}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{m} + \vec{n} = \vec{0}$$



$$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



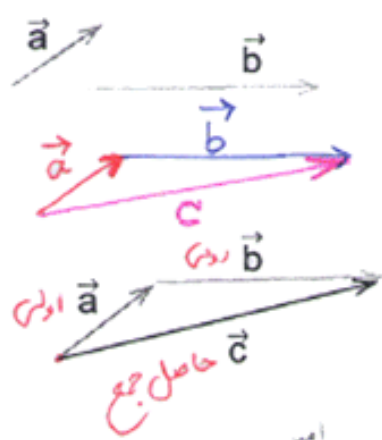
$$\vec{k} + \vec{i} = \vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



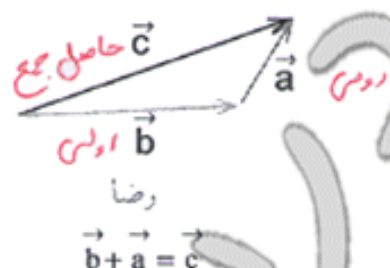
۱- چهار بردار مساوی بردار a رسم کنید و مختصات همه بردارها را بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

۲- با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان از نقطه‌های شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل جمع بردارهای a و b را رسم کنیم. راه‌حل‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.



$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

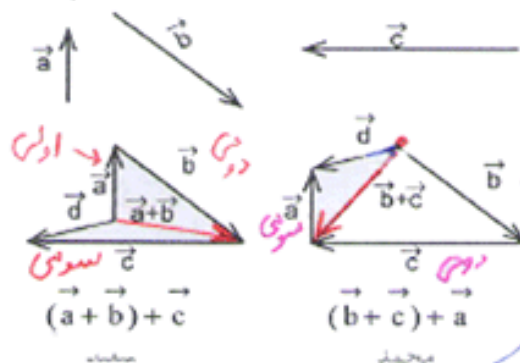
امیر ابتدا از یک نقطه بردارهای مساوی بردار a رسم کرده و سپس از انتهای آن بردارهای مساوی بردار b را رسم کرده، ولی رضا ابتدا بردار b را رسم کرده و از انتهای آن بردارهای مساوی بردار a رسم کرده. حاصل جمع دو بردار خاصیت جابجایی دارد.

تجربه ۱: ابتدا حاصل جمع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بدست آورده و سپس حاصل آن دو را با بردار $\vec{c}$ جمع کرده است

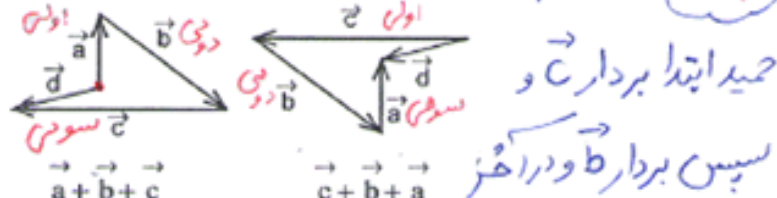
تجربه ۲: ابتدا مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را محاسبه کرده و سپس حاصل آن دو را با بردار $\vec{c}$ جمع کرده است

نتیجه: تجزیه سه بردار را به صورت متوالی، ابتدا $\vec{a}$ و پس از آن $\vec{b}$ و در انتها $\vec{c}$ را رسم کرده و برای بدست آوردن مجموع ابتدای اولی را به انتهای سومی وصل کرده است

۳- دانش آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار راه حل های زیر را ارائه کرده اند. هر کدام را

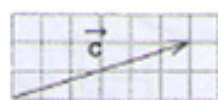
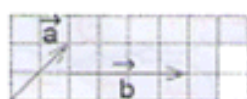


رضای: رضایمانند محید عمل کرده با این تفاوت کم توضیح دهید.

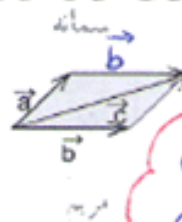


نتیجه: تجزیه کار این سه فرایند است فقط روش ها متفاوت است

۴- راه حل های دانش آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را مشاهده و مقایسه کنید.



$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$



روش متناهی: رسم هر دو بردار با هم اشتراک رسم قطر متناهی الاضلاع

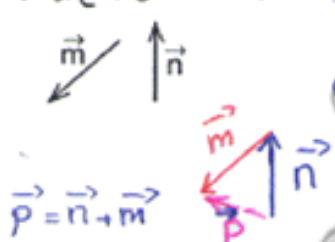
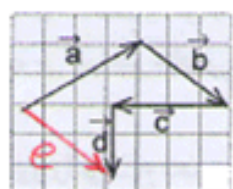
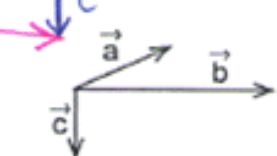
اول $\vec{a}$ و سپس به دنبال آن $\vec{b}$

اول $\vec{b}$ و به دنبال آن بردار $\vec{a}$ رسم شده است

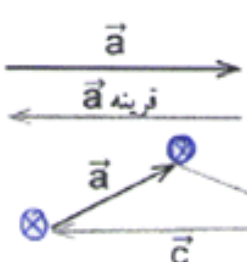
کار در کلاس

۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

حاصل جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را رسم کنید



روش متناهی: رسم هر دو بردار با هم اشتراک رسم قطر متناهی الاضلاع



۲- جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

بردار $\vec{c}$ کار بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را خنثی کرده در واقع بردار $\vec{c}$ قدری

مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می باشد یا به عبارتی دیگر جسم در مجموع این سه

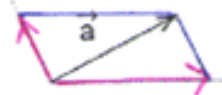
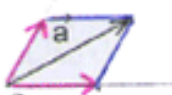
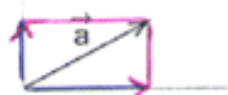
انتقال به محل اول خود برنشسته و می توان گفت مجموع این سه انتقال صفر است

نکته ۱! می‌توانیم بردار رسم کرده حاصل جمع آن‌ها بردار معلوم $\vec{a}$ باشد

۲) بر شمار متوازی الاضلاع می‌توانیم رسم کنیم $\vec{a}$ قطر آن‌ها باشد



۱- دو بردار رسم کنید که جمع آنها بردار $\vec{a}$ باشد. به این کار تجزیه بردار می‌گویند. چند پاسخ مختلف می‌توان به دست آورد؟ چرا؟ **بی شمار، به خاطر استاها**



۲- مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، بنویسید.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر

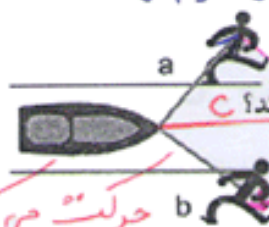
بنویسید. فکر می‌کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟ **بی شمار جواب دارد، باز پاسخ است**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$



به سمت بالا حرکت می‌کند
برایند و نیرو به سمت
بالا است



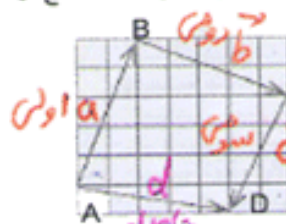
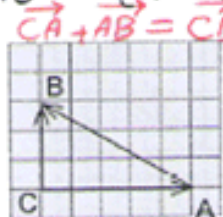
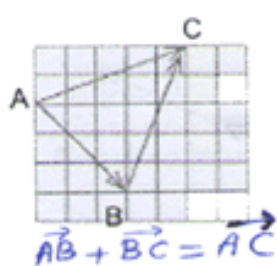
۱- دو نفر در کنار رودخانه با دو طناب قایقی را در خلاف جهت آب می‌کشند. الف) قایق به کدام سمت حرکت می‌کند؟

ب) اگر نیروی $\vec{a}$ بیشتر باشد، قایق به کدام طرف متماثل می‌شود؟

الف) روی مسیر $\vec{c}$ که برایند دو نیروی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هست حرکت می‌کند

۲- در هر شکل یکی از بردارها حاصل جمع بردارهای دیگر است.

برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۲- در هر تساوی، x و y را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

۷۳

$$x = 2 - 5 = -3$$

$$x = 7 - 3 = 4$$

$$y = -4 - 2 = -6$$

$$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2$$

$$y - 1 = 5 \Rightarrow y = 6$$

$$y = -1 - 6 = -7$$

نتیجه: حاصل جمع چند بردار متوالی برابر برداری است که ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند

بردار $k\vec{a}$ برداری است هم راستا با بردار $\vec{a}$ و اندازه‌ی آن k برابر اندازه‌ی بردار $\vec{a}$ است
اگر $k > 0$ باشد دو بردار هم جهت و اگر $k < 0$ باشد دو بردار مختلف جهت می‌باشند

$-3\vec{a}$

ضرب عدد در بردار

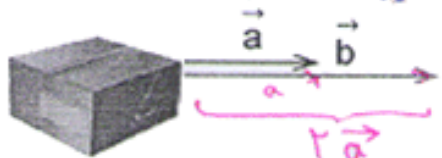
فعالیت



۱- در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده

رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کرده باشد،

بردار حرکت جدید را رسم کنید. برداری سه برابر $\vec{a}$ و در جهت مخالف آن رسم می‌کنیم



۲- دو نفر سعی می‌کنند جعبه رویه‌رو را بکشند

و به جای دیگری ببرند. نیرویی که نفر اول وارد می‌کند با

بردار $\vec{a}$ و نیروی نفر دوم با بردار $\vec{b}$ نمایش داده شده است.

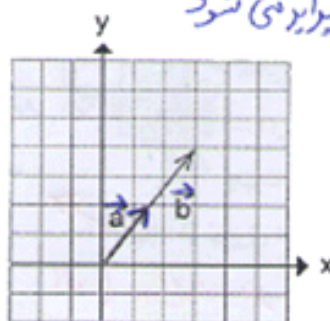
با توجه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول

است؟ چرا؟ تقریباً دو برابر چون اندازه‌ی آن تقریباً دو برابر $\vec{a}$ هست و هم جهت می‌باشند

۳- در فعالیت‌های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازه آن،

چه نکاتی را رعایت کردید؟ راستاها یکی است در اولی جهت‌ها مخالف هم و در دومی هم جهت

می‌باشند، در اولی اندازه سه برابر و در دومی اندازه دو برابر می‌شود



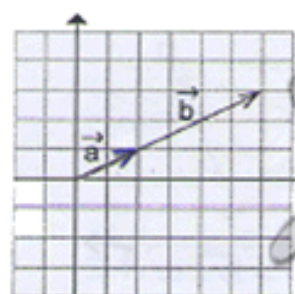
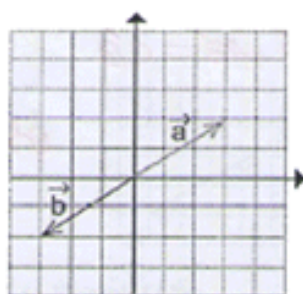
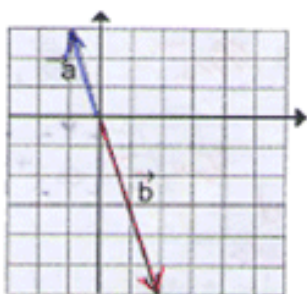
۴- در هر شکل مختصات بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بنویسید.

رابطه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با یک تساوی برداری و یک تساوی

مختصاتی نشان دهید.

$$\vec{b} = 2\vec{a} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$



تساوی برداری

$$\vec{b} = -2\vec{a}$$

تساوی مختصاتی

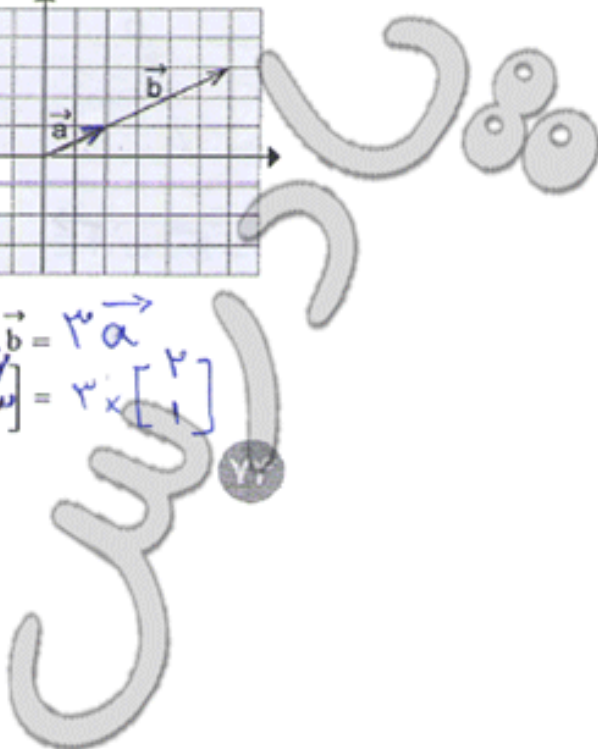
$$\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = -\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = 3\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



نتیجه گیری

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می شود.
بنابراین، می توانیم بنویسیم:

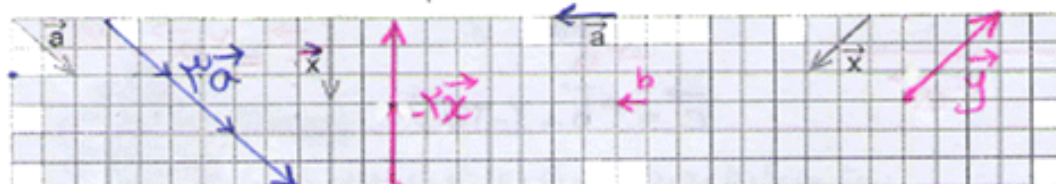
$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

اگر بردار b فریته بردار a باشد، می نویسیم: $b = -a$ یا $b = (-1)a$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = -\vec{a} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

کار در کلاس

با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



$$\vec{b} = 3\vec{a}$$

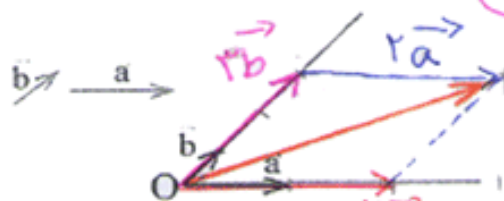
$$\vec{y} = -2\vec{x}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\vec{y} = -\frac{3}{2}\vec{x}$$

تربیب فکر

فعالیت



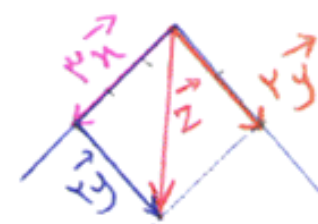
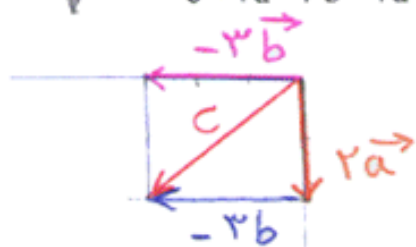
۱- بردارهای a و b مفروض اند.
بردار $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ را رسم کنید.

از نقطه دلخواه O بردارهای $2a$ و $3b$ را رسم کنید. سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.

۲- بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{a} + (-3\vec{b})$$

$$\vec{z} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$$



برای رسم بردار $(\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b})$ ابتدا از یک نقطه دلخواه بردار $k\vec{a}$ را هم راستا با بردار $\vec{a}$ برابر آن رسم می کنیم و سپس از همان نقطه بردار $l\vec{b}$ را هم راستا با بردار $\vec{b}$ رسم می کنیم به روش متوازی الاضلاع بردار $\vec{c}$ را بدست می آوریم

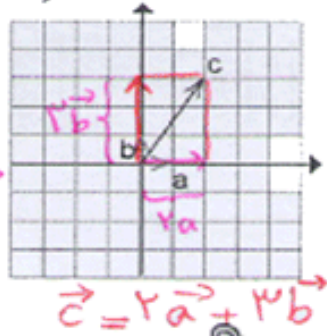
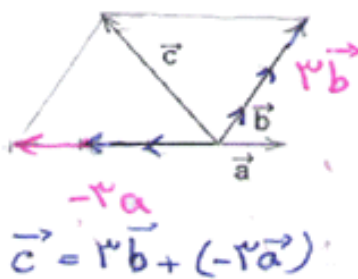
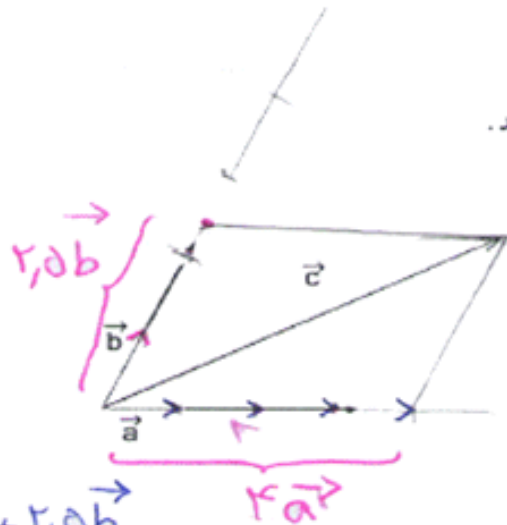
نکته

اصلاح کرد

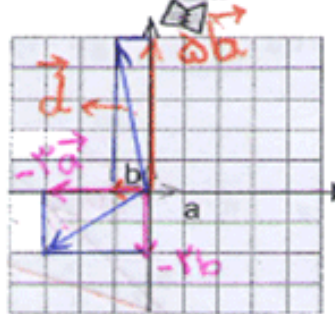
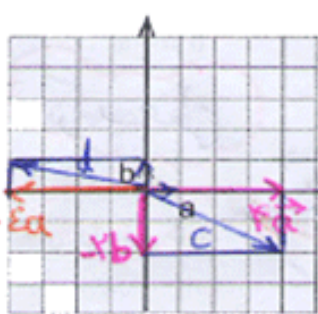
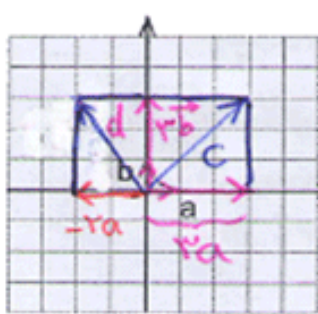
کار در کلاس



در هر شکل، بردار c را بر حسب بردارهای a و b بنویسید.



۱- با توجه به بردارهای a و b، بردارهای c و d را رسم کنید.



۲- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (-4) \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -27 \end{bmatrix} \quad (-\frac{1}{2}) \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 22 \end{bmatrix}$$

۳- معادله های مختصات زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} 4x &= \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} & -3x &= \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x &= \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} & x &= \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} & x &= \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} & x &= \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نکته: اگر نیروی $\vec{a}$ از عکس العمل زمین بیشتر باشد جسم داخل سطح شیب دار فرو می رود

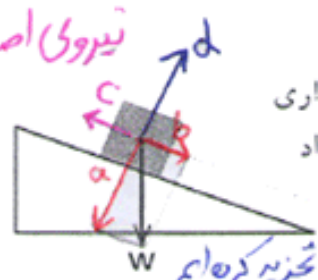
اگر نیروی عکس العمل زمین از نیروی $\vec{a}$ بیش تر باشد جسم به سمت هوا پرتاب می شود

طبق قانون دوم نیوتن این دو نیرو یکدیگر را خنثی می کنند

مثال ۱ نیروی

نکته: هر چه قدر شیب

اگر نیروی اصطکاک زیاد باشد آن گاه نیروی $\vec{b}$ خنثی می شود
جسم حرکت نمی کند



بیش تر باشد مولفه ی نیروی $\vec{b}$ در شکل رویه رو نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم شده تجزیه کنید. بردار وزن $\vec{W}$ را به دو بردار $\vec{a}$ عمود بر سطح و $\vec{b}$ در راستای سطح شیب دار تجزیه کرده ایم

بردار $\vec{a}$ با عکس العمل سطح خنثی می شود (قانون دوم نیوتن) پس جسم در راستای بردار $\vec{b}$ با توجه به بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مختصات بردار $\vec{c}$ را به دست آورید.

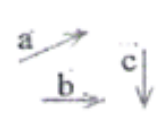
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} \quad \vec{c} = 2\vec{a} + 2\vec{b} \quad \vec{c} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2+4 \\ 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

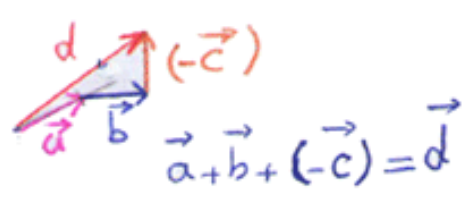
$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 2+0 \\ 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} -2+0 \\ 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۶- با توجه به بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردار $\vec{d}$ را رسم کنید.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$$



$$\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{d}$$

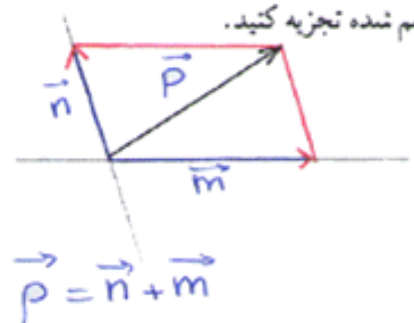
$$2\vec{a} + 2\vec{c} = \vec{e} \\ \vec{e} + (-\vec{b}) = \vec{d}$$



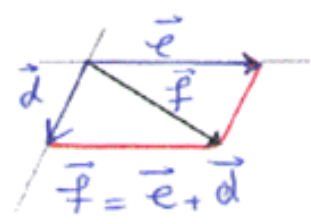
روش اول

روش دوم (به صورت متوالی)

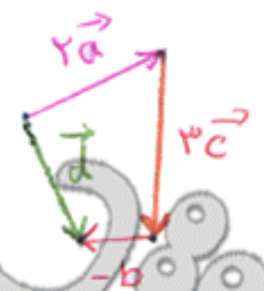
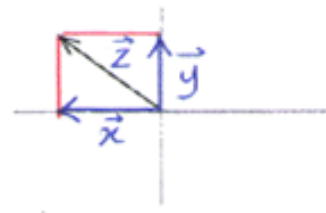
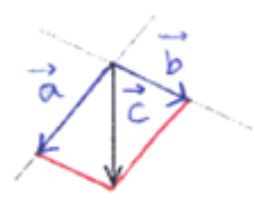
۷- بردارهای داده شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.



$$\vec{p} = \vec{n} + \vec{m}$$



$$\vec{f} = \vec{e} + \vec{d}$$



موسسه تخصصی ریاضیات

بردارهای واحد مختصات

فعالیت

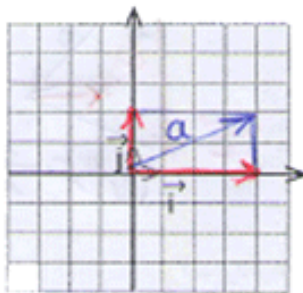
۱- برای اندازه گیری هر یک از مقادیرهای زیر از چه واحدی استفاده می کنیم؟



با توجه به واحد جدید می کنیم

۳- همان طور که ملاحظه کردید، برای اندازه گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم. برای نمایش بردار نیز به واحد نیاز مندیم. این واحد باید

از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه مختصات با دو محور نمایش داده می شود، به واحد روی هر دو محور نیاز داریم. در شکل روبه رو، بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده اند.



• مختصات بردارهای واحد را بنویسید. $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

• بردار $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ را رسم کنید.

• مختصات بردار $\vec{a}$ را بنویسید. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

• مختصات بردار $\vec{a}$ را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

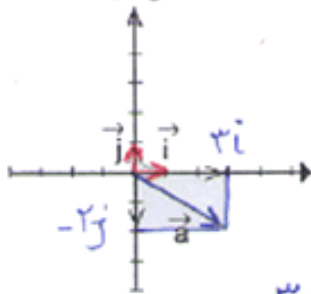
$$\vec{a} = p\vec{i} + q\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

خلاصه درس

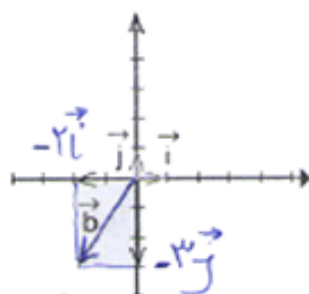
کار در کلاس



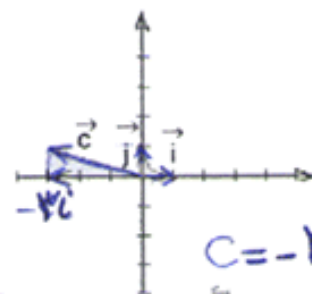
در هر قسمت، بردار داده شده را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.



$$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$



$$\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$



$$\vec{c} = -3\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱- طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{i} + 5\vec{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 2\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad 3\vec{i} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲- دو دانش آموز معادله برداری زیر را حل کرده‌اند. مراحل راه حل آنها را با هم مقایسه کنید.

راه حل حمید	راه حل سعید
$2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$
$2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$
$2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{i} - \vec{j}$	$2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
$2\vec{x} = -8\vec{i}$	$2\vec{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\vec{x} = -4\vec{i}$	$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

۳- معادله‌های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

$$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3\vec{x} = -8\vec{i} + 3\vec{j}$$

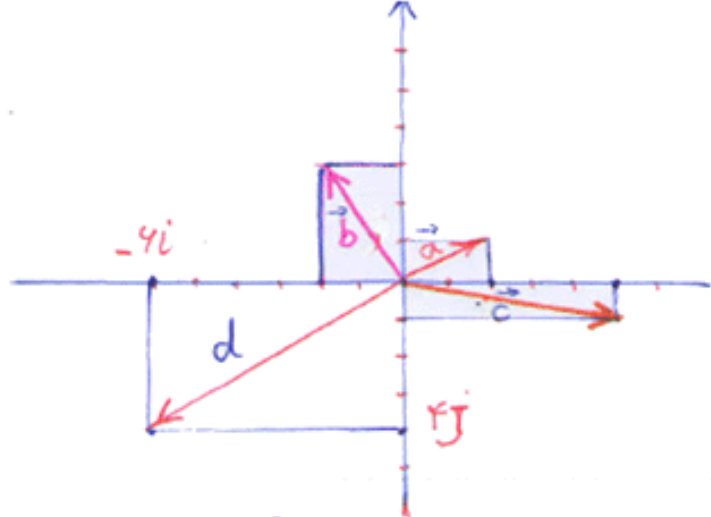
$$\Rightarrow -2\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{-8}{3}\vec{i} + \frac{3}{3}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -8/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}}{-2}$$



کار در کلاس



اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای x و y را به دست آورید.

$$\vec{x} = 5\vec{a} + 2\vec{b} \quad \vec{y} = -3\vec{a} + 4\vec{b} \Rightarrow \vec{y} = -9\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{i} + 4\vec{j} = 3\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{x} = 5(3\vec{i} - 2\vec{j}) + 2(2\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow \vec{x} = 17\vec{i} - 8\vec{j} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \end{bmatrix}$$

۱- طرف دیگر تساوی ها را بنویسید.



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

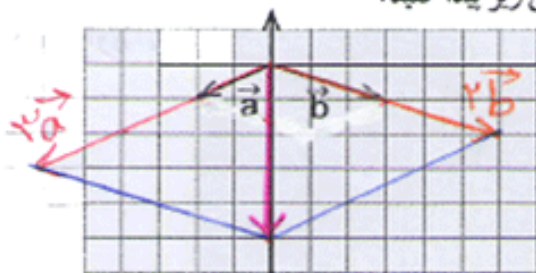
$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = -5\vec{i} \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{j}$$

۲- دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.

بالا $\uparrow$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 5\vec{i} - \vec{j} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} = -6\vec{i} - 4\vec{j}$$

۳- با توجه به شکل زیر، مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید.



الف) رسم شکل و نوشتن مختصات $\vec{c}$ از روی شکل

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

روش هندسی

ب) پیدا کردن مختصات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و قرار دادن آنها در

تساوی زیر.

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ویژگی های هر روش را بیان کنید.

روش جبری

کدام روش برای رایانه ای شدن مناسب تر است؟ چرا؟ روش جبری چون محاسباتی هست

و رایانه کارهای محاسباتی را سریع تر انجام می دهد

همیشه شکل و بدون انجام محاسبات حاصل

جمع دو بردار را بدست آوردن آن از صفحه شطرنجی نباشد و یا طول و عرض بردارها بزرگ یا عددی غیر صحیح و یا گنگ باشد تقریباً روش اول ناکارآمد است روش جبری بسیار سریع تر و کارآمدتر

مختصات ربات پس حرکت n ام
 $\Rightarrow$ مختصات = $\left[\begin{matrix} 1+2+3+\dots+\frac{n}{2} \\ 1+2+3+\dots+\frac{n}{2} \end{matrix} \right]$ اگر n زوج باشد

$\Rightarrow$ مختصات = $\left[\begin{matrix} 1+2+3+\dots+\frac{n+1}{2} \\ 1+2+3+\dots+\frac{n-1}{2} \end{matrix} \right]$ اگر n فرد باشد

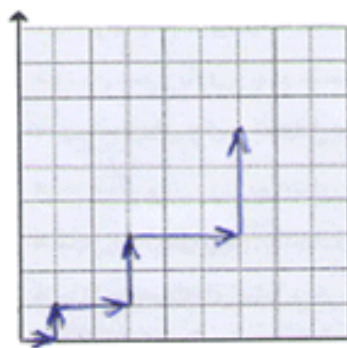
۴- با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تفریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

طول	+	-	+	-
عرض	+	+	-	-
شکل تفریبی				



۵- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، بردار x را از معادله زیر پیدا کنید.

$$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b} \Rightarrow 2\vec{x} - \vec{j} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - (-\vec{i} + 2\vec{j}) \Rightarrow 2\vec{x} = 5\vec{i} - 7\vec{j} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -3.5 \end{bmatrix}$$



۶- یک روبات برنامه ریزی شده به صورت زیر از مبدأ مختصات حرکت می کند.

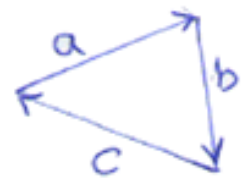


با مشاهده نش حرکت این روبات، الگوی حرکت آن را کشف کنید و توضیح دهید. روبات پس از حرکت دهم، به کدام نقطه می رسد؟

شمار حرکت	۲	۴	۶	...	۱۰
مختصات	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}$
	۱	۱+۲	۱+۲+۳		۱+۲+۳+۴+۵

۷- حمیده با خود فکر می کرد که اگر چند بردار با هم جمع شوند، بردار حاصل جمع از همه آنها بزرگ تر است. آیا او درست فکر کرده است؟ با کشیدن شکل توضیح دهید.

خیر
 معلن است حاصل چند بردار برابر بردار صفر شود
 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

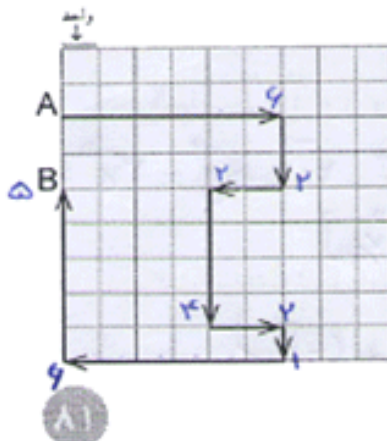


۸- در صفحه شطرنجی زیر، یک خودرو با نقطه A مشخص شده است. این خودرو مسیری را طی کرده است

تا به نقطه B برسد؛ در کل به اندازه چند واحد حرکت کرده است؟

$$4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 1 + 4 + 5 = 28$$

خودرو از نقطه A به B در راستای عمودی چند واحد جابه جا شده است؟ دو واحد



●●● مرور فصل ۵ ●●●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفتند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود آنها را توصیف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

- جمع (برآیند) بردارها
- تجزیه بردار
- ضرب عدد در بردار
- بردارهای واحد مختصات

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه‌ای از درس را بنویسید.

- پیدا کردن جمع دو بردار.
- پیدا کردن برآیند دو بردار که ابتدای آنها یک نقطه باشند.
- نوشتن جمع برداری و جمع مختصاتی
- ضرب یک عدد در بردار
- رسم بردارهای ترکیبی که شامل حاصل جمع مضرب‌های دو بردارند.
- پیدا کردن مختصات بردارهای ترکیبی
- تجزیه یک بردار روی دو امتداد.
- نوشتن مختصات بردار با بردارهای واحد مختصات.
- نمایش بردارهای واحد مختصات به صورت مختصاتی.
- حل کردن معادله‌های شامل بردار.

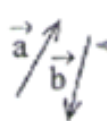
کاربرد

موضوعات این فصل در درس‌های علوم (فیزیک - مکانیک) شما کاربرد زیادی دارد. ضمن آنکه در شاخه‌ای از ریاضیات به نام «جبر خطی و فضای برداری» نیز مطرح می‌شود و به کمک آن می‌توانید مسائل مختلف ریاضی و فیزیک را حل کنید.

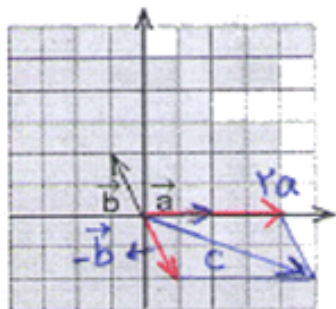
تمرین‌های ترکیبی

اگر بتوانید تمرین‌های زیر را انجام دهید، می‌توانید مطمئن باشید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱- با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید. $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$



۲- اگر $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار x را پیدا کنید.

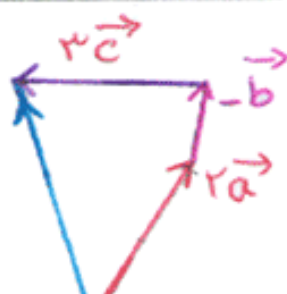


$$2\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{x} \Rightarrow 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{i} - 5\vec{j} = 3\vec{x} \Rightarrow -7\vec{j} = 3\vec{x}$$

$$\vec{x} = -\frac{7}{3}\vec{j} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

۳- با توجه به شکل، مختصات بردار c را پیدا کنید.

$$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{a} + (-\vec{b})$$

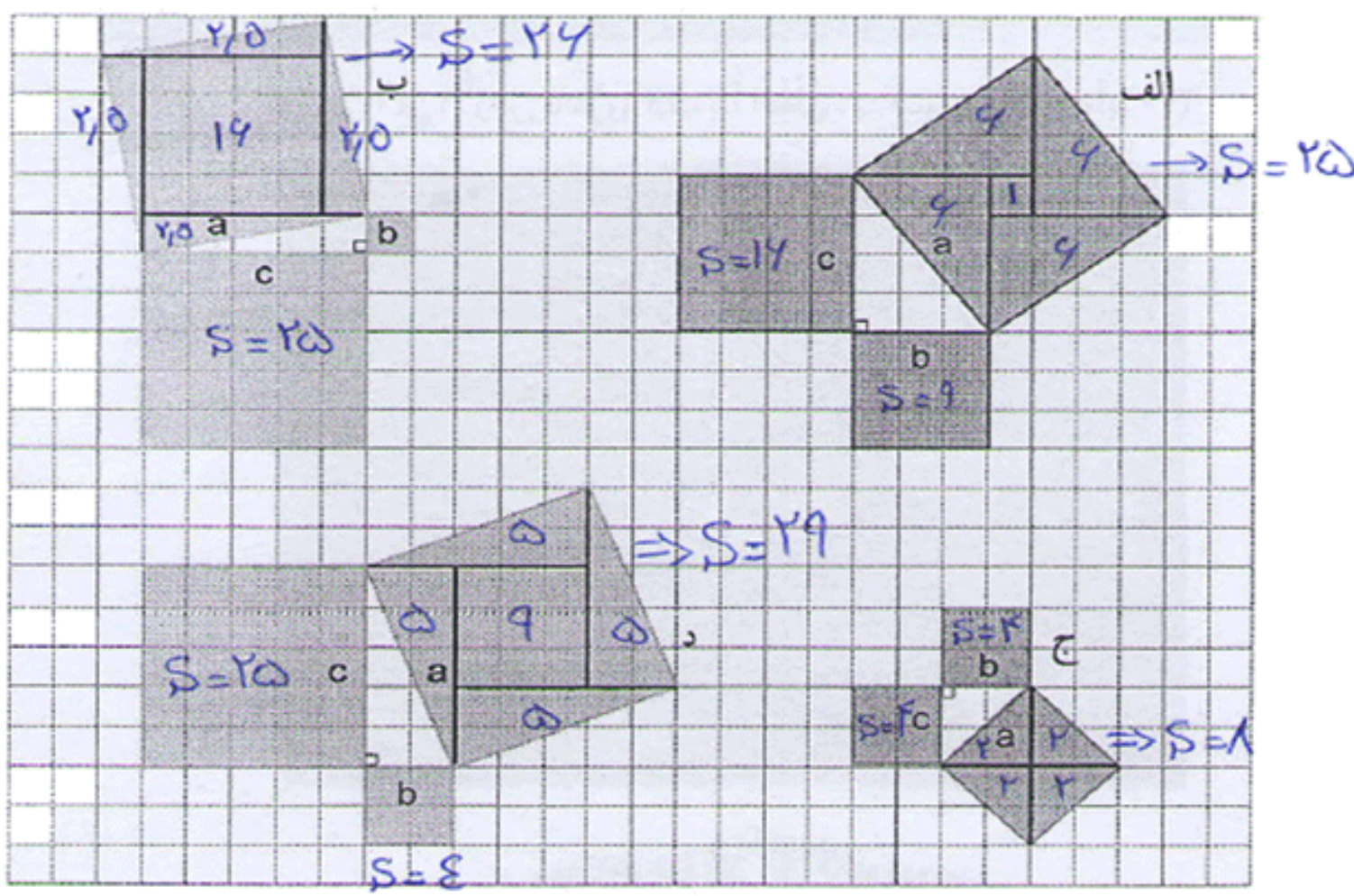


حل سؤال یک

فصل ششم



۱- روی هر ضلع مثلث‌های قائم الزاویه زیر یک مربع رسم کرده‌ایم. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع‌های ساخته شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.



مساحت مربع ساخته شده روی ضلع a (وتر): a^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع b : b^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع c : c^2	
۲۵	۹	۱۶	الف
۵	۱	۴	ب
۸	۴	۴	ج
۲۹	۱۶	۹	د

بین عددهای هر سطر چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

$25 = 9 + 16$, $24 = 1 + 25$

$8 = 4 + 4$, $29 = 4 + 25$

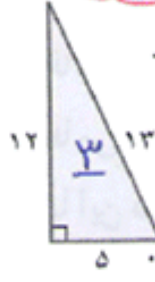
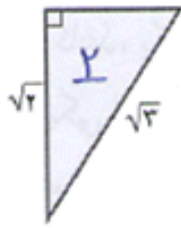
عدد اول هر سطر برابر مجموع دو عدد دیگر همان سطر است

$$\textcircled{1} \left. \begin{aligned} \sqrt{1}^2 + \sqrt{5}^2 &= \sqrt{1}^2 + \sqrt{5}^2 = 1 + 5 = 11 \\ 9^2 &= 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{1}^2 + \sqrt{5}^2 = 9^2$$

$$\textcircled{2} \left. \begin{aligned} 1^2 + \sqrt{2}^2 &= 1 + 2 = 3 \\ \sqrt{3}^2 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$$

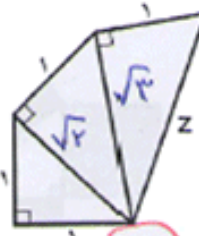
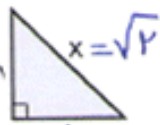
$$\textcircled{3} \left. \begin{aligned} 12^2 + 5^2 &= 144 + 25 = 169 \\ 13^2 &= 169 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12^2 + 5^2 = 13^2$$

کاردر کلاس



۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر بررسی کنید.

۲- به ترتیب طول x ، y و z را به دست آورید.



$$z^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 = 3$$

$$z = \sqrt{3} = 2$$

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

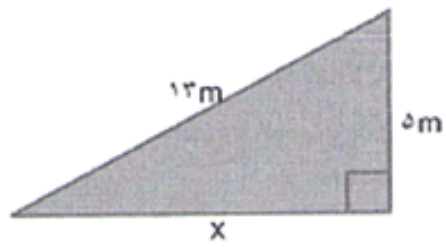
$$y^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

فعالیت



۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را

مانند نمونه پیدا کنید.

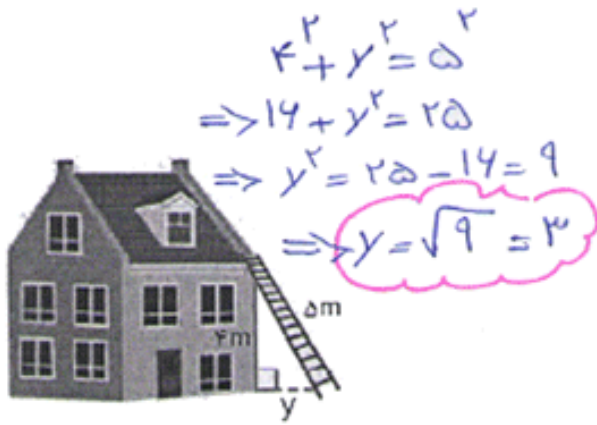


$$13^2 = x^2 + 5^2$$

$$169 = x^2 + 25$$

$$x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$x = 12$$

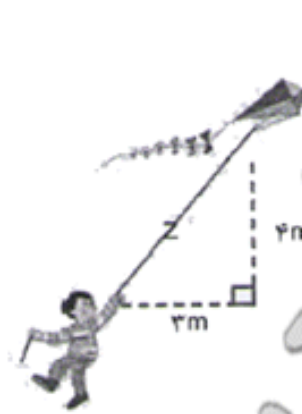


$$4^2 + y^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow 16 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{9} = 3$$



$$z^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow z^2 = 16 + 9$$

$$\Rightarrow z^2 = 25$$

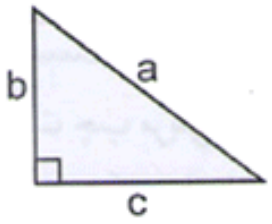
$$\Rightarrow z = \sqrt{25} = 5$$

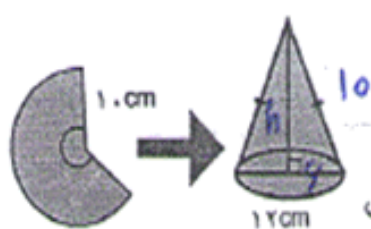
۲- تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$





کار در کلاس



۱- علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی

به قطر قاعده ۱۲ سانتی متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

مؤلف: math-home.ir

$$R = 12 \div 2 = 6$$

$$\Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$$

۲- معلم ریاضی از دانش آموزان خواست پاره خطی به طول $\sqrt{10}$ سانتی متر رسم کنند.

در اینجا پاسخ سه دانش آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و درباره ویژگی‌های

آنها گفت و گو کنید. کدام دانش آموز از روش هندسی و کدام یک از روش حسابی استفاده کرده است؟

روش هندسی (طولانی)

روش حسابی

زهرا:	سپاس:	مهسا:
به همین ترتیب، ساختن مثلث‌های قائم الزاویه را ادامه می‌دهم تا $\sqrt{10}$ ساخته شود.	مثلثی قائم الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ سانتی متر رسم می‌کنم. $1^2 + 3^2 = 10$ پس وتر آن $\sqrt{10}$ سانتی متر خواهد شد.	به کمک ماشین حساب $\sqrt{10}$ را حساب می‌کنم. $\sqrt{10} \approx 3.16$ حالا به کمک خط کش یک پاره خط به طول تقریباً 3.1 سانتی متر رسم می‌کنم.

روش مهسا ساده $\Rightarrow$

ولی به صورت تقریبی

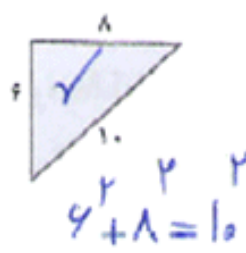
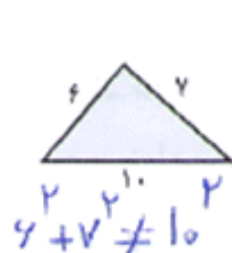
است و از رقم‌های بود

از صدم صرف نظر شده است

تمرین: روش خلاقیت (سخت)

۱- محیط مثلث ABC را حساب کنید.

۲- کدام مثلث قائم الزاویه است؟



$$AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

$$\Rightarrow AC = 13$$

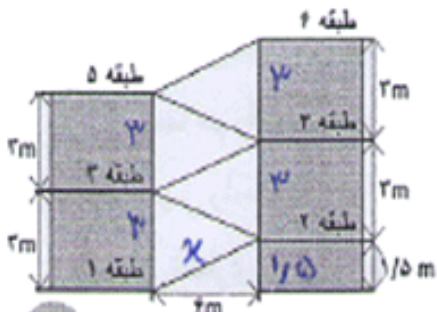
$$BD^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow BD = 9$$

$$BC = 13$$

۲- شکل رو به رو نمایی از یک پارکینگ طبقاتی را

نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه

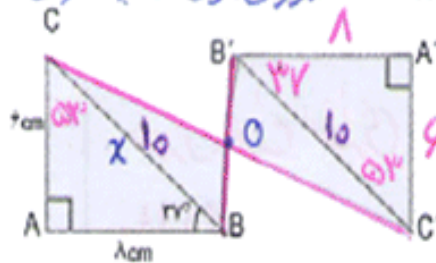
بعدی می‌رساند، چقدر است؟



$$x^2 = 1.5^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 2.25 + 16 \Rightarrow x = \sqrt{18.25} \approx 4.27$$

دوران حول ۵ به اندازه ۱۸۰ درجه

فعالیت



۱- در شکل مقابل $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

اندازه برخی ضلع ها و زاویه ها نوشته شده است.

اندازه ضلع ها و زاویه های دیگر را به دست آورید.

$$BC'^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow BC = \sqrt{100} = 10$$

۲- چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی

افقی قرینه کرده ایم و چهارضلعی HIJK

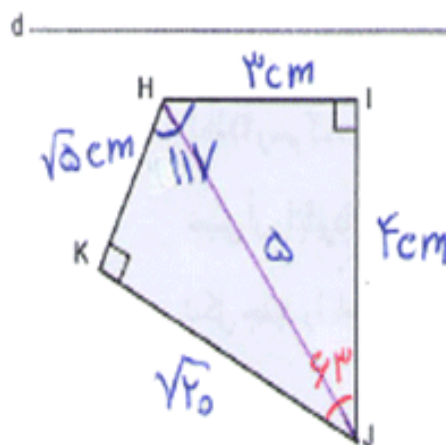
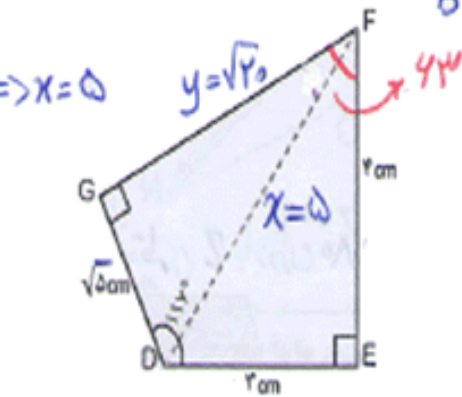
را به دست آورده ایم. اندازه برخی از ضلع ها

و زاویه ها معلوم است.

اندازه ضلع ها و زاویه های دیگر این چهارضلعی

را به دست آورید.

$$\hat{F} = 360 - (90 + 90 + 117) = \hat{F} = 63$$



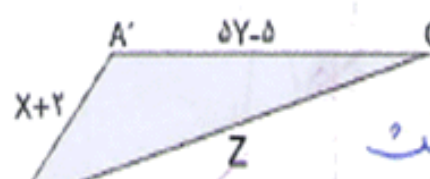
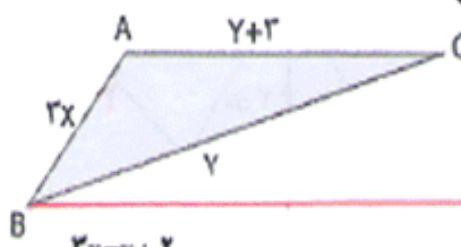
در باره رابطه هایی که از آنها در این دو سؤال

استفاده کرده اید، با هم گفت و گو کنید.

کلامی

۳- مثلث ABC را می توان با انتقال، بر مثلث A'B'C' منطبق کرد.

مانند نمونه، با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع های مثلث ها را به دست آورید.



$$2x = x + 2$$

$$2x - x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 1$$

$$AB = 2x = 2$$

$$A'B' = x + 2 = 3$$

$$AC = A'C' \Rightarrow$$

$$y + 3 = 5y - 5 \Rightarrow 4 = 4y \Rightarrow y = 1$$

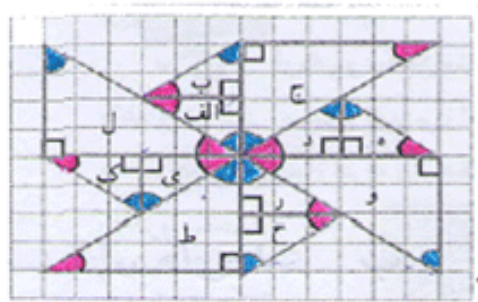
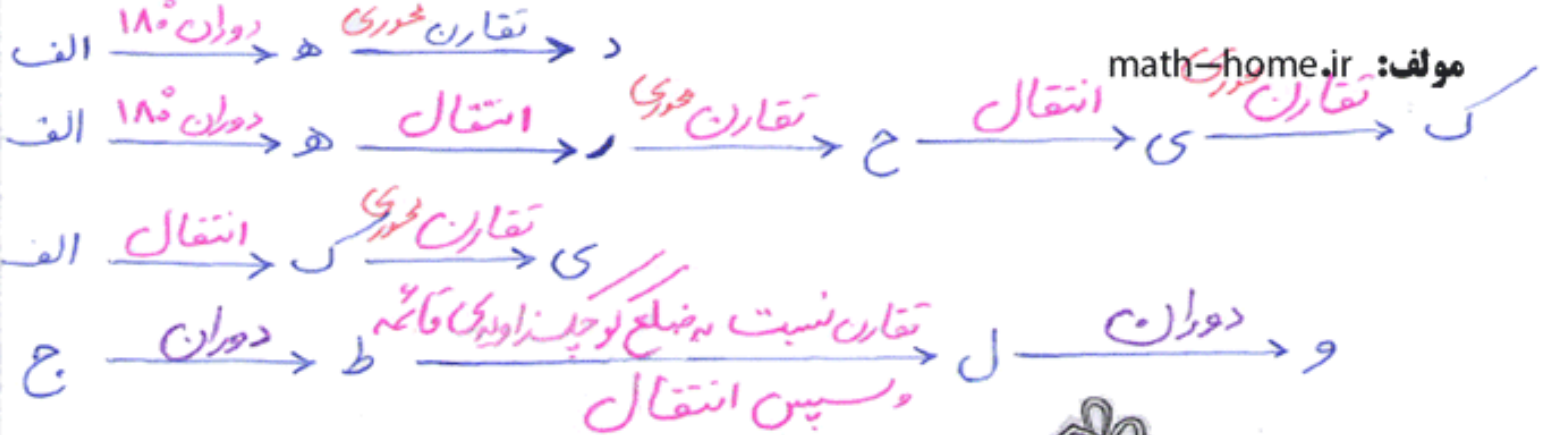
$$AC = 5, A'C' = 5$$

$$BC = B'C' \Rightarrow z = 7$$

مثلث ABC با

انتقال BB' بر روی مثلث

A'B'C' منطبق می شود



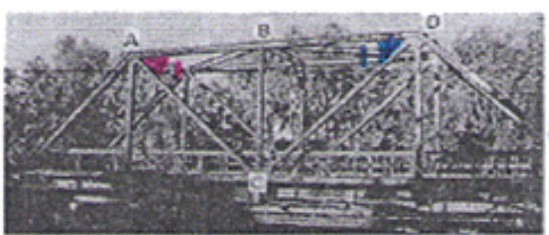
تمرین
۱- در شکل رو به رو زاویه های مساوی را با رنگ های یکسان مشخص کرده ایم. کدام مثلث ها با مثلث الف هم نهشت اند؟ مانند نمونه مشخص کنید که با چه تبدیل یا تبدیلی می توان مثلث الف را بر مثلث های هم نهشت با آن منطبق کرد. چهار مورد دیگر بنویسید. پاسخ هایتان را با پاسخ های دوستانتان مقایسه کنید.

جواب: مثلث های ب، ی، ک، و، ح، ه و د با الف هم نهشت هستند

(الف) $\xleftarrow{\text{تقارن عمودی}}$ (ب) $\xleftarrow{\text{انتقال}}$ (د) (الف) $\xleftarrow{\text{دوران } 180^\circ}$ (ه)

۲- سازه های مثلثی که در این پل به کار رفته اند، توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری زیادی را دارند و مانع خمیدگی پل می شوند.

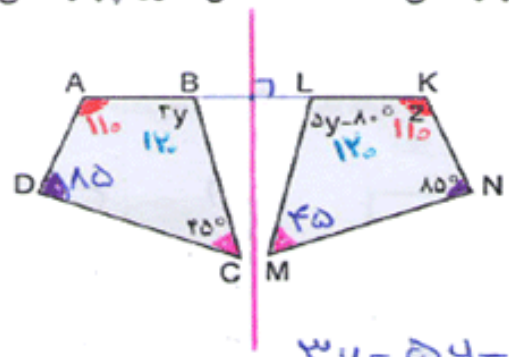
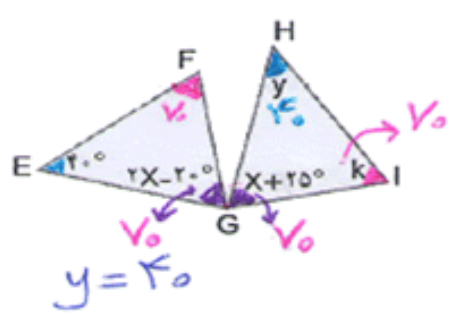
ایهام دارد



می دانیم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$
الف) کدام زاویه مثلث ABC روی ضلع BC است؟
ب) کدام زاویه مثلث BCD روی ضلع BC است؟

در مثلث های هم نهشت زاویه های روی رو به اضلاع مساوی، با هم مساوی اند

۳- زاویه های مجهول را بیابید.
الف) مثلث HIG حاصل دوران 90° EFG حول نقطه G است.
ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



$$y = 40$$

$$2x - 20 = x + 20$$

$$x = 40$$

$$\hat{F} = \hat{I} \Rightarrow k = 110 - (40 + 40)$$

$$\Rightarrow k = 70$$

$$3y = 5y - 10$$

$$\Rightarrow 10 = 2y \Rightarrow 40 = y$$

$$\hat{B} = \hat{L} = 120$$

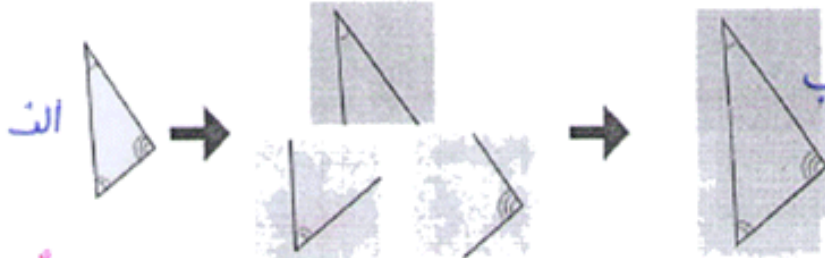
$$z = 340 - (120 + 150 + 45) = 110$$

مثلث های هم نهشت

فعالیت

نتیجه: با مساوی بودن سه زاویه می توان هم نهشتی دو مثلث را نتیجه گرفت

آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت های هندسه بودند. معلم ریاضی مثلثی روی کاغذ رسم کرد. سپس، تصویر زاویه های آن را روی سه برگه کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به کمک هم مثلثی بسازند که زاویه هایش با آن سه زاویه برابر باشند. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب رویه رو ساختند.

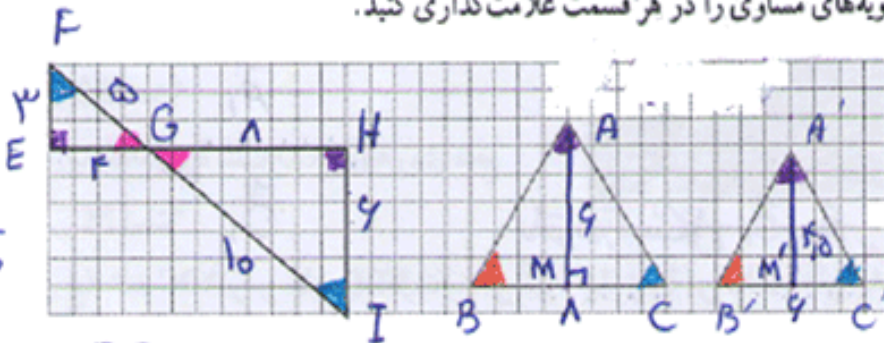


زاویه های مثلث ب با زاویه های مثلث ب
الف برابر است ولی اضلاع آن بزرگتر
از اضلاع مثلث الف است

فکر می کنید مثلثی که آنها ساخته اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم نهشت است؟
آیا آنها می توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم نهشت باشد؟
خیر (در کلاس) با این روش، ضریبی توانند

کاردر کلاس سه زاویه مساوی است اما اضلاعها برابر نیست

۱- زاویه های مساوی را در هر قسمت علامت گذاری کنید.



$$\begin{aligned} \angle A &= \angle A' \\ \angle B &= \angle B' \\ \angle C &= \angle C' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{HI} = \frac{EG}{GH} = \frac{FG}{IG}$$

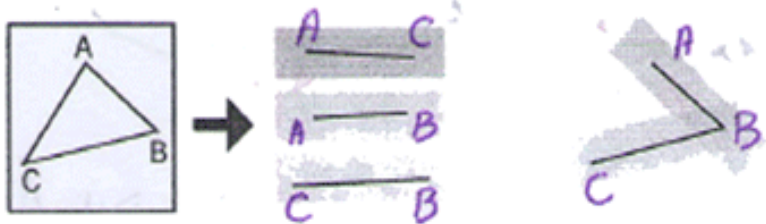
۲- شکل های سؤال قبل را نام گذاری کنید و تساوی زاویه ها را بنویسید.

$$\frac{A}{4} = \frac{4}{10} \Rightarrow$$

فعالیت

۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر ضلع های آن را روی

سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن گاه از بچه ها خواست مثلثی بسازند که ضلع هایش با این سه ضلع برابر باشند.



نتیجه: اگر اضلاع دو مثلث تطبیق پذیر مساوی باشند آن گاه می توان نتیجه گرفت
آن دو مثلث هم نهشت می باشند



۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت

هم‌نهشتی را بنویسید.

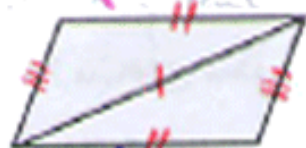


۲- در هر شکل، مساوی بودن برخی از اجزای دو مثلث را می‌توان از روابط میان باره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص نتیجه گرفت. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت‌گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.

(زاویه، ضلع، ضلع، ضلع) ، (ضلع، ضلع، ضلع)



الف) هر دو مثلث مساوی الاضلاع‌اند.
(ضلع، ضلع، ضلع)



ب) قطر متوازی الاضلاع رسم شده است.

(ضلع، ضلع، ضلع، ضلع) ، (زاویه، ضلع، ضلع) ، (ضلع، ضلع، ضلع)



ج) دو قطر یکدیگر را در مرکز مشترک دو دایره قطع کرده‌اند.

(ضلع، ضلع، ضلع)

۳- شکل روبه‌رو کدام نسبت را نمایش می‌دهد؟

اگر دو زاویه و یک ضلع غیر بین از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیر بین از مثلثی دیگر برابر باشند، الف) دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند.

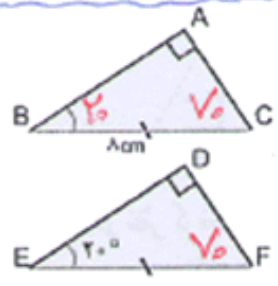
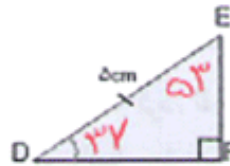
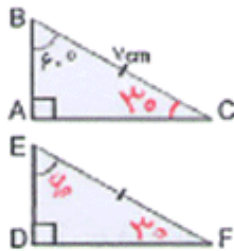
ب) ممکن است دو مثلث هم‌نهشت نباشند. ✓





۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.

← (از من، ز)



زاویه دیگر هر یک از مثلث ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ در چه حالتی؟
۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر است. آیا می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ چرا؟ توضیح دهید.
نابست کنیم زاویه سوم نیز مساوی است پس به حالت دو حالت دیگر برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه :
• برابری وتر و یک ضلع
• برابری وتر و یک زاویه تند
یا به اختصار (وز)
یا به اختصار (وز)

کاردر کلاس



۱- از نقطه M، وسط پاره خط AB، بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده ایم. **کلاهی**

دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم نهشت اند؟

وتر و یک زاویه تند (وز)

۲- در شکل روبه رو، هر شاترزه زاویه کوچک وسط شکل با هم

مساوی و هشت پاره خط آبی نیز با هم مساوی اند. **کلاهی**

شاترزه مثلث قائم الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم نهشت اند؟

وتر و یک زاویه تند (وز)

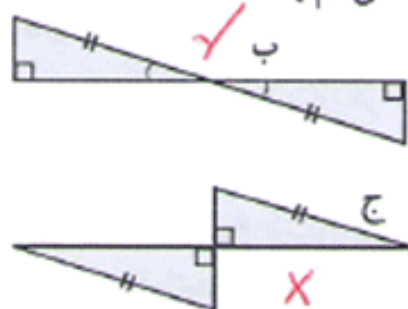
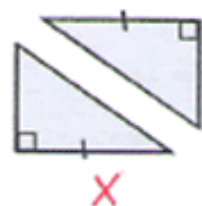


تمرین



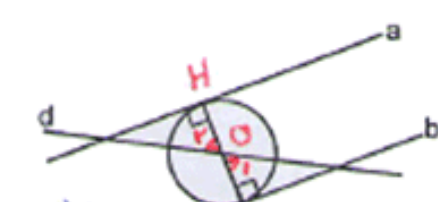
۱- در هر شکل، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم نهشت‌اند.

وتر و یک زاویه قائمه



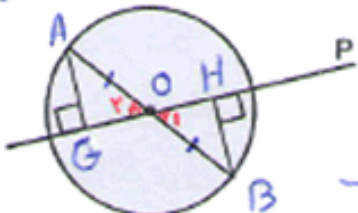
وتر و یک زاویه قائمه

۲- در هر شکل، از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص می‌توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزای دو مثلث با هم مساوی‌اند. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.

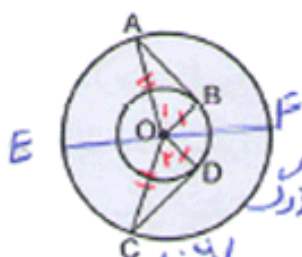


الف) خط d از مرکز دایره می‌گذرد و دو خط a و b بر قطر دایره عمودند. ① $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ متقابل به راس ② $OH = OH$ شعاع‌های دایره ③ $\hat{H} = \hat{G} = 90^\circ$

نتیجه می‌دهد دو مثلث به حالت (ز، ض، ز) با هم هم نهشت می‌باشند ①، ②، ③



ب) خط p از مرکز دایره گذشته است. ① $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ متقابل به راس ② $OA = OB$ شعاع‌های دایره ③ $\hat{H} = \hat{G} = 90^\circ$ نتیجه می‌دهد دو مثلث به حالت (ز، ض، ز) با هم هم نهشت می‌باشند



ج) نقطه O مرکز مشترک دو دایره و پاره‌خط‌های AB و CD بر دایره کوچک مماس می‌باشند. ① $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ ② $OB = OD$ شعاع‌های دایره کوچک ③ $OA = OC$ شعاع‌های دایره بزرگ نتیجه می‌دهد دو مثلث به حالت (و، ض، و) با هم هم نهشت می‌باشند ①، ②، ③

۳- در هریک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید یک مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث دیگر منطبق کرد.

الف ← دوران 180° نسبت به نقطه O
ب ← دوران 180° نسبت به نقطه O
ج ← تقارن نسبت به قطر EF

$$n \text{ زوج باشد} \Rightarrow \text{محيط} = 2 \times 5 + 4n = 4n + 10$$

$$n \text{ فرد باشد} \Rightarrow \text{محيط} = 5 + 2 + 4n = 4n + 7$$

●●●●● مرور فصل ۶ ●●●●●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل در راه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید. برای هر کدام مثالی بزنید.

• اجزای متناظر

• رابطه فیثاغورس

• حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث

• هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درسی را بنویسید.

• پیدا کردن ضلع مجهول مثلث قائم‌الزاویه

• بررسی قائم‌الزاویه بودن مثلث با داشتن سه ضلع آن

• نوشتن اجزای متناظر دو شکل هم‌نهشت

• هم‌نهشتی دو مثلث در حالت سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین و حالت دو زاویه و ضلع بین

• هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت وتر و یک زاویه و حالت وتر و یک ضلع

• حل مسئله‌های مربوط به هم‌نهشتی مثلث‌ها به کمک حالت‌های بالا

کاربرد

در نقشه‌های مهندسی و برای پیدا کردن اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های مجهول، از هم‌نهشتی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر استفاده می‌کنیم.

$$x^2 = 15^2 + 55^2 \Rightarrow x = \sqrt{3250} \approx 57.001$$

تمرین‌های ترکیبی



۱- در شکل رویه رو سطح نیب‌داری را می‌بینید.

طول این سطح نیب‌دار را به دست آورید.

۲- الگوی زیر با مثلث‌های هم‌نهشت ساخته می‌شود.

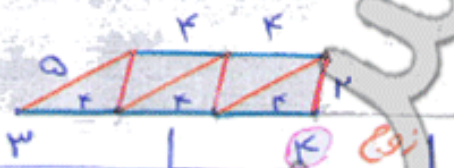
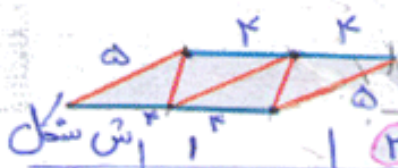
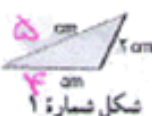
اصلاح شود

الف) دو شکل بعدی را رسم کنید.

ب) محیط هر شکل را پیدا کنید.

ج) محیط شکل شماره ۶ چقدر می‌شود؟

د) محیط شکل شماره ۷ چقدر؟



شکل	۱	۲	۳	۴	۵
محیط	$5 + 2 + 2 = 9$	$2 \times 5 + 2 \times 2 = 14$	$5 + 2 \times 2 + 2 = 11$	$2 \times 5 + 2 \times 2 = 14$	$5 + 2 + 5 \times 2 = 17$

فصل ہفتم

یادآوری در سال گذشته ضرب دو عدد توان دار با پایه های مساوی و نیز توان های مساوی را یاد گرفتید. این قواعد را با نمادهای ریاضی به صورت زیر می نویسیم.
اگر a عددی دلخواه و m, n دو عدد طبیعی باشند:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

(با برای سادگی: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ و $a^m \cdot b^m = (ab)^m$)

برای آمادگی بیشتر، تمرین های زیر را انجام دهید.

۱- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\begin{aligned} 2^6 \times 2^2 &= 2^8 & \left(-\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 &= \left(-\frac{2}{3}\right)^{12} & 8^2 \times 2^2 &= 16^3 & (-6)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 &= (-3)^4 = 3^4 \\ 2^5 \times 3^4 \times 6^5 \times 4^2 &= 12^7 & 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times 81 &= 3^5 & 2^2 \times 16^2 &= 72^2 & 2^2 \times 8^5 \times 4^2 &= 1^1 \end{aligned}$$

جواب با مسئله اصلی $a^m b^n$

۲- حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان دار بنویسید. اصلاح شود

$$\begin{aligned} a^2 \times a^8 &= a^{10} & x^4 \times y^4 &= (x \cdot y)^4 & (ab)^3 \times a^3 \times b^3 &= a^3 \times b^3 \times a^3 \times b^3 = a^6 \cdot b^6 = (ab)^6 \\ (xy)^2 \times (xy)^5 &= (xy)^7 & 120 \times 18^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 &= 10^3 & 4a \times (2a)^3 \times 2a^3 &= 2 \times a \times 2^3 a^3 \times 2a^3 = 2^7 \times a^7 = (2a)^7 \end{aligned}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2a)^3}{a^3} = 2^3 = 8$$

۳- حجم مکعبی به ضلع $2a$ چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است؟

۴- جاهای خالی را با عددها و حرف های مناسب پر کنید.

$$18^5 = (6 \times 3)^5 \quad a^4 = a^2 \times a^2 \quad 7^0 \times 4^0 = 4^0$$

$$\left(-\frac{7}{4}\right)^4 \times \left(-\frac{7}{4}\right)^2 = \left(-\frac{7}{4}\right)^6 \quad (4 \times 3)^6 = 4^6 \times 3^6$$

جواب اصلی

می توانیم با سه بار در ۴

$$\begin{aligned} 2^4 \times 4^4 &= 2^4 \times (2^2)^4 = 2^4 \times 2^8 = 2^{12} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times 2^4 &= \left(\frac{1}{2^2}\right)^4 \times 2^4 = \frac{1}{2^8} \times 2^4 = \frac{1}{2^4} \end{aligned}$$



صادق ← ضرب اعداد توان دار با پایه‌های برابر **بهر روز** ← ابتدا حاصل $2^3 = 8$ را بدست آورده و از

تعریف توان استفاده کرده **بهرام** ← ابتدا کار بهر روز و سپس هر دو تا $8 \times 8 = 64$ را بدست آورده و در نهایت

از تعریف توان **هادی** ← قانون ضرب اعداد توان دار را روی هر دو عدد انجام داده و در نهایت دوباره از همان

قانون کمک گرفته است **مجید** ← هر دو با عدد را با قانون ضرب اعداد توان دار **با توان‌های مساوی** محاسبه کرده و در

تنوع روش‌ها



حاصل عبارت $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2$ را پنج دانش آموز به صورت یک عدد توان دار حساب

کرده‌اند. راه حل هر دانش آموز را توضیح دهید و تفاوت آنها را بیان کنید. **کرامی**

صادق: قانون ضرب اعداد توان دار $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2+2} = 2^8$

بهر روز: چون $2^3 = 8$ و قانون ضرب $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

بهرام: $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4 \times 4^4 = 64^2$

هادی: $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^6 \times 2^6 = 2^{12}$

مجید: $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 4^2 \times 4^2 = 16^2$

با محاسبه، نشان دهید که تساوی‌های زیر درست‌اند: (می‌توانید از ماشین حساب کمک

بگیرید.) $8^4 = 4096$

$8^4 = 64^2 = 16^3 = 2^{12} = 4096$ و $4^4 = 4096$ و ...

توضیح دهید که تساوی زیر چگونه به دست آمده است. عدد 2^3 در ضرب با خودش 4 بار تکرار شده

قانون ضرب اعداد توان دار

$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = (2^2)^4$ $\square \times \square \times \square \times \square = \square$

با مقایسه این تساوی و تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت: $(2^2)^4 = 2^{12}$ **بله**

اکنون، درستی تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید. $(7^2)^5 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2 = 7^{10}$

$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$(-2^3)^7 = (-2)^{21}$ $(a^2)^4 = a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 = a^8$

$(-2^3)^7 = [(-2)^3]^7 = (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 = (-2)^{21}$

آنچه را فرا گرفته‌اید، به صورت یک قانون کلی بیان کنید.

$(a^m)^n = a^{mn}$

برای به توان رساندن یک عدد توان دار

می‌توانیم پایه آن عدد را به توان حاصل ضرب توان‌ها برسانیم

$$20 - 4(2 \times 4^2) = 20 - 4 \times 32 = -108$$



۱- مقدار عددی عبارت $a - b(cx \times b^2)$ را به ازای $a=20$ ، $b=4$ و $c=2$ به دست آورید.

۲- حجم مکعبی به ضلع ۸cm را به صورت یک عدد توان دار، که پایه آن عدد ۲

باشد، بنویسید.

$$27 = 3^3$$

$$9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$$

$$27 \times 9^5 = 3^3 \times 3^{10} = 3^{13}$$

۳- بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۴- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید و در صورت امکان، به شکل یک

عبارت توان دار بنویسید.

$$[(-3^2)]^2 = (-9)^2 = 81 = 3^4$$

$$[(3^2)]^2 = 9^2 = 81 = 3^4$$

$$2^5 \times 2^2 \times 3^7 \times 6^2 = 2^9 \times 3^9 = 6^{10}$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$2^{20} \times 2^{20} \times 2^{20} = 2^{60}$$

$$(x^3)^5 \cdot (y^2)^4 \cdot x^2 y^4 = x^{15} y^8 \cdot x^2 y^4 = x^{17} y^{12}$$

۵ و ۶ و ۸ و ...

۵- کدام عدد های طبیعی را می توان به جای $\square$ نوشت تا نامساوی زیر درست باشد؟

عددهای زوج بزرگ تر از ۲

$$(-2)^{\square} > 15$$

۶- حاصل $2^7 + 2^7$ و حاصل $3^5 + 3^5 + 3^5$ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۷- عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را طوری در جاهای خالی قرار دهید که یک تساوی درست به دست

آید. (از هر چهار عدد استفاده کنید.)

$$(\square) \times (\square)^2 = (5)^2 - (\square)^{\square}$$

۸- مقدار عددی عبارت های زیر را به ازای $a=6$ و $b=-2$ و $c=-4$ به دست آورید.

$$\text{الف) } -2(a + b^2) + \frac{c^2}{b} = -2(6 + 4) + \frac{16}{-2} = -20 - 8 = -28$$

$$\text{ب) } \left(\frac{a}{b}\right)^2 + bc - 10 = \left(\frac{6}{-2}\right)^2 + (-2)(-4) - 10 = 9 + 8 - 10 = 7$$

۱-۵

$$\underbrace{a^n + a^n + a^n + \dots + a^n}_{\text{تعداد } a} = a \times a^n = a^{n+1}$$

نکته

$$20 - 4(2 \times 3^2) = 20 - 4 \times 3^2 = -108$$

تمرین



۱- مقدار عددی عبارت $a - b(cx \times b^c)$ را به ازای $a=20$ ، $b=4$ و $c=2$ به دست آورید.

۲- حجم مکعبی به ضلع 8cm را به صورت یک عدد توان دار، که پایه آن عدد ۲

باشد، بنویسید.

$$27 = 3^3$$

$$9 = (3^2)^5 = 3^{10}$$

$$27 \times 9^5 = 3^3 \times 3^{10} = 3^{13}$$

$$V = 8^3 = (2^3)^3 = 2^9$$

۳- بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۴- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید و در صورت امکان، به شکل یک

عبارت توان دار بنویسید.

اینج توان منفی را از بین ببر

$$[(-3^2)]^2 = (-9)^2 = 81 = 3^4$$

$$[(3^2)]^2 = 9^2 = 81 = 3^4$$

$$2^5 \times 2^2 \times 3^2 \times 6^2 = 2^5 \times 2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 3^2 = 2^{11} \times 3^4$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \left(-\frac{1}{6}\right)^3$$

$$2^{20} \times 2^{20} \times 2^{20} = 2^{60}$$

$$(x^3)^5 \cdot (y^2)^3 \cdot x^2 y^4 = x^{15} y^6 x^2 y^4 = x^{17} y^{10}$$

۴، ۶، ۸، ...

۵- کدام عددهای طبیعی را می توان به جای $\square$ نوشت تا نامساوی زیر درست باشد؟

$$(-2) \square > 15$$

عددهای زوج بزرگ تر از ۲

$$2 \times 2^7 = 2^8$$

$$3 \times 3^5 = 3^6$$

۶- حاصل $2^7 + 2^7$ و حاصل $3^5 + 3^5 + 3^5$ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۷- عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را طوری در جاهای خالی قرار دهید که یک تساوی درست به دست

آید. (از هر چهار عدد استفاده کنید).

$$(3) \times ((2))^{-2} = (5)^2 - ((1))^{(2)}$$

۸- مقدار عددی عبارت های زیر را به ازای $a=6$ و $b=-2$ و $c=-4$ به دست آورید.

$$\text{الف)} -2(a + b^2) + \frac{c^2}{b} = -2(6 + (-2)^2) + \frac{(-4)^2}{-2} = -2(6 + 4) + \frac{16}{-2} = -20 - 8 = -28$$

$$\text{ب)} \left(\frac{a}{b}\right)^2 + bc - 10 = \left(\frac{6}{-2}\right)^2 + (-2)(-4) - 10 = 9 + 8 - 10 = 7$$

۱۰۵

$$\underbrace{a^n + a^n + a^n + \dots + a^n}_{\text{تعداد } a \text{ تا}} = a \times a^n = a^{n+1}$$

نکته

باید همدیگر تقسیم شوند

$$8^5 \div 2^5 = (8 \div 2)^5 = 4^5$$

با توجه به مثال های بالا، توضیح دهید تساوی $8^5 : 2^5 = 4^5$ چگونه به دست آمده است.

اکنون، برای تقسیم دو عدد توان دار با توان های مساوی قانون زیر را کامل کنید.

در تقسیم اعداد توان دار با پایه های مساوی بسی از توان ها را می نویسیم و باید همدیگر تقسیم می کنیم

به کمک قانونی که نوشته اید، حاصل تقسیم های زیر را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$6^8 : 3^8 = \left(\frac{6}{3}\right)^8 = 2^8$$

$$(-2)^4 : (-3)^4 = \left(\frac{-2}{-3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

اکنون قانون فوق را با نمادهای ریاضی هم نشان دهید.

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

a و b دو عدد دلخواه و m یک عدد طبیعی و $b \neq 0$

$$5^7 \div 3^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^7$$

$$14^2 \div 7^2 = \left(\frac{14}{7}\right)^2 = 2^2$$

$$(-8)^0 \div (-2)^0 = \left(\frac{-8}{-2}\right)^0 = 4^0$$

$$9^2 \div 27^2 = \left(\frac{9}{27}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید و در صورت امکان، پاسخ را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$5^7 \times 3^2 \times 2^7 \times 3^2 = 10^7 \times 3^4 = 30^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

مؤلف: math-home.ir

$$\frac{3^7 \times 3^5}{6^{10} \times 5^{10}} = \frac{3^{12}}{3^{10} \times 5^{10}} = \frac{3^2}{5^{10}}$$

$$\frac{(a^2)^7}{a^7} = \frac{a^{14}}{a^7} = a^7$$

$$\frac{(x^2)^5 \times x^7}{x^{11}} = \frac{x^{10} \times x^7}{x^{11}} = \frac{x^{17}}{x^{11}} = x^6$$

$$(a^3)^{6-1} = (a^3)^5 = a^{15}$$



۱- هر یک از عددهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$$81 = 3^4$$

$$-8 = (-2)^3$$

$$1024 = 2^{10}$$

$$\frac{125}{729} = \left(\frac{5}{9}\right)^3$$

$$\frac{1}{512} = \left(\frac{1}{8}\right)^9$$

$$-\frac{1}{32} = \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

۲- کدام عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟ توضیح دهید.

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4} \quad \text{نادرست}$$

$$\left(\frac{5}{11}\right)^0 = 0 \quad \text{نادرست}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \quad \text{نادرست}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \quad \text{درست}$$

$$10^2 \times 10^4 = 10^{12} \quad \text{نادرست}$$

$$(-2)^2 \times (-2) = 16 \quad \text{درست}$$

۱۰۸

۳- حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3^{10} = \frac{1^2 \times 3^{10}}{3^2} = 3^8$$

$$\frac{5^6 \times 6^2}{5^4 \times 6^5} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\frac{x^7 \times y^2}{x^5 \times y^2} = x^2 y^0 = (xy)^2$$

۴- در جاهای خالی عدد مناسب بگذارید.

$$3^5 \times 3^4 = 3^9 \quad 5+4=9$$

$$(7^2)^3 = 7^6 \quad 2 \times 3=6$$

$$\frac{4^2 \times 4^3}{4^2 \times 4^1} = 4^2 \quad 4+3-2=5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^7 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad 7-5=2$$

$$\frac{(-6)^4}{(-6)^2} = (-6)^2 \quad 4-2=2$$

۵- عددهای زیر را از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید. $3, 5, (-1), \left(\frac{1}{4}\right)^5, 2, (-4), (-1)^5, 0, \left(\frac{1}{3}\right)^5$

$$6^5, 1^{12}, -4^2, (-1)^5, 0, \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

۶- کدام تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

$$(\sqrt{5})^2 = 25 \quad \text{نادرست}$$

$$(\sqrt{5})^2 = 5 \quad \text{درست}$$

$$(\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})^2 \quad \text{درست}$$

$$+\sqrt{5} = -\sqrt{5} \quad \text{نادرست}$$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-10^2)^2 = (-100)^2 = 10000$$

$$(ab)^2 = a^2 b^2$$

$$(x^2 y^2)^2 = x^4 y^4$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^5 = \frac{x^{10}}{y^5} = x^{10} y^{-5}$$

$$[256 \div (-3)^5] \div [(-2)^5 \times (-3)^5] = (-12) \div (+6) = (-2)^5 = -32$$

۸- نصف 2^9 و ربع 4^7 را به صورت عددهای توان‌دار بنویسید.

$$2^9 \text{ نصف} = 2^9 \div 2 = 2^8$$

$$4^7 \text{ ربع} = \frac{1}{4} \times 4^7 = 4^6$$

۱- با پرکردن جاهای خالی، مقدار $\sqrt{2}$ و $\sqrt{400}$ را به صورت تقریبی تا یک رقم اعشار به دست آورید. نتیجه را با آنچه ماشین حساب به دست می آورد، مقایسه کنید.

(الف) $\sqrt{4} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$
 پس: $1 < \sqrt{2} < 2$

اکنون با نصف کردن فاصله ۱ تا ۲ روی محور، عدد $1/5$ را آزمایش می کنیم.
 چون $(1/5)^2 = 2/25 = 0.08$ ، پس مقدار $\sqrt{2}$ حتماً کمتر از $1/5$ است.

عدد	۱/۳	۱/۴	۱/۵
مقدار	۱/۶۹	۱/۹۶	۲/۲۵

مؤلف: math-home.ir

$\sqrt{2} = 1,4$

به کمک جدول بالا می توان نوشت:

$\sqrt{225} > \sqrt{200} > \sqrt{196}$

بنابراین: $15 < \sqrt{200} < 14$

خلاصه درس: ابتدا دست در آوریم خبر عدد بین کدام دو عدد طبیعی هست

سپس جدول میانگین آن دو عدد را دست در آوریم برای مثال $5 < \sqrt{34} < 6$
 $5 < \sqrt{34} < 6 \Rightarrow 5^2 = 25 < 34 < 6^2 = 36$ **مقدور**
 $\frac{5+6}{2} = 5,5 \rightarrow 5,5^2 = 30,25 < 34$ **مقدور**
 حال جدولی رسم می کنیم و در آن جدول اعداد $5,6, 5,7, 5,8, 5,9$ را به ترتیب می یابیم تا به آن عدد

$4 < \sqrt{19} < 5$ $\frac{4+5}{2} = 4,5 \rightarrow 4,5^2 = 20,25$ **مقدور**

عدد	۴,۱	۴,۲	۴,۳	۴,۴
مقدور	۱۶,۸۱	۱۷,۶۴	۱۸,۴۹	۱۹,۳۶

$\Rightarrow \sqrt{19} \approx 4,3$

$6 < \sqrt{40} < 7 \Rightarrow \frac{6+7}{2} = 6,5 \rightarrow 6,5^2 = 42,25 > 40$ **مقدور**

عدد	۶,۱	۶,۲	۶,۳	۶,۴
مقدور	۳۷,۲۱	۳۸,۴۴	۳۹,۶۹	۴۰,۹۶

اکنون با نصف کردن فاصله ۱۴ تا ۱۵ روی محور اعداد، عدد $14/5$ را آزمایش می کنیم. چون $(14/5)^2 = 21/25 = 0.84$ ، بنابراین $\sqrt{200}$ حتماً کمتر از $14/5$ است.

$\Rightarrow \sqrt{40} \approx 6,3$

$\sqrt{200} = 14,1$

بنابراین

عدد	۱۴/۱	۱۴/۲	۱۴/۳	۱۴/۴
مقدور	۱۹۸/۸۱	۲۰۱/۶۴	۲۰۴/۴۹	۲۰۷/۳۶

۲- ابتدا مقدار تقریبی هر عددی را که در جدول آمده است، حدس بزنید. سپس، به کمک ماشین حساب حاصل را تا دو رقم اعشار پیدا کنید و با مقداری که حدس زده اید، مقایسه کنید.

عدد	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10/3}$	$\sqrt{18/5}$	$\sqrt{68}$	$\sqrt{99}$	$\sqrt{140}$
مقدار حدس زده شده	۱,۷	۲,۲	۳,۲	۴,۵	۸,۳	۹,۹	۱۱,۸
ماشین حساب	۱,۷۳	۲,۲۳	۳,۲۰۹	۴,۳۰۱	۸,۲۴	۹,۹۴	۱۱,۸۳

عدد	۱۲,۱	۱۲,۲	۱۲,۳	۱۲,۴
مقدور	۱۴۹,۴۱	۱۴۸,۸۴	۱۵۱,۲۹	۱۵۳,۷۶

$\Rightarrow \sqrt{150} \approx 12,2$

$12 < \sqrt{150} < 13 \Rightarrow \frac{12+13}{2} = 12,5 \rightarrow 12,5^2 = 156,25 > 150$ **مقدور**

۱- به کمک روشی که در درس یاد گرفته‌اید، مقدار هر یک از عددهای زیر را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

$$\sqrt{19} \approx 4,3 \quad \sqrt{40} \approx 6,3 \quad \sqrt{150} \approx 12,2 \quad \sqrt{385} \approx 19,6$$

۲- در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید. از ماشین حساب کمک بگیرید.

$$\sqrt{11} < 3\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{17} > 4,03$$

$$\sqrt{6/25} = 2\frac{1}{5}$$

$$1 + \sqrt{15} > 4$$

$$\sqrt{20} - 2 < \sqrt{18}$$

$$(\sqrt{3})^2 = 3$$

math-home.ir مؤلف:

$$19 < \sqrt{385} < 20$$

$$\frac{19+20}{2} = 19,5$$

$$19,5^2 = 380,25 < 385$$

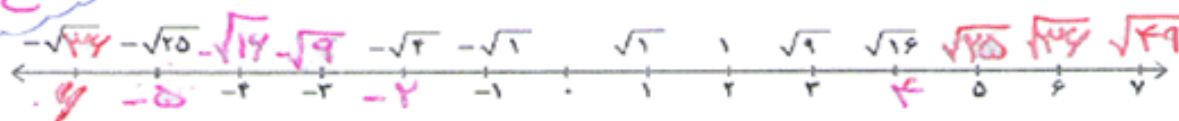
عدد	19,4	19,7	19,8	19,9
مقدار	384,14	388,09	392,04	396,01

$$\Rightarrow \sqrt{385} \approx 19,6$$

۱۱۲

اصلاح شود

۳- جاهای خالی روی محور را با عددهای مناسب پر کنید.



۴- در هر یک از تمرین‌های زیر، یک محور اعداد رسم و نقطه‌ای روی آن مشخص شده است

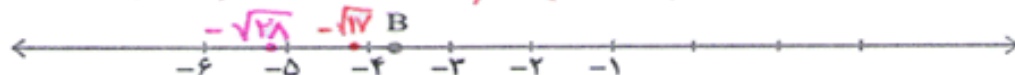
(نقاط A, B, C). نقطه مشخص شده روی محور به کدام یک از عددهای داده شده نزدیک‌تر است؟

دلیل بیاورید. عدد ۹۸ به صد نزدیک است پس جذر آن هم به ۱۰ نزدیک‌تر است



$$\sqrt{79} < 9, \sqrt{81} = 9, 9,5 < \sqrt{98} < 10$$

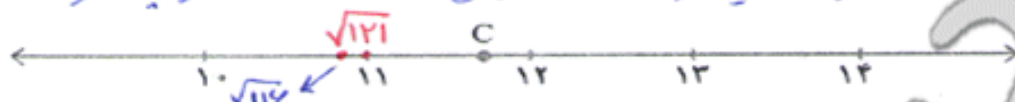
دلیل:



$$\sqrt{28} > 5 \Rightarrow -\sqrt{28} < -5$$

$$\sqrt{17} > 4 \Rightarrow -\sqrt{17} < -4$$

دلیل: ۱۲ به ۹ نزدیک‌تر است تا ۱۴ پس ۱۲ به عدد ۳- نزدیک‌تر است تا ۱۴



$$\sqrt{121} = 11, \sqrt{144} < 12$$

دلیل: ۱۴۲ به ۱۲۱ نزدیک‌تر است تا ۱۴۴ پس ۱۴۲ به ۱۱ نزدیک‌تر است تا ۱۲

عدد ۱۴۰ به عدد ۱۴۴ نزدیک‌تر است تا ۱۲۱ پس ۱۴۰ به ۱۲ نزدیک‌تر است تا ۱۴۴

۱۵ به ۱۴ نزدیک‌تر است تا ۹ پس ۱۵ به ۴ نزدیک‌تر است تا ۹

لذا با توجه به شکل داریم $B = -\sqrt{15}$

۱۱۳

برای راحتی کار می‌توانیم مثلث را با همان واحد محور بیرون محور رسم کنیم و سپس برگردانیم. به اندازه‌ی مطلوب باز نموده و همان مورد نظر را رسم کنیم.

مؤلف: math-home.ir

نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

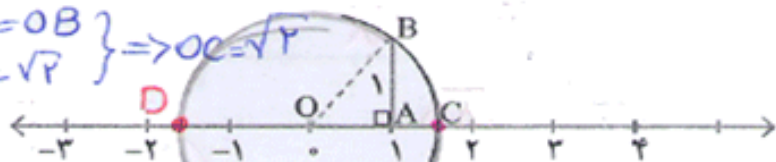
فعالیت



در درس گذشته مقدار $\sqrt{2}$ را هم به صورت تقریبی و هم به کمک ماشین حساب محاسبه کردید.

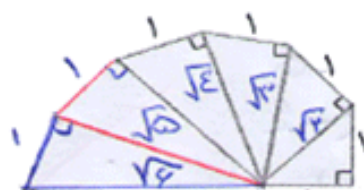
در این فعالیت، با نمایش $\sqrt{2}$ روی محور اعداد آشنا می‌شویم. محور عددهای زیر را در نظر بگیرید. مثلث OAB یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به ضلع ۱ است. به مرکز O و شعاع OB کمانی می‌زنیم تا محور اعداد را در نقطه C قطع کند. طول پاره خط OC چقدر است؟ $\sqrt{2}$ چرا نقطه C ، عدد $\sqrt{2}$ را نمایش می‌دهد؟

$$\begin{cases} OC = OB \\ OB = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow OC = \sqrt{2}$$



$$D = -\sqrt{2}$$

به همین روش، نقطه‌ای را روی محور بالا معین کنید که عدد $-\sqrt{2}$ را نمایش دهد. در شکل زیر، تعدادی مثلث قائم الزاویه رسم شده است. در هر یک از این مثلث‌ها طول یک ضلع زاویه قائمه ۱ واحد است. طول وترهای این مثلث‌ها به ترتیب $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ است.



چرا؟ با استفاده از رابطه فیثاغورس آیا می‌توانید به همین ترتیب پاره خطی به طول $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ رسم کنید؟ چگونه؟ بله

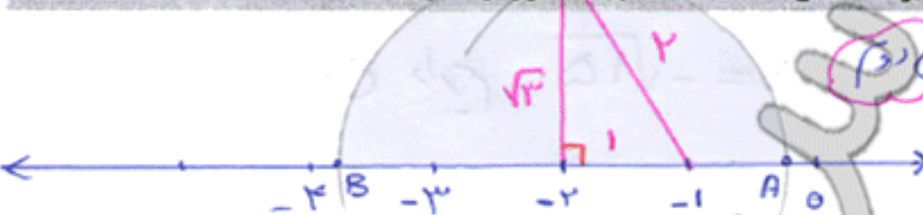
از شکل داده شده استفاده کنید. دهانه برگار را به اندازه $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ باز کنید و عددهای $1 + \sqrt{3}$ و $2 + \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.



$$\begin{aligned} A &= 1 + \sqrt{3} \\ B &= 2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= -2 + \sqrt{3} \\ B &= -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

کارد در کلاس روش اول
عدد $\sqrt{3} - 2$ را روی محور اعداد نمایش دهید. برای نمایش عدد $\sqrt{3} - 2$ روی محور از تساوی $\sqrt{3} - 2 = -2 + \sqrt{3}$ استفاده کنید.



$$\begin{aligned} A &= -2 + \sqrt{3} \\ B &= -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

در این روش هر واحد ۵ cm است

با توجه به عددهای داده شده a و b ، مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید. با مقایسه

دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

a	$\sqrt{a}$	b	$\sqrt{b}$	ab	$\sqrt{ab}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
۴	۲	۹	۳	۳۶	۶	۶
۹	۳	۱۶	۴	۱۴۴	۱۲	۱۲
۴	۲	۱۶	۴	۶۴	۸	۸
۲۵	۵	۴	۲	۱۰۰	۱۰	۱۰

آیا می‌توانید حدس خود را به صورت یک عبارت کلامی بیان کنید؟ جذر (رابطه) حاصل ضرب دو عدد برابر است با حاصل ضرب جذرهای آن دو عدد

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad a, b \geq 0$$

اگر a و b دو عدد مثبت باشند، داریم:

به کمک جدول بالا، درستی رابطه را بررسی کنید.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

نادرست

$$\sqrt{9+14} = \sqrt{23} \approx 4.8$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{14} = 3 + \sqrt{14} \approx 7.7$$

$$4.8 \neq 7.7$$

۱- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را پر کنید.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{یا} \quad \sqrt{2 \times 8}$$

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{14} = \sqrt{7} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

اصلاح شود $\sqrt{14 \times 25} = \sqrt{16} \times \sqrt{25} = 4 \times 5 = 20$

۲- کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

$$\sqrt{50} = 25 \quad \text{نادرست}$$

$$\sqrt{50} = 5 \times \sqrt{2} \quad \text{درست}$$

۳- مانند نمونه تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$



جدول زیر را برای عددهای مثبت a و b کامل کنید. مقدارهای دو سطر آخر را با هم مقایسه کنید و تساوی به دست آمده را به شکل یک قانون کلی بنویسید.

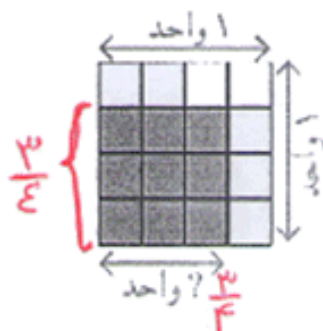
مؤلف: math-home.ir

a	۱۶	۲۵	۱	۴۹
b	۹	۳۶	۱۰۰	۶۴
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$	$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$	$\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$	$\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$	$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$	$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$

کارد در کلاس



۱- با استفاده از شکل روبه‌رو، درستی رابطه



$$S = \frac{9}{16}$$

$$\text{ضلع} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

۲- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید.

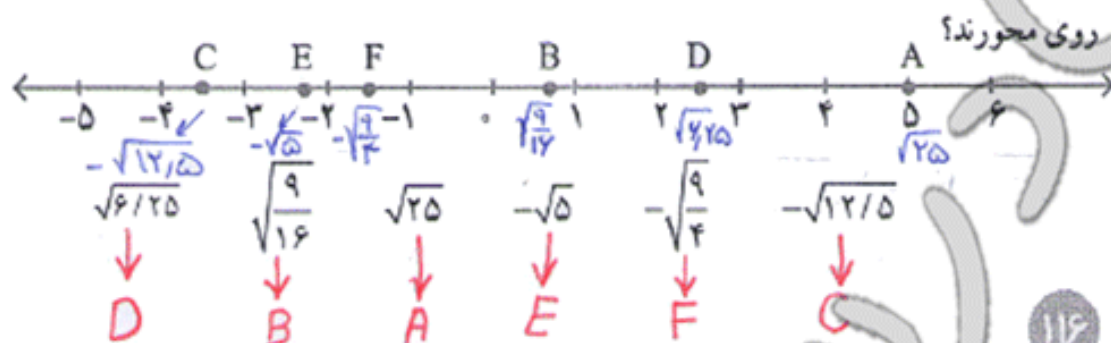
$$-\sqrt{\frac{1}{144}} = -\frac{1}{12}$$

$$\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$-\sqrt{\frac{1}{49}} = -\frac{1}{7}$$

۳- به صورت تقریبی مشخص کنید که عددهای داده شده نظیر کدام یک از نقاط مشخص شده



$$24 < \sqrt{700} < 27 \rightarrow \frac{24+27}{2} = 25,5 \xrightarrow{\text{محدور}} 25,25 > 25$$

عدد	24,1	24,2	24,3	24,4
محدور	581,21	584,44	591,49	595,36

$$\Rightarrow \sqrt{700} \approx 26,4$$

math-home.ir : مؤلف



۱- نزدیک ترین عدد طبیعی به هر یک از عددهای زیر را پیدا کنید.

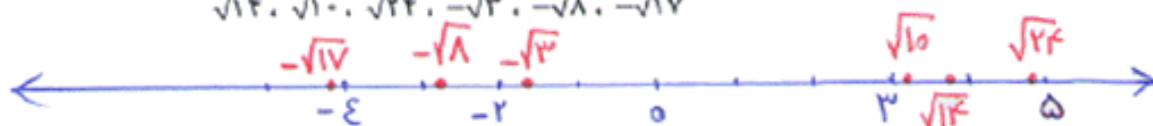
$$\sqrt{401} \approx 20, \sqrt{310} \approx 18, \sqrt{9999} \approx 100, \sqrt{280} \approx 17, \sqrt{175} \approx 13$$

$$\sqrt{401} \approx 20,02, \sqrt{310} \approx 17,7, \sqrt{9999} \approx 99,99, \sqrt{280} \approx 16,7, \sqrt{175} \approx 13,2$$

درستی پاسخ خود را به کمک ماشین حساب بیازمایید.

۲- یک محور اعداد رسم کنید و عددهای زیر را به صورت تقریبی روی آن مشخص کنید.

$$\sqrt{14}, \sqrt{10}, \sqrt{24}, -\sqrt{3}, -\sqrt{8}, -\sqrt{17}$$



۳- مجموع عددهای واقع بر هر سطر، هر ستون و نیز هر قطر مربع زیر ۶- است.

جاهای خالی را با چه عددهایی می توان پر کرد؟

۱	-۶	-۱
-۴	-۲	۵
-۳	۲	-۵

۱	$-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$	-۵
-۲	-۶	-۱
-۴	-۲	۵
$-\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$\frac{15+11}{2}$	-۵

نکته مهم

$$\begin{aligned} 5^0 &= 1 \\ -5^0 &= -1 \end{aligned}$$

۴- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(a^0 \times a^1) \times (b^{10} \div b^8) = a^1 \times b^2 = (ab)^2$$

$$\frac{(4 \times 3)^0 \times 14^8}{(28^7 + 2^7) \times (6^5 \times 3^5)} = \frac{1 \times 14^8}{14^7 \times 12^5} = 14^1$$

۵- جذر ۷۰۰ را تا یک رقم اعشار به دست آورید و نتیجه را به کمک ماشین حساب بررسی کنید.

$$\Rightarrow \sqrt{700} = 26,4$$

$$\sqrt{700} \approx 26,457$$

۶- دو عدد طبیعی بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ پیدا کنید.

$$\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4 < \sqrt{17}$$

جواب: ۳، ۴

۷- پنج عدد بین $\sqrt{3}$ و $\sqrt{8}$ پیدا کنید.

$$\sqrt{3} < \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{7,5} < \sqrt{8}$$

$$\sqrt{3} = 1,73 < 1,8, 1,9, 2, 2,1, 2,2, 2,3, 2,4 < \sqrt{8} \approx 2,82$$

$$= \left(-\frac{3^{10}}{3^9} \right)^2 \div \left(-\frac{5^4}{5^4} \right)^3 = 3^2 \div 1^3 = 9$$

$$9 < \sqrt{93} < 10 \rightarrow \frac{9+10}{2} = 9,5$$

$$9,5 \xrightarrow{\text{مختار}} 9,25 < \sqrt{93}$$

math-home.ir مؤلف:

مرور فصل ۷

عدد	9,41	9,42	9,43	9,44
مختار	92,3521	92,5444	92,7349	92,9296

مفاهیم و مهارت‌ها

$$\Rightarrow \sqrt{93} \approx 9,44$$

$$\Rightarrow \sqrt{93} \approx 9,4$$

$$9,4 < \sqrt{93} < 9,5$$

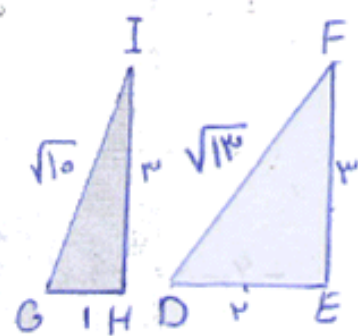
$$9,45^2 \approx 93,1225$$

$$93,1225 > 93$$

• توان • جذر تقریبی • ریشه‌های دوم یک عدد • جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- محاسبه حاصل یک عدد توان دار به توان دیگر
- محاسبه تقسیم دو عدد توان دار یا پایه‌های مساوی
- محاسبه تقریبی تقسیم دو عدد توان دار یا پایه‌های مساوی
- محاسبه جذر یک عدد
- محاسبه یک عبارت توان دار
- ساده کردن یک عبارت توان دار
- محاسبه جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم
- پیدا کردن عددهای رادیکالی روی محور



کاربرد

کاربرد این درس علاوه بر درس‌های دیگر ریاضی مثل جبر در بیان عددهای بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک است. نماد علمی نحوه‌ای از بیان این عددها به صورت توان دار است.

تمرین‌های ترکیبی

$$1- \text{حاصل عبارت مقابل را به دست آورید} \quad \frac{(-3)^5 \times 2^2 \times 8}{-2^2 \times (-9)^3 \times 18} = \frac{1}{6}$$

$$2- \text{حاصل تقسیم مقابل را به دست آورید} \quad \left[3^{10} \times \left(\frac{1}{27} \right)^2 \right] \div \left[5^2 \times \left(\frac{1}{25} \right)^2 \right]$$

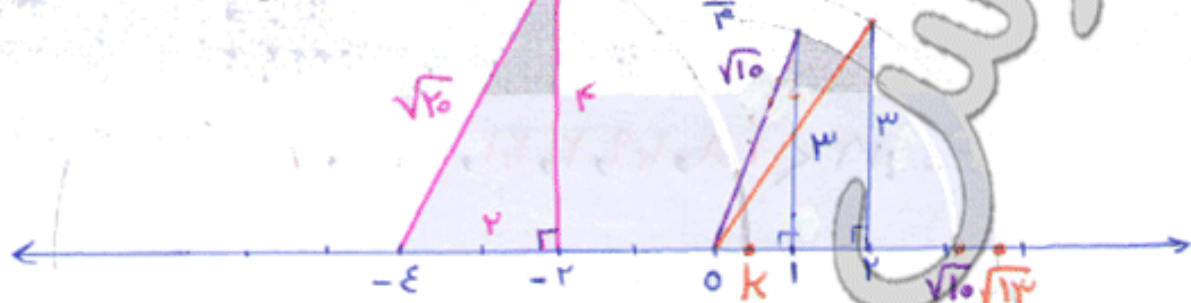
$$2- \text{با تهیه جدول مناسب، جذر عدد ۹۳ را تا دو رقم اعشار به دست آورید.} \quad \sqrt{93} \approx 9,44$$

$$2- \text{عددهای زیر را به ترتیب صعودی و از چپ به راست مرتب کنید.} \quad (-2)^2, (-2/5)^2, 6, \sqrt{47}, \sqrt{25}, 2^2, -2^2, \sqrt{25}, 4, \sqrt{47}, 2, (-2)^2, (-2/5)^2$$

$$5- \text{به کمک رسم، مکان متناظر با عددهای زیر را روی محور اعداد مشخص کنید.} \quad \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{20}, -\sqrt{16}, -2, 2, -4, 4$$

$$6- \text{مقدار عددی عبارت زیر را به ازای } x=-2 \text{ و } y=6 \text{ و } a=-1 \text{ و } b=\frac{1}{4} \text{ به دست آورید.}$$

$$\frac{ax^2 - b(x-y^2)}{2axy + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{3}{b^2}} = \frac{(-1) \times 4 - \frac{1}{4}(-2-36)}{2 \times (-1) \times (-2) \times (6) + \left(\frac{6}{-1}\right)^2 - \frac{3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{-4+19}{24-27-12} = \frac{15}{-15} = -1$$



فصل هشتم

< یعنی شامل خود عدد نمی شود

≤ شامل خود عدد می شود

$$\text{دامنه تغییرات} = \frac{\text{طول هر دسته}}{\text{تعداد دسته ها}}$$

$130 \leq x < 145$ داده های کم بزرگ تر یا مساوی عدد ۱۳۰ است و کوچک تر از ۱۴۵ است

$$130 \leq x < 145 \Rightarrow 15 = \frac{15}{1} = \frac{75}{5} \text{ طول دسته ها}$$

math-home.ir

مولف: ۵

فعالیت ۱۵



در زیر، داده های جمع آوری شده درباره اندازه قد ۴۰ نفر از مردان ساکن یک

شهر کوچک برحسب سانتی متر مشخص شده است. ($n=40$)

۱۶۲ ۱۶۸ ۱۷۳ ۱۸۵ ۱۵۳ ۱۷۲ ۱۷۸ ۱۹۲ ۱۵۰ ۱۷۵ ۱۶۷ ۱۸۴ ۱۶۷ ۱۸۱

۱۵۱ ۱۶۲ ۱۶۷ ۱۷۳ ۱۶۲ ۱۶۳ ۱۳۸ ۱۶۵ ۱۳۷ ۱۷۱ ۱۹۳ ۱۶۸ ۱۷۰

۱۶۵ ۱۸۳ ۱۵۷ ۱۷۹ ۱۷۶ ۱۵۹ ۱۷۰ ۱۶۵ ۱۵۸ ۱۷۳ ۱۹۰ ۱۶۳

Min

MAX

۲۰۵

۱۳۰

کمترین و بیشترین داده را مشخص کنید.

دامنه تغییرات

$$D = \text{Max} - \text{Min}$$

به فاصله بین این دو عدد دامنه تغییرات می گویند. دامنه تغییرات داده ها را پیدا کنید.

در یک تولیدی شلوار مردانه می خواهیم با توجه به داده های جمع آوری شده بالا اندازه های مختلف را

طراحی کنیم. برای این کار، داده ها را دسته بندی می کنیم. هر دسته یک معنای مشخصی دارد. برای مثال،

افراد مختلف را می توانیم به صورت زیر تقسیم بندی کنیم:

قد بلند، بلندتر از متوسط، متوسط، کوتاه تر از متوسط و قد کوتاه

به این ترتیب، داده های ما به ۵ دسته تقسیم می شوند. می توانیم فاصله این دسته ها را مساوی در نظر بگیریم. به

همین دلیل، برای رسیدن به حدود دسته ها دامنه تغییرات را بر ۵ تقسیم می کنیم تا طول دسته ها به طور تقریبی

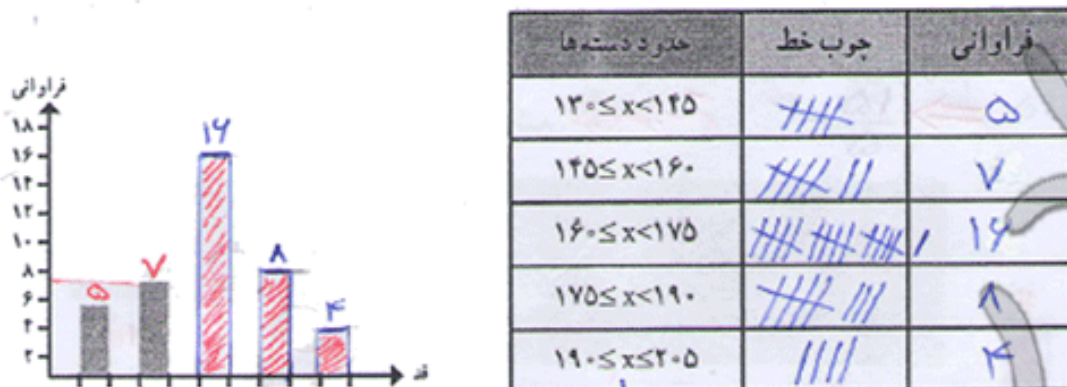
معلوم شود. به این ترتیب، می توانیم محدوده دسته ها را مشخص کنیم و در یک جدول بنویسیم.

در جدول زیر معنای $130 \leq x < 145$ را توضیح دهید. < و ≤ چه تفاوتی دارند؟

با توجه به حدود دسته ها، با استفاده از چوب خط تعداد داده های هر دسته را، که به آن فراوانی

می گویند، تعیین کنید.

بالا
فراوانی



آخرین داده باید در دسته ای
آخری باشد

جواب ۲: مردم این روستا دارای قد طبیعی و نرمال هستند

جواب ۳: با توجه به اینکه غدار مقدار هشت (نمودار ستونی) متوسط قد مردان این روستا در دسته‌ی وسطا (دسته‌ی سوم) قرار دارد

math-home.ir مولف: دسته‌ی سوم با توجه به فعالیت صفحه قبل به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

۱- قد اکثر افراد در چه محدوده‌ای است؟ $140 \leq x < 175$ $175 \leq x < 190$

۲- با توجه به نمودار ستونی متوجه چه چیزی می‌شوید؟ بیشترین فراوانی در دسته‌ی سوم و کمترین فراوانی در دسته‌ی دوم است

۳- فکر می‌کنید میانگین قد مردان این شهر در کدام دسته قرار می‌گیرد؟ در دسته‌ی سوم $140 \leq x < 175$

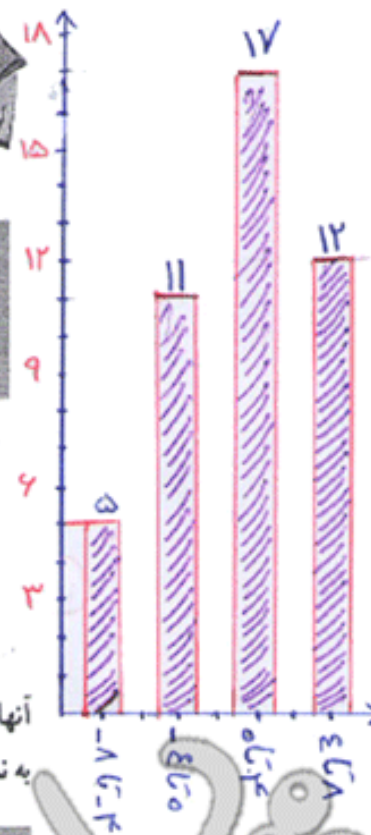
۴- به نظر شما این آمار و اطلاعات و نمودار چه کاربردهای دیگری دارند؟

استعدادیابی برای تیم‌های ورزشی، این شهر می‌تواند تیم والیبال و بسکتبال قوی داشته باشد - بهتر است فروشگاه‌های این شهر لباس‌های سایز بزرگ تهیه کنند

کاردر کلاس

۱- میانگین دمای هوا در روزهای مختلف یک منطقه به صورت زیر گزارش شده است.

+2	+2	+2	+5	+6	0	-1	-2	0	-3	-7	-2	-1	0	0
-1	-3	-6	-7	-8	+8	+7	+8	+7	+6	+3	+1	+2	+3	+2
+2	+2	-2	-2	-1	0	-5	-3	0	0	+1	+1	+2	+6	+7



جدول فراوانی داده‌ها را براساس سوال‌های زیر مشخص کرده و نموداری ستونی رسم کنید.

● دامنه تغییرات چقدر است؟ $8 - (-8) = 16$ **دامنه تغییرات**

● داده‌ها را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم؛ طول هر دسته چقدر است؟ $16 \div 4 = 4$ **طول هر دسته**

۲- نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس به صورت زیر است. با توجه به دامنه تغییرات، آنها را به ۵ دسته مساوی دسته‌بندی کنید. پس از رسم جدول، نمودار ستونی را رسم کنید و با توجه به نمودار، وضعیت این کلاس را توصیف کنید. **طول هر دسته** $\frac{15}{5} = 3 \Rightarrow 20 - 5 = 15$ **دامنه تغییرات**

۳- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۴- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۵- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۶- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۷- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۸- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۹- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۱۰- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۱۱- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۱۲- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۱۳- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

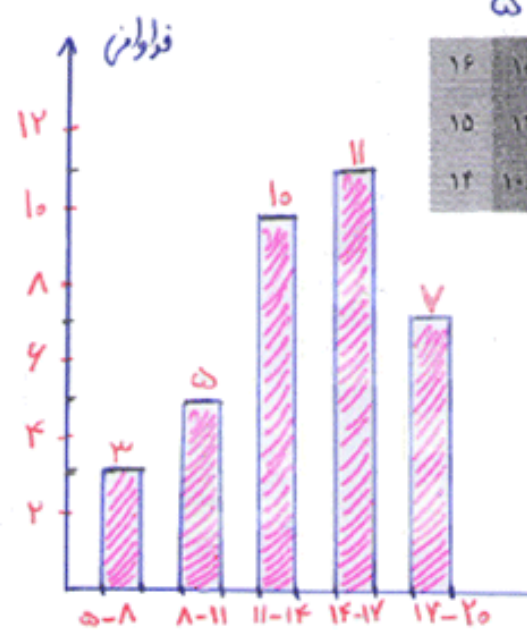
۱۴- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۱۵- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۱۶- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

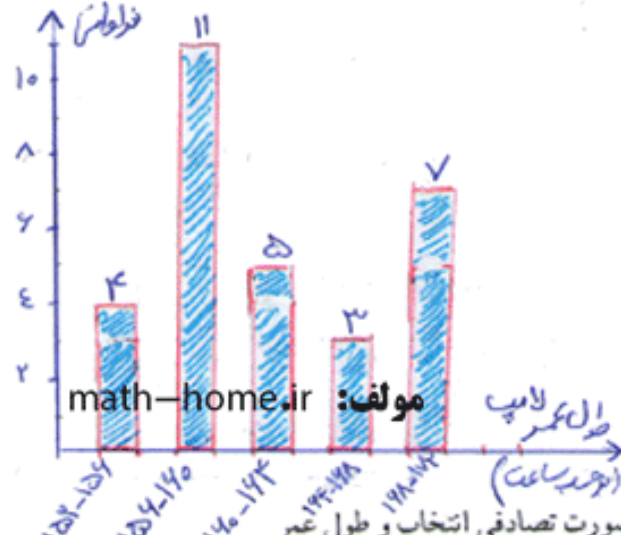
۱۷- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند

۱۸- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ نفر نمرات کم‌تر از ۱۴ گرفته‌اند



16	18	15	10	12/5	12	12	13/5	12	11	13	9	8
15	12	19	18/5	17	15/5	16/5	11	8/5	7	5	12	10
14	10/5	11/5	10	18	17	14	6	12/5	2	Min		

فراوانی	خاستان	حدود دسته‌ها
3	///	$5 \leq x < 8$
5	////	$8 \leq x < 11$
10	////	$11 \leq x < 14$
11	////	$14 \leq x < 17$
7	////	$17 \leq x \leq 20$

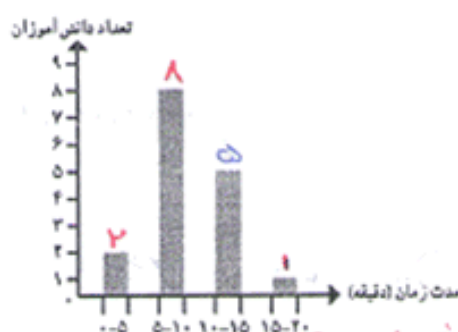
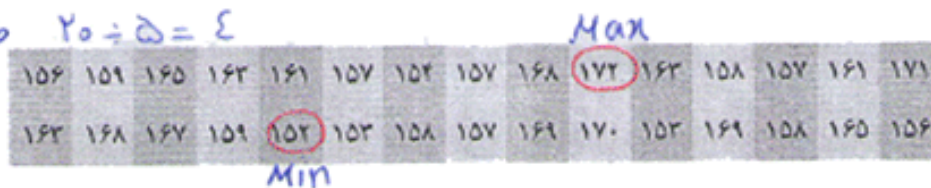


فراوانی	خط نشان	دوره دسته ها
4	////	$152 \leq x < 154$
11	//// // /	$154 \leq x < 156$
5	////	$156 \leq x < 158$
3	///	$158 \leq x < 160$
7	//// //	$160 \leq x \leq 172$



۱- در یک کارگاه تولید لامپ، ۳۰ لامپ به صورت تصادفی انتخاب و طول عمر آنها بر حسب ساعت اندازه گیری شده است. داده ها را به ۵ دسته تقسیم کنید و جدول فراوانی و نمودار ستونی آن را رسم کنید.

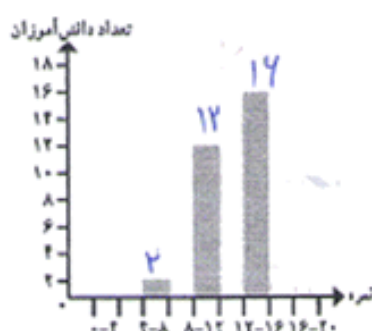
دامنه تغییرات = $172 - 152 = 20$
 طول هر دسته = $20 \div 5 = 4$



۲- از دانش آموزان یک کلاس درباره مدت زمانی که طول می کشد تا آنها از خانه به مدرسه بروند، سؤال شده و پس از دسته بندی این داده ها نمودار ستونی مقابل رسم شده است. چند دانش آموز فاصله خانه تا مدرسه را در بیشتر از ۱۰ دقیقه طی می کنند؟ این کلاس چند دانش آموز دارد؟

نفر $5 + 1 = 6$: بیش از ۱۰ دقیقه

نفر $2 + 8 + 5 + 1 = 16$: تعداد کل دانش آموزان



۳- در اینجا نمودار نمره های دانش آموزان یک کلاس را می بینید.

- ۱- این کلاس چند دانش آموز دارد؟ ۳۰ نفر
- ۲- آیا این دسته بندی مناسب است؟ چرا؟
- ۳- آیا این کلاس وضعیت خوبی دارد؟ چرا؟

بازی با سنج است

اجازه دهیم دانش آموزان نظر دهند. بستگی به خواسته ها می تواند مناسب و یا غیر مناسب باشد

۱۳۳

- این کلاس دانش آموزان خیلی قوی ندارد، دانش آموزان خیلی ضعیف هم کم می باشد
- ۴- بله، زیرا تمام حالت ها را برای این کلاس در نظر گرفته ایم - خیر، زیرا برخی از دسته ها خالی است
 - ۵- بله، زیرا این کلاس دانش آموز خیلی ضعیف ندارد (کم است) - خیر، زیرا دانش آموز قوی ندارد

نکته ۱: مجموع اختلاف نمره‌های بالاتر از میانگین با میانگین و نمرات پایین تر از میانگین با

میانگین برابر است

$$S_1 = x_1 \cdot n, S_2 = \bar{x}_2 \cdot n, \bar{x} = \frac{S_1 + S_2}{2n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \cdot n + \bar{x}_2 \cdot n}{2n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}$$

نکته ۲: اگر تعداد داده‌ها برابر باشد می‌توانیم از این رابطه استفاده کنیم

مؤلف: math-home.ir

میانگین داده‌ها

پس از اینکه داده‌های آماری در جدول سازماندهی می‌شوند و به کمک نمودارها درک بهتری از داده‌ها به دست می‌آید، می‌توان از میانگین داده‌ها نیز برای کامل‌تر شدن نتایج حاصل از داده‌ها و تحلیل و تفسیر بهتر آنها استفاده کرد. شما در دوره ابتدایی با میانگین گرفتن آشنا شده‌اید. میانگین تعدادی داده عددی، از تقسیم مجموع آنها بر تعدادشان به دست می‌آید.

برای تحلیل و تفسیر داده‌های توان از دانستن

تغییرات و میانگین در کنار هم استفاده کنیم

فعالیت



۱- نمره‌های ریاضی یک دانش آموز ۱۷، ۱۸، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ است. میانگین نمره‌های

او را حساب کنید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}$$

$$\bar{x} = \frac{S}{n} = \frac{19+17+15+18+17}{5} = \frac{86}{5} = 17.2$$

۲- نمره‌های یک دانش آموز به صورت زیر است:

$$16 + 15/5 + 16 + 15 + 17 + 19 + 18/5 + 14 + 16/5 + 17/5 = 145 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{145}{10} = 14.5$$

میانگین نمره‌های او را پیدا کنید. چند نمره بالاتر از میانگین و چند نمره پایین تر از میانگین قرار

می‌گیرند؟ آیا این دو تعداد مساوی است؟ ۴ نمره بالاتر و ۵ نمره پایین تر خیر

اختلاف نمره‌های بالای میانگین را با میانگین حساب کنید. حاصل جمع آنها را پیدا کنید. به

همین ترتیب، مجموع اختلاف نمره‌های پایین تر از میانگین با میانگین را هم پیدا کنید. نتایج بالا را با

هم مقایسه کنید. بالای میانگین ۶، ۱۶ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۱۸/۵ = ۱۴۷/۵، پایین میانگین ۶، ۱۶ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۱۸/۵ = ۱۴۷/۵

۳- میانگین نمره‌های ۷ درس یک دانش آموز ۱۶/۵ است. اگر نمره‌های دو درس دیگر او، که ۱۷ و ۱۵ است، به این میانگین اضافه شود، میانگین جدید را پیدا کنید. مجموع نمرات ۷ درس ۱۱۵/۵ + ۱۷ + ۱۵ = ۱۴۷/۵

آیا می‌توان میانگین دو نمره ۱۵ و ۱۷ را پیدا کرد (۱۶ می‌شود) و سپس میانگین ۱۶/۵ و ۱۶/۵ را حساب کرد؟ چرا؟ خیر، برای اینکه مساوی نیست

۴- میانگین نمره‌های زیر را به دست آورید. بین این عددها چه رابطه‌ای وجود دارد؟ فاصله هر عدد تا میانگین چقدر است؟

۱۱ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۳ ۱۳ ۱۴ ۱۴ ۱۵

میانگین $\bar{x} = \frac{117}{9} = 13$

بین اعداد و میانگین تفاوت وجود دارد

نکته: اگر داده‌ها را مرتب کنیم (در صورتی که تعداد داده‌ها فرد باشد) و مجموع اختلاف اعداد سمت راست با اعداد سمت چپ با داده‌ی وسط برابر باشد، آن داده داده

۱۳۴

۱۱ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۳ ۱۳ ۱۴ ۱۴ ۱۵

میانگین $\bar{x} = \frac{117}{9} = 13$

بین اعداد و میانگین تفاوت وجود دارد

نکته: اگر داده‌ها را مرتب کنیم (در صورتی که تعداد داده‌ها فرد باشد) و مجموع اختلاف اعداد سمت راست با اعداد سمت چپ با داده‌ی وسط برابر باشد، آن داده داده

۱۳۴

۱۱ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۳ ۱۳ ۱۴ ۱۴ ۱۵

میانگین $\bar{x} = \frac{117}{9} = 13$

بین اعداد و میانگین تفاوت وجود دارد

$$\text{میانگین واقعی} = \frac{+15}{35} = +0.428$$

$$\text{میانگین تقریبی} = \frac{+5K}{35} = +1.42$$

جواب سوال ۱

کاردر کلاس

مؤلف: math-home.ir

مركز دسته x فراوانی	مركز دسته ها	فراوانی	حدود دسته ها
$5x(-6) = -30$	$\frac{-8+(-6)}{2} = -6$	5	$-1 \leq x < -4$
-22	-2	11	$-4 \leq x < 0$
+34	+2	17	$0 \leq x < 4$
+72	+6	12	$4 \leq x \leq 8$
54		جمع	

مركز دسته x فراوانی	مركز دسته	فراوانی	حدود دسته ها
487.5	137.5	5	$130 \leq x < 145$
1047.5	152.5	7	$145 \leq x < 160$
2610	147.5	14	$160 \leq x < 175$
1490	182.5	8	$175 \leq x < 190$
790	197.5	4	$190 \leq x < 205$
9485		جمع	

مركز دسته x فراوانی	مركز دسته	فراوانی	حدود دسته ها
487.5	137.5	5	$130 \leq x < 145$
1047.5	152.5	7	$145 \leq x < 160$
2610	147.5	14	$160 \leq x < 175$
1490	182.5	8	$175 \leq x < 190$
790	197.5	4	$190 \leq x < 205$
9485		جمع	

$$\text{میانگین} = \frac{9485}{40} = 237.125$$

- ۱- میانگین دمای هوا مربوط به کار در کلاس صفحه ۱۲۲ و میانگین ساعت های عمر لامپ مربوط به تمرین ۱ صفحه ۱۲۳ را به دست آورید. از جدول فراوانی استفاده کنید.
- ۲- جدول زیر را کامل و میانگین را حساب کنید.

مركز x فراوانی	مركز دسته	فراوانی	خط نشان	مركز دسته ها
12	2	6	1	$0 \leq x < 4$
24	6	4	////	$4 \leq x < 8$
10	10	8	### ///	$8 \leq x < 12$
238	14	17	### ### ### //	$12 \leq x < 16$
142	18	9	### ////	$16 \leq x \leq 20$
514		44	جمع	

$$\text{میانگین} = \frac{514}{44} \approx 11.6818$$

$$\text{میانگین واقعی} = \frac{487.5}{30} = 16.25$$

$$\text{میانگین تقریبی} = \frac{487.5}{30} \approx 16.25$$

نکته: داده هایی که فاصله زیادی تا میانگین دارند تاثیر زیادی روی میانگین دارند برای مثال ۳۵ فاصله زیادی تا ۱۷۲۵ دارد و اگر آن را حذف کنیم میانگین به صورت محسوسی اضافه می شود

۳- میانگین نمره های ریاضی دانش آموزان یک کلاس ۳۰ نفره ۱۷/۲۵ شده است. یکی از دانش آموزان در این امتحان نمره ۳/۵ گرفته است؛ در حالی که بقیه آنها نمره بالای ۱۵ گرفته اند.

الف) اگر این دانش آموز را از کلاس کنار بگذاریم، معدل کلاس چند می شود؟ از این سوال چه نتیجه ای می گیرید؟

$$\text{مجموع نمرات کلاس} = 30 \times 17.25 = 517.5$$

$$\text{مجموع نمرات} = 29 \text{ نفر} \quad 517.5 - 3.5 = 514$$

$$514 \div 29 = 17.72$$

نتیجه: نمرات بالا و پایین تاثیر زیادی روی میانگین دارند

ب) حالا فرض کنید همه دانش آموزان کلاس نمره کمتر از ۱۴ گرفته اند؛ به جز یک نفر که ۲۰ گرفته است، معدل این کلاس ۳۰ نفره ۱۰/۲۵ شده است. اگر دانش آموزی را که نمره ۲۰ گرفته است کنار بگذاریم، معدل کلاس چند می شود؟

$$\text{معدل جدید برای ۲۹ نفر} = \frac{30 \times 10.25 - 20}{29} = \frac{307.5 - 20}{29} \approx 9.91$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \text{احتمال زوج بودن} \Rightarrow 2, 4, 6 : \text{اعداد زوج}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \text{احتمال فرد آمدن} \Rightarrow 1, 3, 5 : \text{اعداد فرد}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \text{احتمال اول آمدن} \Rightarrow 2, 3, 5 : \text{اعداد اول}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \text{احتمال غیر اول آمدن} \Rightarrow 1, 4, 6 : \text{غیر اول}$$

احتمال یا اندازه گیری شانس **مؤلف: math-home.ir**

اعداد اول: ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷, ۵۳, ۵۹, ۶۷, ۷۱, ۷۳, ۷۹, ۸۳, ۸۹, ۹۷, ۱۰۱, ۱۰۳, ۱۰۷, ۱۰۹, ۱۱۳, ۱۲۷, ۱۳۱, ۱۳۷, ۱۳۹, ۱۴۳, ۱۴۹, ۱۵۷, ۱۶۳, ۱۶۷, ۱۷۳, ۱۷۹, ۱۸۷, ۱۹۳, ۱۹۷, ۱۹۹

۱- ده کارت هم اندازه و هم شکل داریم و روی آنها عددهای ۱۱ تا ۲۰ را نوشته ایم.

کارت ها را به پشت روی میز قرار می دهیم و به طور تصادفی، یکی از آنها را برمی داریم.

احتمال اینکه روی این کارت عددی اول باشد بیشتر است یا احتمال اینکه عددی مرکب باشد؟

$$\text{احتمال اول بودن} = \frac{4}{10} > \text{احتمال مرکب بودن} = \frac{6}{10}$$



وقتی یک سکه را می اندازیم، قبل از آنکه به زمین برسد

نمی دانیم چه پیش می آید؛ یعنی روی سکه می آید یا پشت آن!

اما می دانیم که دو حالت ممکن است پیش آید: روی سکه یا

پشت سکه! از آنجا که این دو حالت مشابه اند، پس امکان اینکه

روی سکه یا پشت آن بیاید، برابر است و چون در یک حالت

از این دو حالت ممکن، روی سکه می آید، پس احتمال اینکه

روی آن بیاید $\frac{1}{2}$ است. به همین ترتیب، احتمال اینکه پشت

$$\text{احتمال رو آمدن} = \frac{1}{2}$$

$$\text{احتمال پشت آمدن} = \frac{1}{2}$$



سکه هم بیاید، $\frac{1}{2}$ است. **۴) احتمال هر یک از رنگ های آبی، قرمز، زرد و سبز**

۲- در هر یک از موارد زیر، حالت های هم شانس را بنویسید.

الف) عقریه چرخنده را می چرخانیم.

ب) تاسی را می اندازیم. **هر کدام از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ هر کدام $\frac{1}{6}$**

۳- معلم از دانش آموزان پرسید: «یک مهره را به طور تصادفی از کیسه ای که در آن سه مهره

سبز و یک مهره سفید است، بیرون می آوریم. چند حالت هم شانس می تواند رخ دهد؟»

احتمال اینکه مهره سبز خارج شود بیشتر تر از رنگ سفید است

بلافاصله شایان پاسخ داد: «دو حالت: سبز، سفید»

سپس علی برای آنکه بتواند پاسخ سؤال را بدهد،

مهره های سبز را شماره گذاری کرد و پاسخ داد:

«چهار حالت: سبز ۱، سبز ۲، سبز ۳، سفید»

به نظر شما پاسخ کدام یک درست است؟ چرا؟

جواب علی درست است، حالت سبز و سفید هم شانس نیست

ولی اگر مهره ها را شماره گذاری کنیم احتمال اینکه هر کدام خارج شود

برابر است **احتمال هر کدام $= \frac{1}{4}$**



$$\text{احتمال زرد آمدن} = \frac{1}{4}$$

$$\text{احتمال زرد آمدن} = \frac{1}{4}$$

۴- در آزمایش مربوط به فعالیت ۱ با توجه به اینکه ۱۰ کارت داریم پس بیرون آمدن هر یک از

عددهای روی کارت ها هم شانس هستند حالا به سؤال ها پاسخ دهید:

الف) در چند تا از آنها عدد روی کارت، اول است؟ **۴ تا**

ب) در چند تا از آنها عدد روی کارت، مرکب است؟ **۶ تا**

ج) احتمال هر یک از اتفاقی ها (بیشامد) های زیر را پیدا کنید:

$$\frac{4}{10} = \text{احتمال آنکه عدد روی کارت، اول باشد.} \quad \frac{6}{10} = \text{احتمال آنکه عدد روی کارت، مرکب باشد.}$$

$$1 = \text{احتمال رخ ندادن آن اتفاق} + \text{احتمال رخ دادن یک اتفاق}$$

نکته سوال ۱

مؤلف: math-home.ir

فعالیت



۱- الف) عقریه چرخنده زیر را می چرخانیم. احتمال هریک از حالت های زیر را پیدا کنید و در جدول بنویسید.



هم سانس

نایستد	بایستد	
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	عقریه روی نارنجی
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	عقریه روی آبی
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	عقریه روی سفید

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$\frac{4}{8} + \frac{4}{8} = 1$$

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

ب) حاصل جمع دو عدد هر سطر جدول را به دست آورید. چرا حاصل جمع ها با هم برابرند؟ چون کل حالت های موجود را در بر می گیرد

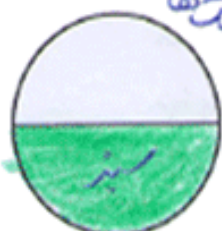
ج) احتمال رخ دادن یک پیشامد $\frac{3}{8}$ است. احتمال رخ ندادن آن چقدر است؟ چرا؟

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

۲- الف) هر یک از چرخنده های زیر را طوری رنگ کنید که احتمال ایستادن عقریه

روی رنگ سفید برابر $\frac{1}{4}$ باشد.

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد قسمت های سفید}}{\text{تعداد کل قسمت ها}}$$



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

ب) بین این فعالیت و تساوی کسرها چه ارتباطی وجود دارد؟

۳- از یک کیسه حاوی ۵۰ مهره، مهره ای را به طور تصادفی بیرون می آوریم. احتمال سبز بودن مهره $\frac{3}{10}$ است.

$$\frac{3 \times 50}{10 \times 50} = \frac{150}{500} \Rightarrow 150 \text{ مهره سبز داریم}$$



تمرین

۱- عقربه شکل چرخنده روبه‌رو را ۳۰۰ بار می‌چرخانیم.
عبارت‌های درست را با ✓ و عبارت‌های نادرست را با ✗ مشخص کنید.



math-home.ir :مؤلف

الف) عقربه ۱۰۰ بار روی زرد می‌ایستد. ✗ **نادرست**

ب) انتظار داریم عقربه تقریباً ۱۰۰ بار روی آبی بایستد. ✓ **درست**

ج) انتظار داریم تعداد دفعاتی که عقربه روی هر یک از این سه رنگ می‌ایستد، دقیقاً برابر باشد. ✗ **نادرست**

۲- ناسی را می‌اندازیم؛ احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) مضرب ۵ بیاید. $\frac{1}{6}$

ب) شمارنده ۶ بیاید. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ج) ۷ یا بیشتر بیاید. **صفر**

۱, ۲, ۳, ۴

۳- سی مهره با شماره‌های ۱ تا ۳۰ را در گردونه‌ای ریخته‌ایم. مهره‌ای را به‌طور تصادفی از گردونه خارج می‌کنیم. احتمال هر یک از حالت‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) فرد بودن عدد روی مهره $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

ب) مضرب ۵ بودن عدد روی مهره $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

ج) اول بودن عدد روی مهره $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

۴- احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را با توجه به چرخنده زیر به‌دست آورید.



الف) عقربه چرخنده روی سبز بایستد. $\frac{3}{8}$

ب) عقربه چرخنده روی آبی بایستد. $\frac{3}{8}$

ج) عقربه چرخنده روی قرمز بایستد. $\frac{2}{8}$

۵- در یک کیسه تعدادی مهره رنگی وجود دارد. می‌خواهیم مهره‌ای را به‌طور تصادفی از آن بیرون بیاوریم. می‌دانیم احتمال سبز بودن مهره $\frac{3}{8}$ است.

الف) احتمال سبز نبودن مهره را حساب کنید. $\frac{5}{8}$ **غیرسبز** $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

ب) آیا می‌توانید تعداد مهره‌های درون پاکت را پیدا کنید؟ چرا؟ **تعداد ۸ است (KEN)**

۶- یک سکه در چهار پرتاب پشت سر هم رو آمده است. فکر می‌کنید اگر بار پنجم آن را

پشت اندازیم، چه می‌آید؟ چرا؟ **رو یا پشت چون اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم**

احتمال رو آمدن و پشت آمدن هر کدام $\frac{1}{2}$ است

بررسی حالت های ممکن

$S = \{(پ, پ), (پ, رو), (رو, رو), (پ, پ)\}$

	هر دو رو	یکی رو، یکی پشت	هر دو رو
مولف: آزمایش	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
در ۸۰ آزمایش	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

فعالیت

۱- سارا، ستاره و محدثه یک بازی طراحی کرده اند. آنها دو سکه را هم زمان می اندازند. اگر هر دو، رو آمد، سارا امتیاز می گیرد و اگر هر دو، پشت آمد، ستاره. اگر هم، یکی رو و یکی پشت آمد، محدثه امتیاز می گیرد.

فکر می کنید این بازی عادلانه است؟ یعنی شانس امتیاز گرفتن بازیکن ها با هم مساوی است؟

۲- دو سکه بردارید و ۲۰ بار آزمایش کنید.

نتایج ۲۰ آزمایش را با رسم چوب خط در جدول ثبت کنید.

نتایج آزمایش خودتان را با نتایج سه هم گروهی نان جمع کنید و با استفاده از نتایج مربوط به ۸۰ آزمایش، درستی فکران را بررسی کنید.

آیا نتیجه آزمایش ها، پاسخ شما به فعالیت ۱ را تأیید می کند؟

۳- در جدول زیر، حالت های ممکن در پرتاب دو سکه نشان داده شده است. با توجه به این جدول، احتمال امتیاز گرفتن هر کدام از بازیکن ها را محاسبه کنید.

سکه دوم \ سکه اول	پشت	رو
پشت	پشت - پشت	پشت - رو
رو	رو - پشت	رو - رو

احتمال اینکه یک سکه رو بیاید و یک سکه پشت، $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

احتمال اینکه هر دو سکه رو بیایند، $\frac{1}{4}$

احتمال اینکه هر دو سکه پشت بیایند، $\frac{1}{4}$

حالا دوباره به سوال فعالیت ۱ پاسخ دهید و برای پاسختان دلیل بیاورید.

کار در کلاس

محمد می خواست یک شاخه گل رز برای مادرش و یک شاخه هم برای پدرش بخرد. در گل فروشی تعداد زیادی گل رز به رنگ های سفید، قرمز و صورتی بود.

گل مادر \ گل پدر	سفید	قرمز	صورتی
سفید	س-س	س-ق	س-ص
قرمز	ق-س	ق-ق	ق-ص
صورتی	ص-س	ص-ق	ص-ص

او دو شاخه گل را به طور تصادفی و به ترتیب برای مادر و پدرش برداشت.

الف) همه حالت های ممکن را به کمک جدول پیدا کنید.

ب) در چند تا از این حالت ها دست کم یکی از گل ها سفید است؟

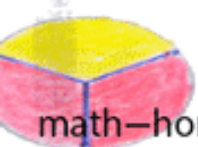
حالت



۱- می‌خواهیم عقربه‌های دو چرخنده زیر را بچرخانیم و رنگی را که عقربه‌ها روی آن می‌ایستند، یادداشت کنیم.

الف) با کامل کردن نمودار درختی، همه حالت‌های ممکن را پیدا کنید.

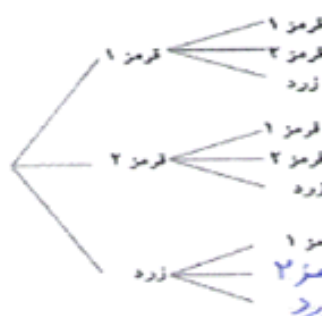
حالت‌های ممکن



مؤلف: math-home.ir

چرخنده اول

چرخنده دوم



✓ قرمز ۱ - قرمز ۱
✓ قرمز ۲ - قرمز ۱
زرد - قرمز ۱

✓ قرمز ۱ - قرمز ۲
✓ قرمز ۲ - قرمز ۲
زرد - قرمز ۲

قرمز ۱ - زرد
قرمز ۲ - زرد
زرد - زرد

کل حالت‌های ممکن $3 \times 3 = 9$

$\frac{4}{9}$

ب) احتمال اینکه هر دو عقربه روی رنگ قرمز بایستند، چقدر است؟

۲- سه سکه را هم‌زمان انداختیم. پارسا و عرفان هر کدام با یک روش، همه حالت‌های ممکن را نوشته و تعداد حالت‌ها را یافته‌اند.

الف) راه حل هر دو را کامل کنید.

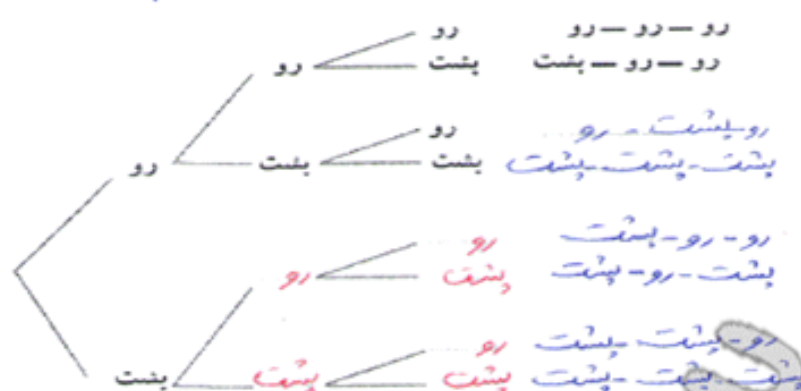
راه حل عرفان

سکه دوم	سکه اول	سکه اول	سکه دوم
رو	پشت	رو	پشت
پشت	پشت	پشت	پشت
پشت	پشت	پشت	پشت

سکه سوم	سکه دوم	سکه اول
رو	رو	پشت
پشت	رو	پشت
رو	پشت	پشت
پشت	پشت	پشت

راه حل پارسا

کل حالت‌های ممکن $2 \times 2 \times 2 = 8$



ب) شما کدام راه حل را بیشتر دوست دارید؟ پاسخ باز به نظر بنده راه حل پارسا بهتر است

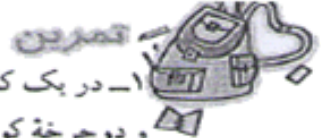
$2 \times 2 \times 2 = 8$

ج) آیا می‌توانید روش دیگری برای یافتن تعداد حالت‌های ممکن پیشنهاد کنید؟

د) تعداد حالت‌های ممکن چند تا است؟ ۸

ه) احتمال اینکه هر سه سکه رو بیاید، چقدر است؟ $\frac{1}{8}$

و) احتمال اینکه دقیقاً دو سکه رو و یکی پشت بیاید، چقدر است؟ $\frac{3}{8}$



۱- در یک کارخانه دوچرخه سازی دو مدل دوچرخه تولید می شود: دوچرخه جاده و دوچرخه کوهستان. در این کارخانه هر نوع دوچرخه در سه رنگ (زرد، قرمز و آبی) و دو اندازه (۲۴ و ۲۶) تولید می شود.

نوع دوچرخه

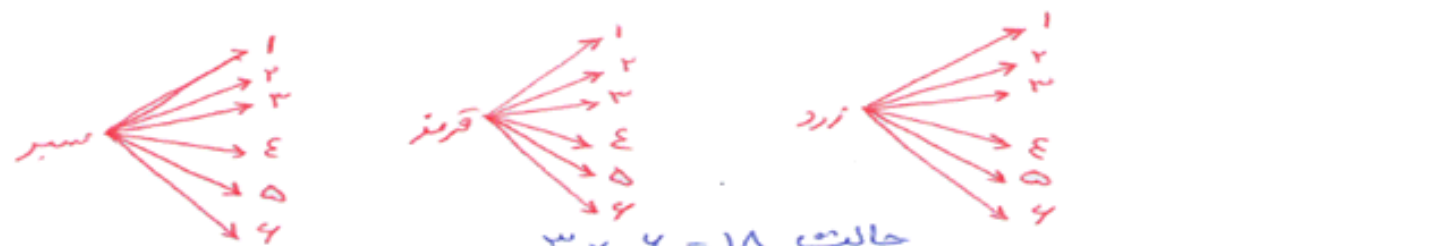
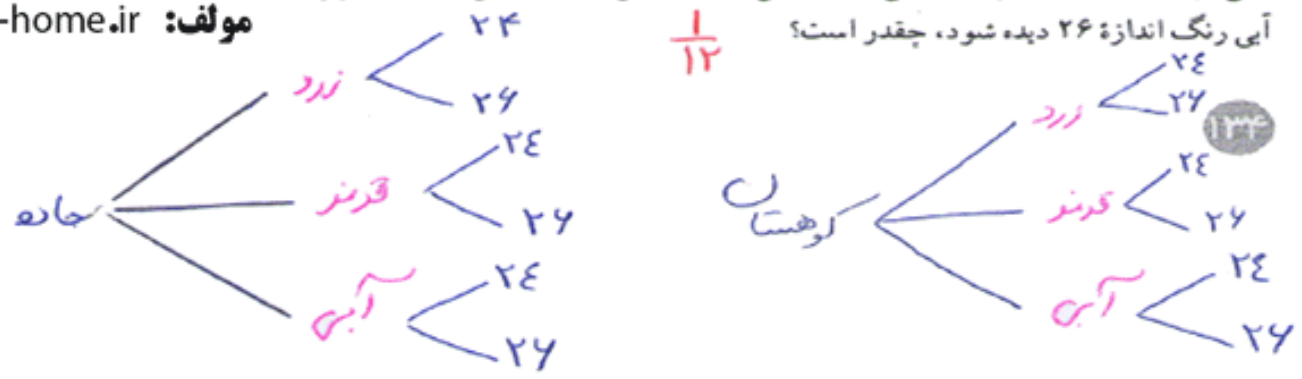
رنگ

اندازه

الف) چند نوع دوچرخه مختلف در این کارخانه تولید می شود؟

ب) در نشریه تبلیغاتی این کارخانه، در هر صفحه عکس یکی از این دوچرخه ها آمده است. علی یکی از صفحه ها را به طور تصادفی انتخاب می کند. احتمال اینکه در این صفحه دوچرخه کوهستان آبی رنگ اندازه ۲۶ دیده شود، چقدر است؟

مولف: math-home.ir



حالت $3 \times 2 = 18$



۲- عقریه چرخنده مقابل را می چرخانیم و تاسی را می اندازیم. الف) با کامل کردن جدول، همه حالت های ممکن را پیدا کنید.

تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
چرخنده						
سبز						
قرمز						
زرد						

ب) در چند حالت عقریه روی قرمز ایستاده است و تاس عددی زوج را نشان می دهد؟

(قرمز, ۲), (قرمز, ۴), (قرمز, ۶)

۳- قفلی داریم که رمز آن عددی یک رقمی است. (این رقم می تواند ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸ یا ۹ باشد.)

الف) احتمال اینکه با یک حدس بتوانیم رمز قفل را پیدا کنیم، چقدر است؟

ب) اگر یک رقم دیگر به رمز اضافه کنیم، این احتمال چه تغییری می کند؟

۴- دو تاس را می اندازیم:



الف) با رسم جدول مناسب، همه ۳۶ حالت ممکن را پیدا کنید.

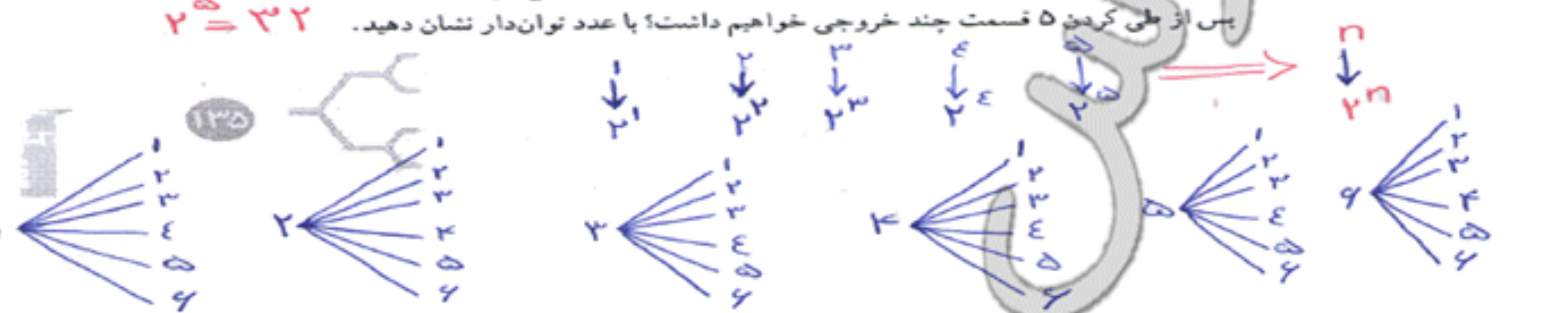
ب) احتمال اینکه یکی از تاس ها ۳ و تاس دیگر ۵ بیاید، چقدر است؟

ج) احتمال اینکه هر دو تاس ۵ بیاید، چقدر است؟

د) پاسخ قسمت های ب و ج را با هم مقایسه کنید و دلیل تفاوتشان را بنویسید.

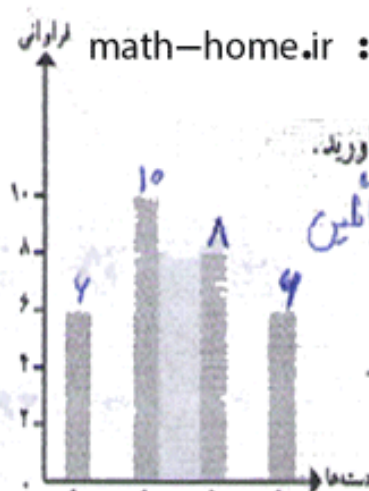
۵- دو سکه را می اندازیم. احتمال اینکه دست کم یکی از آنها رو بیاید، چقدر است؟

۶- توله های انشعاب آب به هر قسمت که برسند، دوشاخه می شوند. پس از طی کردن ۵ قسمت چند خروجی خواهیم داشت؟ با عدد توان دار نشان دهید.



تمرین های ترکیبی

مؤلف: math-home.ir



۱- با توجه به نمودار مقابل، میانگین داده ها را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{2 \times 6 + 3 \times 10 + 4 \times 8 + 5 \times 4}{30} = \frac{59}{30} \approx 1.97$$

۲- دو ناس را می اندازیم.

الف) تعداد حالت های هم شانسی ممکن را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه هر دو ناس ۱ بیاید، چقدر است؟

۳۶ حالت هم شانسی $\Rightarrow$

$$\frac{1}{36}$$

احتمال اینکه یکی از ناس ها فرد بیاید $\frac{27}{36}$

احتمال اینکه یکی از ناس ها زوج بیاید $\frac{27}{36}$

احتمال هر دو زوج و یا هر دو فرد بیاید هر کدام $\frac{9}{36}$ است، احتمال هر دو اول آمدن $\frac{9}{36}$

الف) ۱

۲

۳

موسسه تخصصی زبان

فصل نہم

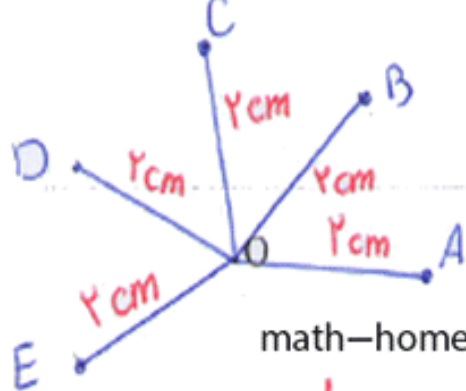
خط و دایره

فعالیت



۱- پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه O، ۲ سانتی متر باشد.

مؤلف: math-home.ir



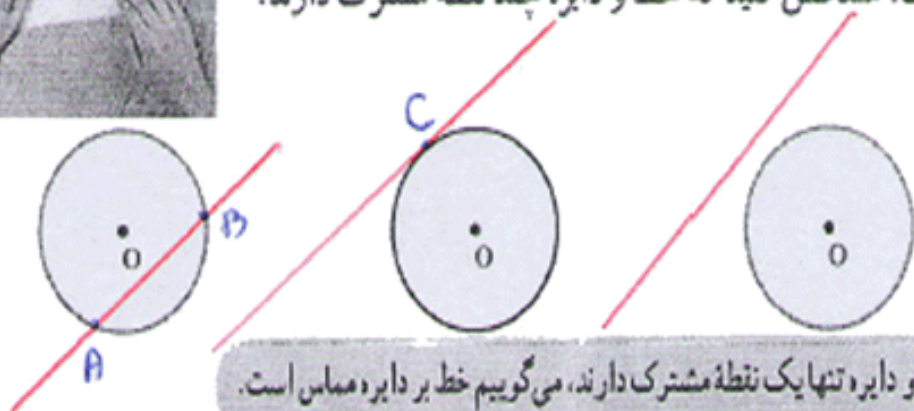
اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می‌شود؟ **دایره**

۲- دو خط یا موازی‌اند یا متقاطع؛ یعنی، یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه یکدیگر را

قطع می‌کنند.



حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.

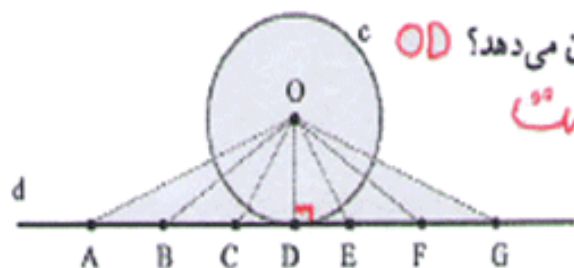


در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

تعریف مماس

۳- فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره خطی است که آن نقطه را به خط وصل

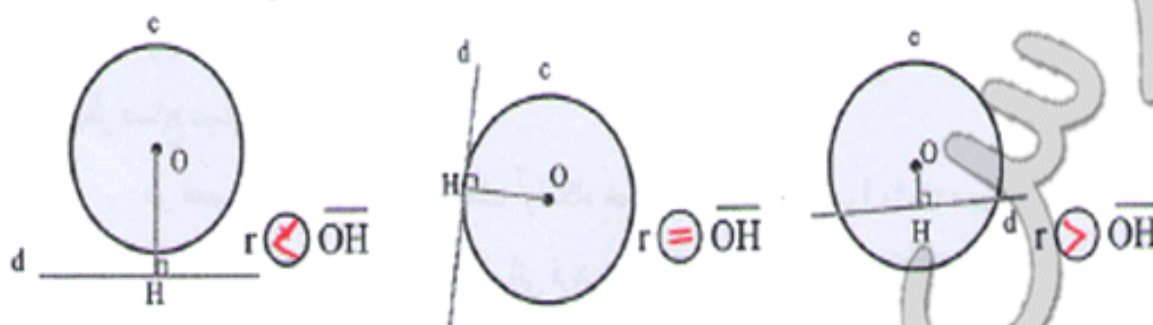
می‌کند. خط d بر دایره c به مرکز O و شعاع r مماس است.



کدام پاره خط فاصله مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟ **OD**
اندازه این پاره خط را با r مقایسه کنید. **برابر است**

۴- در هر یک از شکل‌های زیر دایره‌ای به شعاع r رسم کرده‌ایم. فاصله مرکز دایره از خط d

را $\overline{OH}$ بنامد و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌های زیر را با علامت $>$ ، $=$ ، یا $<$ کامل کنید.

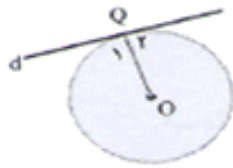




۱- در هر شکل، کدام باره خط $OD \perp EC \Rightarrow$ بر دایره مماس است؟

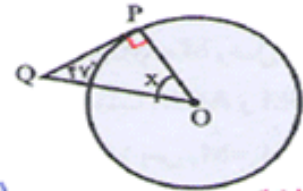
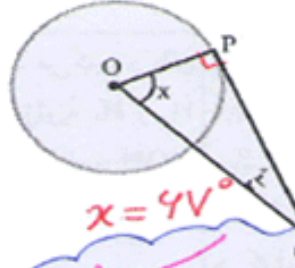


$AQ \perp OB \Rightarrow$ بر دایره مماس است



۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است. زاویه Q چه نوع زاویه ای است؟ قائمه $\hat{Q} = 90^\circ$

۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.

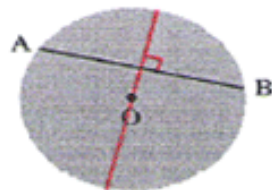


پیدا کردن مرکز دایره

فعالیت



۱- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره ای رسم کنید. سپس، صفحه دایره ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید. A را به B وصل کنید. این باره خط وتر دایره نامیده می شود. دایره را طوری تا کنید که نقاط A و B روی هم قرار بگیرند. تای کاغذ را باز کنید.

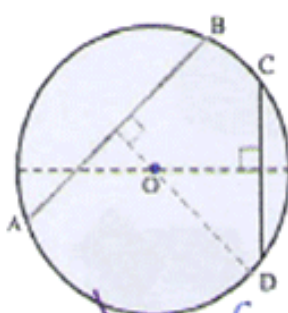


روی خط تا را با مداد پر رنگ کنید. در هندسه به این باره خط چه می گویند؟ قطر روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید. دو باره خط رسم شده یکدیگر را در چه نقطه ای قطع می کنند؟ مرکز

۱۳۹

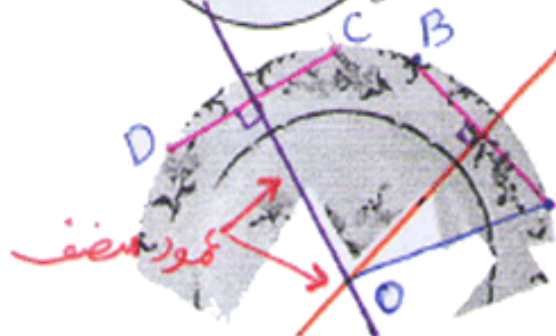
نکته: قطری که AB را نصف می کند بر آن عمود است

نکته: اگر عمود منصف دو وتر دلخواه غیر موازی را رسم کنیم یکدیگر را در مرکز دایره قطع می کنند. وتر: باره خطی که دو نقطه ای متناظر از یک دایره را به هم وصل می کنند را وتر نامیم



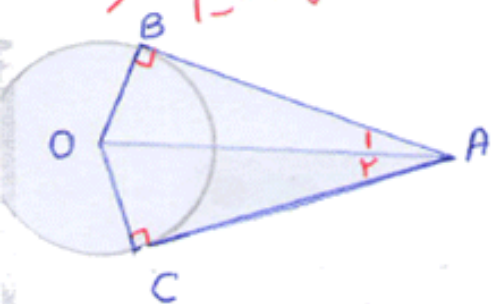
۲- نتیجه فعالیت (۱) را به کمک شکل روبه رو توضیح دهید. برای پیدا کردن مرکز یک دایره، کافی است نقطه ی برخورد عمود منصف های دو وتر غیر موازی آن را پیدا کنیم

۳- قطعه ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است. تصویر آن را در شکل روبه رو می بینید. با توجه به فعالیت های قبل، توضیح دهید که چگونه می توانیم قطر این بشقاب را پیدا کنیم.



قطر = ۲OA

نکته: اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس باهم برابر است و خطی که مرکز را به آن نقطه وصل می‌کنیم ساز زاویه بین این دو خط مماس است.



$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases}$$

کار در کلاس



۱- در هر شکل، RQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.

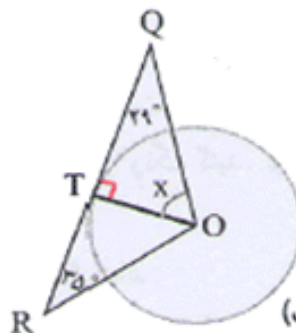
math-home.ir مولف:



$$x = 90 - 69$$

$$\Rightarrow x = 21^\circ$$

(ب)



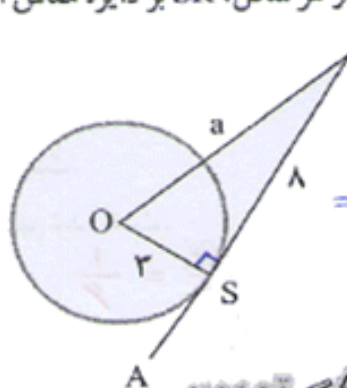
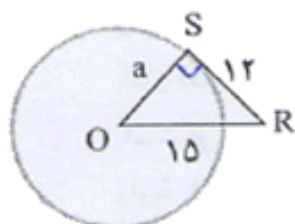
$$x = 90 - 29$$

$$x = 61$$

(الف)

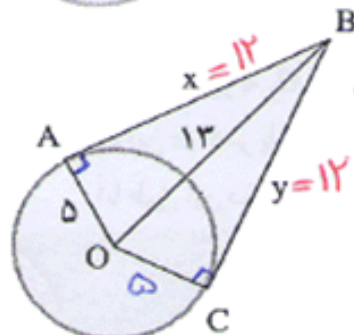
۲- در هر شکل، SR بر دایره مماس است. طول پاره خط a را به دست آورید.

$$a^2 = 15^2 - 12^2 \Rightarrow a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$$



$$a^2 = 3^2 + 8^2 = 9 + 64$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{73}$$



$$x = 13$$

$$y = 12$$

۱- نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد.

از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم.

فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

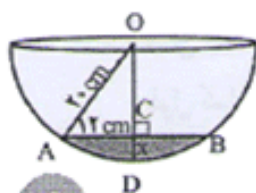
۲- از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B نامید. شکل بکشید و دایره هر یک از موارد زیر را بنویسید.

الف) چرا $O'A = O'B$ ؟

ب) چرا $\angle AOO' = \angle BOO'$ ؟

۳- در کاسه رویه‌رو مقداری آب ریخته‌ایم.

برای AB برابر ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟



$$OC^2 = 20^2 - 12^2 \Rightarrow OC^2 = 400 - 144 \Rightarrow OC^2 = 256 \Rightarrow OC = 16$$

$$x = 20 - 16 = 4 \text{ cm}$$

۱۴۱



10:15

10:10



۳۰ درجه

۱- ساعت‌های روبه‌رو چه زمانی را نشان می‌دهند؟

پنج دقیقه بعد، هر یک از ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهد؟

در این مدت، عقربه دقیقه‌شمار چند درجه حرکت کرده است؟ $\Rightarrow 360 \div 12 = 30$

در هر یک از ساعت‌ها مسیر حرکت عقربه دقیقه‌شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر

طولانی‌تری را طی کرده است؟ **ساعت دیواری**

math-home.ir



۲- الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده‌اند.

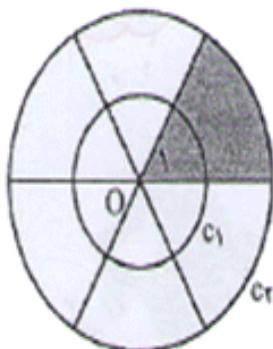
کمان کوچک‌تر را با $\widehat{AB}$ نمایش می‌دهیم و آن را کمان AB می‌نامیم.

آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید. **بله، دو نقطه باید دو سر قطر باشند.**

ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه AOB زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان AB نامیده می‌شود.

کمان AB نیز روبه‌رو به زاویه مرکزی AOB است.



۲- شکل روبه‌رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.

$$\frac{360}{6} = \frac{1}{6}$$

زاویه O_1 چه کسری از 360° درجه است؟

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_1 چه کسری از دایره C_1 است؟

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_2 چه کسری از دایره C_2 است؟

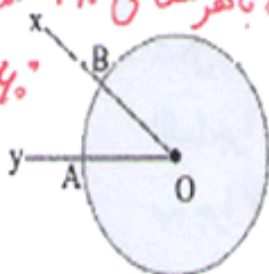
آیا این دو کسر با هم مساوی‌اند؟ **بله**

آیا طول این دو کمان مساوی است؟ **خیر، اولی $\frac{1}{6}$ از دایره C_1 و دومی $\frac{1}{6}$ از دایره C_2 است**

اندازه کمان AB برابر است با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به آن. بنابراین، ممکن است دو

کمان با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوتی داشته باشند.

۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان روبه‌رو به O_1 در هر یک از دایره‌های C_1 و C_2 برابر 60° درجه است؟ **$\frac{1}{6}$ دایره است پس هر کدام 60° درجه است**



۵- در شکل روبه‌رو زاویه xOy برابر 36° درجه است.

کمان AB چند درجه است؟ $\widehat{AB} = xOy = 36^\circ$

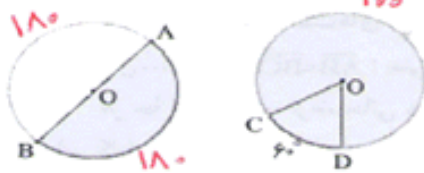
طول کمان AB چه کسری از دایره است؟ $\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$

برای پاسخ دادن به این پرسش از تساوی روبه‌رو کمک بگیرید.

$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}$$

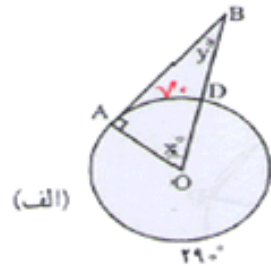
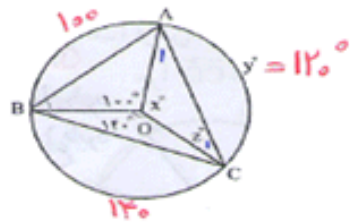
کار در کلاس

۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است.
اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.



۲- اندازه کمان و زاویه های مجهول را پیدا کنید.

$$y = 360 - (100 + 140) \\ \Rightarrow y = 120^\circ \Rightarrow x = 120^\circ \\ OA = OC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 20^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{C}_1 = 180 - 120 = 60^\circ \uparrow (ب)$$



$$x = \widehat{AD} \Rightarrow \\ x = 70^\circ \Rightarrow y = 90 - 70 \\ \Rightarrow y = 20^\circ$$

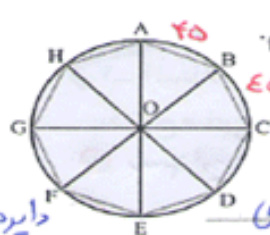
math-home.ir : موفف



$$\hat{O}_1 = \widehat{AC} = 50^\circ \\ \Rightarrow \hat{O}_2 = 180 - 50 = 130^\circ \\ OB = OC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 25^\circ \\ \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 - 130 = 50^\circ \uparrow$$



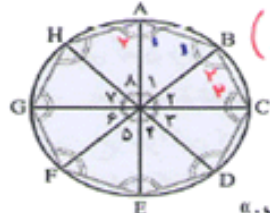
$$360 \div 8 = 45$$



۱- محیط دایره روبه رو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده ایم.
می خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.
رضا برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می کند:
«مثلث های AOB, BOC, COD و... متساوی الساقین اند.»

دایره من باشند

چرا؟ $\widehat{OA} = \widehat{OB} = \widehat{OC} = \widehat{OD} = \dots$ (شعاع های)



و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots$ پس همه زاویه های سبز رنگ با هم برابرند.

چرا؟ $(\hat{O}_1 = 45^\circ, OA = OB) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 47.5^\circ$
پس همه زاویه های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟
آرش می گوید: «ولی این تنها برای زاویه ها را نشان می دهد
و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع های هشت ضلعی
پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»

$$(\hat{O}_2 = 45^\circ, OB = OC) \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2 = 47.5^\circ$$

پس تمام زاویه های سبز رنگ با هم مساوی می باشند

$$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A} = 2 \times 47.5 = 95^\circ$$

به همین ترتیب داریم $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \dots = \hat{H} = 95^\circ$

بعد ادامه می دهد: «مثلث های AOB, BOC, COD و... هم نهشت اند. در چه حالتی؟ (ض, ض, ض)»

پس $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$ یعنی ضلع های هشت ضلعی هم مساوی اند.»

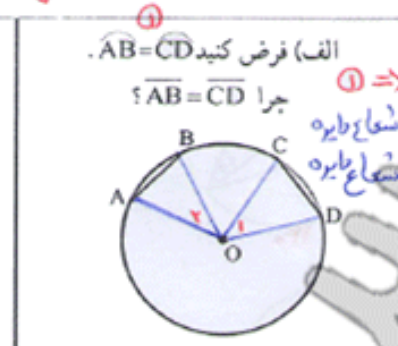
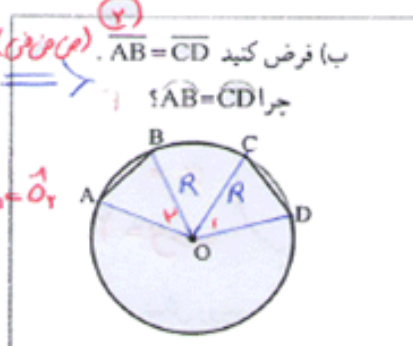
هر جا لازم است، توضیحانی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن هشت

ضلعی کامل شود.

۲- برای هر مورد دلیل بیاورید. کلامی

$$\textcircled{ب} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \\ OA = OD = R \\ OB = OC = R$$

$$OA \hat{=} OD \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$



$$\textcircled{الف} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OD \\ OB = OC \\ \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.

اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد، اندازه وترهای آن ها نیز با هم برابر خواهد بود

به عکس. اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، اندازه کمان های نظیر آن ها نیز با هم برابر است

جواب سؤال ۴ الف) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AC} = \widehat{AD} = \widehat{BC}$ ①

اگر دو زاویه مرکزی برابر باشند کمان‌های نظیرشان نیز با هم برابر است
ب) بله، می‌دانیم اگر چند کمان با هم مساوی باشند آن‌گاه وترهای نظیر آن کمان‌ها نیز با هم مساوی اند

① $\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AC} = \widehat{AD} = \widehat{BC}$

$(\hat{O}_1 = 90^\circ, OB = OC) \Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{C}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$ $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$

$(\hat{O}_2 = 90^\circ, OA = OC) \Rightarrow \vec{A}_2 = \vec{C}_2 = 45^\circ$



۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و $\angle AOB = 36^\circ$

اندازه هر یک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟ 18°
 $36 \div 2 = 18 \Rightarrow \vec{D}_1 = \vec{D}_2 = 18^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB} = 18^\circ$
۲- کمان AB برابر x درجه است.



اندازه زاویه AOB را بر حسب x به دست آورید. $x = 180^\circ$

اندازه زاویه ACB را بر حسب x به دست آورید. $x = 180^\circ$

در نظر بگیرید $x = 180^\circ$

بهتر است با عدد هل شود

مؤلف: math-home.ir

$\hat{O}_1 = \hat{B} + \hat{C}$

$OB = OC \Rightarrow \vec{B} = \vec{C}$

$\hat{C} = \frac{x}{2} \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$

۳- متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می‌کند. در هر

شکل، کمان طی شده مشخص شده است. جدول را کامل کنید.

شکل					
کسر طی شده از دایره	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
اندازه کمان طی شده	90°	270°	180°	120°	90°
طول تقریبی کمان طی شده	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2} = \pi$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{4}$

۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند. $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BD} = \widehat{AD} = \widehat{AC}$

مرکزی با هم برابرند



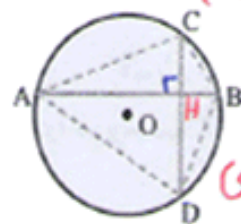
الف) چرا کمان‌های AC، BD، CB، DA با هم مساوی اند؟ چون زاویه‌های

ب) آیا وترهای AC، BD، CB، DA نیز با هم مساوی اند؟ بله

ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ADCB با هم مساوی اند؟ چرا؟ بله

$(\hat{O}_1 = 90^\circ, OC = OB) \Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{C}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$

۵- در شکل روبه‌رو وترهای AB و CD بر هم عمودند.



الف) آیا کمان‌های AC، BD، CB، DA با هم مساوی اند؟ خیر

ب) پاسخ‌تان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.

این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟ در تمرین قبل دو وتر قطرهای

دایره بودند و در مرکز یکدیگر را قطع می‌کردند ولی اینجا وترها قطر نیستند

و زاویه‌های H یک زاویه مرکزی نیست

زاویه های محاطی

فعالیت



۱- مانند نمونه رسم شده (الف)، در شکل های زیر نمونه ای از هر یک از وضعیت های

مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.

math-home.ir



مؤلف:

(ب) رأس زاویه خارج دایره



(الف) رأس زاویه روی دایره



(د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه ای غیر از مرکز



(ج) رأس زاویه در مرکز دایره

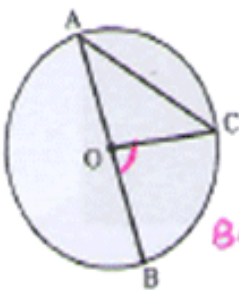
(ج)

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟

به زاویه ای که در شکل «الف» مشاهده می کنید، زاویه محاطی گفته می شود. رأس این زاویه

روی دایره است و ضلع های آن، دایره را قطع کرده اند.

زاویه محاطی



۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را بر حسب $\widehat{BC}$ بنویسید: $\widehat{BOC} = \widehat{BC}$

چرا زاویه های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟ $OA = OC$

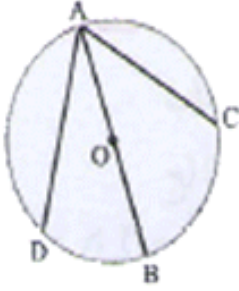
چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟ $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{C}$

اندازه زاویه محاطی BAC را بر حسب $\widehat{BC}$ بنویسید. $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

۳- با توجه به فعالیت قبل، با پر کردن جاهای خالی

اندازه زاویه محاطی DAC را بر حسب $\widehat{DC}$ بنویسید.

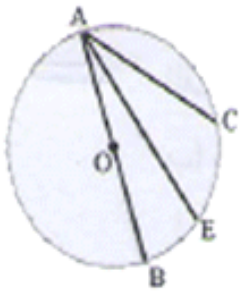
$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$



۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC

را هم بر حسب $\widehat{EC}$ بنویسید.

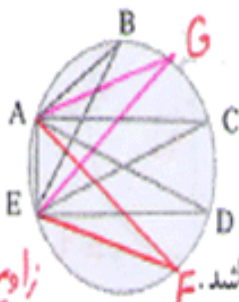
$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{EC}}{2}$$



کار در کلاس



۱- با توجه به شکل رویه‌رو،



زاویه‌های $\hat{F}$ و $\hat{G}$

$\hat{D}, \hat{C}, \hat{B}$

الف) زاویه‌های محاطی مقابل به $\widehat{AE}$ را پیدا کنید.

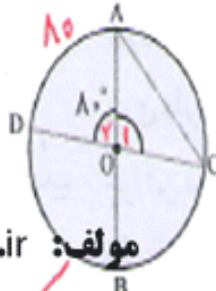
ب) دو زاویه محاطی دیگر رسم کنید که $\widehat{AE}$ کمان مقابل به آنها نیز باشد.

۲- در شکل رویه‌رو، اندازه زاویه محاطی C را تعیین کنید.

دو دانش‌آموز به این سؤال جواب داده‌اند.

راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید.

کلامی



مؤلف: math-home.ir

فاطمه

$$\hat{O} = 80^\circ \rightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

به آن می‌باشد

زهره

$$\hat{O}_1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{C} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

به کمان $\widehat{AE}$ است

مجموع زاویه‌ها در هر مثلث 180° است

مثلث OAC متساوی الساقین است

و زاویه $\hat{O}_1 = 100^\circ$ است

فعالیت



۱- یک زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

سه زاویه محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

فکر می‌کنید چند زاویه دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

آیا همه این زاویه‌های رسم شده با هم برابرند؟ چرا؟

بله، زیرا همگی روی یک کمان می‌باشند پس نصف کمان AB می‌باشند.

۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟

چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویه محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

اندازه این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

نود (۹۰) درجه زیرا نصف کمان مقابلش می‌باشد

$$\widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow \text{زاویه محاطی مقابل به آن} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$



این شماره روی

کمان $\widehat{AMB}$ می‌شمار

نقطه وجود دارد که با وصل کردن به A و B یک زاویه محاطی درست می‌شود

بله، زیرا همگی روی یک کمان می‌باشند پس نصف کمان AB می‌باشند.

۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟

چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویه محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

اندازه این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

نود (۹۰) درجه زیرا نصف کمان مقابلش می‌باشد

بله، زیرا همگی روی یک کمان می‌باشند پس نصف کمان AB می‌باشند.

۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟

چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویه محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

اندازه این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

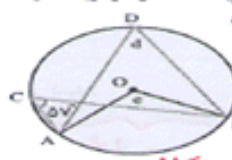
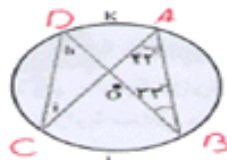
۱- اندازه زاویه ها و کمان های مجهول را پیدا کنید.

$$j = 2 \times 42 = 84$$

$$h = \hat{A} = 42$$

$$k = 2\hat{C} = 44$$

$$l = \hat{B} = 33$$



$$d = c = 57$$

$$e = \widehat{AB} = 114$$

۲- در شکل زیر زاویه مرکزی AOB برابر با ۷۲ درجه است. اندازه کمان AB چند درجه است؟

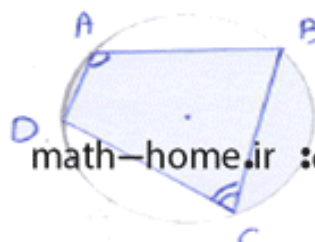
$$\widehat{AB} = \hat{O} = 72$$

اگر دهانه برگار را به اندازه AB باز کنیم و با شروع

از نقطه B، بی دربی کمان هایی بزنیم، به این ترتیب

چند کمان مساوی روی دایره جدا می شود؟

$$360 \div 72 = 5$$



مؤلف: math-home.ir

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2}$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 180$$

نتیجه: مجموع دوزاویه مقابل خروجی مضلعی محاطی برابر ۱۸۰ درجه است

۳- در شکل روبه رو، دایره ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.

الف) شکل چند خط تقارن دارد؟ خط تقارن

ب) اندازه دو زاویه مشخص شده روی شکل را پیدا کنید و بنویسید.

$$\hat{A} = 45, \hat{K} = 90$$

۴- دایره ای بکشید. سپس، چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید

که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

چرا مجموع دوزاویه روبه رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر ۱۸۰ درجه است؟

بالا

۵- در شکل روبه رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.

الف) اندازه زاویه O را بر حسب x بنویسید. درجه x

ب) اندازه کمان قرمز رنگ را بر حسب x بنویسید. ۳۶۰ - x

ج) اندازه زاویه C را بر حسب x بنویسید.

$$\hat{C} = \frac{360 - x}{2} = 180 - \frac{x}{2}$$

۶- در شکل زیر، برده ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخ ایجاد کرده اند.

شعاع چرخ ۳۰ سانتی متر است.

$$360 \div 12 = 30$$

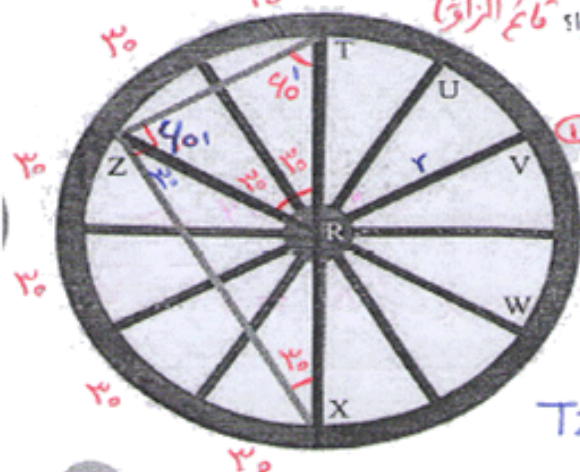
الف) طول TX جقدر است؟ ۹۰ cm (قطر دایره)

ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ متساوی الساقین

ج) طول ZT جقدر است؟ ۹۰ cm

د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ قائم الزامی

ه) طول ZX جقدر است؟



$$\hat{T}_1 = \hat{Z}_1 = \hat{TRZ} = 40$$

مثلث TRZ متساوی الساقین است

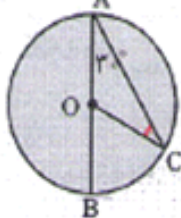
$$\Rightarrow TZ = r = 30 \text{ cm}$$

$$\hat{TZX} = \frac{\widehat{TX}}{2} = \frac{180}{2} = 90$$

$$\Rightarrow ZX^2 = TX^2 - TZ^2 \Rightarrow ZX^2 = 40^2 - 30^2 = 3400 - 900$$

$$\Rightarrow ZX = \sqrt{2500} = \sqrt{9 \times 100 \times 3} = 30\sqrt{3}$$

مؤلف: math-home.ir



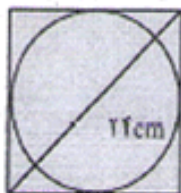
۱- با توجه به شکل روبه‌رو، اندازه زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.

$$\hat{C} = 30^\circ, \hat{COB} = 40^\circ, \text{BC} = 40$$

$$\hat{COB} = \hat{A} + \hat{C}$$

۲- کاغذی مربعی شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که

می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید.



$$x^2 + x^2 = 24^2 \Rightarrow 2x^2 = 576 \Rightarrow$$

$$x^2 = 288 \Rightarrow x = \sqrt{288} = \sqrt{2} \times \sqrt{144} = 12\sqrt{2}$$

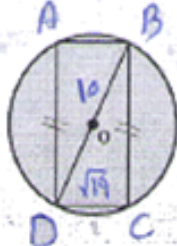
چهار ضلعی متناهی (۱)

۳- الف) در شکل زیر ضلع‌های روبه‌رو به هم در چهارضلعی با هم برابرند.

$$A = \frac{BD}{y} = \frac{10}{y} = 90 \quad (2)$$

ب) شعاع دایره برابر ۵ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{19}$ سانتی‌متر است.

طول مستطیل را به دست آورید.



$$BC^2 = 10^2 - 19^2 \Rightarrow BC^2 = 100 - 19 = 81$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{81} = 9$$

ABCD مستطیل (۱), (۲) =>

زیر متناهی الاضلاع

کدام زاویه قائمه دارد مستطیل است

اس