

الهی به مستان می‌خانه‌ات
به دردی‌کش لجه‌ی کبریا
به دری که عرش است او را صدف
به می‌خانه‌ی وحدتم راه ده

به عقل‌آفرینان دیوانه‌ات
که آمد به شانش فرود انما
به ساقی‌کوثر، به شاه نجف
دل زنده و جان آگاه ده

آرتیمانی

آزمون تئوری یازدهم

۲۰ دی ۱۳۹۱ - زمان: ۳ ساعت

پرسش نخست: احتمال

شما وارد یک دفتر پستی شده‌اید و می‌خواهید بسته‌ای را پست کنید. این دفتر ۲ کارمند دارد که هر یک مشغول انجام کار یک مشتری هستند. شما باید صبر کنید تا کار یکی از کارمندان تمام شود تا بتوانید برای پست کردن بسته‌ی خود به او مراجعه کنید. فرض کنید احتمال این که آماده‌سازی و پست‌کردن یک بسته بیش از t ثانیه طول بکشد (t یک عدد حقیقی مثبت است)، مستقل از نوع بسته و این که کدام کارمند روی آن کار می‌کند، دقیقاً برابر با 2^{-t} است. احتمال این که شما سومین نفری باشید که کارش راه می‌افتد چه قدر است؟

پرسش دوم: ادامه‌ی پرسش‌های قبلی

فرض کنید n آرایه‌ی مرتب داریم که هر کدام شامل n عدد حقیقی هستند. ثابت کنید برای ادغام (merge) کردن این آرایه‌ها دست‌کم به $\Omega(n \lg n)$ مقایسه نیاز داریم.

پرسش سوم: جاده‌کشی

کشور پرسوپورتیکا n شهر دارد. جمعیت شهر i ام، p_i نفر است. وزارت راه می‌خواهد تعدادی جاده‌ی دو طرفه بین شهرها بکشد طوری که هر جاده بین دو شهر متمایز باشد (سر و ته جاده یکی نباشد) و تعداد جاده‌هایی که به هر شهر وارد می‌شود برابر با جمعیت آن باشد. (ممکن است بین دو شهر بیش از یک جاده کشیده شود.) الگوریتمی از $O(n + \sum p_i)$ بیابید که تعیین کند این کار ممکن است یا نه و در صورتی که ممکن بود یک روش جاده‌کشی ارائه دهد.

پرسش چهارم: چندجمله‌ای

فرض کنید اعداد حقیقی x_1, \dots, x_n و y_1, \dots, y_n داده شده باشند. ثابت کنید چندجمله‌ای یکتای $p(x)$ از درجه‌ی حداکثر n موجود است که به ازای هر $0 \leq i \leq n$ داشته باشیم $p(x_i) = y_i$.

ما قربانی جهل مردمیم.

میرزا تقی‌خان فراهانی