بنام حضرت دوست که هرچه داریم از اوست

مروری بر معادلات دیفرانسیل معمولی

درس:ریاضیات مهندسی پیشرفته

مدرس: رعایت پناه

سرفصل معادلات دیفرانسیل

عنوان

فصل اول: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

1: ماهیت معادلات دیفرانسیل و طبقه بندی آنها

2: معادله دیفرانسیل جدا شدنی و تبدیل به آن

3: معادله دیفرانسیل همگن و تبدیل به آن

4: معادله دیفرانسیل کامل

5: معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی و تبدیل به آن

فصل دوم: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

1: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حالت خاص فاقد x یا y
2: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت همگن
3: معادله دیفرانسیل کشی-اویلر
4: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیر همگن (تغییر متغیر)
5: روش ضرایب ثابت(ضرایب نامعین)

فصل سوم: تبدیلات لاپلاس

1: تبدیل لاپلاس
2: خواص تبدیل لاپلاس
3: معکوس تبدیل لاپلاس
4: حل معادله دیفرانسیل به روش لاپلاس
5: تبدیل لاپلاس برخی توابع

تعریف : معادله ای که شامل ترکیباتی از x (متغیر مستقل) و y (متغیر وابسته) و مشتقات آن باشد را معادله دیفرانسیل نامیم وبا نماد

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

نشان می دهیم

درمورد معادله دیفرانسیل نیز می توان دو سوال طرح کرد:

الف) آیا تابع $f(x, y) = 0$ جواب معادله دیفرانسیل می باشد؟

ب) جواب های معادله دیفرانسیل را پیدا کنید؟

جواب دادن به سوال الف) ساده است (با جایگذاری) مثلا آیاتابع

$y = e^{2x}$ جواب معادله $y'' - 5y' + 6y = 0$ میباشد؟

جواب دادن به سوال ب) مشکل می باشد وبستگی به نوع معادله وطبقه بندی آن دارد. باتعریف مرتبه ودرجه معادله دیفرانسیل به سراغ سوال ب) می رویم.

تعریف: بیشترین تکرار مشتق در هر معادله را مرتبه آن وتوان بیشترین تکرار مشتق را درجه معادله دیفرانسیل نامیم .

مثلا :

1)معادله $\left(y'\right)^3 + y^4 = x^5$

مرتبه اول ، درجه سوم می باشد.

2) معادله $\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = x$

مرتبه سوم ، درجه اول می باشد.

3) معادله $y^{(2)} + y^{(3)} = y^4$

مرتبه سوم ، درجه اول می باشد .

معادله دیفرانسیل جدا شدنی

مشابه معادله معمولی باتوجه به تعریف مرتبه ودرجه معادله دیفرانسیل می توان آنها راطبقه بندی کرد. بنابراین ساده ترین معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت $f\left(x, y, y'\right) = 0$ می باشد که اگر توان y' برابربایک باشد آنگاه معادله مرتبه اول درجه اول می باشد که مرتبه اول درجه اول

بصورت کلی

$$y' = \frac{f\left(x, y\right)}{g\left(x, y\right)} = F(x, y)$$

می باشد

تعریف: معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول به صورت

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

را معادله جدا شدنی نامیم (مرحله شناخت). هر معادله مرتبه اول درجه اول جداشدنی را اختصارا معادله جداشدنی (جدایی پذیر)نامیم. هر معادله جدا شدنی را می توان بصورت کلی

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

تبدیل کرد.

حل معادله دیفرانسیل جداشدنی: با انتگرالگیری از معادله جداشدنی

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

می توان جواب آنرا محاسبه کرد.

تذکر: هدف از حل معادله دیفرانسیل محاسبه جواب عمومی معادله دیفرانسیل می باشد. جوابی را جواب عمومی نامیم هرگاه تعداد پارامترها به تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل باشد که بعدا آنرا دقیقا تعریف خواهیم کرد.

مثال : معادله $y' = \dfrac{x^2 + x}{y^2 - y}$ را حل می کنیم.

حل :داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x}{y^2 - y}$$

آن گاه

$$\left(x^2 + x\right)dx + \left(y - y^2\right)dy = 0$$

درنتیجه $\int \left(x^2 + x\right)dx + \int \left(y - y^2\right)dy = \int 0$ ویا

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 = 0$$

جواب (عمومی)معادله است .

معادله دیفرانسیل همگن

ملاحظه شد معادله مرتبه اول درجه اول بصورت

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

ویا به صورت

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

می باشد

مثلا معادلات

$$y' = \frac{x^2 + y}{y^2 + x}, y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

معادلات مرتبه اول درجه اول می باشند که هیچکدام جدا شدنی نیستند ولی معادله اولی دارای خاصیتی می باشد که معادله دومی نیست. درمعادله دیفرانسیل اول تمام جملات توابع

$$z = g(x, y) \ , \ z = f(x, y)$$

از توان یکسان دو می باشد ولی معادله دومی چنین نیست. این مفهوم رابانماد ریاضی تعریف می کنیم.

تعریف : تابع دو متغیره $z = f(x, y)$

را تابع همگن از درجه n نامیم هرگاه درشرط زیر صدق کند:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

تابع $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ تابع همگن ازدرجه دو می باشد

تابع

$$f(x, y) = xe^{\frac{y}{x}} + y \sin \frac{y}{x}$$

تابع همگن از درجه یک می باشد.

تعریف: معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

را معادله همگن نامیم هر گاه توابع دو متغیره g, f توابع همگن از درجه یکسان باشند. بعبارت دیگر معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

را معادله همگن نامیم هر گاه توابع دو متغیره M, N توابع همگن از درجه یکسان باشند.

حل معادله دیفرانسیل همگن: فرض کنیم معادله $y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ همگن باشد. بافرض تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ داریم $y = vx$ پس

$$y' = v'x + v$$

آن گاه با جایگذاری درمعادله نتیجه می شود که

$$v'x = \frac{f(1,v)}{g(1,v)} - v \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{f(1,v)}{g(1,v)} - v = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = \frac{dx}{x}$$

که معادله اخیر جدا شدنی است می توان آنرا به روش جدا شدنی حل کرد وبا جایگذاری $v = \frac{y}{x}$

جواب معادله دیفرانسیل اولیه بدست می آید.

مثال: معادله دیفرانسیل همگن $\left(x^2+y^2\right)dx+xydy=0$
را حل می کنیم باجایگذاری $dy=vdx+xdv$ و $y=vx$
داریم:

$$\left(x^2+v^2x^2\right)dx+xvx\left(vdx+xdv\right)=0$$

$$\left(x^2+v^2x^2+v^2x^2\right)dx+x^3vdv=0$$

$$x^2\left(1+2v^2\right)dx+x^3vdv=0$$

$$\left(1+2v^2\right)dx+xvdv=0$$

با تقسیم برحاصلضرب عبارات اضافی $x\left(1+2v^2\right)$
داریم:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{v}{1+2v^2}dv=\int 0$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+2v^2) = \ln c$$

تذکر: برای ساده کردن به جای c معمولا $\ln c$ را بعنوان پارامتر ثابت اختیار می کنیم.

$$\ln x(1+2v^2)^{\frac{1}{2}} = \ln c$$

$$x\sqrt{(1+2v^2)} = c$$

$$x\sqrt{(1+\frac{2y^2}{x^2})} = c$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.

معادله دیفرانسیل کامل

درریاضیات عمومی با دیفرانسیل توابع دو متغیره

$$z = f(x, y)$$

آشنا شدیم وملاحظه کردیم که دیفرانسیل کامل تابع را که با نماد df نشان می دهیم عبارت است از

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

وهمچنین معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول بصورت کلی $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ می باشد.

تعریف :معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

را معادله کامل نامیم هر گاه تابع دو متغیره $z = f(x,y)$

موجود باشد بطوری که $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$.

با توجه به تعریف بالا تعیین اینکه معادله دیفرانسیل داده شده کامل می باشد، مشکل است زیرا باید تمام توابع دو متغیره راجستجو کنیم وملاحظه کنیم که بترتیب کدام تابع دارای مشتقات جزیی نسبت به x, y برابر با توابع $M = M(x,y)$

و $N = N(x,y)$ می باشد

بنابراین شرط کامل بودن معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

عبارت است از :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

(مرحله شناخت).

مثال :معادلات دیفرانسیل زیر کامل می باشد.

الف) $$\left(2x+y\right)dx+\left(x+3y^{2}\right)dy=0$$

زیرا

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1=\frac{\partial N}{\partial x}=1$$

ب) $$\left(2xy^{3}+y\right)dx+\left(3x^{2}y^{2}+3y^{2}\right)dy=0$$

زیرا

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6xy^{2}+1=\frac{\partial N}{\partial x}=6xy^{2}+1$$

حل معادله دیفرانسیل کامل:

فرض کنیم که معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل باشد بنابر تعریف معادله دیفرانسیل کامل، تابعی مانند

$$z = f(x,y)$$

موجود است که:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = M(x,y)$$

پس بنابر تساوی های بالا نتیجه می شود $df = 0$

ویا $f = c$ جواب معادله دیفرانسیل می باشد .

تنها معلومات، مشتقات جزیی f می باشد که با استفاده از روند زیر می توان آنرا محاسبه کرد.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \xrightarrow{\int x} f = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int m(x,y)dx + \varphi'(y)$$

آن گاه با استفاده از رابطه دوم $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ مقدار $\varphi'(y)$ بدست می آید که با انتگرال گیری از آن مجهول f که همان $\varphi(y)$ می باشد محاسبه می شود در نتیجه f بدست می آید که $f = c$ جواب معادله دیفرانسیل است .

مثال: ملاحظه شد که معادله

$$(2x+y)dx+(x+3y^2)dy=0$$

کامل می باشد پس:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+y \xrightarrow{\int x} f=x^2+yx+\varphi(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+\varphi'(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+3y^2 \Rightarrow x+\varphi'(y)=x+3y^2 \Rightarrow \varphi'(y)=3y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(y)=y^3 \Rightarrow f=x^2+yx+y^3 \xrightarrow{df=0} x^2+yx+y^3=c$$

جواب معادله دیفرانسیل است.

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

ملاحظه شد که معادله مرتبه اول بصورت $f\left(x, y, y'\right) = 0$ می باشد که اگر توان های y', y برابر با یک باشد آنرا معادله مرتبه اول خطی نامیم (معادله خط $ax + by = c$ ملاحظه شد که توان x, y برابر با یک می باشد که اگر توان یکی از x یا y به غیر یک باشد آن گاه معادله منحنی می باشد) بنابراین معادله مرتبه اول خطی به صورت

$$f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3\left(x\right)$$

می باشد.

با تقسیم طرفین بر f_1 معادله مرتبه اول خطی بصورت کلی

$$y' + p(x)y = q(x)$$

است (مرحله شناخت) مثلا معادلات زیر مرتبه اول خطی هستند:

الف) $y' + \frac{1}{x} y = x^3$

ب) $y' + \frac{1}{x} y = e^x$

ج) $y' - 2xy = e^{x^2}$

برای حل معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = q(x)$

ابتدا ملاحظه می کنیم که آیا کامل است یا نه؟

عامل انتگرال ساز معادله مرتبه اول خطی $u = e^{\int p(x)dx}$ است و

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}.q(x)dx + c$$

جواب عمومی معادله مرتبه اول خطی $y' + p(x)y = q(x)$ می باشد

مثال : معادله مرتبه اول خطی $y' + \frac{1}{x} y = x^3$ را حل می کنیم.

چون $p(x) = \frac{1}{x}$ و $q(x) = x^3$ پس: $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} [\int e^{\int \frac{1}{x} dx} . x^3 dx + c$

$$y = e^{-\ln x} [\int e^{\ln x.} . x^3 dx + c] \Rightarrow y = e^{\ln x^{-1}} [\int x . x^3 dx + c]$$

$$y = x^{-1} \left(\frac{1}{5} x^5 + c \right) \Rightarrow y = \frac{1}{5} x^4 + \frac{c}{x}$$

جواب معادله دیفرانسیل است.

حالت خاصی از معادلات مرتبه اول خطی به صورت

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$$

می باشد که توان های $x, x' = \frac{dx}{dy}$ برابر با یک می باشد. با توجه به روش حل معادله مرتبه اول خطی با تعویض نقش x با y وبالعکس نتیجه می شود که

$$x = e^{-\int p(y)dy}[\int e^{\int p(y)dy}.q(y)dy + c]$$

- حالت خاصی از معادلات مرتبه اول که تبدیل به خطی می شود به صورت $y' + p(x)y = q(x)y^n$

می باشد که به ازای $n = 0$ معادله مرتبه اول خطی است وبه ازای $n = 1$ معادله جدا شدنی است وبه ازای $n \neq 0,1$ ، معادله برنولی نامیده می شود. معادله دیفرانسیل برنولی را می توان با تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ حل کرد و دارای جواب

$$z = y^{1-n} = e^{-\int (1-n)p(x)dx}[\int e^{\int (1-n)p(x)dx}.(1-n)q(x)dx + c$$

است.

مثال: معادله $y' + \frac{1}{x} y = x^3 y^4$ را حل می کنیم.

حل:داریم $n = 4$ و $1 - n = -3$ و $p(x) = \frac{1}{x}$ و $q(x) = x^3$

پس:

$$y^{-3} = e^{-\int (-3)\frac{1}{x}dx} [\int e^{\int (-3)\frac{1}{x}dx} .(-3)x^3 dx + c]$$

$$y^{-3} = x^3 [\int x^{-3} .(-3x^3) dx + c]$$

$$y^{-3} = x^3 [\int -3dx + c]$$

$$y^{-3} = x^3 (-3x + c)$$

$$y^{-3} = -3x^4 + cx^3$$

جواب عمومی معادله است.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

دراین فصل معادله مرتبه دوم $f(x, y, y', y'') = 0$ را درحالات خاص بررسی می کنیم.

معادله مرتبه دوم حالت خاص فاقد y یا x

ممکن است درمعادله ضریب x یا y برابر صفر باشد.

- معادله به صورت $f(y, y', y'') = 0$ را **مرتبه دوم فاقد** x

نامیم. مثلا $yy'' = (y')^2$ و $y'' + y = 0$
معادلات مرتبه دوم فاقد x می باشند.

- معادله به صورت $f(x, y', y'') = 0$ را **مرتبه دوم فاقد** y

نامیم. مثلا $xy'' = y'$ و $xy'' - y' = 3x^2$
معادلات مرتبه دوم فاقد y می باشند.

الف) **حل معادله** $f(x, y', y'') = 0$

با تغییر متغیر $y' = p$ می توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلا بحث شده است می توان آنرا حل کرد

زیرا بافرض $y' = p$ داریم $y'' = \frac{dp}{dx}$ که با جایگذاری درمعادله نتیجه می شود

$$f(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$$

که معادله مرتبه اول می باشد.

ب) حل معادله $f(y, y', y'') = 0$

با تغییر متغیر $y' = p$ می توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلا بحث شده است می توان آنرا حل کرد

زیرا بافرض $y' = p$ داریم $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ که

با جایگذاری درمعادله نتیجه می شود

$$f(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$$

که معادله مرتبه اول با فرض y متغیر مستقل و p متغیر وابسته می باشد.

مثال : معادله فاقد y ، $xy' = y'$ را باتغییر متغیر $y' = p$ حل می کنیم.

که با جایگذاری $y'' = \dfrac{dp}{dx}$ داریم:

$$x\frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln c_1 \Rightarrow \ln p = \ln c_1 x \Rightarrow p = c_1 x \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 x \Rightarrow \int dy = \int c_1 x dx \Rightarrow y = \frac{1}{2} c\ x^2 + c_2$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

مثال : معادله مرتبه دوم فاقد X ، $yy'' = (y')^2$ را باتغییر متغیر $y' = p$ حل می کنیم که با جایگذاری

$y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ داریم: $yp\dfrac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow ydp = pdy$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = \ln y + \ln c_1 \Rightarrow p = c_1 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 y \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int c_1 dx \Rightarrow \ln y = c_1 x + c \Rightarrow y = e^{c_1 x + c} = e^{c_1 x}.e^{c}$$

$$\Rightarrow y = c_2 e^{c_1 x}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

تذکر: درحل این نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، درواقع هر معادله مرتبه دوم را به دو معادله مرتبه اول تبدیل کرده وآنها را حل می کنیم.

معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت همگن

دراین بخش حالت خاصی از مرتبه دوم رابررسی می کنیم.
ملاحظه شد که معادله مرتبه دوم خطی بصورت کلی

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = f_4(x)$$

می باشد که اگر $f_4(x) = 0$ آنرا مرتبه دوم خطی همگن نامیم

اگر f_1 , f_2 , f_3 توابع ثابت باشند بعبارت دیگر مقادیر آنها اعداد ثابت باشند آن گاه معادله بصورت

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

می باشد که می توان آنرا بصورت ساده

$$y'' + ay' + by = 0$$

ملاحظه کرد که آنرا مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت ، یا اختصارا با ضرایب ثابت نامیم . (مرحله شناخت)

حل معادله : $y'' + ay' + by = 0$

با تعریف نماد $D = \frac{d}{dx}$ داریم $y' = \frac{dy}{dx} = Dy$ و

$y'' = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = D^2 y$ که با جایگذاری درمعادله

$$y'' + ay' + by = 0$$

نتیجه می شود که :

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

معادله $D^2 + aD + b = 0$ را معادله کمکی (یا مفسر)نامیم
معادله کمکی، یک معادله درجه دو می باشد که ممکن است
سه حالت زیر رخ دهد:

الف) دارای دو ریشه متمایز باشد یعنی

$$D^2 + aD + b = (D - m_1)(D - m_2) = 0$$

ب) دارای ریشه مضاعف (تکراری)باشد یعنی

$$D^2 + aD + b = (D - m)(D - m) = 0$$

ج (دارای ریشه مختلط باشد یعنی

$$D^2 + aD + b = (D - (\alpha + i\beta)(D - (\alpha - i\beta) = 0$$

بنابراین معادله دیفرانسیل $(D^2 + aD - b)y = 0$ را با توجه به معادله کمکی به دو معادله مرتبه اول تبدیل کرده وآنرا حل می کنیم. بنابراین :

الف) $(D - m_1)(D - m_2) = 0$ که بافرض $(D - m_2)y = u$ داریم

$(D - m_1)u = 0$ وبا حل معادله مرتبه اول $(D - m_1)u = 0$ نتیجه می شود.

$$u = c_1 e^{m_1 x}$$

که با جایگذاری درمعادله $(D - m_2)y = u$

وحل معادله خطی بالا داریم $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

ب) اگر $(D-m)(D-m)y=0$ آن گاه مشابه قسمت الف) نتیجه می شود که

$$y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.

ج) اگر معادله کمکی دارای دو ریشه مختلط باشد بنابر الف) داریم :

$$y=c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$$

ویا

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد

مثال :معادلات

الف) $y'' - 5y' + 6y = 0$

ب) $y'' - 4y' + 4y = 0$

ج) $y'' - y' + y = 0$

معادلات مرتبه دوم با ضرایب ثابت می باشند.

حل: الف) معادله کمکی عبارت است از $D^2-5D+6=0$
که $D=2,3$ بنابراین: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ جواب عمومی
معادله دیفرانسیل است.

ب) معادله کمکی عبارت است از $D^2-4D+4=0$ که
$D=2,2$ بنابراین : $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$ جواب عمومی
معادله دیفرانسیل است.

ج) معادله کمکی عبارت است از $D^2-D+1=0$ که
$D=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ بنابراین: $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ پس

$$y=e^{\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

تذکر: معادله مرتبه دوم را به روش دیگرنیز می توان حل کرد که اگر $y_1 = y_1(x)$ و $y_2 = y_2(x)$ توابعی باشند که جوابی از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن، آن گاه

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

جوابی از معادله دیفرانسیل می باشد واگر y_1 , y_2 توابعی مستقل خطی باشند آنگاه این جواب ، جواب عمومی معادله دیفرانسیل است ومی توان معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را از این دیدگاه بررسی کرد .

معادله کشی-اویلر

معادله مرتبه دوم خطی همگن

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

راکه درآن b, a اعداد ثا بت اند معادله کشی-اویلر(Cauchy-Euler)می نامیم.

مثال معادلات دیفرانسیل زیر معادله های کشی – اویلر می باشند.

الف)

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

ب)

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

حل معادله کشی – اویلر $x^2y'' + axy' + by = 0$

این معادله را با تغییر متغیر $x = X^t$ می توان به معادله مرتبه دوم با ضریب ثابت تبدیل کرد زیرا :

$$D(D-1)Y + aDY + bY = 0$$

مثال: معادله کشی – اویلر زیر را حل می کنیم:

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

حل: با فرض $x = e^t$ داریم:

$$D(D-1)Y - 4DY + 6Y = 0$$

پس معادله کمکی دارای ریشه های $D = 2,3$ است بنابراین:

$$Y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

با جایگذاری $x = e^t$ (یا $t = \ln x$) نتیجه می شود:

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3$$

جواب معادله کشی – اویلر است.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیر همگن

ملاحظه شد که معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت غیر همگن بصورت $y'' + ay' + by = f(x)$ می باشد که اگر $f(x) = 0$ آنرا معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت همگن نامیم یعنی :

$$y'' + ay' + by = 0$$

ودارای جوابی بصورت $y = c_1 u_1 +_2 u_2$ می باشد.

حال اگر y_c جواب عمومی معادله همگن

$$y'' + ay' + by = 0$$

و y_p جوابی خاص از معادله غیر همگن

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

باشد آن گاه

$$y = y_c + y_p$$

جواب عمومی معادله غیر همگن می باشد.

تعریف :معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ را
معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت وابسته معادله دیفرانسیل

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

نامیم.

هدف از این قسمت درس پیدا کردن جواب خاص معادله غیر همگن $y'' + ay' + by = f(x)$

می باشد که دو روش برای پیدا کردن y_p ارائه می دهیم.

الف)روش تغییر پارامتر :

دراین روش فرض می کنیم که جواب خاص y_p بصورت

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

با شد که چون $y_c = c_1 u_1 + c_2 u_2$ جواب همگن می باشد وبا تغییر پارامترهای c_1, c_2 به توابع $v_1 = v_1(x)$ و $v_2 = v_2(x)$بدست آمده است، به همین دلیل این روش را تغییر پارامتر نامیم .

حال با توجه به معلوم بودن ظاهر جواب خاص کافی است روابطی که توابع v_2, v_1 درآن صدق می کنند را پیدا کنیم . بنابراین داریم:

$$y'_p = v'_1 u_1 + v_1 u'_1 + v'_2 u_2 + v_2 u'_2$$

$$y''_p = v''_1 u_1 + v'_1 u'_1 + v'_1 u'_1 + v_1 u''_1 + v''_2 u_2 + v'_2 u'_2 + v'_2 u'_2 + v_2 u''_2$$

چون باید درمعادله همگن $y''_p + a y'_p + b y_p = f(x)$ صدق کند، بنابراین

$$\begin{cases} v'_1 u_1 + v'_2 u_2 = 0 \\ v'_1 u'_1 + v_2 u''_2 = f(x) \end{cases}$$

که دستگاه دو معادله دو مجهولی می باشد ومی توان از آن مقادیر v_2', v_1' را محاسبه کرده و با انتگرال گیری

v_2, v_1 محاسبه می شود واز آن جا

$$y_p = v_1 u_1 + + v_2 u_2$$

بدست می آید.

با یک مثال توضیح می دهیم

مثال : معادله غیر همگن $y''-5y'+6y=3e^{x}$ را حل می کنیم:

حل : معادله وابسته $y''-5y'+6y=0$ دارای جواب $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ است بنابراین $u_1=e^{2x}$ و $u_2=e^{3x}$

پس:

$$\begin{cases} v_1'e^{2x}+v_2'e^{3x}=0 \\ v_1'(2e^{2x})+v_2'(3e^{3x})=3e^{x} \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در -2 و جمع طرفین دومعادله بالا داریم:

$$v_2'e^{3x}=3e^{x}$$

$$v_2'=3e^{-2x}\Rightarrow v_2=\frac{-3}{2}e^{-2x}$$

با جایگذاری $v_2'=3e^{-2x}$ درمعادله اول داریم:

$$v_1' e^{2x} + (3e^{-2x})e^{3x} = 0$$

$$v_1' e^{2x} = -3e^{x} \Rightarrow v_1' = -3e^{-x} \Rightarrow v_1 = 3e^{-x}$$

درنتیجه:

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 = 3e^{-x}.e^{2x} - \frac{3}{2}e^{-2x}.e^{3x}$$

$$= 3e^{x} - \frac{3}{2}e^{x} = \frac{3}{2}e^{x}$$

پس

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{2}e^{x}$$

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

مثال : معادله غیر همگن $y''-5y'+6y=1+x$ را حل می کنیم.

حل: معادله وابسته $y''-5y'+6y=0$ دارای جواب $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ است بنابراین $u_1=e^{2x}$ و $u_2=e^{3x}$

پس :

$$\begin{cases} v_1'e^{2x}+v_2'e^{3x}=0 \\ v_1'(2e^{2x})+v_2'(3e^{3x})=1+x \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در 2- و جمع طرفین دو معادله بالا داریم:

$$v_2'e^{3x}=1+x$$

$$v_2'=(1+x)e^{-3x}\Rightarrow v_2=-\frac{1}{3}(1+x)e^{-3x}-\frac{1}{8}e^{-3x}$$

با جایگذاری $v_2'=(1+x)e^{-3x}$ در معادله اول داریم:

$$v_1' e^{2x} + (1+x)e^{-3x}e^{3x} = 0 \Rightarrow v_1' = -(1+x)e^{-2x}$$

$$v_1 = -(-\frac{1}{2}(1+x)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}) \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}(1+x)e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$y_p = v_1 u_1 + +v_2 u_2 = \frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}(1+x) - \frac{1}{9}$$

درنتیجه :

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{1}{6}x + \frac{11}{36}$$

پس

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{11}{36} + \frac{1}{6}x$$

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

روش ضرایب ثابت (ضرایب نامعین)

تبدیل لاپلاس

تعریف: فرض کنیم تابع f بربازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد ، انتگرال ناسره

$$\int^{\infty} e^{-sx} f(x)dt$$

را که S عدد حقیقی است به ازای مْقادیر S از $A \subseteq R$ همگرا باشد آنرا تبدیل لاپلاس تابع f نامیم و با نماد $F(s)$ نشان می دهیم یعنی :

$$\forall s \in A \qquad F(s) = \int^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

برای بیان رابطه بین تابع F و تبدیل لاپلاس تابع f

می نویسیم:

$$F(s) = L(f)(s)$$

شرایط وجود تبدیل لاپلاس را بعداً مطالعه خواهیم کرد.
اینك تبدیل لاپلاس چند تابع خاص را پیدا می کنیم .
تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=1$ را پیدا می کنیم. یعنی:

$$L(1)=F(s)=\int_{\circ}^{\infty}e^{-sx}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{\circ}^{b}e^{-sx}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_{\circ}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}e^{\circ}\right)$$

به ازای $s>0$ انتگرال همگراست پس:

$$L(1)=\frac{1}{s}$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = x$ را پیدا می کنیم :

$$L(x) = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} \cdot x dx = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} x e^{-sx} dx =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{s} x e^{-sx} \Big|_{0}^{b} + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-sx} dx \right] = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{s} x e^{-sx} - \frac{1}{s^2} e^{-sx} \right]_{0}^{b}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{s} b e^{-sb} - \frac{1}{s^2} e^{-sb} + \frac{1}{s} x e + \frac{1}{s^2} e^{0} \right]$$

به ازای $s > 0$ انتگرال همگراست پس

$$L(x) = \frac{1}{s^2}$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = x^n$ را پیدا می کنیم

$$L(x^n) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-sx} \cdot x^n dx = -\frac{x^n e^{-sx}}{s} + \frac{n}{s}\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx} \cdot x^{n-1} dx$$

$$= \frac{n}{s} L(x^n - 1) = \frac{n}{s}\left(\frac{n-1}{s}\right) L(x^{n-2}) = \cdots = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdots \frac{1}{s} L(1)$$

به ازای $s > 0$ انتگرال همگراست پس :

$$L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

درتمرینات نشان داده می شود:

اگر $s > \alpha$ ، آنگاه

$$L(e^{\alpha x}) = \frac{1}{s-\alpha}$$

خواص تبدیل لاپلاس

با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس توسط انتگرال تعریف شده

است لااقل دارای خواص خطی انتگرال را می باشد.

قضیه: نشان دهید که :

$$L(\alpha f(x) + g(x)) = \alpha L(f(x) + L(g(x))$$

مثال:

$$L(f(x)) = L(5x^2 + 12) = 5L(x^2) + 12L(1)$$

$$= 5 \times \frac{2!}{s^3} + 12 \times \frac{1}{s} = \frac{10}{s^3} + \frac{12}{s}$$

$$L(g(x)) = L(3e^{2x} + 3x) = 3L(e^{2x}) + 3L(x)$$

$$= 3 \times \frac{1}{s-2} + 3 \times \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s-2} + \frac{3}{s^2}$$

حال تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=e^{i\alpha x}$ عبارت است از

$$L(e^{i\alpha x})=\frac{1}{s-i\alpha}=\frac{1}{s-i\alpha}\times\frac{s+i\alpha}{s+i\alpha}=\frac{s+i\alpha}{s^2+\alpha^2}=\frac{s}{s^2+\alpha^2}+i\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

و از طرفی

$$L(e^{i\alpha x})=L(\cos\alpha x+i\sin\alpha x)=L(\cos\alpha x)+iL(\sin\alpha x)$$

بنابر تساوی دو طرف اول تساویها داریم:

$$L(\sin\alpha x)=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\qquad L(\cos\alpha x)=\frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

به عنوان دومین خاصیت از تبدیل لاپلاس خاصیت **انتقال** می باشد.

قضیه5 :فرض کنید $F(s) = L(f(x))$ آنگاه

$$L(e^{\alpha x} f(x)) = F(s-\alpha)$$

اثبات:

$$L(e^{\alpha x} f(x)) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{\alpha x} f(x)dx =$$

$$= \int_{\circ}^{\infty} e^{-(s-\alpha)x} f(x)dx = F(s-\alpha)$$

چون

$$F(s) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$$

مثلا:

الف)

$$L(e^{7x}\sin 5x) = \frac{5}{(s-7)^2+25}$$

ب)

$$L(e^{3x}\cos 4x) = \frac{s-3}{(s-3)^2+16}$$

ج)

$$L(e^{-2x}x^5) = \frac{5!}{(s+2)^6}$$

به عنوان سومین خاصیت از تبدیل لاپلاس خاصیت **مضرب** می باشد .

قضیه :فرض کنید $F(s) = L(f(x))$ آنگاه

$$L(xf(x)) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

اثبات:

$$-\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-sx} f(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{\infty} (-x)e^{-sx} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} e^{-sx}(xf(x)dx) = L(xf(x))$$

نتیجه :

$$L(x^2 f(x)) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds} F(s)$$

اثبات:

$$L(x^2 f(x)) = L(x \cdot xf(x)) = (-1)\frac{d}{ds} L(xf(x)) =$$

$$= (-1)\frac{d}{ds}\frac{d}{ds} L(f(x)) = (-1)^n \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

به استقراء نتیجه می شود که

$$L(x^n f(x)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L(f(x))$$

مثال:

الف)

$$L(x\sin x) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = -\frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

ب)

$$L(x\cos x) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

ج)

$$L(x^2\sin x) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) = -\frac{2(s^2+1)^2-8s^2(s^2+1)}{(s^2+1)^4} = \frac{-6s^4-4s^2+2}{(s^2+1)^4}$$

از آنجائیکه معادله دیفرانسیل ازترکیباتی
از X یعنی $f(x)$ ومشتق یعنی y'
و مشتقات مراتب بالا تشکیل شده است
بنابراین در این قسمت تبدیل لاپلاس
مشتق را بررسی می کنیم .

قضیه : نشان دهید $L(y') = sL(y) - y(0)$

اثبات: چون

$$L(y') = \int_{\circ}^{\infty} e^{-sx} \cdot y'dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{\circ}^{b} e^{-sx} \cdot y'dx$$

با استفاده از روشی جز به جز داریم:

$$y'dx = dv \quad \text{و} \quad e^{-sx} = u$$

$$y = v \quad \text{و} \quad -se^{-sx}dx = du$$

پس

$$L(y') = \lim_{b \to +\infty} (ye^{-sx}\Big|_{\circ}^{b} + \int_{\circ}^{b} Se^{-sx} ydx)$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (y(b)e^{-sb} - y(0)e^{\circ} + s\int_{\circ}^{b} e^{-sx} ydx)$$

اگر $s > 0$ آنگاه : $L(y') = -y(0) + sL(y) = sL(y) - y(0)$

نتیجه : نشان دهید. $L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$

اثبات:

$$L(y'') = L((y'))' = sL(y') - y'(0) = s(sL(y) - y(0)) - y'(0) =$$

$$= s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$$

به استقراء نتیجه می شود که:

$$L(y^{(n)}) = s^n L(y) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

معکوس تبدیل لاپلاس

فرض کنیم تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ وجود داشته باشد. در این صورت واضح است که تابع منحصر بفردی مانند $F(s)$ وجود دارد که $F(s) = L(f(x))$

اینك عکس این حالت را در نظر می گیریم. فرض کنید تابعی مانند $F(s)$ داده شده باشد. آیا تابع منحصر بفردی مانند $f(x)$ وجود دارد به گونه ای که داشته باشیم :

$$F(s) = L(f(x))$$

اگر پاسخ سؤال مثبت باشد می نویسیم:

$$f(x) = L^{-1}(F(s))$$

$f(x)$ را وارون یا معکوس تبدیل لاپلاس تابع $F(s)$ نامیم.

اینك برخی خواص معکوس تبدیل لاپلاس را بررسی می کنیم.

قضیه: نشان دهید:

$$L^{-1}(\alpha F(s)+G(s))=\alpha L^{-1}(F(s)+L^{-1}(G(s))$$

مثال:

الف)

$$L^{-1}(\frac{5}{s}) = 5L^{-1}(\frac{1}{s}) = 5 \times 1 = 5$$

ب)

$$L^{-1}(\frac{4}{s^3} + \frac{6}{s^2+4}) = 2L^{-1}(\frac{2!}{s^3}) + 3L^{-1}(\frac{2}{s^2+4}) = 2x^2 3\sin 2x$$

ج)

$$L^{-1}(\frac{2}{s+3}) = 2L^{-1}(\frac{1}{s-(-3)}) = 2e^{-3x}$$

د)

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+1}\right)$$

$$=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s-(-1)}\right)=1-e^{-x}$$

هـ)

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4+s^2}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s^2+1}\right)$$

$$=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1)}\right)=x-\sin x$$

خواص معکوس تبدیل لاپلاس

قضیه: نشان دهید:

$$L^{-1}(F(s-\alpha)) = e^{\alpha x} f(x)$$

اثبات قضیه قبلی ملاحظه شود.

مثال:

الف)

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1^2}\right)=e^{2x}\cdot\sin x$$

ب)

$$L^{-1}\left(\frac{6}{(s+2)^2+9}\right)=2L^{-1}\left(\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)=2e^{-2x}\cdot\sin 3x$$

بقیه مثال:

ج)

$$L^{-1}\left(\frac{12}{(s+3)^4}\right)=2L^{-1}\left(\frac{3!}{(s+3)^4}\right)=2e^{-3x}\cdot x^3$$

د)

$$L^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2+2s+5}\right)=L^{-1}\left(\frac{s+1+2}{(s-1)^2+2^2}\right)=L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right)$$

$$=e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\sin 2x$$

حل معادله دیفرانسیل به روش لاپلاس

اینك آماده هستیم نشان دهیم که چگونه می توان جواب یك مسئله با مقدار اولیه دشوار را به کمك تبدیلات لاپلاس ، به مسئله دیگری با شرایط ساده تر تبدیل کرده و سپس با استفاده از وارون تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل را بدست آورد. با یك مثال ساده در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه اول توضیح می دهیم.

مثال : معادله $y' + y = e^x$ را با شرط $y(0) = 1$
حل می کنیم :
حل: ابتدا تبدیل لاپلاس را روی معادله اثر می دهیم :

$$L(y' + y) = L(e^x) \quad \Rightarrow \quad L(y') + L(y) = L(e^x)$$

$$SL(y) - y(0) + L(y) = L(e^x)$$

$$SL(y) - 1 + L(y) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s+1)L(y) = \frac{1}{s-1} + 1 = \frac{1+s-1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

$$L(y) = \frac{s}{(s-1)(s+1)}$$

حال وارون تبدیل لاپلاس را محاسبه می کنیم:

$$y = L^{-1}\left(\frac{s}{(s-1)(s+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$$

مثال : معادله $y' + 2y = e^{-x}$ را با شرط $y(0) = 2$ حل می کنیم.

حل : ابتدا تبدیل لاپلاس را روی معادله اثر می دهیم:

$$L(y' + 2y) = L(e^{-x}) \quad \Rightarrow \quad L(y') + 2L(y) = L(e^{-x})$$

$$\Rightarrow SL(y) - y(0) + 2L(y) = L(e^{-x})$$

$$\Rightarrow (s+2)L(y) = \frac{1}{s+1} + 2 = \frac{2s+3}{s+1} \Rightarrow L(y) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

حال وارون تبدیل لاپلاس را محاسبه می کنیم:

$$y = L^{-1}\left(\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) \Rightarrow y = e^{-x} + e^{-2x}$$

مثال : مطلوب است جواب معادله $y'' + 4y = 4x$

با شرایط $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$

حل:

$$L(y'' + 4y) = L(4x) \quad \Rightarrow \quad L(y'') + 4L(y) = 4L(x)$$

$$s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) + 4L(y) = 4L(x)$$

$$(s^2 + 4)L(y) = \frac{4}{s^2} + s + 5 = \frac{4 + s^3 + 5s^2}{s + 1}$$

$$L(y) = \frac{s^3 + 5s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)} \qquad y = L^{-1}\left(\frac{s^3 + 5s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s+4}{s^2+4}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{s^2+4}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

تعریف: تابع

$$u_c(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<c\\ 1 & x\ge c\end{cases}$$

که $c\ge 0$ می باشد را تابع پله ای واحد نامیم و تبدیل لاپلاس آن را پیدا می کنیم:

$$L(u_c(x))=\int_0^\infty e^{-sx}.u_c(x)dx=\int_0^c e^{-sx}.0dx+\int_c^\infty e^{-sx}.1dx=\lim_{b\to+\infty}\int_c^b e^{-sx}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{s}e^{-sx})_c^b=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}e^{-cs})=\frac{e^{-cs}}{s}$$

با شرط $s>0$

مثال: تابع زیر را برحسب توابع پله ای واحد می نویسیم؟

$$f(x)=\begin{cases} f_0(x) & 0\le x<x_0 \\ f_1(x) & x_0\le x<x_1 \\ f_2(x) & x_1\le x<x_2 \\ f_3(x) & x_2\le x<x_3 \\ f_4(x) & x\ge x_3 \end{cases}$$

حل:

$$f(x)=f_0(x)+[f_1(x)-f_0(x)]u_{x_0}(x)+[f_2(x)-f_1(x)]u_{x_1}(x)+$$
$$[f_3(x)-f_2(x)]u_{x_2}(x)+[f_4(x)-f_3(x)]u_{x_3}(x)$$

مثال: تابع

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<4 \\ 5 & 4\le x<5 \\ x^2 & x\ge 5 \end{cases}$$

را بصورت تابع پله ای واحد می نویسیم؟

$$f(x)=x+(5-x)u_4(x)+(x^2-5)u_5(x)$$

تذکر: از تابع پله ای واحد می توان برای انتقال تابع داده شده f ، که دامنه تعریف آن $x \geq 0$ به اندازه C واحد در جهت راست استفاده کرد. برای مثال تابع تعریف شده توسط

$$y = u_c(x) f(x-c) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < c \\ f(x-c) & x \geq c \end{cases}$$

نمایش انتقالی از تابع به اندازه C واحد در جهت مثبت X می باشد .

قضیه: نشان دهید: $L(u_c(x)f(x-c)) = e^{-cx}F(s) \qquad s>0$

اثبات:

$$L(u_c(x)f(x-c)) = \int_0^\infty e^{-sx}u_c(x)f(x-c)dx = \int_c^\infty e^{-sx}f(x-c)dx$$

با تغییر متغیر $u = x - c$ داریم:

$$L(u_c(x)f(x-c)) = \int_0^\infty e^{-s(u+c)}f(u)du =$$

$$e^{-cs}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du = e^{-cs}F(s) \qquad s>0$$

مثال:تبدیل لاپلاس تابع

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x<2\pi\\ \sin x+\cos x & x\ge 2\pi\end{cases}$$

را پیدا می کنیم.

حل: با استفاده از مثال قبل تابع f را می توان بر حسب تابع پله ای $u_{2\pi}(x)$ به صورت

$f(x)=\sin x+u_{2\pi}(x)\cos x$ نوشت.

چون $\cos t=\cos(x-2\pi)$ پس

$$f(x)=\sin x+u_{2\pi}(x)\cos(x-2\pi)$$

بنابر خواص و فرمول های تبدیل لاپلاس

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}+e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1}\qquad s>0$$

قضیه: اگر $F(s) = L(f(x))$ و $G(s) = L(g(x))$

هر دو به ازای $s \geq 0$ موجود باشد آنگاه

$$H(x) = F(s)G(s) = L(h(x))$$

که در آن $h(x) = \int_0^x f(x-u)g(u)du$

تابع h به **کنولوسیون یا کانولوشن** f و g معروف است

وآن را با

$$h = f * g$$

نشان می دهیم .

نشان می دهیم که $f * g(x) = g * f(x)$

زیرا

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-u)g(u)du$$

با بکار بردن تغییر متغیر $x - u = v$ انتگرال بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f * g(x) = \int_x^0 f(v)g(x-v)(-dv)$$

$$= \int_0^x g(x-v)f(v)dv$$

$$= g * f(x)$$

مثال:با بکار بردن کنولوسیون تبدیل معکوس تابع

$$H(s)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

را پیدا می کنیم؟

حل:با فرض $F(s)=\frac{1}{s^2}$ و $G(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$ تبدیل لاپلاس

$L(x)=\frac{1}{s^2}$ و $L(\sin ax)=\frac{a}{s^2+a^2}$ داریم:

$$h(x)=f*g(x)=\int_0^x (x-u)\sin au\,du$$

با بکار بردن روش جزبه جز داریم:

$$h(x)=\frac{ax-\sin ax}{a^2}$$

تذکر:مثال بالا را می توان با بکار بردن کسرهای جزیی بصورت زیر محاسبه کرد :

$$H(s)=\frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{s^2}-\frac{a}{s^2+a^2}\right)$$

بنابر این

$$h(x)=\frac{1}{a^2}(ax-\sin ax)$$