ریاضیات مهندسی

دکتر عبداله شیدفر

ریاضیات مهندسی

سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه
معادلات با مشتقات جزئی
توابع مختلط

عبداله شید فر
استاد دانشگاه علم و صنعت ایران

سرشناسه	: شیدفر، عبدالله، ۱۳۱۹-
عنوان و پدیدآور	: ریاضیات مهندسی: سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه معادلات با مشتقات جزئی، توابع مختلط / عبدالله شیدفر.
مشخصات نشر	: [تهران]: دالفک، ۱۳۷۵.
مشخصات ظاهری	: ۲۷۲ ص.: مصور، جدول، نمودار.
شابک	: ۸۰۰۰ ریال؛ ۹۰۰۰ ریال: x-۰۶-۰۲۲۶-۹۶۴ چاپ دوم؛ ۴۵۰۰۰ ریال: چاپ دوازدهم: ۳-۰۴-۰۲۲۶-۹۶۴؛ ۳۰۰۰۰ ریال (چاپ دهم)؛ ۱۲۰۰۰ ریال (چاپ ششم)
یادداشت	: پشت جلد به انگلیسی: A. Shidfar: Engineering mathematics.
یادداشت	: کتاب حاضر قبلا با عنوان "ریاضی مهندسی" در دو جلد توسط مولف در سال ۱۳۷۴ منتشر گردیده، جلد اول آن نیز جداگانه با عنوان "معادلات دیفرانسیل" به چاپ رسیده است و این کتاب جلد دوم کتاب "ریاضی مهندسی" است.
یادداشت	: چاپ دوم: ۱۳۷۸
یادداشت	: چاپ ششم: اسفند ۱۳۷۸.
یادداشت	: چاپ دهم: ۱۳۸۴
یادداشت	: چاپ دوازدهم: ۱۳۸۶ (فیپا).
یادداشت	: کتابنامه: ص. ۲۶۲-۲۶۳.
عنوان دیگر	: ریاضی مهندسی.
موضوع	: ریاضیات مهندسی.
رده بندی کنگره	: ۹ ر ۹ ش/۳۳۰ TA
رده بندی دیویی	: ۶۲۰/۰۰۱۵۱
شماره کتابخانه ملی	: ۱۲۵-۷۶ م

نام کتاب: ریاضیات مهندسی

تألیف: عبدالله شیدفر

ویراستاران: آقایان مهندس عادل دانش و فرهاد بهمنی

ناشر: انتشارات دالفک

طرح روی جلد: آقای همایون کوچک زاده

ترسیم اشکال: آقای علی حسینی راد

چاپ دوازدهم: ۱۳۸۶

شمارگان: ۵۰۰۰ جلد

قیمت: ۴۵۰۰۰ ریال

حروفچینی و صفحه آرائی: خانم مهدیه السادات باقری و آقای کمال انوری پور

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران

شابک: ۳-۰۴-۰۲۲۶-۹۶۴ ISBN: ۹۶۴-۰۲۲۶-۰۴-۳

تقدیم به همسر و فرزندانم

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه مؤلف

هدف این کتاب ارائه قسمتهایی از ریاضیات است که در بخشهای گوناگون فیزیک و مهندسی کاربرد دارند. کتاب طوری تنظیم شده است که همه جنبه‌های اساسی موضوع چه از نظر کاربردی و چه از نظر تئوری را در بر بگیرد و در ضمن طوری نباشد که خواننده را خسته کند. در انتهای هر فصل مسائل حل شده ارائه شده‌اند و این مسائل طوری تنظیم شده‌اند که حل مسائل ساده تا پیچیده هر بخش را در بر بگیرند. در تألیف این کتاب مؤلف حاصل سالها تجربه خود در امر تدریس ریاضیات مهندسی، معادلات با مشتقات جزئی و توابع مختلط به دانشجویان مهندسی و فیزیک و ریاضی را جمع‌آوری کرده است.

تنها پیشنیاز برای مطالعه این کتاب یک دوره کامل از حساب دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل معمولی است.

برای تهیه این اثر با حداقل اشکالات تلاشهای زیادی شده است که در اینجا برخود لازم می‌داند که از آقای همایون کوچک‌زاده به جهت هم‌آهنگ کردن امکانات تایپ و از آقایان مهندس کمال پاشا دادرس و محسن جباری به جهت مطالعه آخرین نسخه تایپ شده و مطابقت آن با متن تشکر کند. همچنین از همه کسانی که در امر ویراستاری و حروفچینی و چاپ، اینجانب را یاری داده‌اند تشکر می‌شود. نهایتاً از همه عزیزانی که به مطالعه این اثر می‌پردازند خواهشمند است برای بهتر ساختن این کتاب اینجانب را یاری دهند و اشکالات موجود در این اثر و هرگونه پیشنهاد برای بهتر نمودن آن را به اطلاع مؤلف برسانند.

عبداله شیدفر

استاد کامل دانشگاه علم و صنعت ایران

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

فصل اول : سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

فصل دوم : معادلات با مشتقات جزئی

عنوان	صفحه

فصل سوم: توابع مختلط

عنوان | **صفحه**

فصل اول

سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

۱.۱. سریهای فوریه

یکی از ابزار پرقدرت در حل مسائل ریاضیات کاربردی همچون حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی نمایش توابع به صورت یک سری فوریه است. سری فوریه، یک سری مثلثاتی، مثلاً به صورت:

$$a_0 + (a_1 \cos\alpha_1 x + b_1 \sin\beta_1 x) + (a_2 \cos\alpha_2 x + b_2 \sin\beta_2 x) + \dots$$

است که در آن ضرایب a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 و غیره به روش خاصی محاسبه می‌شوند.

ما بنا نداریم که یک بحث تئوری قوی در مورد سریهای فوریه را در اینجا پایه ریزی کنیم بلکه مایل هستیم تا آنجا با مسائل مربوط به آن.درگیر شویم که نیازهای کاربردی ما را در بحثهای آینده برآورده کند و در ضمن ارائه مسائل متنوع بحثهای جالبی از نظر تئوری تا حد نیاز برای آشنائی با مطالب نظری ارائه خواهیم کرد. برای وارد شدن به بحث مربوط به سری فوریه تابع $y=f(x) \ ; \ -l<x<l$ با دوره تناوب $p=2l$ را در نظر می‌گیریم و بنا داریم این تابع را به صورت سری مثلثاتی

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos \frac{\pi}{l} x + b_1 \sin \frac{\pi}{l} x) + (a_2 \cos \frac{2\pi}{l} x + b_2 \sin \frac{2\pi}{l} x) + \dots \qquad (1)$$

و یا

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{۲}$$

بنویسیم یعنی ضرایب a_0، (a_1,b_1)، (a_2,b_2) و ... را طوری بیابیم که سری فوق به ازای هر مقدار x به سمت تابعی از x همگرا باشد. در هر صورت در این مرحله از کار فرض می‌کنیم شرایط لازم برای کاربرد قضایائی که در محاسبه این ضرایب لازم است برقرار باشند. قضیهٔ مربوط به همگرائی را بعداً ارائه خواهیم کرد.

برای محاسبه ضرایب a_n، مثلاً یک ضریب دلخواه a_m، طرفین (۲) را در x $\cos\frac{m\pi}{l}$ ضرب می‌کنیم و با انتگرالگیری از طرفین نتیجه حاصل در فاصله $-l$ تا l می‌یابیم .

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos m\frac{\pi}{l}x\,dx=\int_{-l}^{l}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right]\cos\frac{m\pi}{l}x\,dx$$

حال فرض می‌کنیم شرایط لازم برای تساوی بین انتگرال سیگما با سیگمای انتگرال برقرار باشد آنگاه با توجه به تعامد دنباله توابع $\{\sin\frac{n\pi}{l}x,\cos\frac{m\pi}{l}x\}_{n=1,\ m=0}$ یعنی با توجه به تساویهای

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx=\begin{cases}0; & n\neq m\\ l; & n=m\end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{m\pi}{l}x\,dx=\begin{cases}0; & n\neq m\\ l; & n=m\end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi}{l}x\,dx=0,\quad \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{m\pi}{l}x\,dx=0$$

می‌یابیم :

$$\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{m\pi}{l} x dx = l a_m$$

و از آنجا

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{m\pi}{l} x dx \; ; \; m = \text{۰ و ۱ و ۲ و ۳ و} \ldots \qquad (۳)$$

همینطور برای محاسبه ضرایب b_n مثلاً ضریب دلخواه b_m با ضرب طرفین (۲) در $\sin \frac{m\pi}{l} x$ و انتگرالگیری در فاصله $-l$ تا l می‌یابیم

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx \; ; \; m = \text{۱ و ۲ و ۳ و} \ldots \qquad (۴)$$

فرمولهای (۳) و (۴) به ازای هر مقدار صحیح و نامنفی m از جمله به ازای n برقراراند. ضرایب a_n و b_n حاصل از فرمولهای (۳) و (۴) به ضرایب اویلر موسومند و هر سری مثلثاتی به صورت (۱) را که ضرایب آن ضرایب اویلر باشند سری فوریه می‌نامیم. بنابراین سری فوریه تابع متناوب

$$y = f(x) \; ; \quad -l<x<l \; , \quad p=۲l$$

عبارت است از

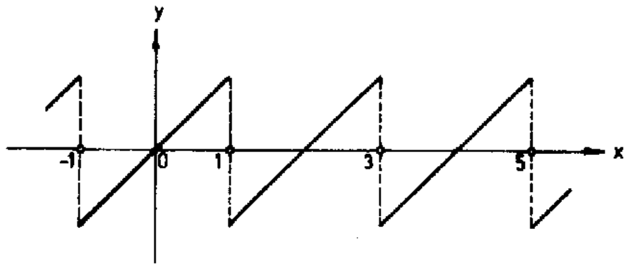
$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right) \qquad (۵a)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \; ; \; n = \text{۰ و ۱ و ۲ و} \ldots \qquad (۵b)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \; ; \; n = \text{۱ و ۲ و} \ldots \qquad (۵c)$$

مثال ۱. مطلوب است سری فوریه تابع

$f(x) = x \qquad -1<x\leq 1 \qquad p=2$



$$a_n = \int_{-1}^{1} x \cos n\pi x \, dx = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} x \sin n\pi x \, dx = 2\int_{0}^{1} x \sin n\pi x \, dx$$

$$b_n = 2\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1 \right] = \frac{-2}{n\pi}\cos n\pi = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

بنابراین

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x \; ; \; -1<x\leq 1 \; ; \; p=2$$

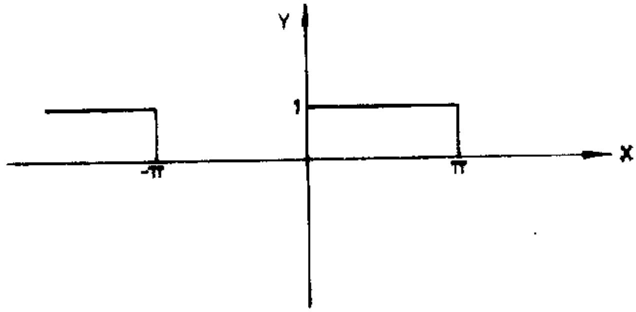
در حالتی که $l=\pi$ یعنی هرگاه تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π باشد آنگاه داریم

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (6a)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \qquad (6b)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (6c)$$

مثال ۲. سری فوریه تابع با نمودار زیر را بیابید.



$$f(x) = \begin{cases} 0 ; & -\pi<x<0 \\ 1 ; & 0<x<\pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_{0}^{\pi} = 0 \ ; n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} dx = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1})$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 + (-1)^{n+1}) \sin nx$$

چنانچه $p = 2l$; $-l<x<l$; $y = f(x)$ تابعی زوج باشد یعنی $f(-x)=f(x)$ آنگاه با توجه

به $(5c)$ داریم $b_n = 0$ و

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \tag{7a}$$

که در آن

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \tag{7b}$$

همینطور چنانچه $y = f(x)$ تابعی فرد باشد آنگاه داریم $a_n = 0$ و

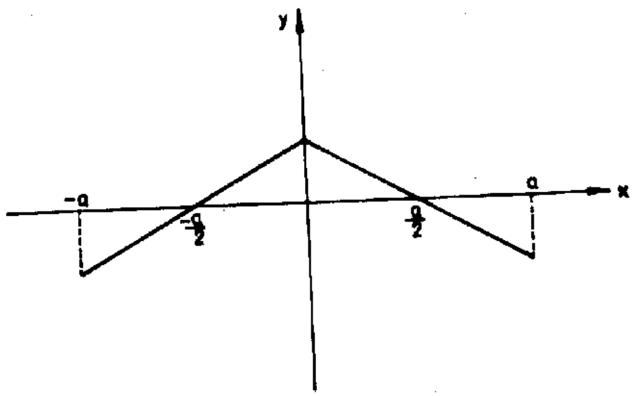
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{8a}$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \tag{8b}$$

مثال ۳. سری فوریه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi} x \ ; & -\pi \le x < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi} x \ ; & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



این تابع یک تابع زوج است. بنابراین

$$a_n = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} (۱ - \frac{۲}{\pi} x) \cos nx \, dx$$

$$a_n = \frac{۲}{\pi} \left\{ (۱ - \frac{۲}{\pi} x) \frac{\sin nx}{n} + (\frac{۲}{\pi} \quad (- \frac{\con nx}{n^۲}) \right\} \Bigg|_{۰}^{\pi} =$$

$$\frac{۴}{n^۲\pi^۲} [۱ + (-۱)^{n+۱}] ; n \neq ۰$$

$$a_۰ = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} (۱ - \frac{۲}{\pi} x) \, dx = ۰$$

و در نتیجه

$$f(x) = \frac{۴}{\pi^۲} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} [۱ + (-۱)^{n+۱}] \cos nx$$

مثال ۴. سری فوریه تابع $f(x) = x - x^۲ \; ; \; -\pi<x<\pi \; , \; p = ۲\pi$ را بیابید.

$$a_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x-x^۲) \cos nx \, dx = \frac{-۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} x^۲ \cos nx \, dx = ۴ \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲}$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x-x^۲) \sin nx \, dx = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{۲}{n} (-۱)^{n+۱}$$

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x-x^۲) \, dx = \frac{۱}{\pi} [\frac{۱}{۲} x^۲ - \frac{۱}{۳} x^۳] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = - \frac{۲\pi^۲}{۳}$$

بنابراین

$$f(x) = - \frac{\pi^۲}{۳} + ۴ [\frac{\cos x}{۱^۲} - \frac{\cos ۲x}{۲^۲} + \frac{\cos ۳x}{۳^۲} - \dots] +$$

$$۲ [\frac{\sin x}{۱} - \frac{\sin ۲x}{۲} + \frac{\sin ۳x}{۳} - \dots]$$

هرگاه $-l<x<l$; $y = g(x)$ متناوب و با دوره تناوب ۲l باشد آنگاه می‌توان ثابت کرد که

$$\int_{\alpha}^{\alpha+۲l} g(x)\,dx = \int_{-l}^{l} g(x)\,dx$$

حال چنانچه تابع $\alpha<x\leq\alpha+۲l$; $y = f(x)$ با دروه تناوب ۲l مفروض باشد. آنگاه سری فوریه این تابع عبارت است از

$$f(x) = \frac{a_{\circ}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (۹a)$$

که در آن

$$a_n = \frac{۱}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+۲l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\ ,\ b_n = \frac{۱}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+۲l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (۹b)$$

مثال ۵. سری فوریه $\circ<x<۲\pi$; $f(x) = x$ با دروه تناوب $p=۲\pi$ را بیابید.

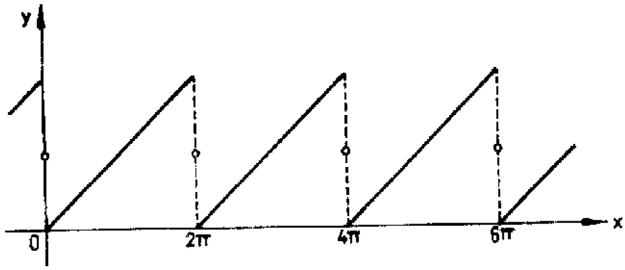
$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} x\cos nx\,dx = \frac{۱}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^۲}\right]\Bigg|_{\circ}^{۲\pi} = \circ\ ;\ n\neq\circ$$

$$a_{\circ} = \frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} x\,dx = ۲\pi$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} x\sin nx\,dx = \frac{۱}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^۲}\right]\Bigg|_{\circ}^{۲\pi} = -\frac{۲}{n}$$

بنابراین

$$f(x) = \pi - ۲\left(\sin x + \frac{۱}{۲}\sin ۲x + \frac{۱}{۳}\sin ۳x + \dots\right)$$



تاکنون مشاهده کردیم که هر تابع متناوب دارای سری فوریه است. ولی در مسائل کاربردی و درفصل بعدی این کتاب نیاز داریم که تابع $y = f(x) \; ; \; 0<x<l$ را به صورت یک سری فوریه نمایش دهیم بدیهی است که این تابع به علت متناوب نبودن دارای سری فوریه نیست ولی توابع متناوبی موجودند که سری فوریه آنها در فاصله $0 \leq x \leq l$ بر $f(x)$ منطبق است. برای روشن شدن این موضوع چنین تابعی را که گسترش یا تعمیم $f(x)$ می‌نامیم و به $f^*(x)$ نمایش می‌دهیم چنین تعریف می‌کنیم.

$$f^*(x) = f(x) \quad , \quad 0<x<l$$
$$f^*(x) = h(x) \quad , \quad -l<x<0 \quad ; \quad p = 2l$$

که در آن $h(x)$ هر تابع دلخواهی است که در فاصله $-l$ تا صفر تعریف شده است. بدیهی است که $f^*(x)$ دارای سری فوریه بوده و سری فوریه آن در فاصله $0<x<l$ با $f(x)$ برابر است. سری فوریه $f^*(x)$ را سری فوریه متناظر با $f(x)$ می‌نامیم. بدیهی است که تابع $y = f(x) \; ; \; 0<x<l$ دارای بیشمار سری فوریه متناظر است و مابین این سریهای فوریه متناظر، دو سری فوریه در مسائل کاربردی از اهمیت بیشتری برخوردارند. این سریها به ترتیب از گسترشهای زوج و فرد $f(x)$ حاصل می‌شوند. گسترش زوج تابع $f(x) \; ; \; 0<x<l$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$f^*(x) = f(x) \quad , \quad 0<x<l$$

$$f^{*}(x) = f(-x) \quad , \quad -l<x<0 \quad ; p = 2l$$

آنگاه $f^{*}(x)$ دارای سری کسینوسی فوریه بوده و سری فوریه آن در فاصله $0<x<l$ با $f(x)$ برابر است

$$f^{*}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x = f(x) \quad ; \quad 0<x<l$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad ; \quad n = 0 ، 1 ، 2 ، \ldots$$

گسترش فرد $f(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$f^{*}(x) = f(x) \quad , \quad 0<x<l$$

$$; p = 2l$$

$$f^{*}(x) = -f(-x) \quad ; \quad -l<x<0$$

$f^{*}(x)$ دارای سری فوریه سینوسی بوده و در فاصله $0<x<l$ با $f(x)$ برابر است

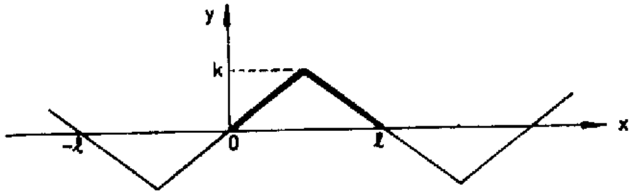
$$f^{*}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x) \quad ; \quad 0<x<l$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad ; \quad n = 1 ، 2 ، 3 ، \ldots$$

مثال ۶. سریهای سینوسی وکسینوسی فوریه متناظر با تابع $f(x)$ با نمودار زیر را بیابید.

تابع $f(x)$ را می‌توان چنین نوشت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l} x \; ; & 0<x<\frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) \; ; & \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$$



برای یافتن سری فوریه سینوسی متناظر با $f(x)$داریم

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx =$$

$$\frac{4k}{l^2} \left[\int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx + \int_{l/2}^{l} (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \right]$$

$$b_n = \frac{4k}{l^2} \left[- \frac{lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^{l/2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^{l/2} - \frac{l(l-x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_{l/2}^{l} \right.$$

$$\left. - \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \Big|_{l/2}^{l} \right]$$

$$b_n = \frac{4k}{ln\pi} \left[- \frac{l}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{l}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] = \frac{8k}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

و از آنجا سری فوریه سینوسی متناظر با $f(x)$عبارت است از

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{l} x \ ; \quad 0<x<l$$

همینطور برای سری کسینوسی متناظر با $f(x)$داریم

$$a_n = \frac{4k}{l^2} \left[\int_0^{l/2} x \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx + \int_{l/2}^{l} (l-x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \right]$$

$$a_n = \frac{4k}{l^2} \left[\frac{lx}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^{l/2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^{l/2} + \right.$$

$$\frac{l(l-x)}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \Bigg|_{l/۲}^{l} - \frac{l^۲}{n^۲\pi^۲} \cos \frac{n\pi}{l} x \Bigg|_{l/۲}^{l} \Bigg]$$

$$a_n = \frac{۴k}{n^۲\pi^۲} (۲\cos \frac{n\pi}{۲} - \cos n\pi - ۱)$$

$$a_۰ = k$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{k}{۲} + \frac{۴k}{\pi^۲} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} (۲\cos \frac{n\pi}{۲} - \cos n\pi - ۱) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

برخی اوقات اتفاق می‌افتد که سری فوریه یک تابع در نقطه‌ای همگرا نبوده و یا به سمت مقدار تابع در این نقطه همگرا نیست مثلاً چنانچه در مثال ۱ مشاهده کردیم سری فوریه تابع $p = ۲$ و $f(x) = x \, ; -۱<x\leq ۱$ به صورت

$$\frac{۲}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} \sin n \pi x$$

است. مقدار سری در $x = ۱$ برابر صفر ولی مقدار تابع در این نقطه برابر واحد است. بدین جهت است که بسیاری از مؤلفین از نماد ~ به جای نماد = در سریهای فوریه استفاده می‌کنند. هم‌اکنون در موقعیتی هستیم که بتوانیم مقدار دقیق سری فوریه حاصل از یک تابع را در یک نقطه مفروض محاسبه کنیم و برای نیل به این هدف تعاریف و قضایای زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱. تابع $y = f(x) \quad ; \quad a\leq x\leq b$ را پیوسته تکه‌ای نامند هرگاه فاصله $[a,b]$ را با انتخاب

$$a<x_۱< \dots <x_n<b$$

بتوان به تعدادی متناهی فاصله‌های جدا از هم افراز کرد به طوری که f برهر یک از این

فاصله‌ها پیوسته بوده و چنانچه x از داخل بازه‌ها به سمت دو انتهای بازه میل کند f به سمت حدی متناهی میل می‌کند یا به عبارت دیگر f در انتهای بازه‌ها دارای حدود چپ و راست متناهی باشد.

تعریف ۲. تابع $y = f(x) \ ; \ a \le x \le b$ را تکه‌ای هموار نامند هرگاه f بر $[a,b]$ پیوسته تکه‌ای بوده و f در نقاط داخلی زیر فاصله‌های مذکور در تعریف یک مشتقپذیر و در انتهای فاصله‌های جز دارای مشتقات چپ و راست باشد.
قبل از بیان قضیه همگرایی قضیه زیر را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱ (لم ریمن ـ لیبگ). هرگاه $y = g(x) \ ; \ a \le x \le b$ تابعی پیوسته تکه‌ای باشد آنگاه

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x \, dx = ۰$$

اثبات. می‌نویسیم

$$I(\lambda) = \int_a^b g(x) \sin \lambda x \, dx \qquad (۱)$$

با تبدیل x به $x + \frac{\pi}{\lambda}$ در انتگرال فوق می‌یابیم

$$I(\lambda) = -\int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^{b - \frac{\pi}{\lambda}} g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x \, dx \qquad (۲)$$

با جمع طرفین (۱) و (۲) داریم

$$۲I(\lambda) = \int_a^b g(x) \sin \lambda x \, dx \ -\int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^{b - \frac{\pi}{\lambda}} g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x \, dx \qquad (۳)$$

حال طرفین تساوی را چنین می‌نویسیم

$$2I(\lambda)=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} g(x+\frac{\pi}{\lambda})\sin\lambda x dx+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} g(x)\sin\lambda x dx+\int_{a}^{b-\frac{\pi}{\lambda}}[g(x)-g(x+\frac{\pi}{\lambda})]\sin\lambda x dx$$

چنانچه $g(x)$ را تابعی پیوسته فرض کنیم آنگاه $g(x)$ کراندار نیز خواهد بود. یعنی به ازای عدد ثابتی مانند M داریم $|g(x)| \le M$ در نتیجه

$$\left| \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} g(x+\frac{\pi}{\lambda})\sin\lambda x dx \right| = \left| \int_{a}^{a+\frac{\pi}{\lambda}} g(x)\sin\lambda x dx \right| \le \frac{\pi M}{\lambda}$$

و همینطور

$$\left| \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} g(x)\sin\lambda x dx \right| \le \frac{\pi M}{\lambda}$$

از اینرو

$$|I(\lambda)| \le \frac{\pi M}{\lambda}+\frac{1}{2}\int_{a}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left| g(x)-g(x+\frac{\pi}{\lambda}) \right| dx$$

نظر به اینکه $g(x)$ بر فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته است بنابراین $g(x)$ براین فاصله به طور یکنوا پیوسته خواهد بود. در نتیجه به ازای هر عدد مثبت ε عددی مثل $\lambda_\circ$ را طوری می‌توان انتخاب کرد که به ازای هر $\lambda>\lambda_\circ$, $\frac{\pi M}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$ و به ازای هر x

$$\left| g(x)-g(x+\frac{\pi}{\lambda}) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

در نتیجه

$$|I(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

به این طریق قضیه به اثبات می‌رسد. نتیجه حاصل از قضیه فوق برای توابع پیوسته تکه‌ای نیز برقرار است. برای این منظور کافی است قضیه را برای هر یک از فاصله‌های جزء فاصله

$[a,b]$ که g برآن پیوسته است تکرار کنیم.

قضیه ۲. هرگاه $f(x)$ بر فاصله بسته $[-\pi\ ,\ \pi]$ تکه‌ای هموار و متناوب با دورهٔ تناوب 2π باشد آنگاه به ازای هر x

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$$

که در آن a_n و b_n ضرایب اویلر و $f(x+)$ و $f(x-)$ به ترتیب برابر حدود راست و چپ تابع در نقطه x هستند.

اثبات. هرگاه فرض کنیم

$$s_k(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

آنگاه با جایگزین کردن

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt\qquad,\qquad\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt$$

به ترتیب به جای a_n و b_n می‌یابیم

$$s_k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\{[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt]\cos nx+[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt]\sin nx\}$$

$$s_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos nt\cos nx+\sin nt\sin nx]\,dt$$

$$s_k(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,[\,\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{k}\cos n\,(t-x)\,]\,dt$$

با توجه به تساوی

$$۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos n\alpha=\sin\,(n+\frac{۱}{۲})\,\alpha-\sin\,(n-\frac{۱}{۲})\,\alpha$$

می‌یابیم

$$۲\sin\frac{\alpha}{۲}\,[\,\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{k}\cos n\,\alpha\,]=\sin\frac{\alpha}{۲}+[\,\sin\frac{۳\alpha}{۲}-\sin\frac{\alpha}{۲}\,]+\ldots+[\,\sin\,(k+\frac{۱}{۲})\,\alpha$$

$$-\sin\,(k-\frac{۱}{۲})\,\alpha]=\sin\,(k+\frac{۱}{۲})\,\alpha$$

و از آنجا

$$s_k(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\;\frac{\sin\,(k+\frac{۱}{۲})\,(t-x)}{۲\sin(\frac{t-x}{۲})}\,dt$$

با تغییر متغیر $s=t-x$ داریم

$$s_k(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(s+x)\;\frac{\sin\,(k+\frac{۱}{۲})\,s}{۲\sin(\frac{s}{۲})}\,ds$$

هرگاه $f(x)$ متناوب با دوره تناوب ۲π باشد آنگاه

$$s_k(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s+x)\;\frac{\sin\,(k+\frac{۱}{۲})\,s}{۲\sin\frac{s}{۲}}\,ds$$

این فرمول به فرمول دیریکله و $\dfrac{\sin\,(k+\frac{۱}{۲})\,s}{۲\sin\frac{s}{۲}}$ به کرنل دیریکله موسوم است. چنانچه

به جای f مقدار واحد قرار دهیم می‌یابیم

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos ns]ds=1 \quad (1)$$

حال $s_k(x)$ را چنین می‌نویسیم

$$s_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+s)\frac{\sin(k+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+s)\frac{\sin(k+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds$$

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x+s)-f(x-)+f(x-)]\frac{\sin(k+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds$$

با توجه به (۱) می‌یابیم

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x-)\frac{\sin(k+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds=\frac{f(x-)}{2}\times\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds=\frac{f(x-)}{2}$$

بنابراین

$$I_1=\frac{f(x-)}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+s)-f(x-)}{2\sin\frac{s}{2}}\sin(k+\frac{1}{2})s\,ds$$

ولی

$$\lim_{s\to 0-}\frac{f(x+s)-f(x-)}{2\sin\frac{s}{2}}=\lim_{s\to 0-}[\frac{f(x+s)-f(x-)}{s}]\frac{s}{2\sin\frac{s}{2}}\lim_{s\to 0-}[\frac{f(x+s)-f(x-)}{s}]=f'(x-)$$

بنابراین تابع $\frac{f(x+s)-f(x-)}{2\sin\frac{s}{2}}$ به طور تکه‌ای هموار است. از اینرو قضیه ۱ (لم ریمن-لبیگ) را می‌توان به کار برد و نتیجه گرفت

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+s)-f(x-)}{2\sin\frac{s}{2}}\sin(k+\frac{1}{2})s\,ds=0$$

در نتیجه

$$\lim_{k\to\infty} I_1 = \frac{f(x-)}{2}$$

و همینطور

$$\lim_{k\to\infty} I_2 = \frac{f(x+)}{2}$$

بنابراین

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$$

این قضیه به سادگی برای هر تابع با دوره تناوب $2l$ نیز قابل تعمیم است.

مثال ۷. سری فوریه تابع $f(x) = x + x^2$ در فاصله $-\pi \le x \le \pi$ یافته و با توجه به آن مقدار عددی سری $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ را بیابید.

حل : به سادگی می‌توان ثابت کرد که

$$x + x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx - \frac{2}{n} (-1)^n \sin nx\right)$$

هم اکنون مقدار سری فوریه تابع را در $x=\pi$ می‌یابیم. با توجه به اینکه $f(\pi-) = \pi + \pi^2$ و $f(\pi+) = -\pi + \pi^2$ داریم

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx = \frac{1}{2}[f(\pi+) + f(\pi-)] = \frac{1}{2}[(\pi + \pi^2) + (-\pi + \pi^2)] = \pi^2$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

از این به بعد سری فوریه یک تابع را در نقطه x برابر $f(x)$ می‌گیریم و توجه می‌کنیم که نماد تساوی در سری فوریه به معنی همان نماد ~ است.

قضیه ۳. فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته در فاصله $[-\pi , \pi]$ بوده و $f(-\pi) = f(\pi)$ و همچنین $f'(x)$ در این فاصله پیوسته تکه‌ای باشد. آنگاه سری فوریه تابع $f'(x)$ را می‌توان با مشتقگیری جمله به جمله از سری فوریه $f(x)$ به دست آورد. و سری حاصل از این مشتقگیری در هر نقطه x به سمت

$$\frac{۱}{۲}[f'(x+) + f'(x-)]$$

همگراست.

اثبات. فرض می‌کنیم f و f' به ترتیب دارای سریهای فوریه به صورت زیر باشند.

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

و

$$\frac{A_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

داریم

$$A_۰ = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{۱}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = ۰$$

$$A_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx\, dx = \frac{۱}{\pi} [f(x) \cos nx] \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

$$A_n = nb_n \quad ; \quad n = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ...$$

$$B_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = \frac{۱}{\pi} [f(x) \sin nx] \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$B_n = -na_n \quad ; \quad n = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ...$$

بنابراین در نقاطی که $f'(x)$ پیوسته باشد سری فوریه

$$f'(x) = \frac{A_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

به صورت زیر در می‌آید

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} (-n\, a_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

که با مشتقگیری جمله به جمله از سری فوریه

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

نیز سری فوربه فوق حاصل می‌شود. در نقاطی که $f'(x)$ پیوسته نیست هنوز قاعده جمله به جمله مشتقگیری برقرار است یعنی

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (-n\, a_n \sin nx + nb_n \cos nx) = \frac{۱}{۲} [f'(x+) + f'(x-)]$$

قضیه ۴. فرض کنید $f(x)$ بر $[-\pi , \pi]$ پیوسته تکه‌ای و متناوب با دوره ۲π باشد آنگاه از سری فوریه $f(x)$ یعنی از

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

می‌توان جمله به جمله در هر فاصله انتگرالگیری کرد.

اثبات. در واقع باید ثابت کنیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx\right]$$

و بنابراین کافی است نشان دهیم

$$\int_a^b \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\,(a_n \sin nb - \sin na) - b_n (\cos nb - \cos na)\right]$$

نخست چنین قرار می‌دهیم

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt$$

نظر به اینکه f پیوسته تکه‌ای است F پیوسته خواهد بود و علاوه بر آن

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

پیوسته تکه‌ای است. حال با توجه به اینکه f متناوب، با دوره 2π و $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

داریم

$$F(x+2\pi) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt + \int_x^{x+2\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt = F(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt = F(x)$$

بنابراین F تابعی پیوسته و متناوب با دورهٔ 2π است که دارای مشتق پیوسته تکه‌ای می‌باشد. از اینرو می‌توان چنین نوشت

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

که در آن $A_n = -\frac{b_n}{n}$ و $B_n = \frac{a_n}{n}$ و بنابراین

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \right]$$

بنا به تعریف $F(x)$ نتیجه می‌شود که

$$\int_0^x f(t)\, dt = \frac{a_0}{2} x + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

نظر به اینکه

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_0^b f(t)\, dt - \int_0^a f(t)\, dt$$

داریم

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2} (b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nb - b_n \cos nb) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin na - b_n \cos na)$$

به علت همگرایی مطلق این سریها می‌توان چنین نوشت

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2} (b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n (\sin nb - \sin na) - b_n (\cos nb - \cos na)]$$

که سری حاصل از سری فوریه $f(x)$ با جمله به جمله انتگرالگیری است.

مثال ۸. سری فوریه کسینوسی متناظر با تابع $f(x) = sinx\ ;\ 0<x<\pi$ را بیابید و با مشتقگیری از آن سری فوریه تابع $cos\ x$ را بیابید.

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sin\,x\,cosnx\,dx = \frac{2[1+(-1)^n]}{\pi(1-n^2)}\ ;\ n\neq 1$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sin\,x\,cosx\,dx = 0$$

نظر به اینکه a_n به ازای nهای فرد صفر است داریم

$$sinx = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\,2nx}{1-4n^2}\quad ;\quad 0<x<\pi$$

بنابراین با مشتقگیری می‌یابیم

$$cosx = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,sin\,2nx}{1-4n^2}\quad ;\quad 0<x<\pi$$

مثال ۹. سری فوریه $f(x) = x\quad ;\quad -\pi<x<\pi$ را بیابید و با انتگرالگیری از سری حاصل سری فوریه تابع x^2 را بیابید.

$$x = 2\,[\,sinx - \frac{sin2x}{2} + \frac{sin\,3x}{3} - \dots\,]$$

با انتگرالگیری می‌یابیم

$$\frac{x^2}{2} = 2\,[\,-cosx + \frac{cos2x}{2^2} - \frac{cos\,3x}{3^2} + \dots\,] + c$$

برای یافتن c از طرفین این تساوی در فاصله $-\pi$ و π انتگرال می‌گیریم و می‌یابیم

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = c\int_{-\pi}^{\pi}dx$$

و از آنجا

$$c = \frac{\pi^2}{6}$$

بنابراین

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

۲.۱. سری فوریه دوگانه

فرض کنید $f(x,y)$ نسبت به دو متغیر متناوب و با دوره تناوب 2π باشد، یعنی $f(x+2\pi,y) = f(x,y+2\pi) = f(x,y)$ و تابع به اندازه کافی هموار باشد آنگاه با نوشتن سری فوریه تابع $f(x,y)$ نسبت به x می‌یابیم

$$f(x,y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(y) \cos mx + b_m(y) \sin mx]$$

که در آن

$$a_m(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \cos mx \, dx$$

$$b_m(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin mx \, dx$$

نظر به اینکه $f(x,y)$ نسبت به y متناوب است بنابراین $a_m(y)$ و $b_m(y)$ متناوب هستند و آنها را نیز می‌توان به صورت سری فوریه نمایش داد

$$a_m(y) = \frac{a_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos ny + b_{mn} \sin ny)$$

$$b_m(y) = \frac{c_{m\circ}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (c_{mn} \cos ny + d_{mn} \sin ny)$$

که در آن

$$a_{mn} = \frac{۱}{\pi^۲} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \cos m x \; \cos ny \, dx \, dy \qquad (۱a)$$

$$b_{mn} = \frac{۱}{\pi^۲} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \cos mx \; \sin ny \, dx \, dy \qquad (۱b)$$

$$c_{mn} = \frac{۱}{\pi^۲} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin m x \; \cos ny \, dx \, dy \qquad (۱c)$$

$$d_{mn} = \frac{۱}{\pi^۲} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin mx \; \sin ny \, dx \, dy \qquad (۱d)$$

بنابراین

$$f(x,y) = \frac{a_{\circ\circ}}{۴} + \frac{۱}{۲} \sum_{n=۱}^{\infty} [a_{\circ n} \cos ny + b_{\circ n} \sin ny] + \frac{۱}{۲} \sum_{m=۱}^{\infty} [a_{m\circ} \cos m x + c_{m\circ} \sin mx]$$

$$+ \sum_{m=۱}^{\infty} \sum_{n=۱}^{\infty} [a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \cos mx \sin ny \qquad (۲)$$

$$+ c_{mn} \sin mx \cos ny + d_{mn} \sin mx \sin ny]$$

که سری فوریه دوگانه تابع $f(x,y)$است.

چنانچه $f(-x,y) = f(x,y)$ و $f(x,-y) = f(x,y)$ آنگاه همه ضرایب به جز a_{mn} صفر هستند.
بنابراین

$$f(x,y)=\frac{a_{00}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}\cos ny+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m0}\cos mx+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\cos mx\cos ny \tag{3}$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\cos mx\cos ny\,dx\,dy \tag{4}$$

هرگاه

$$f(x,-y) = -f(x,y) \ , \ f(-x,y) = f(x,y)$$

آنگاه داریم

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}\sin ny+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\cos mx\sin ny \tag{5}$$

که در آن

$$b_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\cos mx\sin ny\,dx\,dy \tag{6}$$

اگر $f(-x,y) = -f(x,y)$, $f(x,-y) = f(x,y)$ آنگاه داریم

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} c_{m0}\sin mx+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\sin mx\cos ny \tag{7}$$

که در آن

$$c_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin mx\cos ny\,dx\,dy \tag{8}$$

در پایان چنانچه $f(x,-y) = -f(x,y)$, $f(-x,y) = -f(x,y)$ آنگاه داریم

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} d_{mn}\sin mx \sin n y \qquad (9)$$

که در آن

$$d_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin mx \ \sin ny\, dx\, dy \qquad (10)$$

مثال ۱. تابع $f(x,y) = xy$ را به صورت سری فوریه دوگانه در فاصله $-\pi<x<\pi$ و $-\pi<y<\pi$ بسط دهید.

نظر به اینکه

$$f(x,-y) = -xy = -f(x,y) \quad , \quad f(-x,y) = -xy = -f(x,y)$$

داریم

$$d_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} x\, y \sin mx \sin ny\, dx\, dy = (-1)^{m+n}\times\frac{4}{mn}$$

بنابراین سری فوریه مورد نظر عبارت است از

$$f(x,y)=4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\times\frac{\sin mx \sin ny}{mn}$$

۳.۱. انتگرال فوریه

چنانچه در بخش ۱.۱ مشاهده شد هر تابع متناوب دارای سری فوریه و هر تابع با حوزه تعریف متناهی دارای سریهای فوریه متناظر است. بدیهی است که تابع غیر متناوب

$y = f(x) \quad ; \quad -\infty<x<\infty$

دارای سری فوریه نیست ولی آن را می‌توان به صورت حد سری فوریه یک تابع دیگر نمایش

داد و چنانچه خواهیم دید حد چنین سری فوریه‌ای را می‌توان به صورت یک انتگرال نمایش داد که به انتگرال فوریه موسوم است. برای این منظور تابع

$f_l(x) = f(x) \quad ; \quad -l<x<l \quad ; \quad p = 2l$

که در آن l یک عدد دلخواه است را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که حد تابع $f_l(x)$ وقتی که l به بینهایت میل کند تابع $y = f(x) \quad ; \quad -\infty<x<\infty$ است. تابع $f_l(x)$ دارای سری فوریه است و $f(x)$ با حد این سری فوریه وقتی که $l\to\infty$ برابر است یعنی

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right)$$

سری فوریه فوق سری فوریه تابع $f_l(x)$ است چنانچه فرض کنیم $f(x)$ مطلقاً انتگرالپذیر باشد. یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = M < \infty$ که در آن M عددی ثابت است آنگاه

$$\lim_{l\to\infty} |a_0| = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \left|\int_{-l}^{l} f(x)dx\right| \le \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} |f(x)|dx \le \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \lim_{l\to\infty} \frac{M}{l} = 0$$

بنابراین داریم

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right\}$$

حال قرار می‌دهیم $w_n = \frac{n\pi}{l}$ و مقادیر a_n و b_n را به صورت انتگرال در تساوی فوق قرار می‌دهیم و می‌یابیم

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-l}^{l} f(t) \cos w_n t\,dt + \sin w_n x \int_{-l}^{l} f(t) \sin w_n t\,dt\right]\right\}$$

حال چنانچه قرار دهیم

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{\pi}{l}$$

آنگاه با ضرب طرف دوم در $\frac{l}{\pi} \times \Delta w$ می‌یابیم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \{ \sum_{n=1}^{\infty} [\cos w_n x \int_{-l}^{l} f(t) \cos w_n t dt + \sin w_n x \int_{-l}^{l} f(t) \sin w_n t \, dt] \Delta w \}$$

عبارت داخل کروشه تابعی از w_n و x بوده و مجموع فوق یک مجموع انتگرال است که آن را با توجه به تغییرات w می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [\cos w x \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos w t dt + \sin w x \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin wt \, dt] \, dw$$

حال اگر فرض کنیم

$$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos w x \, dx \tag{1a}$$

و

$$b(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin w x \, dx \tag{1b}$$

که به ضرایب اویلر مرسوم‌اند آنگاه می‌یابیم

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [a(w) \cos w x + b(w) \sin w x] \, d w \tag{2}$$

که به انتگرال فوریه تابع $f(x)$ موسوم است.

مثال ۱. انتگرال فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} x ; & |x| < \pi \\ 0 ; & |x| > \pi \end{cases}$$

را در صورت وجود بیابید.

حل : داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx = ۲\int_{۰}^{\pi} x\ dx = \pi^{۲}$$

بنابراین انتگرال فوریه تابع مزبور موجود است، از طرفی داریم

$$a(w) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx dx = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos wx\, dx = ۰$$

$$b(w) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\, dx = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x\sin wx\, dx = \frac{۲}{\pi}\left[-\frac{x}{w}\cos wx + \frac{۱}{w^{۲}}\sin wx\right]_{۰}^{\pi}$$

$$b(w) = \frac{۲}{w\pi}\left(\frac{۱}{w}\sin w\pi - \pi\cos w\pi\right)$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{w}\left(\frac{۱}{w}\sin w\pi - \pi\cos w\pi\right)\sin wx\, dw$$

شاید بهتر بود که همانند آنچه در بخش مربوط به سریهای فوریه گفته شد به جای نماد تساوی در انتگرال فوریه از نماد ~ استفاده می‌کردیم در هر صورت قضیه همگرایی مربوط به انتگرال فوریه را می‌توان چنین بیان کرد.

قضیه ۱. هرگاه $-\infty<x<\infty$; $y = f(x)$ مطلقاً انتگرالپذیر و هموار تکه‌ای باشد آنگاه انتگرال فوریه تابع $f(x)$ در نقطه x به سمت میانگین حدود چپ و راست تابع در این نقطه همگراست یعنی

$$\int_{0}^{\infty} (a(w) \cos wx + b(w) \sin wx)\, dw = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

۴.۱. صورت مختلط سری و انتگرال فوریه

با استفاده از فرمولهای $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\cos n x = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) \quad , \quad \sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx})$$

و با جایگزین کردن این مقادیر در سری فوریه تابع متناوب

$$y = f(x) \quad ; \quad -\pi < x < \pi \quad ; \quad p = 2\pi$$

یعنی در

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

می‌یابیم

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx}]$$

حال چنین قرار می‌دهیم

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$d_n = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \quad , \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n)$$

بنابراین داریم

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + d_n e^{-inx}) \qquad (1)$$

که در آن

$$c_n = \frac{۱}{۲} (a_n - ib_n) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx)\, dx = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad (۲a)$$

و

$$d_n = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{+inx}\, dx \qquad (۲b)$$

به سادگی می‌توان ثابت کرد که فرمولهای (۱) و (۲a) و (۲b) با فرمولهای زیر معادلند

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (۳)$$

$$c_n = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \;;\; n = ۰ \text{ و } \pm۱ \text{ و } \pm۲ \text{ و } \pm \ldots \qquad (۴)$$

چنانچه تابع $f(x)$ بر فاصله $[-l,l]$ تعریف شده و با دوره $۲l$ باشد آنگاه فرمولهای (۳) و (۴) به صورتهای زیر در می‌آیند

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x} \qquad (۵)$$

$$c_n = \frac{۱}{۲l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\, dx \;;\; n = ۰ \text{ و } \pm۱ \text{ و } \pm۲ \text{ و } \pm \ldots \qquad (۶)$$

با توجه به روابط

$$c_n = \frac{۱}{۲}(a_n - ib_n) \;;\; c_{-n} = \frac{۱}{۲}(a_n + ib_n) \qquad (۷)$$

می‌یابیم

$$a_n = c_n - c_{-n} \;;\; b_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad (۸)$$

و با مشخص بودن یک شکل سری فوریه یک تابع می توان صورت دیگر آن را به دست آورد.

مثال ۱. صورت مختلط سری فوریه تابع $p = 2\pi$; $-\pi<x<\pi$; $y = f(x) = e^x$ را یافته و به کمک آن صورت حقیقی سری فوریه تابع مزبور را بیابید.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\, e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{(1-in)}\,e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1+in}{1+n^2}\,[e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}] = \frac{\sinh\pi}{\pi}\times\frac{1+in}{1+n^2}\,(-1)^n$$

$$e^x = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+in}{1+n^2}\,(-1)^n\,e^{inx}$$

و با توجه به فرمولهای (۸) داریم

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{\sinh\pi}{\pi}(-1)^n\left[\frac{1+in}{1+n^2} + \frac{1-in}{1+n^2}\right] = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i\,\frac{\sinh\pi}{\pi}(-1)^n\left[\frac{1+in}{1+n^2} - \frac{1-in}{1+n^2}\right] = -2n\,\frac{\sinh\pi}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$a_0 = \frac{2\sinh\pi}{\pi}$$

بنابراین صورت حقیقی سری فوریه تابع $f(x)$ عبارت است از

$$e^x = \frac{\sinh\pi}{\pi} + \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right]$$

همینطور با جایگزین کردن

$$\sin wx = \frac{1}{2i}(e^{iwx} - e^{-iwx})\ ;\ \cos wx = \frac{1}{2}(e^{iwx} + e^{-iwx})$$

در انتگرال فوریه (۱) مذکور در بخش ۳.۱ می‌یابیم

$$f(x) = \int_{\circ}^{\infty} [(\frac{a(w) - ib(w)}{۲}) e^{iwx} + (\frac{a(w) + ib(w)}{۲}) e^{-iwx}] dw$$

با فرض

$$d(w) = \frac{۱}{۲} (a(w) + ib(w)) \; ; \; c(w) = \frac{۱}{۲} (a(w) - ib(w))$$

می‌یابیم

$$f(x) = \int_{\circ}^{\infty} (c(w) e^{iwx} + d(w) e^{-iwx}) dw \qquad (۹)$$

$$c(w) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \; ; \; d(w) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{iwx} dx \qquad (۱۰)$$

فرمولهای (۹) و (۱۰) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(w) e^{iwx} dw \qquad (۱۱)$$

$$c(w) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \qquad (۱۲)$$

فرمول (۱۱) انتگرال فوریه $f(x)$ به صورت مختلط و (۱۲) به ضریب اویلر موسوم است

داریم $d(w) = c(-w)$ بنابراین

$$c(w) = \frac{۱}{۲} (a(w) - ib(w)) \; ; \; c(-w) = \frac{۱}{۲} (a(w) + ib\,(w)) \qquad (۱۳)$$

$$a(w) = c(w) + c(-w) \, , \; b(w) = i(c(w) - c(-w)) \qquad (۱۴)$$

به کمک روابط فوق می‌توان انتگرال فوریه یک تابع را از یک صورت به صورت دیگر نوشت.

مثال ۲. صورت مختلط انتگرال فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ \; ; & |x| < \pi \\ \circ \; ; & |x| > \pi \end{cases}$$

را بیابید و به کمک آن انتگرال فوریه آن را به صورت حقیقی معین کنید.

$$c(w) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-iwx}\, dx$$

بنابراین

$$= \frac{i}{۲w\pi} e^{-iwx} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin w\pi}{w\pi}$$

$$f(x) = \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w\pi}{w}\, e^{iwx}\, dw$$

که صورت مختلط انتگرال فوریه تابع فوق است. برای پیدا کردن صورت حقیقی انتگرال فوریه $f(x)$ از فرمولهای (۱۴) استفاده می‌کنیم

$$a(w) = c(w) + c(-w) = ۲\frac{\sin w\pi}{w\pi}$$

$$b(w) = i(c(w) - c(-w)) = ۰$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} \frac{\sin w\pi}{w}\, \cos wx\, dw$$

به کمک انتگرال فوریه می‌توان برخی از انتگرالهای حقیقی را محاسبه نمود، مثلاً چنانچه قرار دهیم $x = ۰$ آنگاه داریم

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin w\pi}{w}\, dw = \frac{\pi}{۲} \quad , \quad \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} \frac{\sin w\pi}{w}\, dw = ۱$$

و با تغییر متغیر مناسب می‌توان ثابت کرد که

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

۵.۱. تبدیلات فوریه

تبدیل کسینوسی فوریه تابع $f(x)$ را که به $F_c\{f\}$ نمایش می‌دهیم، چنین تعریف می‌کنیم :

$$F_c\{\bar{f}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos wx dx \qquad (1)$$

که آن را گاهی اوقات به $\bar{f}_c(w)$ نیز نمایش می‌دهند. تبدیل کسینوسی فوریه معکوس $\bar{f}_c(w)$ را که تابع $f(x)$ را نتیجه می‌دهد چنین تعریف می‌شود

$$F^{-1}_c\{\bar{f}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \bar{f}_c(w) \cos wx\, dw = f(x) \qquad (2)$$

همینطور تبدیلات سینوسی فوریه و معکوس آن به ترتیب چنین تعریف می‌شوند

$$F_s\{f\} = \bar{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin wx\, dx \qquad (3)$$

$$F^{-1}_s\{\bar{f}\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \bar{f}_s(w) \sin wx\, dw \qquad (4)$$

مثال ۱. تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1; & 0<x<a \\ 0; & x>a \end{cases}$$

را بیابید.

$$\bar{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{a} \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin wa}{w}$$

$$\bar{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1 - \cos wa}{w}$$

تبدیلات کسینوسی یا سینوسی تبدیلاتی خطی هستند. در واقع

$$F_c\ \{af + bg\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int_0^\infty [af(x) + bg(x)]\cos wx\, dx = aF_c\ \{f\} + bF_c\ \{g\}$$

و همینطور

$$F_s\ \{af + bg\} = aF_s\ \{f\} + bF_s\ \{g\}$$

قضیه ۱. فرض کنید $f(x)$ پیوسته و مطلقاً انتگرالپذیر بر روی محور x بوده و $f'(x)$ پیوسته تکه‌ای بر هر فاصلهٔ متناهی باشد و $f(x) \to 0$ وقتی که $x \to \infty$ آنگاه

$$F_c\ \{f'\} = wF_s\ \{f\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ f(0) \tag{5}$$

$$F_s\ \{f'\} = -wF_c\ \{f\} \tag{6}$$

اثبات. با انتگرالگیری به روش جزء به جزء داریم

$$F_c\ \{f'\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int_0^\infty f'(x)\cos wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ [f(x)\cos wx\Big|_0^\infty + w\int_0^\infty f(x)\sin wx\, dx]$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ f(0) + wF_s\ \{f\}$$

و

$$F_s\ \{f'\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int_0^\infty f'(x)\sin wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ [f(x)\sin wx\Big|_0^\infty - w\int_0^\infty f(x)\cos wx\, dx]$$

$$= 0 - wF_c\ \{f\} = -wF_c\ \{f\}$$

و همینطور می‌توان ثابت کرد

$$F_c\ \{f''\} = -w^{۲}F_c\ \{f\} - \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\ f'(۰) \qquad (۷)$$

$$F_s\ \{f''\} = -w^{۲}F_s\ \{f\} + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\ w\, f(۰) \qquad (۸)$$

مثال ۲. به کمک قضیه فوق تبدیل کسینوسی تابع $f(x) = e^{-ax}\ ;\ a>۰$ را بیابید.

داریم $(e^{-ax})'' = a^{۲}\ e^{-ax}$ بنابراین $f''(x) = a^{۲}f(x)$ از اینرو با توجه به (۷) داریم

$$a^{۲}F_c\ \{f\} = F_c\ \{f''\} = -w^{۲}F_c\ \{f\} - \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\ f'(۰) = -w^{۲}F_c\ \{f\} + a\ \sqrt{\frac{۲}{\pi}}$$

در نتیجه

$$(a^{۲} + w^{۲})\ F_c\ \{f\} = a\ \sqrt{\frac{۲}{\pi}}$$

پس

$$F_c\ \{e^{-ax}\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\ \left(\frac{a}{a^{۲} + w^{۲}}\right)$$

تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس تابع $y = f(x)\ ;\ -\infty<x<+\infty$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$F\ \{f\} = \bar{f}(w) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-iwx}\ dx \qquad (۹)$$

$$F^{-۱}\ \{\bar{f}\} = f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(w)\ e^{iwx}\ dw \qquad (۱۰)$$

می‌توان ثابت کرد که هر تابعی که پیوسته تکه‌ای بر هر فاصلهٔ متناهی بوده و مطلقاً انتگرالپذیر باشد دارای تبدیل فوریه است.

مثال ۳. تبدیل فوریه تابع $a>0$; $f(x) = e^{-ax^2}$ را بیابید

$$F\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+iwx)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-(x\sqrt{a} + \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2 + (\frac{iw}{2\sqrt{a}})^2\right]}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2}\, dx$$

با توجه به اینکه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$ می‌یابیم

$$F\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\frac{w^2}{4a}}$$

تبدیل فوریه یک تبدیل خطی است، یعنی

$$F\{af \qquad = aF\{f\} + bF\{g\}$$

قضیه ۲. فرض می‌کنیم $f(x)$ بر محور x پیوسته باشد و $f(x)\to 0$ وقتی که $\infty\leftarrow$
بر آن $f'(x)$ مطلقاً انتگرالپذیر باشد آنگاه

$$iw\, F\{f\} \qquad (11)$$

اثبات. درایم

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-iwx}\Big|_{-\infty}^{\infty} -(-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx}\, dx\right] = iwF\{f\}$$

همینطور می‌توان نتیجه گرفت

$$F\{f''\} = -w^2 F\{f\} \qquad (۱۲)$$

مثال ۴. تبدیل فوریه تابع xe^{-x^2} را بیابید.

$$F\{xe^{-x^2}\} = F\{-\frac{1}{2}(e^{-x^2})'\} = \frac{-1}{2} F\{(e^{-x^2})'\}$$

$$= -\frac{1}{2} iwF\{e^{-x^2}\} = -\frac{1}{2} iw \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}} = -\frac{iw}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

یکی از قضایای بسیار جالب تبدیل فوریه به قضیه پیچش موسوم است. قبل از بیان این قضیه به تعریف پیچش می‌پردازیم.

پیچش توابع f و g را که به $f*g$ نمایش می‌دهیم، چنین تعریف می‌کنیم

$$(f*g)(x) = h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt \qquad (۱۳)$$

چنانچه $F\{f\}$ و $F\{g\}$ به ترتیب تبدیلات فوریه f و g باشند آنگاه $F\{f\}\ F\{g\}$ برابر تبدیل فوریه $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{f*g\}$ است. این موضوع را می‌توان از قضیه زیر نتیجه گرفت.

قضیه ۳ (قضیه پیچش). فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته تکه‌ای بر هر فاصلهٔ متناهی، کراندار و مطلقاً انتگرالپذیر بر محور x باشند آنگاه

$$F\{f*g\} = \sqrt{2\pi}\ F\{f\}\ F\{g\}$$

اثبات.

$$F\{f*g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, e^{-iwx}\, dt\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, e^{-iwx}\, dx\, dt$$

چنانچه تغییر متغیر $x - t = u$ بدهیم می‌یابیم

$$F\{f * g\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(u)\, e^{-iw(t+u)}\, dt\, du$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwx}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-iwx}\, du$$

$$= \sqrt{۲\pi}\; F\{f\}\; F\{g\}$$

با نوشتن $\tilde{f} = F\{f\}$ و $\tilde{g} = F\{g\}$ و تبدیل معکوس‌گیری از طرفین تساوی فوق می‌یابیم

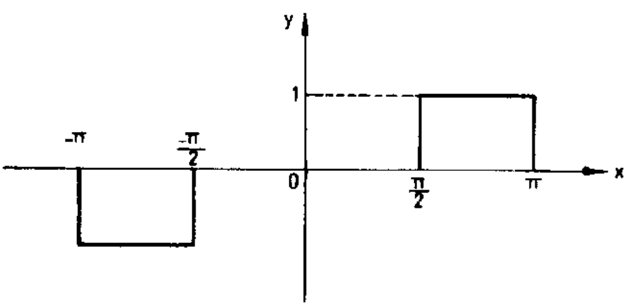
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w)\, \tilde{g}(w)\, e^{iwx}\, dw$$

که فرمول مناسبی برای حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی است.

جدولی برای تبدیلات فوریه برخی از توابع در انتهای این کتاب ارائه می‌گردد.

۶.۱. مسائل حل شده

مثال ۱. سری فوریه تابع با نمودار زیر را بیابید.



نظر به اینکه تابع فرد است $a_n = ٠$ و

$$b_n = \frac{٢}{\pi} \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{٢}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{٢} - \cos n\pi\right)$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{٢}{\pi} \sum_{n=١}^{\infty} \frac{١}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{٢} - \cos n\pi\right) \sin nx$$

مثال ۲. سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{١}{٢}\pi + x & ; \quad -\pi < x < ٠ \\ \frac{١}{٢}\pi - x & ; \quad ٠ < x < \pi \end{cases}$$

را بیابید

$$a_n = \frac{١}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{٠} \left(\frac{١}{٢}\pi + x\right) \cos nx \, dx + \int_{٠}^{\pi} \left(\frac{١}{٢}\pi - x\right) \cos nx \, dx \right.$$

$$a_n = \frac{١}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{٢n} \sin nx + \frac{x \sin nx}{n} + \frac{١}{n^٢} \cos nx \right]_{-\pi}^{٠} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\pi}{٢n} \sin nx - \frac{x \sin nx}{n} - \frac{١}{n^٢} \cos nx \right]_{٠}^{\pi} \right\} = \frac{٢}{n^٢\pi} \left(١ + (-١)^{n+١}\right)$$

$$a_٠ = \frac{١}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{٠} \left(\frac{١}{٢}\pi + x\right) dx + \int_{٠}^{\pi} \left(\frac{\pi}{٢} - x\right) dx \right] = ٠$$

چون تابع زوج است داریم

$$b_n = ٠$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{٢}{\pi} \sum_{n=١}^{\infty} \frac{١}{n^٢} \left((-١)^{n+١} + ١\right) \cos nx$$

مثال ۳. سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$, $f(x) = x + sinx$ را بیابید.

$$f(-x) = -f(x) \;;\; a_n = ۰$$

$$b_n = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\pi} (x + sinx)sin\, nx\, dx = \frac{۲}{n\pi} [\int_۰^{\pi} x\, sin\, nx\, dx + \int_۰^{\pi} sinx\, sinnx\, dx]$$

$$b_n = \frac{۲}{\pi} [\frac{-xcos\, nx}{n} \Big|_۰^{\pi} + \frac{۱}{n^۲} sin\, n\, x \Big|_۰^{\pi}] = \frac{۲}{n} (-۱)^{n+۱} \;;\; n\neq ۱$$

$$b_۱ = ۲ + \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\pi} sin^۲x\, dx = ۳$$

بنابراین

$$f(x) = ۳\, sinx + ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} sin\, nx$$

مثال ۴. سری فوریه تابع

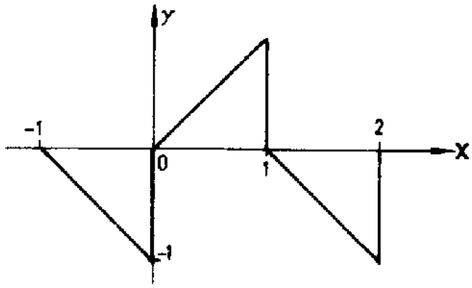
$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad ۰<x<۱ \\ ۱ - x & ; \quad ۱<x<۲ \end{cases} \qquad ; \quad p = ۲$$

را بیابید.

$$a_n = \int_۰^۱ xcos\, n\pi\, x\, dx + \int_۱^۲ (۱ - x)\, cos\, n\, \pi x\, dx = \frac{۲}{\pi^۲ n^۲} ((-۱)^n - ۱)$$

$$a_۰ = ۰ \;,\; b_n = \int_۰^۱ x\, sin\, n\pi\, xdx + \int_۱^۲ (۱ - x)\, sin\, n\pi\, xdx = \frac{۱}{n} ((-۱)^{n+۱} + ۱)$$

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} [\frac{۲}{n^۲\pi^۲} ((-۱)^n - ۱)\, cosn\pi x + \frac{۱}{n} ((-۱)^{n+۱} - ۱)\, sinn\pi x]$$



مثال ۵. سری فوریه تابع $f(x) = e^x \; ; \; -\pi<x<\pi$ را بیابید.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \frac{e^x \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\left[\frac{-e^x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx\right]\right\}$$

$$= \frac{2(-1)^n}{n^2\pi} \left(\frac{e^{-\pi} - e^{-\pi}}{2} \right) - \frac{1}{n^2} a_n$$

بنابراین

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{(1 + n^2)\pi} \sinh \pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-e^x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{\cos n\pi}{n} (e^{\pi} - e^{-\pi}) - \frac{1}{n^2} b_n \right) \right]$$

$$b_n = \frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi(1 + n^2)} \sinh \pi$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi}\left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1 + n^2} (\cos nx - n \sin nx)\right\}$$

مثال ۶. صورت حقیقی سری فوریه تابع $f(x) = x^2 \quad , \quad -l<x<l$ را بیابید و با توجه به آن مقادیر هر یک از سریهای عددی $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$ و $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - + ...$ را به دست آورید.

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{2}{l} \left[- \frac{2l}{n\pi} \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi} \quad \frac{l}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \Bigg|_0^l = \frac{4l^2}{n^2\pi^2} (-1)^n \quad , \quad n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{2l^2}{3}$$

$$f(x) = x^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

حال اگر در این تساوی چنین قرار دهیم $l = \pi$ و $x = \pi$ می‌یابیم

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

حال اگر قرار دهیم $l = \pi$ و $x = 0$ داریم

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - ... = \frac{\pi^2}{12}$$

مثال ۷. سری فوریه تابع $f(x) = \sin \pi x ; \quad 0<x<1 , \ p = 1$ را بیابید.

$$a_n = 2 \int_0^1 \sin\pi x \cos 2n\pi x \, dx = \int_0^1 [\sin(2n + 1)\pi x - \sin(2n - 1)\pi x] \, dx$$

$$=\frac{۱}{\pi}[-\frac{۱}{(۲n+۱)}\cos(۲n+۱)\pi+\frac{۱}{(۲n-۱)}\cos(۲n-۱)\pi+\frac{۱}{۲n+۱}-\frac{۱}{۲n-۱}]=$$

$$\frac{-۴}{\pi}\times\frac{۱}{۴n^۲-۱}$$

$a_۰ = \frac{۴}{\pi}$ و می‌توان ثابت کرد $b_n = ۰$ بنابراین

$$f(x) = \frac{۲}{\pi} - \frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۴n^۲-۱}\cos n\pi x$$

مثال ۸. سری فوریه تابع $f(x) = x^۳ \;;\; -۲<x<۲$ را بیابید.

$a_n = ۰$ و

$$b_n = \int_۰^۲ x^۳ \sin\frac{n\pi}{۲}x\,dx = [-\frac{۲x^۳}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{۲}\Big|_۰^۲ + \frac{۶}{n\pi}\int_۰^۲ x^۲\cos\frac{n\pi x}{۲}dx]$$

$$=\frac{۱۶(-۱)^{n+۱}}{n\pi}+\frac{۶}{n\pi}[-\frac{۴}{n\pi}\int_۰^۲ x\sin\frac{n\pi x}{۲}dx]=\frac{۱۶(-۱)^{n+۱}}{n\pi}-\frac{۹۶(-۱)^{n+۱}}{n^۳\pi^۳}$$

$$b_n = (-۱)^{n+۱}\frac{۱۶n^۲\pi^۲-۹۶}{n^۳\pi^۳}$$

بنابراین

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{۱۶n^۲\pi^۲-۹۶}{n^۳\pi^۳}\sin\frac{n\pi x}{۲}$$

مثال ۹. سری فوریه تابع $f(x) = e^{-x} \;;\; ۰<x<۲\pi$ را بیابید.

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_۰^{۲\pi} e^{-x}\cos nx\,dx = \frac{۱}{\pi(n^۲+۱)}[e^{-x}(-\cos nx + n\sin nx]_۰^{۲\pi}$$

$$= \left(\frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi}\right) \frac{1}{n^2 + 1} \; ; \; a_0 = \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi(n^2+1)} \left[e^{-x} (-\sin nx + n \cos nx)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2 + 1}$$

بنابراین

$$e^{-x} = \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{1}{10} \cos 3x + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{2}{5} \sin 2x + \frac{3}{10} \sin 3x + \ldots\right) \right\}$$

مثال ۱۰. سری فوریه سینوسی تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x \; ; & 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4} \; ; & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

را بیابید.

$$b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

$$= 2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x\right) \sin n \pi x \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{3}{4}\right) \sin n \pi x \, dx\right)$$

$$= ۲[-(\frac{۱}{۴}-x)\frac{\cos n\pi x}{n\pi}-\frac{\sin n\pi x}{n^۲\pi^۲}]_۰^{\frac{۱}{۲}}+۲[-(x-\frac{۳}{۴})\frac{\cos n\pi x}{n\pi}-\frac{\sin n\pi x}{n^۲\pi^۲}]_{\frac{۱}{۲}}^{۱}$$

$$= \frac{۱}{۲n\pi}[۱-(-۱)^n]-\frac{۴\sin n\pi/۲}{n^۲\pi^۲}$$

بنابراین

$$f(x) = (\frac{۱}{\pi}-\frac{۴}{\pi^۲})\sin\pi x+(\frac{۱}{۳\pi}+\frac{۴}{۳^۲\pi^۲})\sin ۳\pi x+(\frac{۱}{۵\pi}-\frac{۴}{۵^۲\pi^۲})\sin ۵\pi x+\ldots$$

مثال ۱۱. سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \sin ۳x \;;\; ۰<x<\pi$ را بیابید.

$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}\sin ۳x\cos nx\,dx = \frac{۲}{\pi}[\frac{\sin ۳x\sin nx}{n}\Big|_۰^{\pi}-\frac{۳}{n}\int_۰^{\pi}\cos ۳x\sin nx\,dx]$$

$$= \frac{-۶}{n\pi}[\frac{-\cos ۳x\cos nx}{n}\Big|_۰^{\pi}-\frac{۳}{n}\frac{\pi}{۲}a_n] = \frac{-۶}{\pi n^۲}[۱+(-۱)^n]+\frac{۹}{n^۲}a_n$$

$$a_n = \frac{۶}{\pi(۹-n^۲)}(۱+(-۱)^n) \;;\; n\neq ۳$$

$$a_۳ = ۰ \;;\; a_۰ = \frac{۴}{۳\pi}$$

$$f(x) = \frac{۲}{۳\pi}+\sum_{n=۱,\,n\neq ۳}^{\infty}\frac{۶}{\pi(۹-n^۲)}(۱+(-۱)^n)\cos nx$$

مثال ۱۲. صورت مختلط سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$ و $f(x) = \cosh x$ به دست آورید.

$$c_n = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh x\,e^{-inx}\,dx = \frac{۱}{۲\pi}[e^{-inx}\sinh x\Big|_{-\pi}^{\pi}+in\int_{-\pi}^{\pi}\sinh x\,e^{-inx}\,dx]$$

$$= \frac{(-۱)^n}{\pi} \sinh \pi + \frac{in}{۲\pi} [e^{-inx} \cos hx \Big|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \cosh x \, dx]$$

$$= \frac{(-۱)^n}{\pi} \sinh \pi + \frac{in(-۱)^n \cosh \pi}{\pi} - n^۲ c_n$$

$$c_n = \frac{(-۱)^n}{\pi(۱+n^۲)} \sinh \pi + \frac{(-۱)^n}{\pi(۱+n^۲)} in \cosh\pi$$

$$f(x) = \frac{۱}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(۱+n^۲)} [\sin h\pi + in \cosh\pi] e^{-inx}$$

مثال ۱۳. صورت مختلط سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ \; ; & -\pi < x < ۰ \\ \cos x \; ; & ۰ < x < \pi \end{cases}$$

را بیابید.

$$c_n = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, e^{-inx} dx = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{۰} e^{-inx} dx + \frac{۱}{۲\pi} \int_{۰}^{\pi} \cos x e^{-inx} dx$$

$$= \frac{-۱}{۲\pi ni} e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{۰} + \frac{۱}{۴\pi} \int_{۰}^{\pi} (e^{ix} + e^{-ix}) \, e^{-inx} dx$$

$$= \frac{-i}{۲n\pi} (e^{-in\pi} - ۱) + \frac{i}{۴\pi} [\frac{۱}{n-۱} e^{i\pi(۱-n)} - \frac{۱}{n-۱} + \frac{۱}{n+۱} e^{-i\pi(۱+n)} - \frac{۱}{n+۱}]$$

$$= \frac{i}{۲n\pi} (۱ - (-۱)^n) + \frac{i}{۴\pi} [\frac{(-۱)^{n+۱}}{n-۱} - \frac{۱}{n-۱} + \frac{(-۱)^{n+۱}}{n+۱} - \frac{۱}{n+۱}]$$

$$= \frac{i}{2n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{in}{2\pi} - \frac{((-1)^{n+1}-1)}{n^2-1} \quad ; \quad n \neq 0\,,\,1$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-ix}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos x\, e^{-ix}\,dx = \frac{i}{\pi} + \frac{1}{4}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} \cos x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{i}{\pi} + \frac{1}{4}\right)e^{ix} + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0,1}}^{\infty} i\left[\frac{(1-(-1)^n)}{n} - \frac{n}{n^2-1}((-1)^{n+1}-1)\right]e^{inx}$$

مثال ۱۴. با انتگرالگیری از سری فوریه

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = f(x) = \begin{cases} -1 & ; \ -\pi<x<0 \\ 1 & ; \ 0<x<\pi \end{cases}$$

به سری فوریه تابع $|x|$ برسید. ابتدا از طرفین انتگرال نامعین می‌گیریم :

$$\int \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \int f(x)\,dx = \begin{cases} -x & ; \ -\pi<x<0 \\ x & ; \ 0<x<\pi \end{cases}$$

$$c - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases} -x & ; \ -\pi<x<0 \\ x & ; \ 0<x<\pi \end{cases}$$

با انتگرالگیری از طرفین تساوی فوق در فاصله π تا $-\pi$ می‌یابیم $c = \frac{\pi}{2}$ بنابراین :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases} -x & ; \ -\pi<x<0 \\ x & ; \ 0<x<\pi \end{cases}$$

مثال ۱۵. فرض کنید f و g در فاصله $[-\pi, \pi]$ پیوسته تکه‌ای و متناوب با دوره 2π باشند و (a_n , b_n) و (c_n , d_n) به ترتیب ضرایب فوریه f و g باشند آنگاه ثابت کنید که :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f.g\, dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n + c_n d_n)$$

چنانچه فرض کنیم $h = f+g$ آنگاه تابع h دارای سری فوریه است. هرگاه A_n و B_n ضرایب فوریه این تابع باشند آنگاه داریم :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g \cos nx\, dx$$

بنابراین

$$A_n = a_n + c_n$$

و همینطور

$$A_0 = a_0 + c_0 \qquad \text{و} \qquad B_n = b_n + d_n$$

ولی می‌توان ثابت کرد که (تمرین ۱۰)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

که به تساوی پارسوال موسوم است با استفاده از تساوی پارسوال برای f و g و h و با توجه به اتحاد $(f + g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$ می‌یابیم :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f + g)^2\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2\, dx + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg dx$$

$$\frac{۲}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg dx = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f+g)^{۲}\, dx - \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{۲}\, dx - \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^{۲} dx$$

$$= \frac{(a_{۰}+c_{۰})^{۲}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} [(a_n+c_n)^{۲}+(b_n+d_n)^{۲}] = -\frac{a^{۲}_{۰}}{۲} - \sum_{n=۱}^{\infty}(a^{۲}_n+b^{۲}_n) - \frac{c^{۲}_{۰}}{۲} - \sum_{n=۱}^{\infty}(c^{۲}_n+d^{۲}_n)$$

$$= \frac{a^{۲}_{۰}}{۲} + \frac{c^{۲}_{۰}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a^{۲}_n+b^{۲}_n) + \sum_{n=۱}^{\infty}(c^{۲}_n+d^{۲}_n) + a_{۰}c_{۰}$$

$$+ ۲\sum_{n=۱}^{\infty}(a_nc_n + b_nd_n) - \frac{a^{۲}_{۰}}{۲} - \sum_{n=۱}^{\infty}(a^{۲}_n+b^{۲}_n) - \frac{c^{۲}_{۰}}{۲} - \sum_{n=۱}^{\infty}(c^{۲}_n+d^{۲}_n)$$

یا

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg dx = \frac{a_{۰}c_{۰}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_nc_n + b_nd_n)$$

مثال ۱۶. تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ; \quad ۰\le x\le\pi \\ ۰ & ; \quad x>\pi \end{cases}$$

را به صورت یک انتگرال سینوسی فوریه بنویسید و با توجه به آن انتگرال

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{۱-\cos\pi x}{x}\sin\pi x\, dx$$

را محاسبه کنید.

$$b(w) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(x)\sin wx\, dx = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin wx\, dx = \frac{۲}{\pi}\left[\frac{-\cos wx}{w}\right]_{۰}^{\pi}$$

$$= \frac{۲}{\pi} \; \frac{۱\text{-}cos\ w\pi}{w}$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} \frac{۱\text{-}cos\ w\pi}{w} \sin wx\ dx$$

و به ازای $x=\pi$ داریم.

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{۱ - cos w\pi}{w} \sin w\pi\ dw = \frac{\pi}{۴} [\, f(\pi\text{-}) + f(\pi +)] = \frac{\pi}{۴}$$

با تغییر w به x می‌یابیم :

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{۱ - cos \pi x}{x} \sin \pi x\ dx = \frac{\pi}{۴}$$

مثال ۱۷. تبدیل فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ; \quad |x| < ۱ \\ ۰ & ; \quad |x| > ۱ \end{cases}$$

را بیابید و با توجه به آن $\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ را محاسبه کنید

$$\bar{f}(w)=F\ \{f\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-۱}^{۱} e^{-iwx}dx = \frac{e^{iw}\text{-}e^{-iw}}{\sqrt{۲\pi}iw} = ۲\frac{\sin w}{\sqrt{۲\pi}w} \; ; w\neq ۰$$

و به ازای $w=۰$ داریم $\bar{f}\ \{w\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}$ حال با استفاده از فرمول تبدیل معکوس

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w)\, e^{iwx}\, dw$$

داریم

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin w}{w}\, e^{iwx}\, dw = \begin{cases} 1 & ; \quad |x|<1 \\ 0 & ; \quad |x|>1 \end{cases}$$

با قرار دادن $x=0$ نتیجه می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w}\, dw = \pi \qquad \text{و یا} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin w}{w}\, dw = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۸. به ازای هر عدد طبیعی n نشان دهید که $F\{\frac{d^n u}{dx^n}\} = (iw)^n F\{u\}$

به ازای هر تابع u داریم

$$F\{u\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-iwx}\, dx\,,\ F\{u'\} = iwF\{u\}$$

$F\{u''\} = iw\,F\{u'\} = (iw)^2 F\{u\}$ و به استقرا می‌توان ثابت کرد

$$F\{u^{(n)}\} = (iw)^n F\{u\}$$

مثال ۱۹. نشان دهید که

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx + w \sin wx}{1+w^2}\, dw = \begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad x=0 \\ \pi e^{-x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ \pi e^{-x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم و انتگرال فوریه آن را می‌یابیم

$$a(w) = \frac{۱}{\pi} \int_{۰}^{\infty} \pi e^{-x} \cos wx \, dx = [\, \frac{e^{-x}}{۱ + w^{۲}} (-\cos wx + w \sin wx) \,]_{۰}^{\infty} = \frac{۱}{۱ + w^{۲}}$$

یا

$$a(w) = \frac{۱}{۱ + w^{۲}}$$

$$b(w) = \frac{۱}{\pi} \int_{۰}^{\infty} \pi e^{-x} \sin wx \, dx = [\, \frac{e^{-x}}{۱ + w^{۲}} (-\sin wx - w \cos wx) \,]_{۰}^{\infty} = \frac{w}{۱ + w^{۲}}$$

و از آنجا داریم

$$\int_{۰}^{\infty} (\frac{\cos wx}{۱+w^{۲}} + \frac{w}{۱ + w^{۲}} \sin wx) dw = \frac{۱}{۲} [f(x+) + f(x-)] = \begin{cases} ۰ \;;\; x<۰ \\ \frac{\pi}{۲} \;;\; x=۰ \\ \pi e^{-x} \;;\; x>۰ \end{cases}$$

۷.۱. تمرینات

۱. کدامیک از توابع زیر در فاصله‌های داده شده پیوسته تکه‌ای هستند.

$$a)\; f(x) = \begin{cases} x \;;\; ۰<x<۱ \\ ۰ \;;\; ۱<x<۲ \end{cases} \qquad b)\; f(x) = \begin{cases} ۰ \;;\; -۱<x\leq ۰ \\ \frac{۱}{x} \;;\; ۰<x<۱ \end{cases}$$

$$c)\; f(x) = \begin{cases} ۲ \;;\; ۰\leq x<۱ \\ x^{۲} \;;\; ۱<x<۲ \end{cases} \qquad d)\; f(x) = \begin{cases} ۱-x \;;\; -۱\leq x<۲ \\ \frac{x}{۲-x} \;;\; ۲<x\leq ۳ \end{cases}$$

۲. کدامیک از توابع زیر زوج، فرد، یا نه زوج و نه فرد هستند.

$a)\;\; x + ۲x^{۲} + ۳x^{۳} \;,\; x \ln x \;,\; \frac{۱}{x} \;,\; \sinh x \;,\; e^{x} \;,\; e^{|x|}$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} x\ ; & -\pi<x<0 \\ -x\ ; & 0<x<\pi \end{cases} \qquad c)\ f(x) = \begin{cases} 0\ ; & -\pi<x<-\frac{\pi}{2} \\ x\ ; & -\frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} -x^2\ ; & -\pi<x<0 \\ x^2\ ; & 0<x<\pi \end{cases} \qquad e)\ f(x) = |x|\ ;\ 0<x<2\pi$$

۳. هرگاه $f(x)$ متناوب و با دورهٔ p باشد آنگاه نشان دهید که

$$\int_a^{a+p} f(x)\, dx = \int_b^{b+p} f(x)\, dx$$

و از آنجا

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\, dx$$

۴. سری فوریه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a)\ f(x) = x + \sin x \quad -\pi<x<\pi$$

جواب. $f(x) = \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$

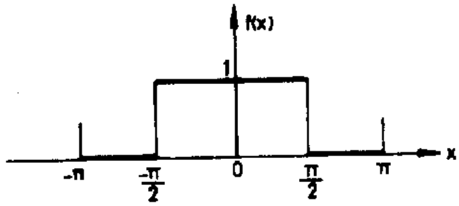
$$b)\ \begin{cases} f(x) = \sin \frac{\pi x}{l}\ ; & 0<x<l \\ f(x) = f(-x)\ ; & -l<x<0 \end{cases}$$

جواب. $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2} \cos \frac{n\pi}{l} x$

جواب.

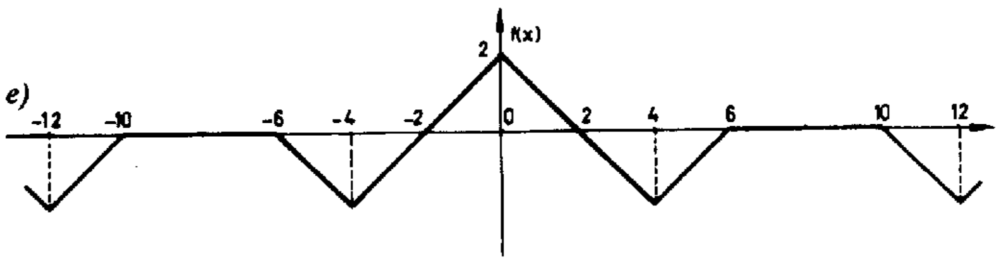
$$c)\ f(x) = \sinh x\ ;\ -1<x<1 \quad , \quad f(x) = 2\pi \sinh 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + n^2\pi^2} (-1)^{n+1} \sin n\pi x$$

d)



جواب.
$$f(x) = \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{\pi} \left(\cos x - \frac{۱}{۳} \cos ۳x + \frac{۱}{۵} \cos ۵x - + ...\right)$$

e)



جواب.
$$f(x) = -\frac{۱}{۴} + \frac{۱۶}{\pi^۲} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱-۲\cos(n\pi/۲)+\cos(۳ n\pi /۲)}{n^۲} \cos \frac{n\pi x}{۸}$$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} ; & -۱ < x < ۰ \\ -x ; & ۰ < x < ۱ \end{cases} \qquad ,p=۲$

جواب .
$$f(x) = \frac{۲}{\pi^۲} \left(\cos \pi x + \frac{۱}{۳^۲} \cos ۳ \pi x + ... \right) - \frac{۱}{\pi} \left(۲\sin \pi x - \frac{۱}{۲} \sin ۲ \pi x + - ... \right)$$

۵- با بکار بردن سری فوریه

$$f(x) = \begin{cases} ۱ ; & -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲} \\ ۰ ; & \frac{\pi}{۲} < x < \frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

نشان دهید که

$$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\dots=\frac{\pi}{۴}$$

۶ – سری فوریه کسینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a)\ f(x)=\begin{cases} ۰ \ ; & ۰<x<\frac{l}{۲} \\ ۱ \ ; & \frac{l}{۲}<x<l \end{cases}$$

جواب. $f(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi x}{l}+\dots\right)$

$$b)\ f(x)=\sin\frac{\pi x}{l}\ ;\quad ۰<x<l$$

جواب. $f(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۱\times۳}\cos\frac{۲\pi x}{l}+\frac{۱}{۳\times۵}\cos\frac{۴\pi x}{l}+\dots\right)$

$c)\ f(x)=\sin x\ ;\quad ۰<x<\pi$

جواب. $f(x)=\frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{\cos۲x}{۱-۲^۲}+\frac{\cos۴x}{۱-۴^۲}+\dots\right)$

$$d)\ f(x)=\begin{cases} x \ ; & ۰<x\leq ۱ \\ ۲-x \ ; & ۱<x<۲ \end{cases}$$

جواب. $f(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲n+۱)\pi x}{(۲n+۱)^۲}$

۷ – سری فوریه سینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ l-x & ; \quad \dfrac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

جواب .

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}+\ldots\right)$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

جواب.

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi x}{(2n+1)^2}$$

$$c)\ f(x)=\cos 2x \qquad 0<x<\pi$$

جواب .

$$f(x)=-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right]$$

$$d)\ f(x)=x^2 \qquad 0<x<\pi$$

جواب .

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx$$

۸ – هرگاه $-\pi<x<\pi$ ؛ $f(x) = \cos\mu x$ که در آن μ عددی غیر صحیح است آنگاه نشان دهید که

$$f(x)=-\frac{2\mu}{\pi}\sin\mu\pi\left\{\frac{1}{2\mu^2}+\frac{\cos x}{1-\mu^2}-\frac{\cos 2x}{2^2-\mu^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-\mu^2}+\ldots\right\}$$

و از آنجا استنتاج کنید

$$\cot \mu \pi = \frac{2\mu}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu^2-1} + \frac{1}{\mu^2-2^2} + \dots + \frac{1}{\mu^2-n^2} + \dots \right\}$$

همچنین نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

۹ - ثابت کنید که به ازای $-\pi < x \le \pi$

الف)
$$\sin ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^2-a^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-a^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-a^2} - \dots \right)$$

که در آن a عددی است غیر صحیح

ب)
$$x \cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-1} \sin nx$$

۱۰ - ثابت کنید که (فرمول پارسوال)

$$\int_{-l}^{l} [f(x)]^2 \, dx = l \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

در این فرمول a_n و b_n ضرایب اویلر سری فوریه تابع $f(x)$ هستند.

۱۱ - ثابت کنید که

$$Ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

و

$$Ln\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -(1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n} \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

۱۲ - سری فوریه دوگانه هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

a) $f(x,y) = x^2 y^2 \; ; \; 0 < x < \pi \; , \; 0 < y < \pi$

$$f(x,y) = \frac{\pi^4}{9} + \frac{8\pi^2}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos mx + \frac{8\pi^2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos ny$$

جواب .

$$+16 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m^2 n^2} \cos mx \ \cos ny$$

$b)\ f(x,y) = x \sin y \ ; \ -\pi < x < \pi \ , \ -\pi < y < \pi$

جواب .

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{m} \sin mx \sin y$$

۱۳ - هر یک از توابع زیر را به صورت یک سری فوریه دوگانه سینوسی بنویسید.

$a)\ f(x,y) = xy \ ; \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < a$

جواب .

$$f(x,y) = \frac{4a^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \ \sin \frac{n\pi y}{a}$$

$b)\ f(x,y) = xy\,(a-x)\,(b-y) \ ; \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$

جواب .

$$f(x,y) = \frac{64a^2b^2}{\pi^6} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^3 n^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \ \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$c)\ f(x,y) = xy\,(a^2-x^2)\,(b^2-y^2) \ ; \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$

جواب .

$$f(x,y) = \frac{144a^3b^3}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m^3 n^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \ \sin \frac{n\pi y}{b}$$

۱۴ - انتگرال فوریه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < a \\ 0 & ; \quad x > a \end{cases} \ , f(-x) = f(x)$$

جواب . $f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}[\frac{a\ \sin aw}{w}+\frac{\cos aw-۱}{w^{۲}}]\cos xw\,dw$

جواب .

b) $\begin{cases} f(x)=e^{-x}+e^{-۲x} \ ; \ x>۰ \\ f(-x)=f(x) \end{cases}$, $f(x)=\frac{۶}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{۲+w^{۲}}{۴+۵w^{۲}+w^{۴}}\cos xw\,dw$

c) $\begin{cases} f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ; \ ۰<x<a \\ ۰ & ; \ x>a \end{cases} \\ f(-x)=f(x) \end{cases}$

جواب .

$f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}[(a^{۲}-\frac{۲}{w^{۲}})\sin aw+\frac{۲a}{w}\cos aw]\frac{\cos wx}{w}dw$

۱۵ - هرگاه $f(-x)=f(x)$ آنگاه ثابت کنید که

a) $f(bx)=\frac{۱}{b}\int_{۰}^{\infty}a(\frac{w}{b})\cos wx\,dw \ ; \ b>۰$

b) $x^{۲}f(x)=\int_{۰}^{\infty}a^{*}(w)\cos wx\,dw \ , \ a^{*}=-\frac{d^{۲}a}{dw^{۲}}$

۱۶ - ثابت کنید که

a) $\int_{۰}^{\infty}\frac{w^{۳}\sin wx}{w^{۴}+۴}dw=\frac{\pi}{۲}e^{-x}\cos x \ ; \ x>۰ \ , \ f(x)=-f(-x) \ ; \ x<۰$

b) $\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos(w\frac{\pi}{۲})\cos wx}{۱-w^{۲}}dw=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\cos x & ; \ |x|<\frac{\pi}{۲} \\ ۰ & ; \ |x|>\frac{\pi}{۲}\end{cases}$

c) $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin w\cos wx}{w}dw=\begin{cases}\frac{x}{۲}, & ۰\le x<۱ \\ \frac{\pi}{۴}, & x=۱ \\ ۰, & x>۱\end{cases}$

$f(x) = f(-x) \;;\; -\infty < x < ۰$

۱۷ – سری فوریه مختلط هر یک از توابع زیر را بیابید و به کمک آن سری فوریه حقیقی متناظر با آنها را معین کنید.

a) $f(x) = e^{۲x} \,;\, -\pi<x<\pi \;;\; f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{۱}{\pi} \frac{۲+in}{۴+n^۲} (-۱)^n \sinh ۲\pi e^{inx}$ جواب.

b) $f(x) = x \,;\, -\pi<x<\pi \;;\; f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-۱)^n \frac{i}{n} e^{inx}$ جواب.

۱۸ – انتگرال فوریه مختلط هر یک از توابع زیر را بیابید و به کمک آن انتگرال فوریه حقیقی آنها را معین کنید.

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-۲x} \;;\; -\pi < x < \pi \\ ۰ \;;\; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sinh ۲x \;;\; ۰ < x < ۲ \\ ۰ \;;\; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

۱۹ – آیا تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع $f(x) = e^x$ موجود است؟

۲۰ – نشان دهید که تابع $f(x) = ۱$ دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه نیست.

۲۱ – $F_s\{e^{-ax}\} \,;\, a > ۰$ را با انتگرالگیری به دست آورید.

۲۲ – تبدیل کسینوسی فوریه معکوس تابع e^{-w} را بیابید.

۲۳ – $F_s^{-۱}(\frac{۱}{w} - \frac{۱}{w} \cos w\pi)$ را بیابید.

۲۴ – آیا تبدیل کسینوسی فوریه تابع $\frac{\cos x}{x}$ یا $\frac{\sin x}{x}$ موجود است؟

۲۵ – تبدیل فوریه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از جدول تبدیلات فوریه به دست آورید.

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} \;;\; x > ۰ \\ ۰ \;;\; x < ۰ \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{x} \;;\; x > ۰ \\ ۰ \;;\; x < ۰ \end{cases}$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} e^{2ix} ; & |x| < 1 \\ 0 ; & |x| \geq 1 \end{cases} \qquad d)\ f(x) = \begin{cases} x ; & 0<x<a \\ 0 ; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۲۶ - نشان دهید که اگر $f(x)$ دارای تبدیل فوریه باشد $f(x-a)$ نیز دارای تبدیل فوریه است و
$F\{f(x-a)\} = e^{-iwa} F\{f(x)\}$

۲۷ - نشان دهید که اگر $\tilde{f}(w)$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد آنگاه $\tilde{f}(w-a)$ تبدیل فوریه $e^{iax} f(x)$ است.

۲۸ - انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 ; & |x| \leq 1 \\ 0 ; & |x| > 1 \end{cases}$ را بیابید و به کمک آن انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin x \ \cos ax}{x} dx$ را به ازای مقادیر گوناگون a محاسبه کنید.

۲۹ - به کمک انتگرال فوریه نشان دهید که

$$a)\ \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1+x^2}\ dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} ,\ a > 0$$

$$b)\ \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\ dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} ,\ a \geq 0$$

۳۰ - تبدیلات فوریه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1 ; & |x| \leq \pi \\ 0 ; & |x| > \pi \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 ; & |x| < x_0 \\ 0 ; & |x| > x_0 \end{cases}$$

۳۱ - تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 ; & |x| < 1 \\ 0 ; & |x| > 1 \end{cases}$ را به دست آورید و به کمک آن $\int_0^\infty \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} dx$ را محاسبه کنید.

۳۲ - تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} ۱ & ; \quad ۰ \leq x < ۱ \\ ۰ & ; \quad x \geq ۱ \end{cases} \qquad b)\ f(x) = e^{-ax} \ (a > ۰)$$

۳۳ - تبدیل فوریه سینوسی تابع $e^{-|x|}$ را به دست آورید و به کمک آن $\int_۰^\infty \frac{x \sin mx}{۱+x^۲} dx$

را محاسبه کنید.

۳۴ - چنانچه $f(x)$ تابعی پیوسته تکه‌ای در فاصله $[-\pi,\pi]$ و متناوب با دورهٔ ۲π باشد آنگاه ثابت کنید که توابع زیر نیز دارای چنین خاصیتی هستند

$$f(w+x) = \frac{\sin\{(n+\frac{۱}{۲})(w+x)\}}{۲\sin(\frac{w}{۲})}, \quad n = ,۱,۲,۳,...$$

۳۵ - تابع f در نقطه $x_۰$ در شرط لیپ شیتز از مرتبه α صدق می‌کند هرگاه اعداد مثبت M و δ موجود باشند به طوری که

$$|f(x) - f(x_۰)| \leq M|x-x_۰|^\alpha$$

مشروط به اینکه $|x-x_۰| < \delta$. ثابت کنید که اگر f پیوسته بوده و در شرط لیپ شیتز در $x_۰$ صدق کند آنگاه سری فوریه f به سمت $f(x_۰)$ همگراست.

۸.۱ تمرینات متفرقه

۱. به هر یک از سؤالات زیر پاسخ دهید

a. هرگاه f تابعی هم فرد و هم زوج باشد آنگاه f متحد با صفر است.

b. هرگاه f تابعی پیوسته و فرد باشد آنگاه $f(۰) = ۰$

c. اگر f تابعی زوج باشد آنگاه $F(x) = \int_۰^x f(t)\, dt$

و $f'(x)$ توابعی فرد هستند.

e. هرگاه f زوج، g فرد و $f+g=\circ$ آنگاه $f(x)=\circ$, $g(x)=\circ$

۲. هرگاه f متناوب و با دوره p باشد آنگاه f' تابعی متناوب است و همچنین تابع $\int_\circ^x f(t)\,dt$ فقط و فقط وقتی متناوب است که اگر $\int_\circ^p f(t)\,dt=\circ$

۳. هرگاه a_n , b_n ضرایب فوریه تابع $f(x)$ باشند آنگاه ضرایب فوریه تابع $f(x-a)$ را بیابید.

۴ – تابع زیتای ریمن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\zeta(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ ;\ p>1$$

با توجه به اینکه

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

نشان دهید که

$$\zeta(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,;\,p>1$$

۵ . هرگاه $p(x)$ یک چند جمله‌ای زوج (یعنی فقط شامل توانهای زوج x) بر فاصله $[-l,l]$ باشد. آنگاه a_n ضرایب کسینوسی، $p(x)$ به ازای $n\geq 1$ برابر است با

$$a_n=\frac{2l}{n^2\pi^2}\ (-1)^n\ \{p'(l)-\frac{l^2}{n^2\pi^2}p'''(l)+\frac{l^4}{n^4\pi^4}p^{(5)}(l)-+\dots\}$$

و در صورت فرد بودن $p(x)$

$$b_n=-\frac{2}{n\pi}\ (-1)^n\ \{p(l)-\frac{l^2}{n^2\pi^2}p''(l)+\frac{l^4}{n^4\pi^4}p^{(4)}(l)+\dots\}$$

۶. در یک سری فوریه نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\circ\qquad,\qquad\lim_{n\to\infty}b_n=\circ$$

۷. نشان دهید که

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}-\frac{1}{2}(\pi+x); & -\pi<x<\circ\\ \frac{-1}{2}(\pi-x); & \circ\leq x<\pi\end{cases}$$

$$b.\ \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۲n+۱} \cos(۲n+۱)x = \frac{۱}{۲} \ln \left\{\cot \frac{|x|}{۲}\right\};\ -\pi < x < \pi$$

۸. با استفاده از تابع $f(x)=x^۴ \ ; \ -\pi<x<\pi$

نشان دهید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴} = \frac{\pi^۴}{۹۰}$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۴} = \frac{۷\pi^۴}{۷۲۰}$$

۹. به کمک تمرین ۸ بخش قبل نشان دهید که

$$\mu\pi \cot \mu\pi = ۱-۲ \sum_{n=۱}^{\infty} \zeta(۲n)\, \mu^{۲n}$$

فصل دوم

معادلات با مشتقات جزئی

معادلات ریاضی فیزیک

۱.۲. مقدمه

هر معادله از x، y و u و مشتقات جزئی u نسبت به x و y به یک معادله با مشتق جزئی موسوم است. در بحث مربوط به معادلات با مشتقات جزئی بنا نداریم به بررسی انواع مختلف این گونه معادلات بپردازیم بلکه دسته خاصی از این نوع معادلات را که به معادلات ریاضی فیزیک موسوم‌اند مورد بررسی قرار می‌دهیم، گرچه در بین مسائل خود ممکن است دسته‌های دیگری از معادلات را نیز مورد بحث قرار دهیم. معادلات ریاضی فیزیک اصولاً نوعی معادلات خطی یا شبه خطی از مرتبه دوم هستند. منظور از یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی مرتبه دوم معادله‌ای است که نسبت به u و مشتقات جزئی آن خطی باشد. معادلات شبه خطی بیشتر مورد توجه ما هستند. این گونه معادلات تنها نسبت به مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی هستند. یک معادله شبه خطی در فضای دو بعدی را می‌توان چنین تعریف کرد.

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y) \qquad (۱)$$

که در آن A، B و C توابعی از x و y هستند. دسته‌های خاصی از معادلات شبه خطی که در مسائل کاربردی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده و به معادلات ریاضی فیزیک موسوم‌اند عبارت‌اند از:

(۲) معادله موج $u_{tt}=c^2\nabla^2 u$

(۳) معادله گرما $u_t=c^2\nabla^2 u$

(۴) معادله لاپلاس $\nabla^2 u=0$

(۵) معادله پواسن $\nabla^2 u=f(x,y,z)$

(۶) معادله هلمهولتز $\nabla^2 u+ku=0$

که در آن

$$\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} ,\quad \nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy} ,\quad \nabla^2 u=u_{xx}$$

به ترتیب در حالتهای یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی است.

در این فصل بنا داریم که هر یک از این معادلات را در برخی از حالات خاص مورد بحث و بررسی قرار دهیم ولی قبل از بررسی این معادلات مجدداً به معادله (۱) بر می‌گردیم. معادله (۱) را به ازای $4AC-B^2>0$ ، $4AC-B^2=0$ و $4AC-B^2<0$ به ترتیب بیضی‌گون، سهمی‌گون، و هذلولی‌گون می‌نامند. مثلاً در حالت یک بعدی معادله موج یک معادله هذلولی‌گون، معادله گرما یک معادله سهمی‌گون و معادله لاپلاس در حالت دو بعدی یک معادله بیضی‌گون است.

در ریاضیات مهندسی ما اغلب اوقات به حل مسائل شامل معادلات با مشتقات جزئی می‌پردازیم و منظور از یک مسئله در معادلات با مشتقات جزئی یافتن جوابی برای یک معادله با مشتق جزئی است که در برخی شرایط فیزیکی مفروض صدق کند. شرایط فیزیکی اصولاً طوری انتخاب می‌شوند که نتیجه حل مسئله به جوابی یکتا منجر شود.

جواب برخی معادلات همچون جواب معادله موج با شناخت u روی کرانه D و مقدار اولیه u و سرعت آن در لحظه اولیه به طور یکتا در داخل D مشخص می‌شوند چنین مسائلی را مسائل با مقدار اولیه و کرانه‌ای می‌نامند. مسائلی که جواب معادله با مشخص بودن مقدار u بر کرانه D یا مشتق u در امتداد قائم بر کرانه D به طور یکتا در داخل D مشخص شود به مسائل مقدار کرانه‌ای موسوم‌اند مثلاً مسئله لاپلاس مسئله‌ای از این نوع است. البته مسائلی

نیز موجودند که جواب معادله آنها تنها با شناخت مقدار اولیه جواب مشخص می‌شوند چنین مسائلی به مسائل مقدار اولیه موسوم‌اند.

در ذیل ما نخست به بررسی مسائل با مقادیر اولیه و کرانه‌ای شامل معادلات موج و گرما می‌پردازیم و سپس مسائل با مقدار کرانه‌ای شامل معادلات لاپلاس و پواسن را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. حل مسائل در حالت یک بعدی که در بخش ۳.۲ ارائه می‌شوند به سادگی در حالات دو بعدی و سه بعدی قابل تعمیم هستند.

۲.۲. تمرینات

برخی از معادلات با مشتقات جزئی را می‌توان به کمک روشهای ارائه شده در معادلات دیفرانسیل حل نمود مثلاً جواب $u_y=0$ عبارت است از $u=f(x)$ و همینطور با دو بار انتگرالگیری از معادله $u_{yy}=0$ می‌یابیم $u=y\,f(x)+g(x)$

هر یک از معادلات زیر را به کمک روشهای ارائه شده برای معادلات دیفرانسیل معمولی حل کنید.

۱. $u_x=0$, جواب. $u=f(y)$

۲. $u_{xx}=0$, جواب. $u=xf(y)+g(y)$

۳. $u_{xx}+u_x-2u=0$, جواب. $u=f(y)e^x+g(y)e^{-2x}$

۴. $u_{yy}+u=0$, جواب. $u=f(x)\cos y+g(x)\sin y$

۵. $u_{xy}+u_x=0$, جواب. $u=f(x)e^{-y}+g(y)$

۶. $u_{xy}+u_x-x+y^2=0$, جواب. $u=f(x)e^{-y}+g(y)+\frac{1}{2}x^2-xy^2$

۷. $u_x=0$, $u_y=0$. جواب. $u=c$

۸. $u_{yy}+3u_y-4u=8$, جواب. $u=f(x)e^{-4y}+g(x)e^y-2$

۹. $u_{xx}=0$, $u_{xy}=0$, $u_{yy}=0$, جواب. $u=ax+by+c$

۳.۲. مسائل با مقادیر اولیه و کرانه‌ای، حل مسأله موج در فضای یک بعدی، مسئله نخ مرتعش

می‌توان نشان داد که به ازای داده‌های F، f، g و h که در شرایط معینی صدق می‌کنند مسئله با مقادیر اولیه و کرانه‌ای زیر دارای جوابی یکتا است

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t);\qquad 0<x<l\qquad ,\ t>0 \qquad (1a)$$

$$u(x,0)=f(x);\qquad 0\leq x\leq l \qquad (1b)$$

$$u_t(x,0)=g(x);\qquad 0\leq x\leq l \qquad (1c)$$

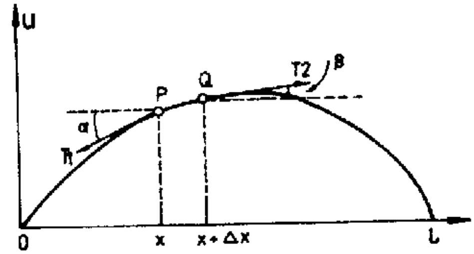
$$u(0,t)=p(t);\qquad t\geq 0 \qquad (1d)$$

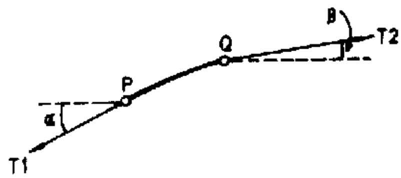
$$u(l,t)=q(t);\qquad t\geq 0 \qquad (1e)$$

نخست یک مسئله فیزیکی را مدلسازی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که ارتعاش یک نخ در مسئله فوق صدق می‌کند. با فرض اینکه مسئله فوق دارای جواب بوده و جواب آن یکتاست به چگونگی نمایش جواب آن می‌پردازیم.

نخی به طول l را که دو انتهای آن ثابت است در نظر می‌گیریم و آن را از وضع تعادل خارج کرده و ارتعاشات آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم یعنی می‌خواهیم ببینیم پس از تغییر اولیه در وضعیت نخ و رها کردن آن در هر لحظه نخ در چه وضعیتی قرار دارد. برای این منظور لازم است نخ کاملاً کشسان بوده و جرم نخ در واحد طول ثابت و در مقابل نیروی کشش کوچک باشد و حرکت نخ یک ارتعاش کوچک عرضی دریک صفحه در امتداد قائم و هیچ‌گونه حرکتی در جهت افقی صورت نگیرد. فرض می‌کنیم نخ در فاصله $0<x<l$ در طول محور x باشد. هم اکنون نخ را از وضعیت تعادل خود خارج کرده و در لحظه‌ای که لحظه اولیه $t=0$ می‌نامیم نخ را با وضعیت معین و با سرعت مشخص می‌گیریم. برای بررسی وضعیت حرکت یک نخ بدیهی است که حرکت هر نقطه از نخ به x، طول آن نقطه، و زمان حرکت t بستگی دارد بنابراین u، ارتفاع یک نقطه از نخ ، به صورت $u(x,t)$ یعنی تابعی از x و t خواهد بود.

چنانچه منحنی c وضعیت نخ در لحظه t باشد آنگاه برای پیدا کردن معادله حرکت نخ، دو نقطه بسیار نزدیک از نخ به طولهای xو $x + \Delta x$را در نظر می‌گیریم.





هرگاه نیروهای کشش با مقادیر T_1 و T_2 به ترتیب در نقاط xو $x+\Delta x$بر نخ وارد شوند آنگاه به علت عدم وجود حرکت در امتداد افق، تصویر نیروی کشش در طول محور xدارای اندازه ثابت$T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha = T$ است و نیروی محرکه در امتداد قائم که بر اثر نیروی کشش ایجاد می‌گردد برابر

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha$$

است چنانچه فرض کنیم علاوه بر نیروی قائم فوق نیروی ثابتی در امتداد قائم وارد شود و اگر اندازه این نیرو بر واحد طول، در نقطه xبرابر pباشد آنگاه اندازه نیرو بر طول Δx برابر $p\Delta x$ خواهد بود. بنابراین نیروی محرکه بر نخ که سبب حرکت آن می‌گردد برابر است با

$$F = T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha + p\Delta x$$

از طرفی طبق قانون دوم نیوتن مقدار نیرو با حاصلضرب جرم جسم در شتاب متحرک برابر است بنابراین می‌یابیم

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha + p\Delta x = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر T نتیجه می‌گیریم

$$tg\,\beta - tg\,\alpha + \frac{p}{T}\Delta x = \frac{\rho}{T}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم طرفین تساوی فوق بر Δx و با توجه به اینکه $tg\,\alpha$ و $tg\,\beta$ به ترتیب برابر ضریب

زاویه‌های خطوط مماس در نقاط xو $x+\Delta x$است می‌یابیم :

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+\frac{p}{T}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حال چنانچه Δx به سمت صفر میل کند داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{p}{T}=\frac{\rho}{T}\;\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم کردن طرفین این تساوی بر ρ/Tو فرض $c^2=\dfrac{T}{\rho}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{p}{\rho} \qquad (1)$$

هرگاه ارتعاش و سرعت اولیه به ترتیب برابر $f(x)$ و $g(x)$ باشند آنگاه با توجه به اینکه نخ در نقاط $x=0$و $x=l$دارای ارتعاشی نیست داریم .

$$u(x,0)=f(x) \quad ; \quad 0\le x\le 1 \qquad (2)$$

$$u_t(x,0)=g(x) \quad ; \quad 0\le x\le 1 \qquad (3)$$

$$u(0,t)=0 \quad ; \quad t\ge 0 \qquad (4)$$

$$u(l,t)=0 \quad ; \quad t\ge 0 \qquad (5)$$

معادله (۱) با شرایط (۲) تا (۵) یک نمونه فیزیکی برای مسئله (۱) می‌باشد.

هم اکنون به حل مسئله (۱) در حالتی خاص می‌پردازیم و مسئله زیر را حل می‌کنیم

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \quad ; \; 0<x<l\,,\; t>0 \qquad (2a)$$

$$u(x,0)=f(x) \quad ; \; 0\le x\le l\,, \qquad (2b)$$

$$u_t(x,0)=g(x) \quad ; \; 0\le x\le l\,, \qquad (2c)$$

$$u(0,t)=0 \quad ; \quad t\ge 0 \qquad (2d)$$

$$u(l,t)=0 \quad ; \quad t\ge 0 \qquad (2e)$$

این مسئله را مسئله (۲) می نامیم و برای حل این مسئله روش ضربی یا روش تفکیک متغیرها را که حاصل تلاشهای اویلر در مدلسازی و حل مسئله موج است ارائه می کنیم. برای حل مسئله از خاصیت وجود و یکتایی جواب استفاده می‌کنیم یعنی به جای حل معادله ($2a$) در حالت کلی و رسیدن به یک جواب عمومی برای این معادله کوشش می‌کنیم جوابی

خصوصی برای معادله ($۲a$) را طوری بیابیم که در شرایط ($۲b$) تا ($۲e$) صدق کند. بدیهی است که این جواب با توجه به یکتا بودن جواب برای مسئله (۱) تنها جواب مسئله (۲) خواهد بود.

برای حل مسئله (۲) به جستجوی جوابی به صورت $u(x,t)=F(x)\ G(t)$ برای مسئله می‌پردازیم یعنی $F(x)$ و $G(t)$ را طوری می‌یابیم که حاصلضرب آنها در مسئله صدق کند با جایگزینی $u=FG$ و $u_{tt}=F\ddot{G}$ و $u_{xx}=F''G$ در معادله می‌یابیم.

$$F\ddot{G}=c^۲F''G$$

و از آنجا

$$\frac{F''}{F}=\frac{\ddot{G}}{c^۲G}$$

نظر به اینکه طرف اول این تساوی تنها تابعی از x و طرف دوم تنها تابعی از t است تساوی فوق فقط وقتی می‌تواند برقرار باشد که عدد ثابتی مانند k موجود باشد که هر یک از نسبتهای موجود در این تساوی با آن برابر باشند یعنی داشته باشیم

$$\frac{F''}{F}=\frac{\ddot{G}}{c^۲G}=k,$$

و از آنجا به دو معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$F''-kF=۰ \quad , \quad \ddot{G}-kc^۲G=۰$$

حال با توجه به شرط ($۲b$) داریم

$$u(۰,t)=F(۰)G(t)=۰,$$

بدیهی است که $G(t)\neq ۰$ زیرا $G(t)=۰$ منجر به جواب بدیهی $u=۰$ می‌شود که با فرض وجود ارتعاش اولیه تناقض دارد، بنابراین لازم است که $F(۰)=۰$ همینطور با توجه به شرط $u(l,t)=۰$ داریم $F(l)=۰$ هم اکنون مسئله زیر را

$$F''-kF=۰\ ; \quad F(۰)=۰ \quad , \quad F(l)=۰$$

به ازای مقادیر مختلف k مورد بررسی قرار می‌دهیم. هرگاه $k=۰$ آنگاه داریم $F''=۰$ که دارای جواب عمومی $F(x)=ax+b$ است. با توجه به شرایط $F(۰)=۰$ و $F(l)=۰$ می‌یابیم

$F=0$ و از آنجا $u=0$ که خلاف فرض وجود جواب غیر بدیهی برای مسئله است. بنابراین $k=0$ منجر به جوابی برای مسئله نمی‌شود.

حال فرض می‌کنیم $k=\mu^2>0$ آنگاه جواب عمومی معادله $F''-kF=0$ به صورت $F(x)=a\cosh\mu x + b\sinh\mu x$ می‌باشد. با توجه به شرط $F(0)=0$ داریم $a=0$ و از آنجا $F(x)=b\sinh\mu x$ شرط $F(l)=0$ نتیجه می‌دهد $b\sinh\mu l=0$ و چون μ و l هر دو مخالف صفر هستند بنابراین $b=0$ و از آنجا $F=0$ بنابراین تنها امکان حل مسئله جستجوی مقادیر منفی برای k است. برای این منظور قرار می‌دهیم $k=-p^2<0$ و از آنجا داریم $F''+p^2F=0$ که دارای جواب عمومی $F(x)=A\cos px+B\sin px$ است. با توجه به فرض $F(0)=0$ می‌یابیم $A=0$ و از آنجا $F=B\sin px$ حال بنابر فرض $F(l)=0$ به دست می‌آوریم $B\sin pl=0$، برای اینکه مسئله دارای جواب $F\neq 0$ باشد، لازم است که $B\neq 0$ و بنابراین p را باید طوری انتخاب کرد که $\sin pl=0$ با انتخاب $p=\frac{n\pi}{l}$ و به ازای هر عدد صحیح n مقدار $\sin pl=0$ برابر صفر خواهد شد و بنابراین لازم نیست مقدار B برابر صفرباشد و از آنجا به جوابی به صورت

$$F_n(x) = B\sin\frac{n\pi}{l}x$$

می‌رسیم با جایگزین کردن $k=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ در معادله $\ddot{G}-kc^2G=0$ و قرار دادن $\lambda^2_n=c^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}$

در نتیجه حاصل به معادله زیر برای متغیر t می‌رسیم.

$$\ddot{G}+\lambda^2_nG=0;\quad \lambda_n=c\frac{n\pi}{l}$$

این معادله دارای جواب عمومی

$$G_n(t) = A'\cos\lambda_nt+B'\sin\lambda_n t$$

است و از آنجا

$$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=(a_n\cos\lambda_nt+b_n\sin\lambda_nt)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

که در آن $b_n=B'B$, $a_n=A'B$

نظر به اینکه $u_n(x,t)$ به ازای هر عدد طبیعی n جواب مسئله $(۲a)$،$(۲d)$ و $(۲e)$ است، بنابراین مجموع آنها جوابی از مسئله است یعنی

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)\sin \frac{n\pi}{l}x \qquad (۶)$$

نیز جوابی از مسئله است. برای مشخص کردن a_n و b_n از شرایط دیگر مسئله (۲) یعنی از شرایط $(۲b)$ و $(۲c)$ استفاده می‌کنیم. با توجه به شرط $u(x,0)=f(x)$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l}x=f(x)$$

برای برقرار بودن این تساوی لازم است که طرف اول تساوی برابر بسط سینوسی فوریه تابع $f(x)$ باشد و برای این منظور کافی است a_n را برابر ضریب بسط سینوسی فوریه تابع $f(x)$ اختیار کنیم یعنی

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin \frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (۷)$$

حال با مشتقگیری از طرفین (۶) و با استفاده از $u_t(x,0)=g(x)$ می‌یابیم

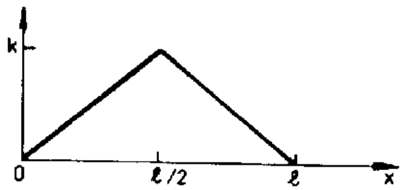
$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n \sin \frac{n\pi}{l}x= g(x)$$

و برای برقرار بودن این تساوی کافی است $b_n\lambda_n$ را برابر ضریب بسط سینوسی فوریه تابع $g(x)$ اختیار کنیم و از آنجا

$$b_n=\frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l g(x)\sin \frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (۸)$$

بنابراین مسئله (۲) دارای جوابی به صورت (۶) است که در آن ضرایب a_n و b_n از روی (۷) و (۸) به دست می‌آیند.

مثال ۱. نخی به طول l را مطابق شکل زیر از وسط به ارتفاع k بالا برده و رهایش ساخته‌ایم. انحراف این نخ را در هر لحظه مشخص کنید.



$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2k}{l}x & ; \quad 0<x<l/2\\ \dfrac{2k}{l}(l-x) ; & l/2<x<l\end{cases}$$

و سرعت اولیه ارتعاش برابر صفر است

$$u_t(x,0)=0$$

بنابراین

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\ ,\ b_n=0$$

پیرو مثال ۶ بخش ۱.۱ می‌یابیم

$$a_n=\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

از اینرو با توجه به (۶)داریم

$$u(x,t)=\frac{8k}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

حال مجدداً به مسئله (۱) برمی‌گردیم. برای حل این مسئله به جستجوی جوابی به صورت

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \tag{۹}$$

می‌پردازیم و $w(x,t)$ را طوری می‌یابیم که $v(\circ,t)=\circ$ و $v(l,t)=\circ$ برای این منظور کافی است $w(x,t)$ را طوری بیابیم که جواب مسئله زیر باشد.

$$w(\circ,t)=p(t) \quad , w(l,t)=q(t)$$

بدیهی است که این مسئله تنها دارای یک جواب نیست. ولی چون تنها یک جواب مورد نظر است، برای یافتن جوابی برای این مسئله می‌توان به جستجوی جوابی به صورت

$$w(x,t)=ax+b$$

پرداخت. با توجه به شرط $w(\circ,t)=p(t)$ می‌یابیم $b=p(t)$ و از روی شرط

$$w(l,t)=q(t)$$

نتیجه می‌گیریم

$$a=\frac{\text{۱}}{l}(q(t)-p(t))$$

بنابراین

$$w(x,t)=\frac{\text{۱}}{l}(q(t)-p(t))x+p(t)$$

و از آنجا

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{\text{۱}}{l}(q(t)-p(t))x+p(t) \tag{۱۰}$$

حال مسئله مربوط به v را می‌یابیم. داریم

$$u_{tt}=v_{tt}+\frac{x}{l}(\ddot{q}-\ddot{p})+\ddot{p}\ ,\ u_{xx}=v_{xx}$$

با جایگزین کردن آن در $(\text{۱}a)$ به دست می‌آوریم

$$v_{tt}+\frac{x}{l}(\ddot{q}-\ddot{p})+\ddot{p}-c^{\text{۲}}v_{xx}=F(x,t)$$

و از آنجا $v_{tt}-c^{\text{۲}}v_{xx}=F_{\text{۱}}(x,t)$ که در آن

$$F_{\text{۱}}(x,t)=F(x,t)-\frac{\text{۱}}{l}(\ddot{q}-\ddot{p})x-\ddot{p}$$

با توجه به شرط $(\text{۱}b)$ و (۱۰) می‌یابیم.

$$u(x,\circ)=v(x,\circ)+\frac{\text{۱}}{l}(q(\circ)-p(\circ))x+p(\circ)=f(x)$$

که از آنجا $v(x,0)=f_1(x)$ که در آن

$$f_1(x)=f(x)-\frac{1}{l}(q(0)-p(0))x-p(0)$$

همینطور از روی (1c) و (۱۰) می‌یابیم

$$u_t(x,0)=v_t(x,0)+\frac{1}{l}(\dot{q}(0)-\dot{p}(0))x+\dot{p}(0)=g(x)$$

در نتیجه $v_t(x,0)=g_1(x)$ که در آن

$$g_1(x)=g(x)-\frac{1}{l}(\dot{q}(0)-\dot{p}(0))x-\dot{p}(0)$$

بنابراین به مسئله زیر برای v می‌رسیم

$$v_{tt}-c^2v_{xx}=F_1(x,t);\ 0<x<l,\ t>0 \tag{3a}$$

$$v(x,0)=f_1(x);\ 0\leq x\leq l, \tag{3b}$$

$$v_t(x,0)=g_1(x);\ 0\leq x\leq l, \tag{3c}$$

$$v(0,t)=0;\ t\geq 0 \tag{3d}$$

$$v(l,t)=0;\ t\geq 0 \tag{3e}$$

چنانچه در مسئله‌ای $F_1(x,t)$ برابر صفر گردد آنگاه جواب مسئله (۳) را می‌توان از روی (۶) به دست آورد و با توجه به (۱۰) به جواب مسئله (۱) رسید. حال اگر $F_1(x,t)\neq 0$ آنگاه به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{11}$$

برای مسئله (۳) می‌پردازیم. با جایگزین کردن آن در (3a) می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ddot{G}_n+\lambda^2_n G_n)\sin\frac{n\pi}{l}x=F_1(x,t);\ \lambda_n=c\,\frac{n\pi}{l}$$

بنابراین $\ddot{G}_n+\lambda^2_n G_n$ را می‌توان برابر ضریب سینوسی فوریه تابع $F_1(x,t)$ گرفت یعنی

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x,t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \qquad (۱۲)$$

با حل این معادله به جوابی عمومی به صورت

$$G_n(t) = a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t + G^*_n(t) \qquad (۱۳)$$

که در آن $G^*_n(t)$ یک جواب خصوصی معادله (۱۲) است، می‌رسیم. با توجه به آن (۱۱) به صورت زیر در می‌آید.

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t + G^*_n(t)) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

با توجه به این تساوی و ($3b$) و($3c$) به ترتیب می‌یابیم

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + G^*_n(0)) \sin \frac{n\pi}{l} x = f_1(x)$$

و

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \lambda_n + \dot{G}^*_n(0)) \sin \frac{n\pi}{l} x = g_1(x)$$

و از آنجا

$$a_n = -G^*_n(0) + \frac{2}{l} \int_0^l F_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \qquad (۱۵)$$

و

$$b_n = \frac{1}{\lambda_n} [-\dot{G}^*_n(0) + \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx] \qquad (۱۶)$$

بنابراین مسئله (۱) دارای جوابی به صورت (۱۰) است که در آن v از فرمول (۱۴) با ضرایب (۱۵) و (۱۶) به دست می‌آید.

مثال ۲. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt} - u_{xx} = t ; \quad 0 < x < 1 \quad , t > 0$$

$$u(x,0) = x ; \quad 0 \le x \le 1$$

$$u_t(x,0)=2\ ; \qquad 0\leq x\leq 1$$

$$u(0,t)=2t\ ; \qquad t\geq 0$$

$$u(1,t)=t\ ; \qquad t\geq 0$$

چنین قرار می‌دهیم : $u(x,t) = v(x,t)+w(x,t)$ و w را طوری می‌یابیم که $v(0,t)=0$ و $v(1,t)=0$ برای این منظور می‌نویسیم $w(x,t)=ax+b$ و با چنین فرضی می‌یابیم $a=\frac{t-2t}{1}=-t\ ,\ b=2t$ بنابراین $w=-tx+2t$ و از آنجا

$$u(x,t)=v(x,t)-tx+2t$$

با توجه به اینکه

$$v(x,0)=u(x,0)=x\ ,\ u_{xx}=v_{xx}\ ,\ u_{tt}=v_{tt}$$

و

$$v_t(x,0)=u_t(x,0)+x-2=x$$

مسئله مربوط به v به صورت زیر در می‌آید

$$v_{tt}-v_{xx}=t\ ,\ v(x,0)=x\ ,\ v_t(x,0)=x\ ,\ v(0,t)=0\ ,\ v(1,t)=0$$

برای حل این مسئله به جستجوی جوابی به صورت زیر می‌پردازیم

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin n\pi x$$

با قرار دادن آن در معادله می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ddot{G}_n+n^2\pi^2 G_n)\sin n\pi x=t$$

و از آنجا

$$\ddot{G}_n+n^2\pi^2 G_n = 2t\int_0^1 \sin n\pi x dx=-\frac{2t}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{2t}{n\pi}(1+(-1)^{n+1})$$

و

$$G_n=a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t+\frac{2t}{n^3\pi^3}(1+(-1)^{n+1})$$

درنتیجه

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos n\pi t+b_n \sin n\pi t+\frac{2t}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1})]\sin n\pi x$$

با توجه به اینکه $v(x,0)=x$ می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x = x$$

و از آنجا

$$a_n=2\int_0^1 x\sin n\pi x dx=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

از روی $v_t(x,0)=x$ می‌یابیم.

$$v_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}[n\pi b_n+\frac{2}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1})]\sin n\pi x=x$$

بنابراین

$$n\pi b_n+\frac{2}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1})=2\int_0^1 x\sin n\pi x dx=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

و یا

$$b_n=\frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1)+\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}$$

در نتیجه

$$u(x,t)=-tx+2t+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\cos n\pi t+[\frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1)$$

$$+\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}]\sin n\pi t+\frac{2t}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1})\}\sin n\pi x$$

مثال ۳. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt}-25u_{xx}=x+\frac{25}{2}\pi\ ;\quad 0<x<1\quad ,\ t>0$$
$$u(x,0)=(\frac{1}{2}-\pi/4)x^2\ ;\quad 0\le x\le 1$$

$$u_t(x,\circ)=\text{۱}+x\,; \qquad \circ\leq x\leq \text{۱}$$
$$u_x(\circ,t)=\frac{\pi}{\text{۲}}\,; \qquad t\geq \circ$$
$$u_x(\text{۱},t)=\text{۱}\,; \qquad t\geq \circ$$

قرار می‌دهیم

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

حال $w(x,t)$ را طوری می‌یابیم که $v_x(\circ,t)=v_x(\text{۱},\ t)=\circ$ برای این منظور می‌توانیم چنین قرار دهیم $w=ax^{\text{۲}}+bx$ که از آنجا $w_x\ =\ \text{۲}ax+b$. با توجه به این مفروضات داریم

$$w_x(\circ,t)=\frac{\pi}{\text{۲}}=b$$

و $w_x(\text{۱},t)=\text{۲}a+b=\text{۱}$ بنابراین

$$a=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}-\frac{\pi}{\text{۴}}$$

در نتیجه

$$u(x,t)=v(x,t)+\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}-\frac{\pi}{\text{۴}}\right)x^{\text{۲}}+\frac{\pi}{\text{۲}}x$$

با جایگزین کردن این تابع در مسئله می‌یابیم

$$v_{tt}-\text{۲۵}v_{xx}=\ \text{۲۵}+x\,;$$
$$v(x,\circ)=-\frac{\pi}{\text{۲}}x\,,\quad v_t(x,\circ)=\text{۱}+x\,;$$
$$v_x(\circ,t)=\circ\,,\ v_x\ (\text{۱},t)=\circ$$

[illegible]

$$v_{tt}\ =\ \text{۲۵}v_{xx}\,;\ \ v_x(\circ,t)=\circ\,,\ v_x\ (\text{۱},t)=\circ$$

را به تفکیک متغیرها $v(x,t)=F(x)G(t)$ تا تعیین $F(x)$ حل می‌کنیم. با توجه به $v_{tt}=\text{۲۵}v_{xx}$ و $v=FG$ داریم

$$\frac{F''}{F}=\frac{\ddot{G}}{\text{۲۵}G}=k$$

با توجه به تساوی فوق و شرایط $v_x(\circ,t)=\circ$ و $v_x(\text{۱},t)=\circ$ به مسئله زیر برای F می‌رسیم

$$F''-KF=\circ \qquad ;\ F'\ (\circ)=\circ \qquad ,\quad F'(\text{۱})=\circ$$

به ازای $k=0$ داریم $F=ax+b$ و $F'=a$ و با توجه به هر یک از شرایط $F'(0)=0$ یا $F'(1)=0$ نتیجه می‌گیریم $a=0$ در نتیجه $F=b$ یک جواب مسئله است.

به ازای $k=-p^2<0$ داریم

$$F''+p^2F=0 \quad ; F'(0)=0 \quad , \quad F'(1)=0$$

که دارای جواب عمومی زیر است

$$F(x)=A\cos px+B\sin px$$

و از روی آن داریم

$$F'(x)=-Ap\sin px+Bp\cos px$$

با توجه به شرط $F'(0)=0$ نتیجه می‌شود $Bp=0$ و یا $B=0$ بنابراین

$$F'(x)=-Ap\sin px$$

نظر به اینکه $F'(1)=0$ داریم $F'(1)=-Ap\sin p=0$ که با انتخاب $p=n\pi$ می‌توان A را مخالف صفر انتخاب نمود و نتیجه گرفت که مسئله مربوط به تابع F دارای جواب $F_n(x)=A\cos n\pi x$ است. حال به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} G_n(t)\cos n\pi x$$

می‌پردازیم. با درج آن در معادله مسئله می‌یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ddot{G}_n+25n^2\pi^2 G_n)\cos n\pi x=25+x$$

و از آنجا

$$\ddot{G}_n+25n^2\pi^2G_n=2\int_0^1(25+x)\cos n\pi x dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx=\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1);n\neq 0$$

که دارای جواب عمومی

$$G_n(t)=a_n\cos 5n\pi t+b_n\sin 5n\pi t+\frac{2}{25n^4\pi^4}((-1)^n-1);n\neq 0$$

است. به ازای $n=0$ داریم

$$\ddot{G}_0 = \int_0^1 (25+x)dx = \frac{51}{2}$$

که دارای جواب عمومی

$$G_0 = \frac{51}{4}t^2 + a_0 t + b_0$$

است، بنابراین

$$v(x,t) = \frac{51}{4}t^2 + a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos 5n\pi t + b_n \sin 5n\pi t + \frac{2}{25n^2\pi^4}\left((-1)^n - 1\right)\right] \cos n\pi x$$

$$v(x,0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + \frac{2}{25n^2\pi^4}\left((-1)^n - 1\right)\right] \cos n\pi x = -\frac{\pi}{2}x$$

$$b_0 = \int_0^1 \left(-\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{25n^2\pi^4}\left((-1)^{n+1}+1\right) - \pi\int_0^1 x\cos n\pi x dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^{n+1}+1\right)\left(\frac{1}{25n^2\pi^2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_t(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 5n\pi b_n \cos n\pi x = 1 + x$$

$$a_0 = \int_0^1 (1+x)dx = \frac{3}{2}$$

$$5n\pi b_n = 2\int_0^1 (1+x)\cos n\pi x dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$b_n = \frac{2}{5n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

بنابراین

$$u(x,t)=(1/2-\pi/4)x^2+\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{51}{2}t^2+3t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^{n+1}+1)\left(\frac{1}{25n^2\pi^2}+\frac{\pi}{2}\right)\cos 5n\pi t\right.$$

$$\left.+\frac{2}{5n^3\pi^3}((-1)^n-1)\sin 5n\pi t+\frac{2}{25n^4\pi^4}((-1)^n-1)\right\}\cos n\pi x$$

۴.۲. حل دالامبر معادله موج

مسئله

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \quad ; \quad 0<x<l \quad , \quad t>0 \qquad (۴a)$$

$$u(x,0)=f(x) \quad ; \quad u_t(x,0)=0 \, , \quad 0\leq x\leq l \qquad (۴b)$$

$$u(0,t)=0 \quad ; \quad u(l,t)=0 \, , \quad t\geq 0 \qquad (۴c)$$

را می‌توان به روش غیر ضربی نیز حل نمود در اینجا روشی را برای حل این مسئله ارائه می‌کنیم که به روش دالامبر موسوم است. برای حل مسئله به این روش تغییر متغیر

$z=x-ct$ و $v=x+ct$

می‌دهیم و با توجه به این تغیر متغیر می‌یابیم

$$u_t=u_vv_t+u_zz_t=c(u_v-u_z)$$

و از آنجا

$$u_{tt}=c[(u_v-u_z)_v\,v_t+(u_v-u_z)_z z_t]=c^2[u_{vv}-2u_{vz}+u_{zz}]$$

و همینطور

$$u_{xx}=u_{vv}+2u_{vz}+u_{zz}$$

با جایگزین کردن آنها در معادله مسئله می‌یابیم $u_{vz}=0$ و با انتگرالگیری از آن نتیجه می‌شود $u_v=h(v)$ و با انتگرالگیری مجدد داریم

$$u=\int h(v)dv+\psi(z)=\phi(v)+\psi(z)$$

بنابراین جواب معادله ($۴a$) عبارت است از

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\psi(x-ct) \qquad (۱)$$

با توجه به شرط $u(x,\circ)=f(x)$ نتیجه می‌شود

$$\phi(x)+\psi(x)=f(x) \qquad (۲)$$

همینطور بنا به شرط $u_t(x,\circ)=\circ$ می‌یابیم

$$c(\phi'(x)-\psi'(x))=\circ$$

و از آنجا

$$\phi'(x)-\psi'(x)=\circ \qquad (۳)$$

با انتگرالگیری از (۳) نتیجه می‌شود

$$\phi(x)-\psi(x)=k \qquad (۴)$$

که در آن k عددی ثابت است. با جمع (۲) و(۴) می‌یابیم

$$\phi(x)=\frac{۱}{۲}[f(x)+k]$$

با کم کردن (۴) از (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\psi(x)=\frac{۱}{۲}[f(x)-k]$$

با جایگزین کردن آنها در (۱) نتیجه می‌شود

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}[f(x+ct)+k]+\frac{۱}{۲}[f(x-ct)-k]$$

و یا

$$u(x,t)=۱/۲\,[f(x+ct)+f(x-ct)] \qquad (۵)$$

و با توجه به شرط $u(\circ,t)=\circ$ نتیجه می‌شود

$$f(-ct)=-f(ct)$$

و از روی $u(l,t)=\circ$ به ازای هر عدد حقیقی α می‌توان استنتاج کرد که

$$f(\alpha+۲l)=f(\alpha)$$

یعنی تابع f که در (۵) ظاهر شده است تابعی فرد با دوره $۲l$ است و چون $f(x)$ به ازای $\circ\leq x\leq l$ تعریف شده است بنابراین چنین تابعی می‌بایست برابر گسترش فرد $f(x)$ باشد

یعنی در واقع جواب مسئله (۴) عبارت است از

$$u(x,t)=1/2\,[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)] \tag{۶}$$

جواب مسئله (۴) را به کمک سری فوریه نیز می‌توان به دست آورد و نتیجه گرفت

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{l} x \;;\; a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin \frac{n\pi}{l} x dx \tag{۷}$$

گرچه به ظاهر دو جواب (۶) و (۷) هیچ شباهتی باهم ندارند ولی به سادگی می‌توان یکی بودن این دو جواب را اثبات نمود. در واقع با جایگزین کردن

$$\cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{l} x=\cos \frac{cn\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x=\frac{1}{2}\{\sin\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\}+\sin\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\}$$

در (۷) می‌یابیم

$$u(x,t)=1/2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\}+1/2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\}$$

با جایگزین کردن $x-ct$ و $x+ct$ بجای x در سری فوریه $f(x)$ گسترش فرد $f(x)$، یعنی در

$$f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

و محاسبهٔ میانگین آنها می‌یابیم

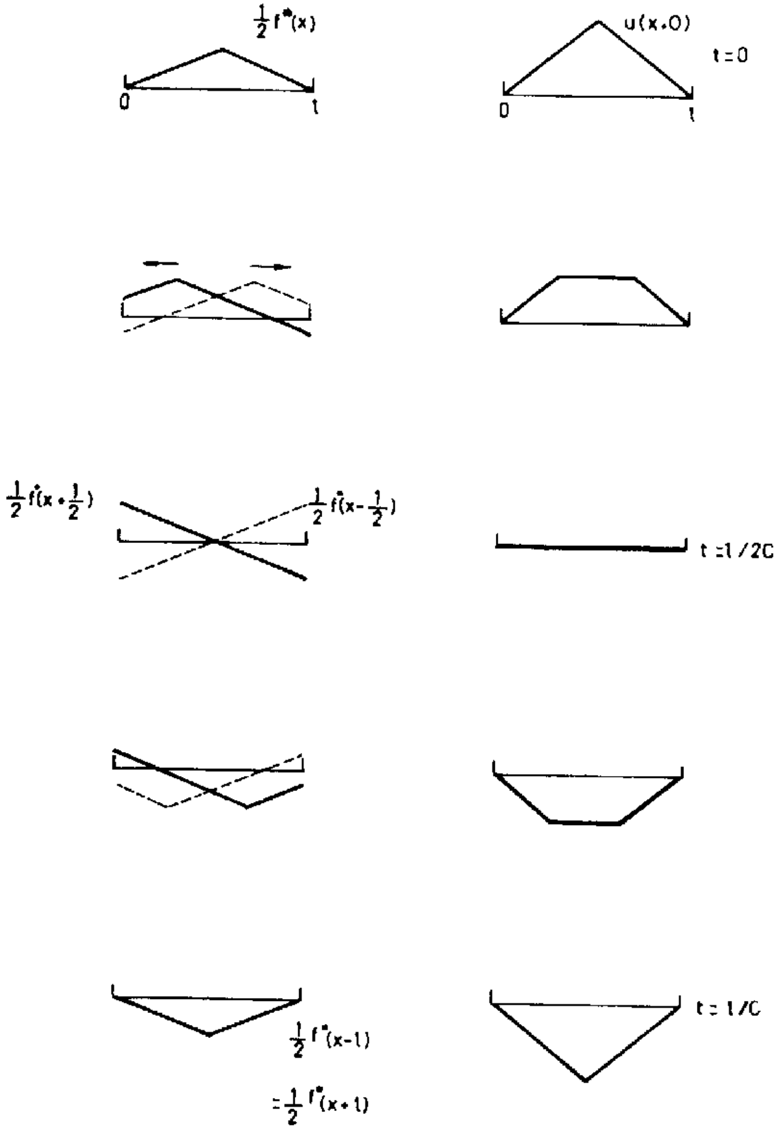
$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]$$

که همان جواب (۶) است. به کمک جواب (۶) و داشتن انحراف اولیهٔ یک مسئله موج می‌توان وضعیت جواب را در هر لحظه و در هر نقطه دقیقاً مشخص نمود و منحنی جواب را در هر لحظه رسم نمود. مثلاً چنانچه انحراف اولیه مسئله همان انحراف مثال ۱ این بخش باشد آنگاه با توجه به آن می‌توان در هر لحظه وضعیت نخ را رسم نمود مثلاً در ذیل وضعیت نخ در لحظه $t=\frac{l}{4}$ رسم شده است. در این مسئله $c=1$ اختیار شده است.

$$u(x,l/4)=\frac{1}{2}[f^*(x+\frac{l}{4})+f^*(x-\frac{l}{4})]$$

یعنی نخ از سقف شروع به سقوط کرده و بعد از $\frac{l}{4}$ ثانیه به وضعیت شکل ۱ ب و بعد از $\frac{l}{2}$ ثانیه در وضعیت صفر یعنی به صورت شکل ۱ د و بعد از l ثانیه به نقطه حضیض خود یعنی به

صورت ۱ ج در می‌آید. در هر صورت در لحظات l و $3l$ و ... در نقطه حضیض خود و در لحظات صفر و $2l$ و $4l$ و ... در نقطه اوج و در لحظه $l/2$ و $3l/2$ و ... بر محور x واقع است.



۵.۲. تمرینات

۱ ـ مسئله ارتعاش را در حالتی حل کنید که انحراف در روی مرز ناحیه صفر و سرعت اولیه و انحراف اولیه آن به صورت داده شده باشند.

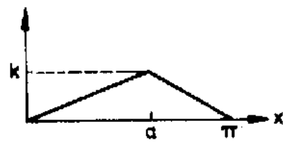
$a.\ u(x,0)=x(1-x), u_t(x,0)=0 \qquad 0\leq x\leq 1$

جواب. $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi^3}[1+(-1)^{n+1}]\cos n\pi ct \sin n\pi x$$

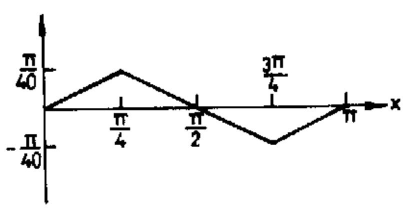
$b.\ u(x,0)=3\sin x\ ,\ \ u_t(x,0)=0 \qquad 0\leq x\leq \pi$

جواب. $u(x,t)=3\cos ct \sin x$

۲ ـ مسئله ارتعاش نخ را در حالتی حل کنید که انحراف اولیه ارتعاش برابر یکی از توابع زیر و سرعت اولیه آن صفر باشد. وضعیت ارتعاش را در چند لحظه که خود انتخاب خواهید نمود به کمک جواب حاصل ازروش دالامبر رسم کنید $(c=1)$.



جواب. $$u=\frac{2k}{a(\pi-a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}\cos nt \sin nx$$



جواب. $u=\frac{۴}{۵\pi}\left(\frac{۱}{۴}\cos ۲t\sin ۲x-\frac{۱}{۳۶}\cos ۶t\sin ۶x+\frac{۱}{۱۰۰}\cos ۱۰t\sin ۱۰x-+\ldots\right)$

۳. جواب هر یک از معادلات زیر را به روش ضربی به دست آورید.

$a.\ u_x+u_y=۰$ — جواب. $u=ke^{c(x-y)}$

$b.\ yu_x=xu_y$ — جواب. $u=e^{k(x^۲+y^۲)}$

$c.\ xu_x=yu_y$ — جواب. $u=cx^ky^k$

$d.\ u_{xy}=u$ — جواب. $u=ke^{c(x+y)}$

$e.\ u_{xx}+u_x-۲u=۰$

جواب. $u=f(y)e^x+g(y)e^{-۲x}$

۴ـ هر یک از معادلات زیر را با تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

$a.\ u_{xx}+u_{xy}=۲u_{yy}\quad ;\ v=x+y\quad ,\quad z=۲x-y$

$b.\ u_{xx}-۲u_{xy}+u_{yy}=۰\ ;\ v=y\quad ,\quad z=x+y$

$c.\ yu_{xy}=xu_{xx}+u_x\quad ;\ v=y\quad ,\quad z=xy$

۵ـ هر یک از مسائل زیر را حل کنید

$a.\ \frac{\partial^۲u}{\partial t^۲}+c^۲\frac{\partial^۴u}{\partial x^۴}=۰\qquad ;\qquad ۰<x<\pi\qquad t>۰$

$u(x,۰)=۰\ ;\ u_t(x,۰)=۰\ ;\qquad ۰\le x\le\pi$

$u(۰,t)=u(\pi,t)=u_{xx}(۰,t)=۰\quad ;\ u_{xx}(\pi,t)=\sin t\quad ;\ t\ge ۰$

جواب.

$$u(x,t)=\frac{c}{۲}\left[\frac{\sinh\sqrt{\frac{۱}{c}}\,x}{\sinh\sqrt{\frac{۱}{c}}\,\pi}-\frac{\sin\sqrt{\frac{۱}{c}}\,x}{\sin\sqrt{\frac{۱}{c}}\,\pi}\right]\sin t$$

$$+\frac{۲}{\pi c}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(-۱)^{n+۱}}{n^۴-(۱/c^۲)}\sin n^۲ct\sin nx$$

$\sqrt{\frac{۱}{c}}$ عددی صحیح نیست.

$b.\ u_{tt}-9u_{xx}=x \quad , \quad 0<x<\pi \quad ; \quad t>0$

$u(x,0)=2 \quad , \quad u_t(x,0)=1+x \quad ; \quad 0\leq x\leq \pi$

$u_x(0,t)=t \quad , \quad u_x(\pi,t)=2t \quad ; \quad t\geq 0$

جواب.
$$u(x,t)=\frac{\pi^2+6}{4\pi}t^2+a_ot+b_o+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos 3nt+b_n\sin 3nt$$

$$+\frac{2}{9\pi n^4}[(-1)^n-1]\}\cos nx+\frac{t}{2\pi}x^2+tx$$

$$a_0=1-\pi/6 \quad , b_0=2 \quad , a_n=\frac{2}{9\pi n^4}[(-1)^{n+1}+1] \ ,b_n=\frac{2}{3n^3\pi}(-1)^n$$

$c.\ u_{tt}-25u_{xx}=5 \quad , \quad 0<x<1 \quad ; \quad t>0$

$u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2} \quad , \quad u_t(x,0)=1+x \quad ; \quad 0\leq x\leq 1$

$u_x(0,t)=\pi/2 \quad , \quad u_x(1,t)=0 \quad ; \quad t\geq 0$

$$u(x,t)=(5-\frac{25}{2}\pi)\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}t+\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n^2\pi(1-4n^2)}\cos 5n\pi t$$

$$+\frac{2}{5n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\sin 5n\pi t\}\cos n\pi x+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}x^2$$

۶- هر یک از مسائل زیر را به روش دالامبر و با تغییر متغیر $v=x+2t$ و $z=x-2t$ حل کنید.

$a.\ u_{tt}=4u_{xx} \quad , \quad 0<x<\pi \quad , \quad t>0$

$u(x,0)=0 \qquad u_t(x,0)=x+1 \qquad 0\leq x\leq \pi$

$u(0,t)=0 \quad , \quad u(\pi,t)=0 \qquad t\geq 0$

b. $u_{tt}-4u_{xx}=x+t^2 \qquad 0<x<\pi$

$u(x,0)=1 \quad , \quad u_t(x,0)=-x \qquad 0\leq x\leq \pi$

$u(0,t)=t^2 \quad , \quad u(\pi,t)=t \quad ; \qquad t\geq 0$

۲.۶. مسئله گرما

در این بخش به حل مسئله زیر می‌پردازیم

$$u_t-c^2u_{xx}=F(x,t)\ ; \qquad 0<x<l \quad ; \quad t>0 \tag{5a}$$

$$u(x,0)=f(x)\ ; \qquad 0\leq x\leq l \tag{5b}$$

$$u(0,t)=p(t)\ ; \qquad t\geq 0 \tag{5c}$$

$$u(l,t)=q(t)\ ; \qquad t\geq 0 \tag{5d}$$

می‌توان نشان داد که مسئله (۵) دارای جواب بوده و جواب آن منحصر به فرد است و ما بنا داریم که جواب این مسئله را به روش جداسازی متغیرها بیابیم ولی قبل از حل این مسئله نخست نشان می‌دهیم که میزان درجه حرارت در میله‌ای به طول l که در اثر انتقال حرارت در میله صورت می‌پذیرد در مسئله (۵) صدق می‌کند برای این منظور فرض می‌کنیم میله همگن بوده و در همه جا هم ضخامت باشد و انتقال حرارت تنها در طول میله صورت پذیرد و از سطح جانبی آن انتقال حرارتی صورت نگیرد به عبارت دیگر میله در سراسر طول خود غیراز دو انتها کاملاً عایق پوش شده باشد. چنانچه میله را در طول محور x بین صفر تا نقطه‌ای به طول l بگیریم آنگاه درجه حرارت میله تابعی از زمان و طول نقطه یعنی به صورت $u(x,t)$ خواهد بود. چنانچه درجه حرارت اولیه میله و درجه حرارت دو سر میله در هر لحظه در دست بوده و به ترتیب برابر $f(x)$, $p(t)$ و $q(t)$ باشد، آنگاه u در شرایط $(5b)$ تا $(5d)$ صدق خواهد کرد. برای آنکه نشان دهیم u در شرط $(5a)$ یعنی در معادله نیز صدق

می‌کند، لازم است که از برخی خواص اجسام که به طور تجربی به دست می‌آیند استفاده کنیم.

تجربه نشان می‌دهد که شارگرمایی یا مقدارگرمایی که در واحد زمان از نقطه‌ای به طول x با مساحت سطح مقطع s از میله عبور می‌کند با حاصلضرب مساحت سطح مقطع در مشتق u نسبت به x در این نقطه متناسب است یعنی چنانکه q شار گرمایی باشد داریم .

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial x}s$$

حال چنانچه دو نقطه با طولهای x و $x+\Delta x$ از میله را اختیار کنیم و حرارت عبور کرده در طول زمان Δt از این دو نقطه را به ترتیب ΔQ_1 و ΔQ_2 بنامیم در آن صورت $\Delta Q_1-\Delta Q_2$ حرارت تلف شده در میله به طول Δx در طول زمان Δt بوده و برابر است با

$$\Delta Q_1-\Delta Q_2=-k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}s\Delta t+k\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}s\Delta t=k\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)s\Delta t$$

از طرفی تجربه فیزیکی نشان می‌دهد که مقدار حرارت تلف شده در یک جسم با جرم جسم در تغییر درجه حرارت نسبت به زمان متناسب است یعنی

$$\Delta Q_1-\Delta Q_2=\sigma m\,\Delta u=\sigma\,\rho\,s\,\Delta u\,\Delta x$$

با توجه به تساویهای فوق می‌یابیم .

$$k\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\Delta t=\sigma\rho\Delta u\Delta x$$

و یا

$$\frac{k}{\sigma\rho}\cdot\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=\frac{\Delta u}{\Delta t}$$

با فرض آنکه $\Delta t\to 0$ $\Delta x\to 0$ می‌یابیم

$$\frac{k}{\sigma\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

k و σ به ترتیب به ضریب هدایت گرما و گرمای ویژه موسوم‌اند. با قرار دادن $c^2=\frac{k}{\sigma\rho}$ می‌یابیم

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که همان معادلهٔ ($5a$) به ازای $F(x,t)=0$ است بنابراین درجه حرارت در یک میله را می‌توان از حل مسئله (۵) به دست آورد. برای حل مسئله (۵) به جستجوی جوابی به صورت

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

می‌پردازیم w را طوری اختیار می‌کنیم که $v(0,t)=0$ و $v(l,t)=0$ همانند آنچه که در حل مسئله موج دیدیم کافی است فرض کنیم

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{q(t)-p(t)}{l}x+p(t)$$

با قرار دادن در شرایط (۵) به مسئله زیر برای v می‌رسیم

$$v_t-c^2v_x=F_1(x,t)\quad;\quad 0<x<l,\quad t>0\qquad(6a)$$

$$v(x,0)=f_1(x)\quad;\quad 0\le x\le l,\quad t\ge 0\qquad(6b)$$

$$u(0,t)=0\quad;\quad t\ge 0\qquad(6c)$$

$$v(l,t)=0\quad;\quad t\ge 0\qquad(6d)$$

که در آن

$$F_1(x,t)=F(x,t)-\frac{q(t)-p(t)}{l}x-p(t),$$

$$f_1(x)=f(x)-\frac{q(0)-p(0)}{l}x-p(0),$$

برای حل مسئله (۶) و تعیین v با توجه به اینکه شرایط کرانه‌ای مسئله همانند مسئله متناظر با آن در مسئله موج است کافی است به جستجوی جوابی به صورت زیر بپردازیم

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

مثال ۴. مطلوبست حل مسئله زیر

$$u_t-9u_{xx}=x \quad ; \quad 0<x<1 \quad ; \quad t>0$$
$$u(x,0)=1-\cos\pi x \quad ; \quad 0\le x\le 1$$
$$u(0,t)=0 \quad ; \quad t\ge 0$$
$$u(1,t)=2 \quad ; \quad t\ge 0$$

حل : می‌نویسیم

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

و w را طوری می‌یابیم که $v(0,t)=0$ و $v(1,t)=0$ برای این منظور کافی است فرض کنیم

$w(x,t)=2x$ و از آنجا $u(x,t)=v(x,t)+2x$

با توجه به این تساوی مسئله زیر برای v به دست می‌آید

$$v_t-9v_{xx}=x$$
$$v(x,0)=1-\cos\pi x-2x\ ,\ v(0,t)=0 \qquad v(1,t)=0$$

با جایگزین کردن

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin n\pi x$$

در معادله مسئله اخیر می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\dot{G}_n+9n^2\pi^2G_n)\sin n\pi x=x$$

G را طوری انتخاب می‌کنیم که $\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n$ برابر ضریب فوریه تعمیم فرد تابع x باشد یعنی

$$\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x dx$$

و از آنجا

$$\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad , n \neq 0$$

این معادله دارای جواب عمومی زیر است

$$G_n = a_n e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}$$

بنابراین

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}\} \sin n\pi x$$

با توجه به شرط $v(x,0) = 1 - \cos\pi x - 2x$ می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}) \sin n\pi x = 1 - \cos\pi x - 2x$$

و از آنجا

$$a_n = \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^n + \frac{2}{\pi}[\frac{2(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n((-1)^{n+1}-1)}{n^2-1}] ; n \neq 1$$

$$a_1 = \frac{-2}{9\pi^3} + 2\int_0^1 (1 - \cos\pi x - 2x) \sin \pi x \, dx = \frac{-2}{9\pi^3}$$

بنابراین

$$u(x,t) = 2x - \frac{2}{9\pi^3} e^{-9\pi^2 t} + \frac{2}{9\pi^3} \sin\pi x +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{ \frac{2}{9n^3\pi^3} (-1)^n + \frac{2}{\pi} [\frac{3(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n((-1)^{n+1}-1)}{n^2-1}] e^{-9n^2\pi^2 t} +$$

$$\frac{2}{9n^3\pi^3} (-1)^{n+1} \} \sin n\pi x$$

۲.۷. تمرینات

۱ ـ درجه حرارت در یک میله به طول ده سانتیمتر را بیابید در صورتی که درجه حرارت دو سر میله صفر بوده و درجه حرارت اولیه میله برابر یکی از توابع زیر باشد ($c^2 = 1.752$).

$a.\ u(x,0) = \sin 0.1\pi x$

جواب. $u = \sin 0.1\pi x e^{-1.752\pi^2 t/100}$

$$b.\ f(x) = \begin{cases} x\ ; & 0<x<5 \\ 10-x\ ; & 5<x<10 \end{cases}$$

جواب. $u = \frac{40}{\pi^2} (\sin 0/1\pi x e^{-0.01752\pi^2 t} - 1/9 \sin 0.3\pi x e^{-0.01752(3\pi)^2 t}$

$$c.\ f(x) = \begin{cases} x\ ; & 0<x<25 \\ 50-x\ ; & 25<x<50 \end{cases}$$

۲ـ هر یک از مسائل زیر را حل کنید.

$a.\ u_t - 4u_{xx} = xt \quad ; \quad 0<x<1\ , \quad t>0$

$u(x,0) = \sin\pi x \quad ; \quad 0 \le x \le 1\ ,$

$u(0,t) = t \quad ; u(1,t) = t^2\ , \quad t \ge 0$

$b.\ u_t - u_{xx} = 2x^2 t \quad ; \quad 0<x<1\ , \quad t>0$

$u(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{2} \quad ; \quad 0 \le x \le 1\ ,$

$u(0,t) = 1\ , \quad u_x(1,t) = \frac{3\pi}{2} \ ; \quad t \ge 0$

۸.۲ مسئله انتقال حرارت برای یک میله با طول نامتناهی

چنانچه در بخش قبل دیدیم مثالی فیزیکی برای مسئله (۵) اندازه‌گیری درجه حرارت در یک میله است. بنابر این درجه حرارت در یک میله در لحظه t و در نقطه‌ای به طول x از معادله ($5a$) به دست می‌آید و چنانچه در بخش قبل دیدیم برای حل این معادله نیاز به سه شرط اولیه و کرانه‌ای داریم و نظر به اینکه میله با طولی نامتناهی است و در این بحث ما آن را از دو طرف نامتناهی می‌گیریم. بنابراین از شرایط ($5c$) و ($5d$) نمی‌توان استفاده کرد و مسئله (۵) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$u_t\text{-}c^2u_{xx} \qquad ; \quad -\infty<x<\infty \qquad (7a)$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad ; \quad -\infty<x<\infty \qquad (7b)$$

که در آن $u(x,0)=f(x)$ درجه حرارت اولیه در میله است. بدیهی است که با حل مسئله (۷) نمی‌توان به جوابی یکتا رسید ولی با توجه به اینکه مسئله انتقال حرارت در میله مطرح است چنانچه خواهیم دید در حل این مسئله می‌توان از خواص انتقال حرارت در اجسام استفاده کرد و برای مسئله (۷) به جوابی یکتا رسید برای این منظور به حل مسئله به روش ضربی $u(x,t)=F(x)\ G(t)$ می‌پردازیم. با جایگزین کردن آن در ($7a$) می‌یابیم

$$\frac{F''}{F}=\frac{G}{c^2G}=k$$

و یا

$$G\text{-}kc^2G=0\ ,\ F''\text{-}kF=0$$

حال چنانچه $k=0$ آنگاه می‌یابیم $G(t)=1$ و از آنجا $u(x,t)=F(x)$ که مستقل از t است. درجه حرارت در یک میله با یک حرارت اولیه نمی‌تواند مستقل از زمان باشد، بنابراین به ازای $k=0$ جوابی حاصل نمی‌شود حال فرض می‌کنیم $k=\mu^2>0$ آنگاه می‌یابیم

$G(t)=e^{c^2\mu^2t}$ و بنابراین $u=F(x)e^{c^2\mu^2t}$

که نشانگر آن است که با افزایش زمان درجه حرارت بسیار بزرگ می‌شود که با توجه به

خواص انتقال حرارت در اجسام غیر ممکن است. بالاخره فرض می‌کنیم $k=-w^2<0$ و با این فرض می‌یابیم

$$\dot{G}+c^2w^2G=0 \quad , \quad F''+w^2F=0$$

که به ترتیب دارای جوابهائی به صورت زیر هستند

$$G(t)=e^{-c^2w^2t} \quad و \quad F(x)=a(w)\cos wx+b(w)\sin wx$$

بنابراین

$$u(x,t,w)=[a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]e^{-c^2w^2t}$$

جوابی برای معادله (۷a) است که به سه پارامتر $a(w)$ و $b(w)$ و w وابسته است. برای تعیین این مقادیر چنین قرار می‌دهیم

$$u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t,w)dw$$

$u(x,t)$ نیز جوابی برای معادله (۷a) است. درستی این ادعا را می‌توان با جایگزین کردن $u(x,t)$ در معادله (۷a) ثابت کرد. با توجه به شرط $u(x,0)=f(x)$ می‌یابیم

$$u(x,0)=\int_0^\infty [a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]\, dw = f(x)$$

بنابراین ضرایب $a(w)$ و $b(w)$ را می‌توان ضرایب انتگرال فوریه تابع $f(x)$ گرفت. در نتیجه مسئله (۷) دارای جوابی به صورت زیر است

$$u(x,t)=\int_0^\infty (a(w)\cos wx+b(w)\sin wx)\, e^{-c^2w^2t}dw$$

که در آن

$$\begin{pmatrix} a(w) \\ b(w) \end{pmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{pmatrix} \cos wx \\ \sin wx \end{pmatrix} dx$$

مثال ۵. درجه حرارت در یک میله نامتناهی را بیابید در صورتی که

$$u(x,\circ)=\begin{cases} x\ ; & |x|\leq 1 \\ \circ\ ; & |x|>1 \end{cases}$$

حل . داریم $a(w)=\circ$ و

$$b(w)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{1} x\sin wx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{w}\cos wx+\frac{1}{w^2}\sin wx\right]_{\circ}^{1}=\frac{2}{\pi w}\left(\frac{\sin w}{w}-\cos w\right)$$

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{w}\left(\frac{\sin w}{w}+\cos w\right)\sin wx\, e^{-c^2w^2t}\,dw$$

برای پیدا کردن مقدار درجه حرارت دریک میله با طول متناهی که درجه حرارت دو سر آن در دست نباشد می‌توان از جواب حاصل برای مسئله (۷) استفاده کرد. برای این منظور درجه حرارت برای میله فرضی از lتا بینهایت و از ∞ ـ تا صفر را برابر صفر می‌گیریم. جوابی که با این فرض به دست می‌آید جوابی دقیق برای میله با طول نامتناهی و جوابی تقریبی برای میله به طول lاست.

مسئله انتقال حرارت دریک میله نیمه متناهی که در فاصله صفر تا بینهایت قرار دارد و دارای درجه حرارت اولیه $u(x,\circ)=f(x)\ ;\ \circ\leq x<\infty$ را می‌توان با در نظر گرفتن گسترش فردی از $f(x)$حل نمود.

مسائل یک بعدی را در اینجا رها می‌کنیم و به سراغ مسائلی با بعدهای بالاتر می‌رویم چنانچه خواهیم دید جواب چنین مسائلی به سادگی از تعمیم راه حلهائی که برای مسائل یک بعدی ارائه شد به دست می‌آیند بررسی چنین مسائلی را بعد از ارائه چند تمرین در مورد مسئله انتقال حرارت در یک میله نامتناهی با حل مسئله موج در فضای دوبعدی آغاز می‌کنیم.

۹.۲. تمرینات

۱ـ مسئله گرما در یک میله نامتناهی را حل کنید در صورتی که گرمای اولیه در میله برابر یکی از توابع زیر باشد

$$a.\ f(x)=\begin{cases} x & ; 0<x<2 \\ 0 & ; x>2 \end{cases},\ f(-x)=f(x)$$

$$b.\ f(x)=\begin{cases} 2x & ; \quad 0<x<1 \\ 2x^2 & ; \quad 1<x<2 \\ 0 & ; \quad x>2 \end{cases} \qquad f(-x)=-f(x)$$

۲ـ هر یک از مسائل زیر را حل کنید

$$a.\ u_t-u_{xx}=\begin{cases} 2t & ; 0<x<\pi \\ 1 & ; x>\pi \end{cases}$$

$$u(x,0)=\begin{cases} 2x & ; 0<x<1 \\ -1 & ; x>1 \end{cases}$$

$$u(0,t)=t-1 \quad ; t\geq 0$$

$$b.\ u_t-4u_{xx}=\begin{cases} 2t & ; \quad |x|<\pi \\ 0 & ; \quad |x|>\pi \end{cases}$$

$$u(x,0)=\begin{cases} |x| & ; \quad |x|<1 \\ 0 & ; \quad |x|>1 \end{cases}$$

۲.۱۰. حل مسئله موج در فضای دوبعدی

در این بخش به چگونگی حل مسئله با مقادیر اولیه و کرانه‌ای زیر می‌پردازیم

$$u_{tt}=c^{2}(u_{xx}+u_{yy}) \quad ; \; 0<x<a \; , \; 0<y<b \; , \; t>0 \qquad (8a)$$

$$u(x,y,0)=f(x,y) \quad ; \; 0\leq x\leq a \; , \; 0\leq y\leq b \qquad (8b)$$

$$u_t=(x,y,0)=g(x,y) \; ; \; 0\leq x\leq a \; , \; 0\leq y\leq b \qquad (8c)$$

$$u=(x,0,t)=0 \quad ; \; 0\leq x\leq a \; , \; t\geq 0 \qquad (8d)$$

$$u=(x,b,t)=0 \quad ; \; 0\leq x\leq a \; , \; t\geq 0 \qquad (8e)$$

$$u=(0,y,t)=0 \quad ; \; 0\leq y\leq b \; , \; t\geq 0 \qquad (8f)$$

$$u=(a,y,t)=0 \quad ; \; 0\leq y\leq b \; , \; t\geq 0 \qquad (8g)$$

این مسئله به مسئله موج در فضای دو بعدی موسوم است. مثال فیزیکی برای این مسئله ارتعاش یک غشاء مستطیلی با ضلعهای a و b است. برای حل این مسئله به روش ضربی عمل می‌کنیم. نخست به جستجوی جوابی برای مسئله به صورت

$$u(x,y,t)=F(x,y)G(t)$$

می‌پردازیم. با درج تابع فوق در $(8a)$ می‌یابیم

$$F\ddot{G}=c^{2}(F_{xx}+F_{yy})G$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر $c^{2}FG$ داریم

$$\frac{\ddot{G}}{c^{2}\,G}=\frac{1}{F}\,(F_{xx}+F_{yy})=k_1$$

که در آن k_1 عددی ثابت است و از آنجا به معادلات زیر می‌رسیم

$$F_{xx}+F_{yy}-k_1F=0 \quad , \quad \ddot{G}-k_1\,c^{2}G=0$$

برای حل معادله اول که خود نیز یک معادله با مشتق جزئی است به جستجوی جوابی به صورت $F(x,y)=H(x)Q\,(y)$ می‌پردازیم. با جایگزینی آن در معادله می‌یابیم

$$QH''+HQ''-k_1HQ=0$$

و یا

$$\frac{H''}{H}=\frac{1}{Q}(k_1Q-Q'')=k_2$$

و از آنجا به معادلات دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$H''-k_2H=0$$

$$Q''-(k_1-k_2)Q=0$$

از روی شرایط (۸d) تا (۸g) و $u(x,y,t)=H(x)Q(y)G(t)$ به شرایط زیر برای H و Q می‌رسیم

$$Q(b)=0 \quad , \quad Q(0)=0 \quad \text{و} \quad H(a)=0 \quad , \quad H(0)=0$$

همانند آنچه در بخش اول دیدیم مسئله

$$H''-k_2H=0 \quad H(0)=0 \quad H(a)=0$$

وقتی دارای جواب است که $k_2=-\frac{m^2\pi^2}{a^2};m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ و جواب این مسئله عبارت است

از $H_m(x)=\sin\frac{m\pi}{a}x$ و همینطور مسئله

$$Q''-(k_1-k_2)Q=0\ ,\ Q(0)=0\ ,\ Q(b)=0$$

به ازای $k_1-k_2=-\frac{n^2\pi^2}{b^2};n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ دارای جواب $Q_n(y)=\sin\frac{n\pi}{b}y$ است. برای مشخص کردن G به حل معادله $\ddot{G}-k_1c^2G=0$ می‌پردازیم. نخست توجه می‌کنیم که

$$-k_1=-k_2+\frac{n^2\pi^2}{b^2}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$$

با فرض

$$\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}$$

داریم $\ddot{G}+\lambda^2_{mn}G=0$ که دارای جواب عمومی $G_{mn}(t)=a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t$ است از اینرو

$$u_{mn}(x,y,t)=(a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y$$

هم اکنون جوابی برای مسئله (۸) به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ (a_{mn}\cos\lambda_{mn}t\ +b_{mn}\ \sin\lambda_{mn}t)\ \sin\frac{m\pi}{a}x\ \ \sin\frac{n\pi}{b}y$$

a_{mn} و b_{mn} را طوری می‌یابیم که u در شرایط (۸b) و (۸c) صدق کند. با توجه به (۸b) داریم

$$u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{m=1}^{\infty}\ a_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\ \ \sin\frac{n\pi}{b}y=f(x,y)$$

بنابراین a_{mn} را می‌توان ضریب سینوسی تابع f گرفت، یعنی

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\ \ \sin\frac{n\pi}{b}y\ \ dydx$$

از روی (۸c) می‌یابیم

$$u_t(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ b_{mn}\,\lambda_{mn}\ \ \sin\frac{m\pi}{a}x\ \ \sin\frac{n\pi}{b}y=g(x,y)$$

و از آنجا

$$b_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\ \ \sin\frac{n\pi}{b}y\ \ dydx$$

مثال ۶. مسئله موج را به ازای $c=1$, $a=b=\pi$ سرعت اولیه صفر و ارتعاش اولیه $f(x,y)\ =\ xy\ \sin x\ \sin y$ حل کنید. به علت عدم وجود سرعت اولیه می‌یابیم $b_{mn}=0$ و

$$a_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f\sin m\,x\ \sin ny\ dx\ dy=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}x\ \sin x\ \sin mx\ dx\int_0^{\pi}y\sin y\ \sin ny\ dy$$

$$\int_0^{\pi}x\ \sin x\ \sin mx\ dx=\begin{cases}\dfrac{2m((-1)^{m+1}-1)}{(m^2-1)^2}\ ;\ m\neq 1\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{4}\ ;\ m=1\end{cases}$$

می‌یابیم

$$a_{mn} = \begin{cases} \dfrac{16}{\pi^2}\ \dfrac{mn((-1)^{m+1}-1)((-1)^{n+1}-1)}{(m^2-1)^2(n^2-1)^2}\ ; m\neq 1; n\neq 1 \\ \dfrac{\pi m((-1)^{m+1}-1)}{(m^2-1)^2}\ ; m\neq 1; n=1\ ;\ \lambda_{mn}=\sqrt{(m^2+n^2)} \\ \\ \dfrac{\pi n((-1)^{n+1}-1)}{(n^2-1)^2}\ ; m=1\ ;\ n\neq 1 \\ \dfrac{\pi^2}{4}\ ; m=1\ ,\ n=1 \end{cases}$$

با جایگزین کردن a_{mn} و b_{mn} در $u(x,y,t)$ جواب مسئله حاصل می‌شود. چنانچه در این بخش مشاهده کردیم جواب مسئله موج دو بعدی را به سادگی می‌توان از راه حل ارائه شده برای مسئله موج یک بعدی به دست آورد. همانند آن می‌توان به حل مسئله گرما دوبعدی و مسائل گرما و موج سه بعدی پرداخت، بنابراین بحث آینده را به معادلات لاپلاس و پواسن اختصاص می‌دهیم. چنانچه خواهیم دید در بسیاری موارد مسائل مربوط به آنها را نیز می‌توان با توجه به روشهائی که آموخته‌ایم به سادگی حل نمود.

۱۱.۲. تمرینات

۱ ـ ارتعاش یک صفحه مربع شکل $a=b=1$ و $c=1$ را طوری بیابید که سرعت اولیه ارتعاش صفربوده و لبه‌های ناحیه مربع شکل بدون ارتعاش باشد و انحراف اولیه برابر یکی از توابع زیر باشد

$a)\ f(x,y)=\sin\pi x\,\sin 2\pi y\ ;\ u=\cos\pi\sqrt{5}\,t\sin\pi x\sin 2\pi y$ جواب.

$b)\ f(x,y)=0/01xy\,(1-x)(1-y)$

جواب $u=\dfrac{0/64}{\pi^6}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{m^3n^3}\cos(\pi t\sqrt{(m^2+n^2)})\sin m\pi x\sin n\pi y$

که در آن m و n اعداد طبیعی فرد هستند.

۱۲.۲. حل معادلات لاپلاس و پواسن

نیرویهای جاذبه و دافعه بین بارهای الکتریکی و اجسام که به ترتیب از قوانین کولن و نیوتن پیروی می‌کنند دارای تابع پتانسیل می‌باشند و آن تابع پتانسیل خود نیز جواب معادله لاپلاس است. یادآوری می‌کنیم که به ازای هر تابع برداری F چنانچه تابع عددی f ای موجود باشد که $\nabla f=F$ آنگاه گوئیم تابع عددی f تابع پتانسیل تابع برداری F است.

مثلاً چنانچه $F= kee' \frac{r}{r^3}$ نیروی جاذبه بین دوبار الکتریکی e و e' باشد که به فاصله r از یکدیگر قرار دارند آنگاه فی‌البداهه می‌توان نتیجه گرفت $F= -kee' \ \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$ که نشان می‌دهد F دارای تابع پتانسیل است و تابع پتانسیل $\frac{1}{r}$ جواب معادله لاپلاس است. توابع پتانسیل منتج از نیروهای الکتریکی را پتانسیل الکترو استاتیکی نیز می‌نامند چنین تابعی در نقاطی که بار وجود ندارد جواب معادله لاپلاس است. بنابراین با حل معادله لاپلاس در یک میدان به پتانسیل موجود در آن میدان می‌رسیم و باگرادیان گیری از آن مقدار نیروی موجود در آن میدان را می‌یابیم. معادله لاپلاس علاوه برکاربرد در مسائل میدانهای نیروهای جاذبه و دافعه دارای کاربردهای متنوع دیگری از جمله در حل مسائل انتقال حرارت در حالت پایاکه تغییرات درجه حرارت به زمان وابسته نیست و همچنین جریان سیالات در مسائل هیدرودینامیکی است. برای روشن شدن مطلب به ذکر چند مثال می‌پردازیم .

مثال ۷. پتانسیل میدان بین دو صفحه هادی موازی که عمود بر محور x در نقاطی با طولهای ۵- و ۵ هستند بیابید درصورتی که اختلاف پتانسیل‌های موجود روی این صفحات به ترتیب ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشند.

حل. به علت وجود صفحات همپتانسیل معادله لاپلاس به صورت $u_{xx}=0$ در می‌آید که

دارای جواب $u(x)=ax+b$ است. با توجه به شرایط $u(۵)=۲۲۰$, $u(-۵)=۱۱۰$ می‌یابیم $a=۱۱$ و $b=۱۶۵$ و بنابراین $u(x)=۱۱x+۱۶۵$ نیروی الکتریکی میدان برابر $F=۱۱i$ است که بر صفحات همپتانسیل عمود است.

مثال ۸. پتانسیل موجود بین دو استوانه هم محور به شعاعهای ۵ و ۱۰ را بیابید. در صورتی که اختلاف پتانسیل‌های موجود بر این استوانه‌ها به ترتیب ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشد.

حل. معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای به صورت $u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta}+u_{zz}=۰$ است که با توجه به وجود استوانه‌های همپتانسیل کافی است پتانسیل مورد نظر را از حل مسئله زیر به دست آوریم

$$u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r=۰;\quad u(۵)=۱۱۰\ ,\ u(۱۰)=۲۲۰$$

با انتگرالگیری از $\frac{u_{rr}}{u_r}=-\frac{۱}{r}$ می‌یابیم $Ln\frac{u_r}{a}=Ln\frac{۱}{r}$ و یا $u_r=\frac{a}{r}$ و با انتگرالگیری مجدد داریم

$$u=aLnr+b$$

و با توجه به شرایط مرزی به دست می‌آوریم

$$u=\frac{۱۱۰}{Ln۲}Lnr+۱۱۰(۱-\frac{Ln۵}{Ln۲})$$

مثال ۹. چنانچه توزیع حرارت در فضای بین دوکره به شعاعهای ۵ و ۱۰ در حالت پایا بوده وکره‌ها به ترتیب در درجه حرارت ثابت ۱۰ و ۵ باشد تابع درجه حرارت را در داخل دو کره بیابید.

معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^۲\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{۱}{sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi})+\frac{۱}{sin^۲\phi}\frac{\partial^۲u}{\partial\theta^۲}=۰$$

است که به علت وجود کره‌های همدما مقدار درجه حرارت در فضای بین دو کره را می‌توان

از حل مسئله زیر به دست آورد

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=۰\ ;\quad u(۵)=۱۰\quad ,\quad u(۱۰)=۵$$

با توجه به معادله مسئله می‌یابیم

$$u=-\frac{a}{r}+b \qquad \text{ویا} \quad r^{۲}\frac{\partial u}{\partial r}=a$$

با استفاده از شرایط کرانه‌ای مسئله نتیجه می‌شود

$$u=\frac{۵۰}{r}$$

هم اکنون به حل مسئله لاپلاس یا پواسن در فضای دو بعدی می‌پردازیم. چگونگی حل این گونه مسائل را با حل یک مسئله روشن می‌کنیم.

مثال ۱۰. مطلوب است حل مسائل زیر

$$u_{xx}+u_{yy}=x+۲y \quad ; \quad ۰<x<\pi \quad , \quad ۰<y<\pi$$

$$u(x,۰)=x \quad ; \quad ۰\le x\le\pi$$

$$u(x,\pi)=۲ \quad ; \quad ۰\le x\le\pi$$

$$u(۰,y)=y \quad ; \quad ۰\le y\le\pi$$

$$u(\pi,y)=cosy \quad ; \quad ۰\le y\le\pi$$

حل. قرار می‌دهیم $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ و w را چنان می‌یابیم که $v(x,۰)=۰$ و $v(x,\pi)=۰,$ برای این منظور فرض می‌کنیم $w(x,y)=ay+b$ و با توجه به شرایط مسئله و نیازهای فوق می‌یابیم $b=x$, $a=\frac{۲-x}{\pi}$ و از آنجا داریم

$$u(x,y)=v(x,y)+\frac{۲-x}{\pi}y+x \quad \text{و} \quad w(x,y)=\frac{۲-x}{\pi}y+x$$

با توجه به $u(۰,y)=y$ و $u(\pi,y)=cosy$ به ترتیب می‌یابیم

$$v(\pi,y)=cosy-\frac{۲-\pi}{\pi}y-\pi \qquad \text{و} \qquad v(۰,y)=\left(۱-\frac{۲}{\pi}\right)y$$

بنابراین مسئله زیر را برای v داریم

$$v_{xx}+v_{yy}=x+۲y \quad ; \quad v(x,۰)=۰$$

$$v(x,\pi)=0\ ,\ v(0,y)=(1-\frac{2}{\pi})y\quad ,\ v(\pi,y)=\cos y-\frac{2-\pi}{\pi}y-\pi$$

با فرض $v(x,y)=F(x)\,G(y)$ و درج آن در معادله $v_{xx}+v_{yy}=0$ می‌یابیم

$$\frac{F''}{F}=-\frac{G''}{G}=k$$

و از آنجا به دو معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم ،

$$G''+kG=0 \quad \text{و} \quad F''-kF=0$$

با توجه به شرایط اول و دوم مسئله مربوط به v می‌یابیم $G(0)=0$ و $G(\pi)=0$ و از آنجا داریم $k=n^2$ و $G_n(y)=\sin ny$

هم اکنون برای حل مسئله مربوط به v به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)\sin ny$$

می‌پردازیم. با درج آن در معادله می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}(F''_n-n^2F_n)\sin ny=x+2y$$

و از آنجا F_n را طوری می‌یابیم که

$$F''_n-n^2F_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2y)\sin ny\,dy=a_nx+b_n$$

که در آن

$$a_n=-\frac{2}{n\pi}[(-1)^n-1]\ ,\ b_n=-\frac{4}{n}(-1)^{n+1}$$

و جواب عمومی معادله فوق عبارت است از

$$F_n(x)=-\frac{a_n}{n^2}x-\frac{b_n}{n^2}+A_ne^{nx}+B_ne^{-nx}$$

و از آنجا

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{a_n}{n^2}x-\frac{b_n}{n^2}+A_ne^{nx}+B_ne^{-nx})\sin ny$$

با توجه به شرایط سوم و چهارم مربوط به مسئله v به ترتیب می‌یابیم

$$v(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{b_n}{n^2}+A_n+B_n]\sin ny=(1-\frac{2}{\pi})y$$

$$V(\pi,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{b_n}{n^2}-\frac{a_n}{n^2}\pi+A_ne^{n\pi}+B_ne^{-n\pi}]\sin ny=\cos y-\frac{2-x}{\pi}y-\pi$$

و از آنجا

$$A_n+B_n=\frac{b_n}{n^2}+\frac{2}{\pi}(1-\frac{2}{\pi})\int_0^{\pi} y\sin ny\,dy$$

$$A_ne^{n\pi}+B_ne^{-n\pi}=\frac{b_n}{n^2}+\frac{a_n}{n^2}\pi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos y-\frac{2-\pi}{\pi}y-\pi)\sin ny\,dy$$

با حل این دو معادله A_n و B_n را محاسبه می‌کنیم و با توجه به آن $v(x,y)$ مشخص می‌شود و با درج آن در $u(x,y)=v(x,y)+\frac{2-x}{\pi}y+x$ جواب مسئله مورد نظر حاصل می‌شود

در بخش آینده به حل مسئله لاپلاس در مختصات کروی و حل مسئله موج برای یک دایره می‌پردازیم. برای حل چنین مسائلی نیاز به شناخت جوابهای معادلات لژاندار و بسل داریم. در ذیل به ارائه این جوابها و بررسی برخی از خواص آنها تاآنجائی که نیازهای آتی ما را برطرف کند می‌پردازیم. علاقمندان برای آشنائی بیشتر با جوابهای معادلات لژندار و بسل می‌توانند به کتب معادلات دیفرانسیل مراجعه کنند. هر معادله به صورت

$$(1-x^2)G''-2xG'+n(n+1)G=0$$

که در آن n عددی طبیعی است به معادله لژاندر موسوم است. یکی از جوابهای این معادله که به چند جمله‌ای لژاندر موسوم است و برابر است با

$$p_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^2-\frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!}x^{n-2}+...=$$

$$\sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

که در آن $M=\frac{n}{2}$ یا $M=\frac{1}{2}(n-1)$ به ترتیب وقتی که n زوج یا فرد باشد. با توجه به آن می‌یابیم

$$p_0(x)=1 \quad , p_1(x)=x \quad , p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \quad , p_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \, ,$$
$$p_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \, , p_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

توجه کنید که دنباله توابع لژاندر $\{P_n(x)\}_{n=1}$ در فاصله $-1\leq x\leq 1$ متعامدند و داریم :

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)dx= \begin{cases} 0 & ; n\neq m \\ \frac{2}{2n+1} & ; n=m \end{cases}$$

هر تابع به صورت $y=f(x); \ -1\leq x\leq 1$ و را می‌توان به صورت یک سری نامتناهی از چند جمله‌ای‌های لژاندر نوشت در واقع با قرار دادن

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ p_n(x)$$

و ضرب طرفین آن در $p_m(x)$ و انتگرالگیری از آن در فاصله ۱- تا ۱ می‌یابیم

$$a_m=\frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)p_m(x)dx$$

و با تبدیل m به n داریم

$$a_n=\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)p_n(x)dx$$

هم اکنون به بررسی معادله بسل می‌پردازیم. هر معادله به صورت

$$x^2w''+xw'+(x^2-\nu^2)w=0$$

که در آن ν عددی حقیقی است به معادله بسل از مرتبه νام موسوم است. به ازای هر عدد غیر صحیح ν این معادله دارای دو جواب مستقل خطی به صورت زیر است

$$J_{-\nu}(x)=x^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu}\, m!\,\Gamma(m-\nu+1)}$$

$$J_{\nu}(x)=x^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}\, m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

که در آن $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1}\,dt$ به تابع گاما موسوم است در ضمن

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

و به ازای هر عدد صحیح $\alpha=n$ داریم

$$\Gamma(n+1)=n!$$

چنانچه ν عددی صحیح باشد $\nu=n$ آنگاه دو جواب $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ وابسته خطی بوده و داریم

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

توابع $J_0(x)$ و $J_1(x)$ در بحثهای آینده از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و مقادیر آنها عبارت‌اند از

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\dots$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3(1!)(2!)}+\frac{x^5}{2^5(2!)(3!)}-\frac{x^7}{2^7(3!)(4!)}+\dots$$

در حالت $\nu=n$ جواب دوم معادله بسل دارای یک جمله لگاریتمی است و صفر یک نقطه تکین آن است.

معادله $J_{\circ}(x)=\circ$ دارای بینهایت جواب بوده و پنج جواب اول بزرگتر از صفر آن عبارت‌اند از

$\alpha_{1}=۲/۴۰۴۸$, $\alpha_{2}=۵/۵۲۰۱$, $\alpha_{3}=۸/۶۵۳۷$, $\alpha_{4}=۱۱/۷۹۱۵$, $\alpha_{5}=۱۴/۹۳۰۴$

چنانچه $\{\alpha_n\}_{n=1}$ یک دنباله دلخواه از جوابهای معادله $J_{\circ}(x)=\circ$ باشد آنگاه دنباله توابع $\{J_{\circ}(\alpha_n x)\}_{n=1}$ در فاصله صفر تا هر عدد ثابت R نسبت به تابع وزن x متعامدند یعنی

$$\int_{\circ}^{R} xJ_{\circ}(\alpha_n x)\, J_{\circ}(\alpha_m x)dx=\begin{cases}\circ & ; n\neq m\\ \frac{R^{2}}{2}J^{2}_{1}(\alpha_n) & ; n=m\end{cases}$$

هر تابع $\circ<x<R$ و $y=f(x)$ را می‌توان برحسب یک سری از توابع بسل مرتبه صفرم نوشت یعنی ضرایب ثابت a_n را طوری یافت که

$$f(x)=\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n J_{\circ}(\alpha_n x)$$

در واقع با ضرب طرفین آن در $xJ_{\circ}(\alpha_m x)$ و انتگرالگیری در فاصله صفر تا R می‌یابیم

$$a_m=\frac{2}{R^{2}J^{2}_{1}(\alpha_m)}\int_{\circ}^{R} x\, f(x)\, J_{\circ}(\alpha_m x)dx$$

و با جایگزین کردن n به جای m در تساوی فوق ضریب a_n محاسبه می‌شود.

۱۳.۲. حل مسئله لاپلاس برای یک کره

در این بخش به چگونگی حل مسئله لاپلاس برای یک کره به شعاع R می‌پردازیم و برای این منظور فرض می‌کنیم مقدار پتانسیل روی کره مشخص بوده و مستقل از زاویه θ باشد یعنی پتانسیل بر سطح کره به صورت تابعی از ϕ باشد. با توجه به این فرض می‌خواهیم پتانسیل را در نقاط داخل و خارج کره بیابیم برای این منظور کافی است به حل مسئله زیر بپردازیم

$$\nabla^{2}u=\circ \quad , u(R,\circ,\phi)=f(\phi)$$

که در آن $f(\phi)$ تابعی مفروض و جواب مسأله بر سطح کره است. چنین مسئله‌ای در واقع یک مسئله داخلی است یعنی با حل آن تنها پتانسیلهای موجود در داخل کره به دست می‌آید. برای مشخص کردن پتانسیل موجود در خارج کره نیاز به شرط ثالثی به صورت زیر داریم

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta,\phi)=0$$

یعنی برای حل مسئله خارجی و پیدا کردن پتانسیلهای موجود در خارج کره، پتانسیل در بینهایت را باید برابر صفر اختیار کنیم، در هر صورت به چگونگی حل مسئله می‌پردازیم. نخست توجه می‌کنیم که معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت زیر است

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

و در این مسئله به علت عدم وابستگی u به θ داریم

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)=0$$

برای حل مسئله به جستجوی جوابی به صورت $u(r,\theta)=F(r)G(\phi)$ می‌پردازیم با جایگزین کردن آن در معادله فوق می‌یابیم

$$G\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)+\frac{F}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dG}{d\phi}\right)=0$$

و یا

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=-\frac{1}{G\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dG}{d\phi}\right)=k$$

و از آنجا به دو معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dF}{dr}\right)-kF=0\\[2mm]\dfrac{1}{\sin\phi}\dfrac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\dfrac{dG}{d\phi}\right)+kG=0\end{cases}$$

معادله اول یک معادله اویلر است. با تغییر متغیر $w=\cos\phi$ معادله دوم به معادله لژاندر تبدیل می‌شود در واقع با توجه به این فرض و توجه به

$$\sin^2\phi=1-w^2\ ,\ \frac{d}{d\phi}=\frac{d}{dw}\cdot\frac{dw}{d\phi}=-\sin\phi\,\frac{d}{dw}$$

معادله فوق به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d}{dw}\left[(1-w^2)\frac{dG}{dw}\right]+kG=0$$

حال چنانچه چنین اختیار کنیم $k=n(n+1)$ که در آن n عددی طبیعی است آنگاه معادله به صورت

$$(1-w^2)G''_n-2wG'_n+n(n+1)G_n=0$$

در می‌آید. $G_n(w)$ را برابر چند جمله‌ای درجه nام لژاندر می‌گیریم $\qquad G_n(w)=p_n(w)$

هم اکنون با درج $k=n(n+1)$ در معادله مربوط به F به معادله اویلر می‌رسیم

$$r^2F''+2rF'-n(n+1)F=0$$

این معادله دارای جواب عمومی به صورت

$$F_n(r)=a_n r^n+\frac{b_n}{r^{n+1}}$$

است و جواب مسئله عبارت است از

$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^n+\frac{b_n}{r^{n+1}}\right)p_n(\cos\phi)$$

ولی به جهت آنکه پتانسیل در مرکز کره در حالت کلی نمی‌تواند بینهایت باشد بنابراین برای نقاط داخل کره لازم است فرض کنیم $b_n=0$ و از آنجا

$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n\ p_n(\cos\phi)$$

با توجه به شرط $u(R,\phi)=f(\phi)$ می‌یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n\ p_n(\cos\phi)=f(\phi)$$

چنانچه در $f(\phi)$ قرار دهیم $\phi=\cos^{-1}w$ می‌یابیم

$$f(\phi)=f(\cos^{-1}w)=g(w)$$

و از آنجا

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n p_n(w) = g(w)$$

بنابراین a_nR^n را برابر ضریب تابع $g(w)$ در بسط این تابع برحسب چند جمله‌ایهای لژاندر می‌گیریم و با توجه به آن می‌یابیم

$$a_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_{-1}^{1} g(w)p_n(w)dw$$

برای ناحیه خارج کره به جهت آنکه پتانسیل در بینهایت صفر است، داریم $a_n=0$ و از آنجا

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} p_n(\cos\phi)$$

با توجه به شرط $u(R,\phi)=f(\phi)$ می‌یابیم

$$u(R,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} p_n(\cos\phi) = f(\phi)$$

همانند آنچه در فوق برای داخل کره گفته شد کافی است b_n را چنین اختیار کنیم

$$b_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_{-1}^{1} g(w)p_n(w)dw$$

۱۴.۲. حل مسئله ارتعاش یک ناحیه مستدیر

ناحیه‌ای دایره‌ای شکل به شعاع R را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ارتعاش روی کرانهٔ ناحیه برابر صفر بوده، ارتعاش اولیه و سرعت اولیه ارتعاش آن مفروض باشند و ارتعاش در ناحیه تنها به طور شعاعی تغییر کند. چنین مسئله‌ای را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.
معادله چنین مسئله‌ای در مختصات قطبی عبارت است از

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)$$

نظر به اینکه ارتعاش در ناحیه به طور شعاعی تغییر کرده و تغییرات آن به θ وابسته نیست معادله فوق به صورت زیر در می‌آید

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)$$

با توجه به شرایط مسئله داریم

$$u(r,0)=f(r) \quad , \quad u_t(r,0)=g(r) \quad , \quad u(R,t)=0$$

با فرض $u(r,t)=w(r)G(t)$ و جایگزین کردن آن در معادله می‌یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G}=\frac{1}{w}\left(w''+\frac{1}{r}w'\right)=-k^2 \quad \text{و یا} \quad w\ddot{G}=c^2\left(w''+\frac{1}{r}w'\right)G$$

در اینجا عدد ثابت را منفی اختیار کرده‌ایم و چنانچه خواهیم دید با چنین انتخابی مسئله دارای جواب خواهد بود. با توجه به معادلات فوق داریم

$$\ddot{G}+c^2K^2G=0 \quad , \quad w''+\frac{1}{r}w'+k^2w=0$$

در معادله دوم تغییرمتغیر $s=kr$ می‌دهیم تا معادله به معادله بسل مرتبه صفرم بدل شود. داریم

$$w'=\frac{dw}{dr}=\frac{dw}{ds}\frac{ds}{dr}=k\frac{dw}{ds}$$

و همینطور

$$w''=k^2\frac{d^2w}{ds^2}$$

و از آنجا معادله به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dw}{ds}+w=0$$

که یک معادله بسل از مرتبه صفرم می‌باشد و جواب آن $J_0(s)$ است. بنابراین

$$w(r)=J_0(s)=J_0(kr)$$

با توجه به شرط $u(R,t)=0$ می یابیم

$$J_0(kR)=0 \quad \text{و یا} \quad w(R)=0$$

و از آنجا لازم است که k را طوری انتخاب کنیم که kR برابر ریشه‌های J_0 باشد یعنی $k=\frac{\alpha_n}{R}$ که در آن $n=1,2,..$; α_nها ریشه‌های J_0 هستند با توجه به آن می‌یابیم

$$w_n(r)=J_\circ\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)$$

با درج $k=\frac{\alpha_n}{R}$ در معادله مربوط به G می‌یابیم

$$\ddot{G}_n+\lambda_n^{۲}\,G_n=\circ\ ;\ \lambda_n=c\,\frac{\alpha_n}{R}$$

که دارای جواب $G_n(t)=a_n\cos\lambda_n t\ +\ b_n\sin\lambda_n t$ است. بنابراین

$$u(r,t)=\sum_{n=\circ}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t\ +\ b_n\sin\lambda_n t)\,J_\circ\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)$$

برای تعیین a_n و b_n از شرایط اولیه مسئله استفاده می‌کنیم

$$u(r,\circ)=\sum_{n=\circ}^{\infty}a_n\,J_\circ\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)=f(r)$$

و با توجه به آن می‌گیریم

$$a_n=\frac{۲}{R^{۲}J^{۲}_{۱}(\alpha_n)}\int_\circ^R rf(r)J_\circ\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)dr$$

و همچنین

$$u_t(r,\circ)=\sum_{n=\circ}^{\infty}b_n\lambda_n\,J_\circ\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)=g(r)$$

و با توجه به آن می‌یابیم

$$b_n=\frac{۲}{c\alpha_{nRJ_{۱}}^{\ ۲}(\alpha_n)}\int_\circ^R rg(r)J_\circ\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)dr$$

۱۵.۲. حل مسائل با مشتقات جزئی به کمک تبدیلات فوریه و تبدیلات لاپلاس

به کمک تبدیلات فوریه و لاپلاس نیز می‌توان به حل مسائل با مشتقات جزئی پرداخت. در فصل اول با تبدیلات فوریه نامتناهی آشنا شدیم و در اینجا بعد از پرداختن به تعریف تبدیل فوریه متناهی و چند قضیه در مورد این تبدیلات به حل چند مسئله از مسائل با مشتقات

جزئی به کمک این تبدیلات می‌پردازیم و در پایان با ارائه یک مثال چگونگی حل معادلات با مشتقات جزئی به کمک تبدیل لاپلاس را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم $f(x)$ تابعی پیوسته تکه‌ای در یک فاصله متناهی مثلاً بر فاصله $[0,\pi]$ باشد. آنگاه تبدیل سینوسی فوریه متناهی تابع $f(x)$ را که به $F_s\{f\}$ نمایش می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم

$$F_s\{f\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = f_s(n) \; ; \; n = 1, 2, 3...$$

تبدیل سینوسی فوریه متناهی معکوس را نیز چنین تعریف می‌کنیم.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin nx$$

تبدیلات کسینوسی فوریه متناهی و فوریه متناهی معکوس را به ترتیب چنین تعریف می‌کنیم

$$F_c\{f\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = f_c(n) \; ; \; n = 0, 1, 2,...$$

$$f(x) = \frac{1}{2} f_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos nx$$

هرگاه $f'(x)$ و $f''(x)$ پیوسته تکه‌ای بر فاصله $[0,\pi]$ باشند آنگاه می‌توان ثابت کرد که (ثابت کنید)

$$F_s\{f''\} = \frac{2n}{\pi} [f(0) - (-1)^n f(\pi)] - n^2 F_s\{f\}$$

$$F_c\{f''\} = \frac{2}{\pi} [(-1)^n f'(\pi) - f'(0)] - n^2 F_c\{f\}$$

مثال ۱. مسئله زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 1 \quad ; \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,\circ)=\circ \quad ; \quad u_t(x,\circ)=\circ \quad , \quad \circ\le x\le\pi$$

$$u(\circ,t)=\circ \quad ; \quad u(\pi,t)=\circ \quad , \quad t\ge \circ$$

حل. مسئله را در حالت کلی یعنی $G(x,t)$ به جای تابع ثابت ۱ حل می‌کنیم. با تبدیل فوریه‌گیری از معادله نتیجه می‌شود

$$F_s\{u_{tt}\} - c^{۲} F_s\{u_{xx}\}=F_s\{G(x,t)\}$$

$$F_s\{u_{tt}\}= \frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} u_{tt}\sin nx\, dx = \frac{d^{۲}}{dt^{۲}}\left[\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} u(x,t)\sin nx\, dx\right] = \frac{d^{۲}v(n,t)}{dt^{۲}}$$

که در آن $v(n,t)$ تبدیل سینوسی متناهی $u(x,t)$ است. از طرفی داریم

$$F_s\{u_{xx}\}= \frac{۲n}{\pi}\left[u(\circ,t)-(-۱)^n u(\pi,t)\right]-n^{۲}\, v(n,t) = -n^{۲}v(n,t)$$

چنانچه $F_s(n,t)$ تبدیل سینوسی متناهی $G(x,t)$ باشد آنگاه می‌یابیم

$$\frac{d^{۲}v}{dt^{۲}} + n^{۲}c^{۲}v=F_s(n,t)=F_s\{۱\}= \frac{۲}{\pi n}\left[۱+(-۱)^{n+۱}\right]$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است که دارای جوابی به صورت زیر است

$$v(n,t) = A\cos nct + B\sin nct + \frac{۲}{\pi c^{۲}n^{۳}}\left[۱+(-۱)^{n+۱}\right]$$

با به کار بردن شرایط اولیه می‌یابیم

$$F_s\{u(x,\circ)\}= \frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} u(x,\circ)\sin nx\, dx = v(n,\circ)=\circ$$

و

$$F_s\{u_t(x,\circ)\}= \frac{dv(n,\circ)}{dt} =\circ$$

داریم $B=\circ$ و

$$A= \frac{۲}{\pi c^{۲}n^{۳}}\left[(-۱)^n-۱\right]$$

از اینرو

$$v(n,t)=\frac{۲}{\pi c^{۲}n^{۳}}[۱+(-۱)^{n+۱}](۱-\cos nct)$$

بنابراین

$$u(x,t)=\frac{۲}{\pi c^{۲}}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[۱+(-۱)^{n+۱}]}{n^{۳}}(۱-\cos nct)\sin nx$$

مثال ۲. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_t=u_{xx}+u \qquad ;\ ۰<x<l \qquad t>۰,$$

$$u(x,۰)=f(x) \qquad u_x(۰,t)=۰ \qquad u_x(l,t)=۰$$

چنانچه $V(n,t)$ تبدیل کسینوسی $u(x,t)$ باشد با تبدیل کسینوسی گرفتن از طرفین معادله و به کار بردن شرایط کرانه‌ای می‌یابیم

$$V_t+(n^{۲}-۱)V=۰$$

و جواب آن عبارت است از

$$V(n,t)=ce^{-(n^{۲}-۱)t}$$

با به کار بردن شرایط اولیه نتیجه می‌گیریم

$$V(n,t)=V(n,۰)e^{-(n^{۲}-۱)t}$$

که در آن

$$V(n,۰)=\frac{۲}{l}\int_{۰}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

بنابر این جواب عبارت است از

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}V(۰,۰)+\sum_{n=۱}^{\infty}V(n,t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

به ازای $f(x)=x; ۰<x<\pi$ داریم $V(۰,۰)=\pi$ و

$$V(n,۰)=\frac{۲}{\pi n^{۲}}[(-۱)^{n}-۱]\ ;\ n=۱,۲,۳,...$$

و جواب مسئله به ازای $f(x)=x$ عبارت است از

$$u(x,t)=\frac{\pi}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\ \frac{۲}{n^{۲}\pi}\ [(-۱)^{n}-۱]\ e^{-(n^{۲}-۱)t}\cos nx$$

مثال ۳. درجه حرارت در یک میله نامتناهی را بیابید در صورتی که

$u(x,\circ)=f(x)\ ;\qquad -\infty<x<\infty$

و به ازای هر $t\geq\circ$ داریم

$u(x,t)\to\circ$ و $u_x(x,t)\to\circ$ وقتی که $|x|\to\infty$

حل. با تبدیل فوریه نامتناهی گرفتن از معادله می‌یابیم

$$F\{u_t\}=c^{۲}F\{u_{xx}\}=c^{۲}(-w^{۲})F\{u\}=-c^{۲}w^{۲}\bar{u}$$

که در آن $\bar{u}$ تبدیل فوریه u است. از طرفی داریم

$$F\{u_t\}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t\,e^{-iwx}dx=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-iwx}dx=\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}$$

بنابراین

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=-c^{۲}w^{۲}t$$

این معادله دیفرانسیل مرتبه اول دارای جواب

$$\bar{u}(w,t)=a(w)\ e^{-c^{۲}w^{۲}t}$$

است. از روی شرط اولیه $\bar{u}(w,\circ)=a(w)=\bar{f}(w)=F\{f\}$ و بنابراین

$$\bar{u}(w,t)=\bar{f}(w)\ e^{-c^{۲}w^{۲}t}$$

با تبدیل معکوس گیری داریم

$$u(x,t)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(w)\ e^{-c^{۲}w^{۲}t}\,e^{iwx}\,dw$$

با جایگزین کردن

$$\bar{f}(w)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\ e^{-iwv}\,dv$$

در $u(x,t)$ می‌یابیم

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^{۲}w^{۲}t}\,e^{i(wx-wv)}\,dw]dv$$

با استفاده از فرمول اویلر $e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$ و توجه به اینکه انتگرال قسمت موهومی نسبت به w فرد است نتیجه می‌شود

$$u(x,t)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)[\int_{۰}^{\infty}e^{-c^{۲}w^{۲}t}\cos((x-v)w)dw]dv$$

به کمک تبدیل لاپلاس نیز می‌توان به حل معادلات با مشتقات جزئی پرداخت. برای روشن شدن به حل مسئله زیر به کمک تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.

مثال ۴. مسئله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید

$$u_{tt}=c^{۲}u_{xx}$$

$$u(۰,t)=f(t)=\begin{cases} \sin t & ; ۰\le t\le ۲\pi \\ ۰ & ; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t)=۰ \quad ; t\ge ۰$$

$$u(x,۰)=۰ \qquad\qquad u_t(x,۰)=۰$$

حل. با تبدیل لاپلاس‌گیری نسبت به t می‌یابیم

$$L\{u_{tt}\}=s^{۲}L\{u\}-su(x,۰)-L\{u_t(x,۰)\}=c^{۲}L\{u_{xx}\}$$

ولی

$$L\{u_{xx}\}=\int_{۰}^{\infty}e^{-st}u_{xx}\,dt=\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}\int_{۰}^{\infty}e^{-st}u(x,t)dt=\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}L\{u(x,t)\}$$

با نوشتن $V(x,s)=L\{u(x,t)\}$ داریم

$$S^{۲}V=c^{۲}V_{xx} \qquad \text{و یا} \qquad V_{xx}-\frac{S^{۲}}{c^{۲}}V=۰$$

که یک معادله دیفرانسیل معمولی است و دارای جواب عمومی

$$V(x,s) = a(s)e^{(sx)/c} + b(s)e^{(-sx)/c}$$

است با توجه به شرط کرانه‌ای و نوشتن $F(s)=L\{f(t)\}$ می‌یابیم

$$V(\circ,s)=L\{u(\circ,t)\}=L\{f(t)\}=F(s)$$

$$\lim_{x\to\infty} V(x,s)=\lim_{x\to\infty} \int_\circ^\infty e^{-st}\, u(x,t)dt= \int_\circ^\infty e^{-st} \lim_{x\to\infty} u(x,t)dt=\circ$$

و این موضوع ایجاب می‌کند که $a(s)=\circ$ و

$$V(\circ,s)=b(s)=F(s)$$

در نتیجه

$$V(x,s)=F(s)\; e^{(-sx)/c}$$

با توجه به قضیه دوم انتقال تبدیلات لاپلاس و به ازای $a = \frac{x}{c}$ و با تبدیل معکوس‌گیری می‌یابیم

$$u(x,t) = f(t - \frac{x}{c})\; H(t - \frac{x}{c})$$

و یا

$$u(x,t)= \begin{cases} \sin(t-\frac{x}{c}) & ; \frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + ۲\pi \\ \circ ; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۱۶.۲. مسائل حل شده

۱ ـ جواب مسئله زیر را به دست آورید

$$u_{tt} = u_{xx}\,; u(x,\circ) = \sin x+\sin ۳x\;,\; u_t(x,\circ)= \circ\;,\; u(\circ,t) = u(\pi,t) = \circ$$

$$A_n= \frac{۲}{\pi} \int_\circ^\pi (\sin x+\sin ۳x)\sin nx\; dx = \frac{۱}{\pi} \begin{cases} \circ & ; n\neq ۱,۳ \\ ۱ & ; n=۱ \text{ یا } n=۳ \end{cases}$$

بنابراین

$$u(x,t)= \sin x \cos t + \sin ۳x \cos ۳t$$

۲ ـ جواب عمومی دستگاه معادلات $u_{xx}=۰$ و $u_{yy}=۰$ را بیابید.

از $u_{xx}=۰$ می‌یابیم $u=x\phi(y)+\psi(y)$ و از آنجا

$$u_{yy}=x\phi''(y)+\psi''(y)=۰$$

بنابراین

$$\phi''(y)=۰ \qquad و \qquad \psi''(y)=۰$$

در نتیجه

$$\psi(y)=cy+d \qquad و \qquad \phi(y)=ay+b$$

بنابراین

$$u=x(ay+b)+cy+d = axy+bx+cy+d$$

۳ ـ جواب عمومی معادله $u_{xy}+u_x+x+y+۱=۰$ را بیابید.

داریم $u_{xy}+u_x=-(x+y+۱)$ نخست جواب عمومی معادله بدون طرف ثانی یعنی جواب معادله $u_{xy}+u_x=۰$ را می‌یابیم. با فرض $u_x=p$ می‌یابیم $P_y+p=۰$ و یا $\frac{P_y}{p}=-۱$ و در نتیجه $\ln \frac{p}{h(x)}=-y$ و از آنجا $p=h(x)e^{-y}$ و یک جواب خصوص معادله $p_y+p=-(x+y+۱)$ عبارت است از $p=-(x+y)$ و در نتیجه این معادله دارای جواب عمومی

$$p=h(x)e^{-y}-(x+y)$$

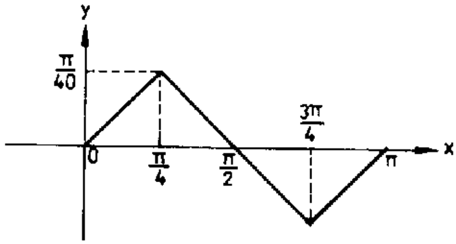
است. با توجه به آنکه $p=u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$ داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h(x)e^{-y}-(x+y)$$

و از آنجا

$$u = e^{-y} \int h(x)dx- \frac{x^۲}{۲} -xy+ \psi(y)= \phi (x)e^{-y} + \psi(y) - \frac{x^۲}{۲} - xy$$

۴ ـ مسئله موج را در حالتی حل کنید که $u_{tt} = c^۲u_{xx}$, $u_t(x,۰)=۰$ و انحراف اولیه برابر باشد با



$$u(x,\circ)=\begin{cases}\frac{x}{۱۰} \; ; \circ\le x\le \frac{\pi}{۴}\\ \frac{۱}{۱۰}(-x+\frac{\pi}{۲})\; ; \frac{\pi}{۴}\le x\le \frac{۳\pi}{۴}\\ \frac{۱}{۱۰}(x-\pi)\; ; \frac{۳\pi}{۴}\le x\le \pi\end{cases}$$

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi f(x)\sin nx\, dx=\frac{۲}{\pi}[\int_\circ^{\pi/۴}\frac{x}{۱۰}\sin nx\, dx+$$

$$\int_{\pi/۴}^{۳\pi/۴}(-\frac{x}{۱۰}+\frac{\pi}{۲۰})\sin nx\, dx+\int_{۳\pi/۴}^{\pi}(\frac{x}{۱۰}-\frac{\pi}{۱۰})\sin nx\, dx]$$

$$=\frac{۴}{۵\pi n^۲}\sin\frac{n\pi}{۴}$$

و از آنجا

$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{۵\pi n^۲}\sin\frac{n\pi}{۴}\cos cnt\sin nx$$

۵ـ معادله $u_x=yu_y$ را به روش ضربی حل کنید.

با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ می‌یابیم $F'G=yFG'$ و یا

$$\frac{F'}{F}=\frac{yG'}{G}=k$$

با توجه به آن داریم

$$\frac{G'}{G}=\frac{k}{y} \quad و \quad \frac{F'}{F}=k$$

که به ترتیب دارای جوابهای عمومی $F=ae^{kx}$ و $G=y^k$ است بنابراین

$$u(x,y)=ay^k e^{kx}$$

۶ـ معادله $u_x+u_y = ۲(x + y)u$ را به روش ضربی حل کنید.

با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ و جایگزین کردن آن در معادله می‌یابیم

$$F'G + FG' = ۲(x+y)FG$$

و یا

$$\frac{F'}{F} - ۲x = -\frac{G'}{G} + ۲y = k$$

و از آنجا به دو معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{G'}{G} = ۲y-k \quad \text{و} \quad \frac{F'}{F} = ۲x+k$$

جوابهای این معادلات عبارت‌اند از

$$G=e^{y^۲-ky} \qquad \text{و} \qquad F=ce^{x^۲+kx}$$

بنابراین

$$u = ce^{x^۲ + y^۲ + k(x-y)}$$

۷ـ معادله $u_{xx}+u_{yy}=۰$ را به روش ضربی حل کنید.

با قراردادن $u(x,y)=F(x)G(y)$، در معادله می‌یابیم $F''G+FG''=۰$ و یا $\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = K$

با فرض $k=\mu^۲$ می‌یابیم $F''-\mu^۲F=۰$ و $G''+\mu^۲G=۰$ که دارای جوابهای

$$G=c\cos \mu y+d\sin\mu y \qquad \text{و} \qquad F=a\cosh\mu x+b\sinh \mu x$$

و

$$u(x,y)=(a\cosh \mu x+b\sinh\mu x)(c\cos \mu y+d\sin\mu y)$$

و همینطور به ازای $k=-p^۲$ می‌یابیم

$$u(x,y)=(a\cos px+b\sin px)(c\cosh py+d\sinh py)$$

به ازای $k=۰$ نتیجه می‌شود $F''=۰$ و $G''=۰$ و از آنجا

$$u(x,y)=(ax+b)(cy+d) \text{ و } G=cy+d,\ F=ax+b$$

۸ـ با توجه به تغییر متغیر $v=x$ و $z=xy$ معادله $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y$ را حل کنید. داریم

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + yu_z$$

$$u_y = u_v v_y + u_z z_y = xu_z$$

و

$$u_{xy}=(u_v+yu_z)_y=u_{vy}+u_z+yu_{zy}=u_{vv}v_y+u_{vz}z_y+u_z+y(u_{zv}v_y+u_{zz}z_y)=xu_{vz}+u_z+xyu_{zz}$$

و

$$u_{yy}=x^۲u_{zz}$$

با جایگزین کردن این عبارات در معادله می‌یابیم

$$x^۲u_{vz}+xu_z+x^۲yu_{zz}=x^۲yu_{zz}+xu_z$$

و از آنجا $u_{vz}=۰$ که دارای جواب عمومی $u=\phi(v)+\psi(z)$ است و بنابراین معادله مورد نظر دارای جواب عمومی $u(x,y)=\phi(x)+\psi(xy)$ است.

۹ـ دما در یک میله به طول ده سانتیمتر را بیابید در صورتی که دما در دو سر میله در درجه حرارت صفر بوده و میله از جنس نقره با سطح مقطع $۱cm^۲$، چگالی $۱۰/۶gm/cm^۳$، ضریب هدایت گرما $۱/۰۴ \dfrac{cal}{cm\ degsec}$ و گرمای ویژه $۰/۰۵۶cal/gm\ de\ g$ باشد. سطح جانبی آن کاملاً عایق پوش است و درجه حرارت اولیه برابر است با

الف: $f(x)=sin\ ۰/۱\pi x$ ب: $f(x)= x(۱۰-x)$

داریم

$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} a_n e^{\lambda^۲_n t} sin \frac{n\pi}{۱۰} x$$

$$c^۲ = \frac{k}{\rho\sigma} = \frac{۱/۰۴}{۱۰/۶ \times ۰/۰۵۶} = ۱/۷۵۲$$

و

$$\lambda_n^۲ = \frac{c^۲n^۲\pi^۲}{۱۰۰} = ۰/۱۷۳n^۲$$

$$a_n= \frac{۲}{۱۰} \int_۰^{۱۰} f(x)sin \frac{n\pi}{۱۰} x\, dx$$

به ازای $f(x)=\sin 0/1x$ می‌یابیم

$$a_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}\sin 0/1\pi x\,\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx=\begin{cases}0\,;\ n\neq 1\\ 1\,;\ n=1\end{cases}$$

بنابراین

$$u(x,t)=e^{-0/1773t}\sin\frac{\pi}{10}x$$

به ازای $f(x)=x(10-x)$

$$a_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}x(10-x)\,\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx=\frac{400}{\pi n^3}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$$

از اینرو

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{400}{\pi n^3}\left(1+(-1)^{n+1}\right)e^{-0/1773n^2t}\sin\frac{n\pi}{10}x$$

۱۰ ـ درجه حرارت در یک میله نامتناهی به ازای $c=1$ را بیابید در صورتی درجه حرارت اولیه برابر باشد با

$$f(x)=\begin{cases}x\ ;\ 0<x<1\\ 2-x\ ;\ 1<x<2\\ 0\ ;\ \quad x>2\end{cases}\quad ;\quad f(-x)=f(x)$$

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}\left(a(w)\cos wx+b(w)\sin wx\right)e^{-w^2t}\,dw$$

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^2 f(x)\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1 x\cos wx\,dx+\int_1^2(2-x)\cos wx\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi w^2}\left(2\cos w-\cos 2w-1\right)$$

و $b(w)=0$ و از آنجا

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{w^2}\left(2\cos w-\cos 2w-1\right)\cos wx\,e^{-w^2t}\,dw$$

۱۱ ـ مقدار انحراف $u(x,y,t)$ در یک غشای مربعی $a=b=۱$ را بیابید در صورتی که ارتعاش روی لبه‌های آن صفر، سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه برابر باشد با

$$f(x,y)=0.01\, xy\,(1-x^2)(1-y^2)$$

داریم

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin m\pi x\,\sin n\pi y$$

که در آن $\lambda_{mn}=\pi\sqrt{m^2+n^2}$ و

$$a_{mn}=4\int_0^1\int_0^1 0/01xy(1-x^2)(1-y^2)\sin m\pi x\,\sin n\pi y\,dx\,dy$$

داریم

$$\int_0^1 x(1-x^2)\sin m\pi x\,dx=\frac{6(-1)^{m+1}}{m^3\pi^3}$$

و از آنجا

$$a_{mn}=1/44\,\frac{(-1)^{m+n}}{\pi^6m^3n^3}$$

و $b_{mn}=0$ بنابراین

$$u(x,y,t)=\frac{1/44}{\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m^3n^3}\cos\pi\sqrt{m^2+n^2}\,t\,\sin n\pi y\,\sin m\pi x$$

۱۲. مطلوبست حل مسئله زیر

$$u_t-u_{xx}=x\,;\qquad 0<x<1\qquad ,\ t>0$$

$$u(x,0)=2x\,;\qquad 0\le x\le 1$$

$$u_x(0,t)=t\,;\qquad u(1,t)=t^2\qquad ,\ t\ge 0$$

حل. می‌نویسیم

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

w را طوری می‌یابیم که $v_x(0,t)=0$ و $v(1,t)=0$ برای این منظور می‌نویسیم

و از آنجا $w(x,t)=a(t)x+b(t)$

$u_x(\circ,t)=v_x(\circ,t)+w_x(\circ,t)$ و یا $t=\circ+a(t)$ یا $a(t)=t$

$u(\backslash,t)=v(\backslash,t)+w(\backslash,t)$ و یا $t^{\text{۲}}=\circ+t+b(t)$ یا $b(t)=t^{\text{۲}}-t$

در نتیجه

$$w(x,t)=xt+t^{\text{۲}}-t=(x-\backslash)t+t^{\text{۲}}$$

و

$$u(x,t)=(x-\backslash)t+t^{\text{۲}}+v(x,t)$$

$$u(x,\circ)=v(x,\circ)+w(x,\circ)$$

$\text{۲}x=v(x,\circ)$ و یا $v(x,\circ)=\text{۲}x$

$u_t=v_t+w_t=v_t+x-\backslash+\text{۲}t$ و $u_{xx}=v_{xx}\ ,\ u_x=v_x+t$

در نتیجه مسئله زیر را داریم

$$v_t-v_{xx}=\backslash-\text{۲}t\ ,\ v(x,\circ)=\text{۲}x\ ,\ v_x(\circ,t)=\circ\ ,\ v(\backslash,t)=\circ$$

برای حل این مسئله به روش تفکیک متغیرها با فرض $v(x,t)=F(x)G(t)$ تابع F را طوری می‌یابیم که در مسئله زیر صدق کند

$$F''-kF=\circ\ ,\ F'(\circ)=\circ\ ,\quad F(\backslash)=\circ$$

این مسئله دارای جواب $F_n(x)=\cos k_n x$ که در آن $k_n=(\text{۲}n+\backslash)\frac{\pi}{\text{۲}}$ و $k=-k_n^{\text{۲}}=-(\text{۲}n+\backslash)^{\text{۲}}\frac{\pi^{\text{۲}}}{\text{۴}}$، هم اکنون با جایگزین کردن

$$v(x,t)=\sum_{n=\circ}^{\infty}G_n(t)\cos k_n x$$

در معادله $v_t-v_{xx}=\backslash-\text{۲}t$ می‌یابیم

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}(\dot{G}_n+k_n^{\text{۲}}\ G)\cos k_n x=\backslash-\text{۲}t$$

حال G را طوری می‌یابیم که

$$\dot{G}_n+k^2_n\ G_n=2\int_0^1(1-2t)\cos k_n x\, dx=2(1-2t)\ \frac{\sin k_n}{k_n}=c_1t+c_2$$

و از آنجا

$$G_n(t)=A_n\, e^{-k^2_n t}+\frac{c_1}{1+k^2_n}\,t+\frac{c_2}{k^2_n}$$

بنابراین

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\, e^{-k^2_n t}+\frac{c_1}{1+k^2_n}\,t+\frac{c_2}{k^2_n}\right)\cos k_n x\ \ ;\ \ k_n=(2n+1)\ \frac{\pi}{2}$$

با توجه به $v(x,0)=2x$ می‌یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n+\frac{c_2}{k^2_n}\right)\cos k_n x=2x$$

بنابراین فرض می‌کنیم

$$A_n+\frac{c_2}{k^2_n}=2\int_0^1 2x\cos k_n x\, dx=\frac{4}{k^2_n}\left[k_n\sin k_n-1\right]$$

و یا

$$A_n=\frac{1}{k^2_n}\ \left[4((-1)^n k_n-1)-c_2\right]$$

و در نتیجه

$$u(x,t)=(x-1)t+t^2+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k^2_n}\left[4((-1)^n k_n-1)-c_2\right]e^{-k^2_n t}+\frac{c_1}{1+k^2_n}+\frac{c_2}{k^2_n}\right\}\cos k_n x$$

مثال ۱۳. مطلوب است حل مسئله پواسن زیر

$$u_{xx}+u_{yy}=x+2y\ \ ;\ \ 0<x<\pi\ \ ;\ \ 0<y<\pi$$

$$u(x,0)=x\ \ ,\ \ u(x,\pi)=2\ \ ,\ \ 0\le x\le\pi$$

$$u(0,y)=y\ \ ,\ \ u(\pi,y)=\cos y\ \ ,\ \ 0\le y\le\pi$$

حل. به جستجوی جوابی برای مسئله به صورت $u(x,y)=V(x,y)+w(x,y)$ می‌پردازیم و w را طوری می‌یابیم که $V(\pi,y)=0, V(0,y)=0$. برای این منظور می‌نویسیم

$$w(x,y)=a(y)x+b(y)$$

$b(y)=y \quad , \quad y=\circ+b(y)$ و یا $u(\circ,y)=V(\circ,y)+w(\circ,y)$

$a(y)=\frac{1}{\pi}(\cos y - y)\ ,\ \cos y = a\pi+y$ و یا $u(\pi,y)=V(\pi,y)+w(\pi,y)$

در نتیجه

$$u(x,y)=\frac{x}{\pi}(\cos y-y)+y+V(x,y)$$

و

$$w(x,y)=\frac{x}{\pi}(\cos y-y)+y$$

از $u(x,\circ) = V(x,\circ) + w(x,\circ)$ نتیجه می‌شود

$V(x,\circ)=(1-\frac{1}{\pi})x$ و یا $x=V(x,\circ)+\frac{x}{\pi}$

همینطور

$V(x,\pi)=\frac{x}{\pi}(1+\pi)-\pi+2$ و یا $u(x,\pi)=V(x,\pi)+w(x,\pi)$

و

$$u_{yy}=V_{yy}-\frac{x}{\pi}\cos y \qquad u_{xx}=V_{xx}$$

در نتیجه مسئله زیر را برای V داریم

$$V_{xx}+V_{yy}=x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y \ ;\ V(x,\circ)=(1-\frac{1}{\pi})x \ ,\ V(x,\pi)=\frac{1}{\pi}(1+\pi)x-\pi+2$$
$$V(\circ,y)=\circ \ ,\ V(\pi,y)=\circ$$

نخست به حل مسئله بدون طرف ثانی به روش ضربی با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ می‌پردازیم و به مسئله زیر برای F می‌رسیم

$$F''-kF=\circ \quad ;\ F(\circ)=\circ\ ,\ F(\pi)=\circ$$

که از آن نتیجه می‌شود $k=-n^2$ و $F_n(x)=\sin nx$

حال به جستجوی جوابی به صورت

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(y)\ \sin nx$$

برای مسئله مربوط به V می‌پردازیم. با درج آن در $V_{xx}+V_{yy}=x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y$ می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n-n^2G_n)\ \sin nx = x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y$$

و از آنجا G را طوری می‌یابیم که

$$\ddot{G}_n-n^2G_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y)\sin nx\ dx$$

در نتیجه

$$G_n(t)=a_n\ \cosh y\ ny + b_n\ \sinh ny + G_n^*(y)$$

که در آن $G_n^*(y)$ یک جواب خصوص معادله فوق است ($G_n^*(y)$ را بیابید) و

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cosh ny + b_n\sin h\ ny + G_n^*(y))\ \sin nx$$

با توجه به شرایط کرانه‌ای می‌یابیم

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + G_n^*(0))\ \sin nx = (1-\frac{1}{\pi})\ x$$

$$V(x,\pi)=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cosh n\pi + b_n\sinh n\pi + G_n^*(\pi))\ \sin nx=\frac{1}{\pi}(1+\pi)x-\pi+2$$

و از آنجا

$$a_n+G_n^*(0)=\frac{2}{\pi}(1-\frac{1}{\pi})\int_0^{\infty} x\sin nx\ dx=\frac{2}{n\pi}(1-\frac{1}{\pi})(-1)^{n+1}$$

$$a_n\cosh n\pi + b_n\sinh n\pi + G_n^*(\pi) = \frac{۲}{n\pi}(۱+\pi)(-۱)^{n+۱}+(۲-\pi)\frac{۲}{\pi}((-۱)^{n+۱}+۱)$$

که با حل آنها a_n و b_n محاسبه می‌شوند.

مثال ۱۴. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt} = u_{xx}+u_{yy}+x+y+t \;;\quad ۰\le x\le \pi \qquad ۰\le y\le \pi \quad t\ge ۰$$

$$u(x,y,۰)=x+۲y \quad , \quad u_t(x,y,۰)=۲x-y$$

$$u(۰,y,t)=y+t \quad , \quad u(\pi,y,t)=y-t$$

$$u(x,\pi,t)=۲x-t \quad , \quad u(x,۰,t)=x-۲t$$

حل. با فرض $u(x,y,t)=V(x,y,t)+w(x,y,t)$ و $w=ax+b$، V را طوری می‌یابیم که $V(۰,y,t)=V(\pi,y,t)=۰$ و از آنجا

$$w=-\frac{۲t}{\pi}x+y+t$$

و مسئله برای V عبارت است از

$$V_{tt}=V_{xx}+V_{yy}+y+x+t$$

$$V(x,y,۰)=y+x \;;\quad V_t(x,y,۰)=۲x-y+\frac{۲x}{\pi}-۱$$

$$V(۰,y,t)=۰ \;;\quad V(\pi,y,t)=۰$$

$$V(x,۰,t)=x-۳t+\frac{۲t}{\pi}x \;;\quad V(x,\pi,t)=۲x-۲t+\frac{۲t}{\pi}x-\pi$$

هم اکنون از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم و با قرار دادن

$$H=F_s(V)=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi V(x,y,t)\sin nx\,dx$$

و تبدیل فوریه گرفتن از معادله مربوط به V می‌یابیم

$$H_{tt}=-n^۲H+H_{yy}+\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi (x+y+t)\sin nx\,dx$$

با فرض

$$A=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi x\sin nx\,dx=\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}$$

$$B=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \sin nx\, dx\, \frac{۲}{n\pi}(۱+(-۱)^{n+۱})$$

می‌یابیم

$$H_{tt}+n^۲H-H_{yy}=A+B(y+t)$$
$$H(n,y,۰)=By+A\ ,\ H_t(n,y,۰)=(۲+\frac{۲}{\pi})A-(y+۱)B$$
$$H(n,۰,t)=(۱+\frac{۲t}{\pi})A-۳tB$$

$$H(n,\pi,t)=(۲+\frac{۲t}{\pi})A-(۲t+\pi)B$$

حال چنین قرار می‌دهیم

$$H(n,y,t)=Q(n,y,t)+R(n,y,t)$$

و $R(n,y,t)=ay+b$ را طوری می‌یابیم که $Q(n,۰,t)=Q(n,\pi,t)=۰$. برای برقرار بودن این شرایط لازم است که

$$R(n,y,t)=\frac{y}{\pi}(A+Bt-B\pi)+A(۱+\frac{۲t}{\pi})-۳Bt$$

با توجه به آن مسئله برای Q به صورت زیر در می‌آید

$$Q_{tt}-Q_{yy}+n^۲Q=A+(y+t)B-n^۲[(A+Bt-B\pi)\frac{y}{\pi}+A(۱+\frac{۲t}{\pi})-۳Bt]$$
$$Q(n,y,۰)=-A\frac{y}{\pi}+۲By$$
$$Q_t(n,y,۰)=۲A-By+۲B-\frac{B}{\pi}y$$
$$Q(n,۰,t)=Q(n,\pi,t)=۰$$

با قرار دادن $Q=\sum_{m=۱}^{\infty} G_{mn}\sin my$ در این مسئله می‌توان به حل مسئله پرداخت و به جواب رسید.

$$Q(n,y,t)=\sum_{m=۱}^{\infty}\{E_{mn}\sin\lambda_{mn}t+F_{mn}\cos\lambda_{mn}t+\frac{c}{\pi\lambda^۲_{mn}}[B\pi-n^۲(A+Bt-B\pi)]+$$

$$\frac{D}{\pi\lambda^2_{mn}}[A\pi+B\pi t-n^2(A\pi+2At-3B\pi t)]\}\sin my$$

که در آن

$$c=\frac{2}{m}(-1)^{m+1}, D=\frac{2}{m\pi}[(-1)^{m+1}+1]$$

$$E_{mn}=\frac{1}{\pi\lambda^2_{mn}}\{2AD(\pi\lambda^2_{mn}+n^2)+BD\pi\ (2m^2-n^2-1)-\pi Bc\lambda^2_{mn}-Bcm^2\}$$

$$F_{mn}=\frac{1}{\pi\lambda^2_{mn}}\{AD\pi(n^2-1)-c(m^2A-B\pi+n^2B\pi-2B\pi m^2)\}$$

بنابراین

$$u(x,y,t)=y+t-2\frac{t}{\pi}x+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{y}{\pi}(A+Bt-B\pi)+A(1+\frac{2t}{B})-3Bt\}\sin nx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{E_{mn}\sin\lambda_{mn}t+F_{mn}\cos\lambda_{mn}t+\frac{c}{\pi\lambda^2_{mn}}[B\pi-n^2(A+Bt-B\pi)]$$

$$+\frac{D}{\pi\lambda^2_{mn}}[A\pi+B\pi t-n^2(A\pi+2At-3B\pi t)]\}\sin my\sin nx$$

۱۷.۲. تمرینات متفرقه

۱ ـ هر یک از مسائل زیر را حل کنید

a. $u_{tt}-c^2u_{xx}=0\ ;\ u(x,0)=0\quad ,u_t(x,0)=8\sin^2 x\ ,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0$

جواب.

$$u(x,t)=\sum_{\substack{n=1\\n\neq 2}}^{\infty}\frac{32[(-1)^n-1]}{\pi cn^2(n^2-4)}\sin nct\sin nx$$

b. $u_{tt}+au_t+bu=c^2u_{xx}\qquad ,0<x<1\quad ,t>0$

$u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,0)=0$

$u(0,t)=u(1,t)=0$

جواب $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n(t)\sin n\pi x$

که در آن $a_n=2\int_0^{\pi} f(x)\sin n\pi x\, dx$ و

$$G_n(t)=\begin{cases} e^{-at/2}(\cosh\alpha t+\frac{a}{2\alpha}\sinh\alpha t)\ ;\ \alpha>0\\ e^{-at/2}(1+\frac{at}{2})\ ;\ \alpha=0\\ e^{-at/2}(\cos\beta t+\frac{a}{2\beta}\sin\beta t)\ ;\ \alpha<0\end{cases}$$

$$\beta=\frac{1}{2}[4(b+n^2\pi^2c^2)-a^2]^{1/2}\ ,\ \alpha=\frac{1}{2}[a^2-4(b+n^2\pi^2c^2)]^{1/2}$$

c. $u_{tt}=c^2u_{xx}+\sinh x\ ;\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=0\ ,\ u(0,t)=u(1,t)=1$

جواب. $u(x,t)=V(x,t)+w(x,t)$

که در آن

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[-2\int_0^1 w(x,v)\sin n\pi v\,dv]\cos nct\sin n\pi x$$

$$w(x,t)=-c^2\sinh x+(c^2\sin h\ 1)x+1$$

d. $u_t=4u_{xx}\ ;\ u(x,0)=x^2(1-x)\ ,\ u(0,t)=u(1,t)=0$

جواب. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi^3}[2(-1)^{n+1}-1]e^{-4n^2\pi^2t}\sin n\pi x$

۲ـ مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt}-u_{xx}=x+t\ ;\ u(x,0)=2\ ,\ u_t(x,0)=x\ ,\ u(0,t)=\sin t\ ,\ u(\pi,t)=2t$$

جواب. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)\ ;\ w(x,t)=\frac{2t-\sin t}{\pi}x+\sin t$

$$v(x,t)=a_1\cos t+b_1\sin t+\frac{4t}{\pi}+2-\frac{1}{\pi}t\cos t$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{a_n\cos nt+b_n\sin nt+\frac{2}{\pi n^3}[\pi(-1)^{n+1}+((-1)^{n+1}+1)t]+\frac{2\sin t}{n(n^2-1)\pi}\}\sin nx$$

که در آن $a_۱=۰$, $a_n=\frac{۲(-۱)^n}{n^۲}$, $b_۱=۲-\frac{۱۰}{\pi}$

$$b_n=\frac{۲(-۱)^n}{\pi n^۲}[(-۱)^{n+۱}+۲-\pi]+\frac{۲((-۱)^n-۱)}{\pi n^۲}-\frac{۲}{\pi(n^۲-۱)n^۲}$$

۳ـ مطلوب است حل هر یک از مسائل زیر

$$a.\quad \begin{cases} u_t-۴u_{xx}=xt \ ; \ ۰<x<۱ \ , \ t>۰ \\ u(x,۰)=\sin\pi x \ ; \ ۰\leq x\leq ۱ \\ u_x(۰,t)=t \ , \ u_x(۱,t)=t^۲ \ ; \ t\geq ۰ \end{cases}$$

$$b.\quad \begin{cases} u_t-k\,u_{xx}=x\cos t \ ; \ ۰<x<\pi \ , \ t>۰ \\ u_{tt}(x,۰)=\sin x \ ; \ ۰\leq x\leq \pi \\ u(۰,t)=t^۲ \ , \ u(\pi,t)=۲t \ ; \ t\geq ۰ \end{cases}$$

$$c.\quad \begin{cases} u_t-u_{xx}=t \ ; \ ۰<x<۱ \ , \ t>۰ \\ u(x,۰)=x \ ; \ ۰\leq x\leq ۱ \\ u_x(۰,t)=۱ \ , \ u(۱,t)=t^۲ \ ; \ t\geq ۰ \end{cases}$$

$$d.\quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=۰ \ ; \ ۰<x<۱ \ , \ t>۰ \\ u_t(x,۰)=x \ , \ u_{tt}(x,۰)=۰ \ ; \ ۰\leq x\leq ۱ \\ u_{xx}(۰,t)=t^۲ \ , \ u_{xx}(۱,t)=\cos t \ ; \ t\geq ۰ \end{cases}$$

$$e.\quad \begin{cases} u_{tt}-۴u_{xx}=xt \ ; \ ۰<x<۱ \ , \ t>۰ \\ u(x,۰)=x \ , \ u_t(x,۰)=۰ \ ; \ ۰\leq x\leq ۱ \\ u_{xx}(۰,t)=۰ \ , \ u_x(۱,t)=۱+t \ ; \ t\geq ۰ \end{cases}$$

$$f.\quad \begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0 ; \quad 0<x<1 , t>0 \\ u(x,0)=\sin \dfrac{\pi x}{2} , \quad u_t(x,0)=1+x ; \ 0\le x\le 1 \\ u(0,t)=\dfrac{\pi}{2} , \quad u_x(1,t)=2t ; \ t\ge 0 \end{cases}$$

۴ـ نشان دهید که با جانشانی $u=v(x,y,z)e^{-iwt}$; $i=\sqrt{-1}$ در معادله موج سه بعدی معادله هلمهولتز

$$\nabla^2 v+k^2 v=0 ; k = \frac{w}{c}$$

حاصل می‌شود و با توجه به آن و با استفاده از جوابهای معادله موج جوابهای معادله هلمهولتز را بیابید.

۵ـ مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+ \frac{1}{r} u_r+ \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}\right) ; \ 0<r<R , \ 0<\theta<2\pi , \ t>0$$
$$u(r,\theta,0)=r \cos\theta , \ u_t(r,\theta,0)=0 ; \ 0\le r\le R , \ 0\le\theta\le 2\pi$$
$$u(R,\theta,t)=0 , \ u(0,\theta,t)=0 ; \ 0\le\theta\le 2\pi , \ t\ge 0$$

۶ – مطلوب است حل هر یک از مسائل زیر

$$a.\quad \begin{cases} u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy})+xy \sin t ; \quad 0<x<\pi , \quad 0<y<\pi \quad t>0 \\ u(x,y,0)=0 , \ u_t(x,y,0) ; \ 0\le x\le\pi , \ 0\le y\le\pi \\ u_x(0,y,t)=0 \ \ u_x(\pi,y,t)=0 ; \ 0\le y\le\pi , \ t\ge 0 \\ u_y(x,0,t)=0 ; \ u_y(x,\pi,t)=0 ; \ 0\le x\le\pi ; t\ge 0 \end{cases}$$

$$b.\quad \begin{cases} u_t-4(u_{xx}+u_{yy})=x+y+t ; \quad 0<x<\pi , \quad 0<y<\pi , \quad t>0 \\ u(x,y,0)=0 ; \ 0\le x\le\pi , \ 0\le y\le\pi \\ u(x,0,t)=0 , \ u(x,\pi,t)=0 ; \ 0\le x\le\pi , \ t\ge 0 \\ u(0,y,t)=0 , \ u(\pi,y,t)=0 ; \ 0\le x\le\pi ; t\ge 0 \end{cases}$$

$$c.\quad \begin{cases} u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+r+t\ ; & 0<r<1\ ,\ t>0 \\ u(r,0)=r\ ,\ u_t(r,0)=2r+1\ ; & 0\le r\le 1 \\ u(1,t)=2t\ ; & t\ge 0 \end{cases}$$

$$d.\quad \begin{cases} u_{tt}=u_{\theta\theta}\ ; & 0<\theta<\pi\ ,\ t>0 \\ u(\theta,0)=\theta\ ,\ u_t(\theta,0)=\sin\theta\ ; & 0\le\theta\le\pi \\ u(0,t)=t\ ,\ u(\pi,t)=2t\ ; & t\ge 0 \end{cases}$$

۷ – نشان دهید که

$$a.\ F_s\{f''\} = \frac{2n\pi}{l^2}[f(0)-(-1)^n f(l)]-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 F_s\{f\}$$

$$b.\ F_c\{f''\} = \frac{2}{l}[(-1)^n f'(l)-f'(0)]-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 F_c\{f\}$$

و به ازای $l=\pi$

$$F_c\{f''\} = \frac{2}{\pi}[(-1)^n f'(\pi)-f'(0)]-n^2 F_c\{f\}$$

۸ – هر یک از مسائل زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید

$a.\ u_t=u_{xx}+x+t\ ;\ 0<x<\pi\ ,\ t>0$

$u(x,0)=x^2\ ,\ 0<x<\pi$

$u(0,t)=0\ ,\ u(\pi,t)=t\ ;\ t>0$

$b.\ u_t=u_{xx}+x+\sin t\ ;\ 0<x<\pi\ ,\ t>0$

$u(x,0)=0\ ;\ 0\le x\le\pi$

$u(0,t)=0\ ;\ u_x(\pi,t)+2u(\pi,t)=0$

$c.\ u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0\ ;\ 0<x<\pi\ ,\ t>0$

$$u(x,0)=0 \ , \ u_t(x,0)=0 \ ; \ 0\le x\le\pi$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0 \ , \ u_{xx}(0,t)=0 \ , \ u_{xx}(\pi,t) = \sin t \ ; \ t\ge 0$$

e تمرینات $3a$ و $3d$ را به کمک تبدیلات فوریه حل کنید.

۹ - جواب مسئله دیریکله زیر را به کمک تبدیل فوریه بیابید

$$u_{xx}+u_{yy} = 0 \ ; \ -\infty<x<\infty \ , \ y>0$$

$$u(x,0)=f(x) \ ; \ -\infty<x<\infty$$

u وقتی که $y\to\infty$ کراندار است و u و u_x وقتی که $|x|\to\infty$ به سمت صفر میل می‌کند.

جواب.
$$u(x,y)= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}\, dt$$

۱۰ - جواب مسئله نی‌من زیر را بیابید

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \ ; \ -\infty<x<\infty \ , \ y>0$$

$$u_y(x,0)=g(x) \ ; \ -\infty<x<\infty$$

$$|u|<\infty \ , \ u,u_x\to 0$$

$$y\to\infty \qquad |x|\to\infty$$

جواب.

$$u(x,y)= \frac{1}{\pi} \int_{a}^{y} v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)dt}{(t-x)^2+v^2}\, dv+c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)Ln\left[\frac{(t-x)^2+y^2}{(t-x)^2} \right] dt+c$$

۱۱ - هر یک از مسائل زیر را به روش تفکیک متغیرها حل کنید. آیا این مسائل به این روش به جواب یکتا منجر می‌شوند؟

$$a. \ u_{tt}-u_{xx}=x+t \ ; \ 0<x<\pi \ , \ t>0$$

$$u(x,0)=2x-1 \ ; \ 0\le x\le\pi$$

$u_t(x,0)=x+1 \quad ; \quad 0\le x\le\pi$

$u(0,t)=t^2 \quad ; \quad t\ge 0$

$u(\pi,t)=t \quad ; \quad t\ge 0$

b. $u_t-4u_{xx}=x-t \quad ; \quad 0<x<\pi \quad , \quad t>0$

$u(x,0)=\cos x \quad ; \quad 0\le x\le\pi$

$u_x(0,t)=t \quad ; \quad t\ge 0$

$u_{xx}(\pi,t)=t-1 \quad ; \quad t\ge 0$

۱۲ – هریک از مسائل زیر را حل کنید.

a. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+2t \; ; \; 0\le x\le\pi \quad , \quad 0\le y\le\pi \quad , \quad t\ge 0$

$u(x,y,0)=y \; , \; u_t(x,y,0) = 0$

$u(0,y,t)= t + y \; , \; u(\pi,y,t)= -y$

$u(x,0,t)=0 \; , \; u(x,\pi,t)= x - t$

b. $u_t=u_{xx}+u_{yy}-x \; ; \; 0\le x\le\pi \quad , \quad 0\le y\le\pi \quad , \quad t\ge 0$

$u_t(x,y,0)=0$

$u(0,y,t)=0 \; , \; u(\pi,y,t)=2$

$u(x,0,t)=2t \; , \; u(x,\pi,t)=0$

c. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=x-z \; ; \; 0\le x\le\pi \quad , \quad 0\le y\le\pi \quad , \quad 0\le z\le\pi$

$u(0,y,z)=z \; , \; u(\pi,y,z)=0$

$u(x,0,z)=0 \; , \; u(x,\pi,z)=x$

$u(x,y,0)=y \; , \; u(x,y,\pi)=0$

$d.\ u_{tt} - (u_{xx}+u_{yy}) = \cos x \cos y \cos t \ ; \quad 0 \le x \le \pi \ , \quad 0 \le y \le \pi \ , \ t \ge 0$

$u(x,y,0) = \cos x \cos y \ , \ u_t(\pi,y,0) = 0$

$u(0,y,t) = \cos y \cos t \ , \ u(\pi,y,t) = -\cos y \cos t$

$u(x,0,t) = \cos x \cos t \ , \ u(x,\pi,t) = -\cos x \cos t$

۱۳ - هر یک از مسائل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید

$a.\ u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t) \quad ; \ 0 < x < \infty \ , \ t > 0$

$u(x,0) = 0 \quad ; \quad 0 \le x < \infty$

$u_t(x,0) = 0 \quad ; \quad 0 \le x < \infty$

$u(0,t) = 0 \quad ; \quad t \ge 0$

هرگاه $x \to \infty$ آنگاه $u_x(x,t) \to 0$

$b.\ u_t = u_{xx} - 2u \quad ; \ 0 < x < \infty \ , \ t > 0$

$u(x,0) = 0 \quad ; \quad 0 \le x < \infty$

$u(0,t) = 0 \ ; \ t \ge 0$

هرگاه $x \to \infty$ آنگاه $u(x,t) \to 0$

$c.\ \alpha^2 u_{xx} = u_t \quad ; \ 0 < x < \infty \ ; \ t > 0$

$u(x,0) = 0 \quad ; \quad 0 \le x < \infty$

$u_x(0,t) = -1 \ ; \ t \ge 0$

هرگاه $x \to \infty$ آنگاه $u(x,t) \to 0$

۱۴ - مسائل زیر را حل کنید

$a.\ u_{xx} + u_{yy} = x - y \quad ; \ 0 < x < \pi \quad ; \ 0 < y < \pi$

$u(x,۰)=۰ \;,\; u(x,\pi)=x^{۲} \quad ; \quad ۰\leq x\leq \pi$

$u(۰,y)=۲y \;,\; u(\pi,y)=۰ \quad ; \quad ۰\leq y\leq \pi$

b. $u_{xx}+u_{yy}=۰ \;;\; ۰<x<\pi \;;\; ۰<y<\pi$

$u_y(x,۰)=۲x-۱ \;,\; u_y(x,\pi)=۰ \quad ; \quad ۰\leq x\leq \pi$

$u_x(۰,y)=۱+y \;,\; u_x(\pi,y)=۲ \quad ; \quad ۰\leq y\leq \pi$

c. $u_{xx}+u_{yy}=۱ \;,\; ۰<x<\pi \;;\; ۰<y<\pi$

$u_y(x,۰)=۰ \;,\; u(x,\pi)=\sin x \;;\; ۰<x<\pi$

$u(۰,y)=\sin ۲y \;,\; u_x(\pi,y)=۰ \;;\; ۰<y<\pi$

d. $\nabla^{۲}u=۰ \;;\; ۱<r<۲ \;,\; ۰<\theta<\pi$

$u(۱,\theta)=\sin\theta \;,\; u(۲,\theta)=۰ \;;\; ۰\leq\theta\leq\pi$

$u(r,۰)=۰ \;,\; u(r,\pi)=۰ \;;\; ۱\leq r\leq ۲$

e. $\nabla^{۲}u=۰ \;;\; ۰<x<۱ \;;\; ۰<y<۱ \;,\; ۰<z<۱$

$u(۰,y,z)=\sin\pi y \,\sin\pi z \;,\; u(۱,y,z)=۰$

$u(x,۰,z)=u(x,۱,z)=۰$

$u(x,y,۰)=u(x,y,۱)=۰$

f. $\nabla^{۲}u=۰ \;;\; r<۱ \;;\; ۰<y<۱ \;,\; ۰<\theta<۲\pi \quad ۰<\varphi<\pi$

$u(۱,\theta,\varphi)=\cos^{۲}\phi$

فصل سوم

توابع مختلط

۳.۱. اعداد مختلط

در حل معادله $x^2+4=0$ چنانچه همانند حل معادله $x^2-4=0$ عمل کنیم می‌یابیم $x^2=-4$ و یا $x=\pm 2\sqrt{-1}$ گرچه مثلاً $2\sqrt{-1}$ به علت وجود عامل غیر حقیقی $\sqrt{-1}$ در آن یک عدد حقیقی نیست ولی خود یک موجود ریاضی است زیرا تمام عوامل سازندهٔ آن از موجودات ریاضی هستند و علاوه بر آن جواب معادله $x^2+4=0$ است و می‌توان آن را نه به عنوان یک عدد حقیقی بلکه به عنوان یک موجود ریاضی تحت عنوان یک عدد موهومی محض مورد بحث و بررسی قرار داد. $\sqrt{-1}$ را معمولاً به i نمایش می‌دهند و به ازای هر دو عدد حقیقی x و y، $x+iy$ را یک عدد مختلط می‌نامند. گرچه به نظر می‌رسد که چنین تعریفی برای اعداد مختلط یکی از ساده‌ترین تعاریف باشد ولی چنانچه بعداً خواهیم دید ریشهٔ دوم هر عدد، دو عدد مختلط است و این دوگانگی در بحثهای آینده تولید اشکال خواهد کرد. بدین جهت است که اغلب مؤلفین یک عدد مختلط z در صفحه مختلط را به صورت زوج مرتب (x,y) تعریف می‌کنند. x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی z می‌نامند و می‌نویسند $Rez=x$ و $Imz=y$ بدین طریق به مجموعه‌ای به صورت زیر می‌رسند که به مجموعه اعداد مختلط موسوم است.

$$\mathbb{C}=\{(x,y) \mid \quad x,y\in R\}$$

چنانچه دو عمل جمع و ضرب را برای هر دو عضو $z_1=(x_1,y_1)$ و $z_2=(x_2,y_2)$ از $\mathbb{C}$ به

صورت‌های زیر تعریف کنیم.

$$z_1+z_2=(x_1 ,y_1)+(x_2 ,y_2)=(x_1+x_2 ,y_1+y_2)$$

و

$$z_1z_2=(x_1 ,y_1)(x_2 ,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2 ,x_1y_2+x_2y_1)$$

آنگاه $\mathbb{C}$ با دو عمل جمع و ضرب $(\mathbb{C} , + , \times)$ تشکیل یک میدان می‌دهد. صفر این دستگاه (۰و۰) و عضو یکانی آن (۰ و ۱) است. با توجه به تعریف جمع چنین می‌نویسیم

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)$$

به علت آنکه تناظری یک به یک بین مجموعه اعداد حقیقی و زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط با اعضای $(x,0)$ برقرار است می‌توان بجای $(x$ و ۰$)$ عدد xرا به کاربرد و با توجه به اینکه $(0,1)^2=(-1,0)=-1$ می‌نویسیم $i=(0,1)$ و با چنین مفروضاتی به این نتیجه می‌رسیم که عدد مختلط (x,y) با$x+iy$برابر است،

$$(x,y)=x+iy \quad ; \quad i=(0,1)$$

صفحه‌ای شامل یک دستگاه محورهای متعامد به صورتهای افقی و قائم اختیار کنیم و آنها را به ترتیب محورهای حقیقی و موهومی می‌نامیم. واحد بر محور x "یک" و واحد yرا "i" می‌گیریم. صفحه‌ای با چنین محورهای مختصات را یک صفحه مختلط می‌نامیم. هر عدد مختلط $z=x+iy$ نقطه‌ای به طول xو عرض yاست.

عدد مختلط $x-iy$را مختلط مزدوج $z=x+iy$ نامیده و به $\bar{z}$ نمایش می‌دهند. تقسیم در اعداد مختلط نیز بامعنی است. در واقع به ازای دو عدد مختلط z_1و z_2 داریم

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x^2_2+y^2_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x^2_2+y^2_2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x^2_2+y^2_2}$$

که عددی مختلط است.

هرگاه قرار دهیم

$$x=r\cos\theta \qquad و \qquad y=r\sin\theta$$

آنگاه داریم

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

r را قدر مطلق عدد مختلط z نامیده و به $|z|$ نمایش می‌دهند، $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ، زاویه θ که زاویهٔ بین ox و oz است به آرگومان یا شناسه z موسوم است و داریم

$$\theta=\arg z=\arctan\frac{y}{x}$$

و $-\pi<\theta\leq\pi$ را آرگومان اصلی می‌نامند، برطبق تعریفی از اویلر می‌نویسند $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ این تساوی به فرمول اویلر نیز موسوم است. با توجه به این فرمول می‌یابیم

$$z=re^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$ متناوب با دورهٔ $2k\pi i$ است. به سادگی می‌توان ثابت کرد.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\ ,\ z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}\,r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$|z_1-z_2|\geq\big||z_1|-|z_2|\big|\ \ ,\ \ |z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\ \ ,\ \ |z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$$

(فرمول موآور) $$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

از روی فرمول موآور $\cos nx$ و $\sin nx$ را می‌توان برحسب توانهائی از $\cos x$ و $\sin x$ محاسبه نمود. ریشه‌گیری از اعداد مختلط نیز به سادگی صورت می‌پذیرد و به کمک ریشه‌گیری می‌توان به حل معادلات پرداخت برای این منظور فرض کنید $z=re^{i\theta}$ عددی مفروض باشد آنگاه، $w=\rho e^{i\phi}$ را می‌خواهیم طوری بیابیم که $w^n=z$ که آن را به صورت $w=z^{\frac{1}{n}}$ نیز می‌نویسیم از $w^n=z$ می‌یابیم

$\rho^n e^{in\phi}=re^{i\theta}$

و از آنجا $\rho^n = r$ و

$$\phi= \frac{\theta + 2k\pi}{n} \qquad , \qquad n\phi=\theta+2k\pi$$

بنابراین ریشه nام z اعداد مختلط

$$w_k=\sqrt{r}\ e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} \quad و \quad k=0\ ,\ \pm 1\ , \ldots$$

است که تنها n ریشه آن غیرتکراری است. بنابراین $w=z^{1/n}$ دارای n ریشه به صورت زیر است

$$w_k= \sqrt[n]{r}\ e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} \quad ; \quad k=0\ ,\ \pm 1,\ldots,n-1$$

به عنوان مثال و با استفاده از ریشه‌یابی اعداد مختلط جوابهای معادله $x^4+16=0$ را بیابید.

داریم

$$x^4=-16=16e^{i\pi}=16e^{i(\pi+2k\pi)}$$

و از آنجا

$$x_k=2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})}; \quad k=0,1,2,3$$

در نتیجه

$$x_1=2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} =\sqrt{2}(-1+i) \ ، x_0=2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i)$$

$$x_3=2e^{i\frac{7\pi}{4}} =\sqrt{2}(1-i) \ ، \ x_2=2e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1-i)$$

۲.۳. تمرینات

۱. نشان دهید که

a) $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

b) $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x|+|y|\ ,$

$$c)\ \left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \le \frac{|z_1|}{\big||z_2|-|z_3|\big|}$$

$$d)\ |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

۲. مقدار هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

$a)\ \sqrt{-i}\quad b)\ \sqrt{1-i\sqrt{3}}\quad c)\ \sqrt[3]{-1}\quad d)\ \sqrt[3]{1+i}$

۳. نشان دهید که

$$1+z+z^2+\dots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

و با توجه به آن ثابت کنید که

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{2\sin(\theta/2)}\quad;\quad 0<\theta<2\pi$$

۴. نشان دهید که اگر z یکی از ریشه‌های nام واحد بوده و $z\neq1$ آنگاه

$$1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=0$$

۳.۳. نواحی در صفحه مختلط

ε همسایگی نقطه z_0 مجموعه نقاطی از صفحه مختلط است که در نامساوی $|z-z_0|<\varepsilon$ صدق کند.

$$N_\varepsilon(z_0)=\{z\,|\,z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-z_0|<\varepsilon\}$$

فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از صفحه مختلط باشد. نقطه $z_0\in D$ را یک نقطه داخلی D نامند هرگاه همسایگی‌ای از z_0، $N_\varepsilon(Z_0)$، موجود باشد به طوری که $N_\varepsilon(z_0)\subset D$ نقطه z_0 را یک نقطه خارجی D نامند هرگاه $N_\varepsilon(z_0)$ای موجود باشد که

$$N_\varepsilon(z_0)\cap D=\phi$$

نقطه z_0 را یک نقطه کرانه‌ای D نامند هرگاه به ازای هر همسایگی $N_\varepsilon(z_0)$

$$N_\varepsilon(z_0)\cap(\mathbb{C}-D)\neq\phi\quad و\quad N_\varepsilon(z_0)\cap D\neq\phi$$

مجموعه D را یک مجموعه باز نامند هرگاه تمام نقاط آن نقاط داخلی باشند. یک مجموعه را بسته نامند هرگاه شامل نقاط مرزی خود باشد. مجموعه D را ساده نامند هرگاه منحنی مرز آن خود را قطع نکند. مجموعه D را همبند نامند هرگاه بتوان هردو نقطه از آن را با یک خط شکسته طوری بهم وصل نمود که کلیه نقاط این خط شکسته واقع در D باشد.

۴.۳. توابع مختلط

فرض کنید D یک مجموعه باز و هم بند ساده باشد و به ازای هر $z\in D$ عدد مختلط $w=u+iv$ منتسب گردد آنگاه w را تابعی از z نامند هرگاه به ازای هر z دو w مختلف وجود نداشته باشد.

بحث آینده ما در توابع مختلط اختصاص به آن دسته از بستگی‌های بین w و z دارد که بتوان آنها را با یک ضابطه $w=f(z)$ بیان نمود. ما در بحث خود ضابطه $w=f(z)$ را تابع و مجموعه باز و همبند ساده D را حوزه تعریف f یا به طور ساده‌تر حوزه f می‌نامیم. در بحث مربوط به توابع حقیقی مشاهده کردیم که نمودار هر تابع را می‌توان به صورت یک منحنی یا یک سطح نمایش داد. در توابع مختلط چنین نمایش نموداری مقدور نیست. تابع $w=f(z)$ در واقع هر نقطه z از ناحیه D واقع در صفحه x و y را به یک نقطه w واقع در ناحیه D' از صفحه u و v تبدیل می‌کند مثلاً هرگاه $w=z^2$ آنگاه هر نقطه $z=x+iy$ از ناحیه D به یک نقطه $w=u+iv$ با $u=x^2-y^2$ و $v=2xy$ در صفحه w تبدیل می‌شود. مثلاً با توجه به این تابع نقطه $1+i$ از صفحه z به نقطه $2i$ در صفحه w تبدیل می‌شود. بدین جهت وقتی که از تابع $w=f(z)$ در تبدیل ناحیه‌ای از صفحه z به داخل ناحیه‌ای در صفحه w صحبت می‌شود در آن صورت به تابع $w=f(z)$ یک نگاشت یا یک تبدیل می‌گویند. $w=f(z_0)$ را نقش نقطه z_0 با تبدیل $w=f(z)$ می‌نامند. نگاشتی که زاویه را چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت بدون تغییر منتقل کند به نگاشت همدیس موسوم است و جای خاصی در مسائل کاربردی دارد و مبحث نسبتاً بزرگی از این مجموعه را به خود اختصاص می‌دهد. در بحثهای آینده ضمن یادآوری مطالبی

که در توابع حقیقی ارائه شده‌اند بیشتر توجه خود را به مفاهیمی از توابع مختلط معطوف می‌داریم که نظیر آنها در توابع حقیقی موجود نیست. در هر صورت در اینجا بجاست که به بحث در مورد حد و پیوستگی توابع مختلط و سپس به تعریف مشتق و قضایای مربوط به آنها بپردازیم.

تابع $w=f(z)$ در نقطه z_0 دارای حد w_0 است یعنی $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ هرگاه

$$\forall\varepsilon>0\,,\ \exists\delta>0\,,\ |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon$$

تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 پیوسته نامند هرگاه این تابع در z_0 دارای حدی برابر مقدار تابع در این نقطه باشد یعنی

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

هرگاه $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 دارای حد باشند آنگاه به سادگی می‌توان ثابت کرد

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)+g(z))=\lim_{z\to z_0} f(z)+\lim_{z\to z_0} g(z)$$

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)g(z))=\lim_{z\to z_0} f(z)\lim_{z\to z_0} g(z)$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=(\lim_{z\to z_0} f(z))/(\lim_{z\to z_0} g(z))$$

مشروط به اینکه

$$\lim_{z\to z_0} g(z)\neq 0$$

تابع $w=f(z)$ در نقطه z دارای مشتق است هرگاه عبارت $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ وقتی که $\Delta z \to 0$ دارای حد باشد. حد این مقدار را مشتق تابع $f(z)$ نامیده و به $f'(z)$ نمایش می‌دهند.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

مثلاً با توجه به این تعریف به سادگی می‌توان ثابت کرد که تابع $f(z)=z^2$ در نقطه z دارای مشتق $2z$ و مشتق $w=z^n$ برابر $w'=nz^{n-1}$ است و همینطور تابع پیوسته $w=\bar{z}$ در هیچ نقطه دارای مشتق نیست.

تابع $w=f(z)$ را در نقطه z_0 تحلیلی نامند هرگاه یک همسایگی از z_0 موجود باشد که این تابع در تمام نقاط این همسایگی دارای مشتق باشد.

تابع $w=f(z)$ را یک تابع تام نامند هرگاه در کلیه نقاط صفحه z تحلیلی باشد. مثلاً تابع $w=z^2$ و یا هر تابع به صورت یک چند جمله‌ای تابعی تام است.

در ارتباط با مشتق دو قضیه بسیار جالب زیر را داریم :

قضیه ۱ (قضیه اول کشی ریمن). هرگاه تابع $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=x+iy$ دارای مشتق باشد آنگاه

$$f'(z)= \frac{\partial u}{\partial x} +i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} +i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

همچنین

$$\frac{\partial u}{\partial y} =- \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

این معادلات به شرایط یا معادلات کشی ریمن موسومند.

اثبات. داریم

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(u+\Delta u)+i(v+\Delta v)-(u+iv)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}$$

ولی به علت وجود حد فوق می‌توان نوشت

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

و

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta y}=$$

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

بنابراین

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\quad \text{و}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

و اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

قضیه ۲ (قضیه دوم کشی ریمن). هرگاه u و v در تابع $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=x+iy$ در معادلات کشی ریمن صدق کرده و در یک همسایگی از (x,y) پیوسته و با مشتقات جزئی پیوسته باشد آنگاه $f'(z)$ موجود و برابر است با

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

اثبات. با تشکیل عبارت مشتق می‌یابیم

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}$$

در بحث مربوط به توابع دو متغیری آموختیم که

$$\Delta u=u_x\Delta x+u_y\Delta y+\quad \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\Delta v=v_x\Delta x+v_y\Delta y+\quad \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

که در آن $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 \to 0$ وقتی که $\Delta x, \Delta y \to 0$

با استفاده از تساویهای معادلات کشی ریمان نتیجه می‌گیریم

$$\Delta u=u_x\Delta x-v_x\Delta y+\quad \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\Delta v=v_x\Delta x+u_x\Delta y+\quad \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

با جایگزینی این عبارات در عبارت مشتق می‌یابیم

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=u_x+iv_x+(\varepsilon_1+i\varepsilon_2)\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x+i\Delta y}$$

حال چنانچه $\Delta z\to 0$ آنگاه $\Delta x\to 0$ و $\Delta y\to 0$ و از آنجا عبارت

$$\left|(\varepsilon_1+i\varepsilon_2)\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x+i\Delta y}\right|=\sqrt{\varepsilon^2_2+\varepsilon^2_2}$$

به سمت صفر میل خواهد کرد. بنابراین می‌یابیم

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)=u_x+iv_x$$

و اثبات به پایان می‌رسد

هرگاه تغییر متغیر $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ دهیم آنگاه معادلات کشی ریمن در مختصات قطبی به صورت زیر در می‌آیند.

$$u_r=\frac{1}{r}v_\theta \quad و \quad v_r=-\frac{1}{r}u_\theta$$

و مشتق تابع در صورت وجود برابر است با

$$f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}$$

(ثابت کنید).

مثال ۱. مشتق تابع $f(z)=z^2$ را در صورت وجود بیابید.

داریم

$$f(z) = u + iv = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$u_y=-v_x=-2y$, $u_x=v_y=2x$ و $v=2xy$, $u=x^2-y^2$

بنابراین u و v و چهار مشتق جزئی آن پیوسته بوده و در معادلات کشی ریمن صدق می‌کنند، در نتیجه

$$f(z)=z^2$$

دارای مشتق بوده و داریم

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i2y=2z$$

مثال ۲. در پیوستگی و مشتقپذیری تابع $f(z)=\bar{z}$ بحث کنید.

بدیهی است که تابع $f(z)=\bar{z}=x-iy$ در همه نقاط پیوسته است ولی با توجه به اینکه $v=-y$, $u=x$, $u_x=1$ $v_y=-1$ داریم که

$$u_x \neq v_y$$

یعنی این تابع همه جا پیوسته است ولی در هیچ کجا مشتقپذیر نیست.

مثال ۳. مشتق تابع $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ را در صورت وجود بیابید.

داریم

$$v=0 \qquad , \quad u=x^2+y^2$$

بنابراین

$$v_y=0 \quad , v_x=0 \qquad , u_y=2y \qquad , u_x=2x$$

بنابراین $f(z)$ تنها در نقطه $(0,0)$ دارای مشتق است و مشتق آن در این نقطه برابر صفر است.

مثال ۴. مشتق تابع $f(z)=(Rez)^2+i(Imz)^2=x^2+iy^2$ را در صورت وجود بیابید.

داریم

$u_x=2x\ ,\ v_y=2y$ و $v=y^2\ ,\ u=x^2$

u و v تنها وقتی در معادلات کشی ریمن صدق می‌کنند که $y=x$ یعنی تابع پیوسته $f(z)=x^2+iy^2$ تنها روی خط $y=x$ دارای مشتق است و مشتق آن در نقطه (x,x) برابر است با

$f'(x+ix)=2x$

۵.۳. توابع همساز

تابع پیوسته $u(x,y)$ را تابع همساز نامند هرگاه دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته بوده و در معادله لاپلاس صدق کند. هرگاه $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی در نقطه z باشد آنگاه u و v توابعی همساز هستند. در واقع با مشتقگیری از $u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$ به ترتیب نسبت به x و y و جمع کردن نتایج حاصل می‌یابیم $u_{xx}+u_{yy}=0$ و همینطور $v_{xx}+v_{yy}=0$

v را مزدوج همساز تابع همساز u نامند هرگاه $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی باشد، چنانچه u در دست باشد آنگاه با توجه به معادلات کشی ریمن به سادگی می‌توان v، مزدوج همساز u، را مشخص نمود. مثلاً هرگاه $u=x^2-y^2$ آنگاه $u_{xx}+u_{yy}=2-2=0$ حال v را طوری می‌یابیم که

$v_x=-u_y=2y$

و با انتگرالگیری از آن داریم

$v=2xy+h(y)$

با توجه به $v_y=u_x=2x$ و $v_y=2x+h'(y)$ می‌یابیم.

$2x+h'(y)=2x$

و در نتیجه $h'(y)=0$ که ما $h(y)$ را نیز برابر صفر اختیار کرده می‌یابیم

$v(x,y)=2xy$

و از آنجا

$f(z)=x^2-y^2+i2xy=z^2$

که تابعی تحلیلی است.

۶.۳. مسائل حل شده

۱. با توجه به تعریف مشتق نشان دهید که تابع $f(z)=|z|^2$ تنها در $z=0$ دارای مشتق است. با تشکیل عبارت مشتق در $z\neq 0$ می‌یابیم.

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}=\frac{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-x^2-y^2}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$\frac{2x\Delta x+2y\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x$$

و

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2y\Delta y+(\Delta y)^2}{i\Delta y}=-2iy$$

دو حد فوق به ازای $z\neq 0$ با هم برابر نیستند.

هم اکنون با تشکیل عبارت مشتق در $z=0$ می‌یابیم.

$$\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{|\Delta z|^2}{\Delta z}=\frac{(\Delta z)(\overline{\Delta z})}{\Delta z}=\overline{\Delta z}$$

۲. مشتق تابع $f(z)=(1+i)(x+y)^2$ را در صورت وجود بیابید. آیا این تابع جایی در صفحه مختلط تحلیلی است؟

هرگاه بنویسیم $f(z)=u+iv$ آنگاه داریم $u=(x+y)^2$ و $v=(x+y)^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x+y)=\frac{\partial v}{\partial y}$$

ولی $\frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$ زیرا

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2(x+y) \quad \text{و} \quad -\frac{\partial v}{\partial x}=$$

مگر آنکه $2(x+y)=-2(x+y)$ و از آنجا $y=-x$ یعنی تابع تنها روی خ ... مشتق

است و جایی هم تحلیلی نیست. مشتق تابع بر روی خط $y=-x$ عبارت است از

$$f'(x-ix)= ۲(۱+i)(x+y)\Big|_{y=-x} = ۰$$

۳. نشان دهید که تابع $f(z)=\sqrt{xy}$ در نقطهٔ $z=۰$ در معادله کشی ریمن صدق می‌کند ولی در این نقطه دارای مشتق نیست.

داریم $u=\sqrt{xy}$ و $v=۰$ در نقطه $z=۰$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(۰,۰)} = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{u(\Delta x,۰)-u(۰,۰)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{۰-۰}{\Delta x} = ۰$$

همینطور $\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(۰,۰)} = ۰$ و در نتیجه $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. همچنین می‌توان ثابت کرد که شرط دیگر کشی ریمن نیز در مبداء مختصات برقرار است. ولی این تابع در مبداء مختصات دارای مشتق نیست. در واقع

$$\lim_{\Delta z\to ۰} \frac{f(\Delta z)-f(۰)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to ۰\\ \Delta y\to ۰}} \frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta y}$$

از طرفی روی خط $\Delta y=\Delta x$ داریم

$$\lim_{\Delta z\to ۰} \frac{\sqrt{|\Delta x|\,|\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{|\Delta x|}{\Delta x+i\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta z\to ۰^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x+i\Delta x} = \frac{-۱}{۱+i},\quad \lim_{\Delta x\to ۰^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x+i\Delta x}\ \frac{۱}{۱+i}$$

بنابراین $f'(۰)$ موجود نیست.

۴. هرگاه $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه

$$u_x v_x + u_y v_y = ۰$$

با توجه به معادلات کشی ریمن $u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$ می‌یابیم

$$u_x v_x + u_y v_y = ۰ \qquad \text{یا} \qquad -u_x v_x = u_y v_y$$

$u_x v_x + u_y v_y = 0$ یا $-u_x v_x = u_y v_y$

۵. مشتق تابع $f(z) = \cos x + i(\cos x + \cos y)$ را در نقاطی که دارای مشتق است بیابید.

$v = \cos x + \cos y \quad , \quad u = \cos x$

$u_x = -\sin x \quad , \quad u_y = 0$

$v_y = -\sin y \quad , \quad v_x = -\sin x \; ,$

معادلات کشی ریمن تنها وقتی برقرار است که

$\sin x = 0$ و $\sin y = \sin x$

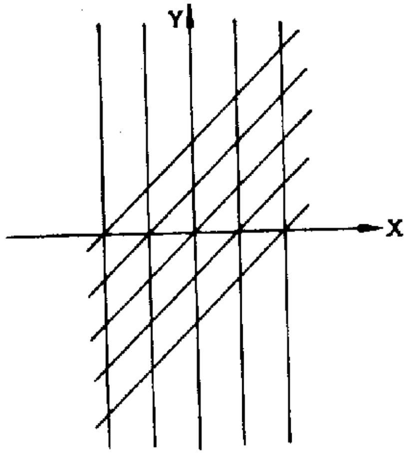
$x = n\pi$ و $y - x = k\pi$

بنابراین تابع فوق تنها در نقاط برخورد خطوط

$y - x = k\pi \; ; \; k = 0, \pm 1, \ldots \quad , \; x = n\pi \; ; \; n = 0, \pm 1 \ldots$

دارای مشتق است و مشتق آن در چنین نقاطی عبارت است از

$f'[n\pi + i(n+k)\pi] = -\sin n\pi - i\sin n\pi = 0$



۷.۳. تمرینات

۱ - با توجه به تعریف مشتق نقاطی راکه هریک از توابع زیر دارای مشتق هستند و یا دارای مشتق نیستند مشخص کنید.

$a)\ f(z)=z|z|^2$ $\qquad$ $b)\ f(z)=Rez+Imz$

۲ - نقاطی راکه هریک از توابع زیر مشتق پذیر، تحلیلی و یا غیر تحلیلی هستند مشخص کنید.

$a)\ f(z)=z^3$ $\qquad$ $b)\ f(z)=i|z|^2$

$c)\ f(z)=\dfrac{Rez}{Imz}$ $\qquad$ $d)\ f(z)=(1+i)(x-y)^2$

$e)\ f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}$ $\qquad$ $f)\ f(z)=Argz$

۳ - آیا توابع زیر همساز هستند؟ در صورت همساز بودن، توابع مزدوج همساز آنها را بیابید و تابع تحلیلی متناظر با آنها را به صورت تابعی از z بنویسید.

$a)\ u=e^x\cos y$ $\qquad$ $b)\ u=(x^2-y^2)^2$ $\qquad$ $c)\ u=x^3-3xy^2$

$d)\ u=x^2-y^2-2x+3y$ $\qquad$ $e)\ u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $f)\ u=2xy$

۴ - a و b را طوری بیابید که هریک از توابع زیر همساز باشند و مزدوج همساز آنها را بیابید.

$a)\ u=e^{ax}\cos by$ $\qquad$ $b)\ u=\cos ax \cosh by$

۵ - هرگاه D مجموعه همه zهایی باشد که $|z|<1$ یا $|z-2|<1$ آنگاه D همبند نیست.

۶ - نقطه z_0 را یک نقطه انباشتگی مجموعه D نامند هرگاه هر همسایگی از z_0 شامل نقطه‌ای از D باشد با توجه به این تعریف نشان دهید که :

الف - هریک از نقاط یک مجموعه باز و همبند یک نقطه انباشتگی آن است.

ب - یک مجموعه متناهی نمی‌تواند شامل نقطه انباشتگی باشد.

۷ – تابع $f(z)=|z|^{۲}$ در تمام صفحه مختلط پیوسته است.

۸ – هرگاه تابع $f(z)$ در $z_{۰}$ پیوسته بوده و $f(z_{۰})\neq ۰$ آنگاه یک همسایگی از $z_{۰}$ موجود است که به ازای هر z از این همسایگی $f(z)\neq ۰$

۹ – هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی باشد آنگاه f یک تابع ثابت است اگر

الف – $\overline{f}(z)$ نیز در D تحلیلی باشد.

ب – $|f|$ در D ثابت باشد.

ج – به ازای هر z از D مقدار f حقیقی باشد.

د – $Ref(z)$ عددی ثابت باشد.

۱۰ – هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی بوده و همواره $f'(z)=۰$ آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

۱۱ – مشتق هریک از توابع زیر را در نقاطی که دارای مشتق هستند بیابید و نقاطی را که تحلیلی هستند مشخص کنید

$a)\ f(z)=|x|+i|y|,$ $\qquad b)\ f(z)=\dfrac{\overline{z}}{|z|}$

$c)\ f(z)=(Rez)^{۲}-i(Imz)^{۲}$ $\qquad d)\ f(z)=|y|-i|x|$

$e)\ f(z)=cos(x+y)+icos(x-y)$ $\qquad f)\ f(z)=cosx+icosy$

$g)\ f(z)=|x-y|+i\,|y+x|$ $\qquad h)\ f(z)=|x^{۲}-y^{۲}|+۲i\,|xy|$

۸.۳ برخی توابع مقدماتی، نگاشتهای همدیس

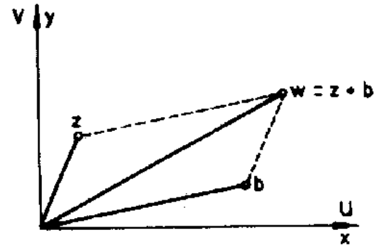
۱. تابع همانی

تابع $f(z)=z$ را یک تابع همانی می‌نامند. هرگاه دو صفحه z و $w=f(z)=u+iv$ را برهم منطبق بگیریم آنگاه داریم $u=x$ و $v=y$. بدیهی است که این تابع تابعی تام بوده و هرشکل را بدون تغییر منتقل می‌کند. همدیس بودن این تابع نیز امری بدیهی است یعنی هرزاویه با این تبدیل بدون تغییر منتقل می‌شود.

۲. تابع $w=z+b$

نظر به اینکه هر عدد مختلط $z=x+iy$ را می‌توان به صورت یک بردار در صفحه مختلط با نقطه آغازی مبداء مختصات و نقطه انتهائی (x,y) تصور نمود، مجموع دو عدد مختلط را نیز میتوان از قاعده‌ای شبیه قاعده جمع بردارها به دست آورد.

بنابراین $w=z+b$ که تابعی تام است هرشکل را بدون تغییر به اندازه b منتقل می‌کند.



۳. توابع خطی

هر تابع به صورت $w=az+b$ که در آن a و b اعداد مختلط ثابتی هستند به یک تابع خطی موسوم است مثلاً $w=iz+1+i=-y+1+i(x+1)$ یک تابع خطی است.

هر تابع خطی تابعی تام است. به طریق جبری به کمک این تبدیل هر منحنی از صفحه z را می‌توان به منحنی‌ای در صفحه w تبدیل نمود مثلاً هرگاه $y=x^2$ یک سهمی در صفحه z باشد آنگاه با توجه به اینکه $u=-y+1$ و $v=x+1$ و با قرار دادن $y=x^2$ می‌یابیم

$$\begin{cases} u=-x^2+1 \\ v=x+1 \end{cases}$$

با حذف x بین این دو معادله به معادله $u-1=-(v-1)^2$ می‌رسیم

تبدیل منحنی‌ها یا نواحی از یک صفحه به صفحه دیگر به روشهای هندسی نیز بسیار جالب است. مثلاً هرگاه تابع $w=az$ را در نظر بگیریم و بنویسیم:

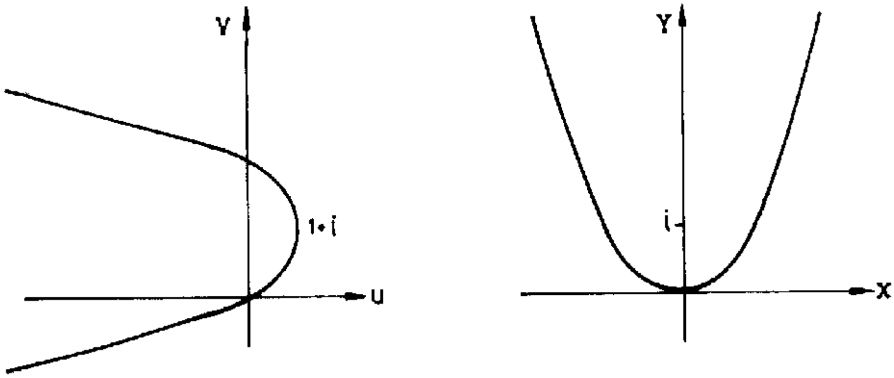
$$w=\rho e^{i\phi} \quad ,z=re^{i\theta} \qquad , a=r_0e^{i\theta_0}$$

آنگاه می‌یابیم

$$w=\rho e^{i\phi} = rr_{\circ} e^{i(\theta+\theta_{\circ})}$$

و از آنجا

$$\phi=\theta+\theta_{\circ} \quad و \quad \rho=rr_{\circ}$$



یعنی برای رسیدن از z به w در تبدیل $w=az+b$ به کمک یک تبدیل خطی نخست انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$ و دورانی به اندازه $\arg a$ و سپس انتقالی به اندازه b لازم است و چون انبساط، انقباض، دوران و انتقال زاویه را عوض نمی‌کند، پس تبدیل خطی تبدیلی همدیس است. قبل از بحث بیشتر در مورد شناخت توابع نیاز به قضیه‌ای در مورد همدیس بودن توابع داریم. این قضیه در ذیل ارائه می‌گردد.

قضیه ۳. هرگاه $w=f(z)=u+iv$ در نقطه z تحلیلی بوده و $f'(z)\neq 0$ آنگاه $w=f(z)$ در z تابعی همدیس است یعنی هر زاویه با راس z را بدون آنکه اندازه یا جهت آن را عوض کند به صفحه w منتقل می‌کند.

اثبات: هرگاه منحنی c با نمایش $z(t)=x(t)+iy(t);\ \alpha\leq t\leq\beta$ باشد آنگاه

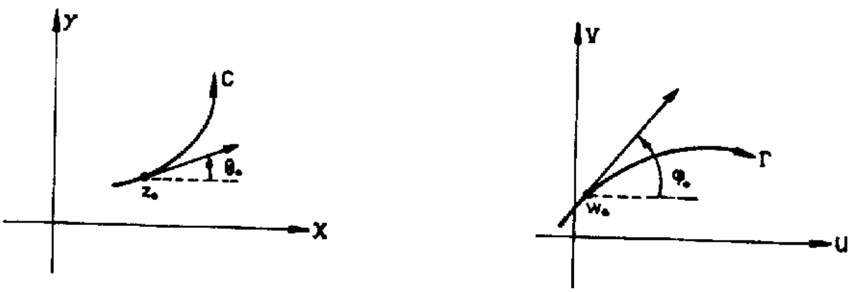
$$w(t)=f(z(t))=u(x(t)\ ,\ y(t))+iv(x(t)\ ,\ y(t))\ ;\ \alpha\leq t\leq\beta$$

نمایش پارامتری c' نقش منحنی c در صفحه uv است. خط مماس بر منحنی c به معادله $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ است و حال آنکه خط مماس بر c' به معادله $w'(t)=f'(z(t))z'(t)$ خواهد بود. با توجه به این تساوی داریم

$$\arg w'(t)=\arg f'(z(t))+\arg z'(t)$$

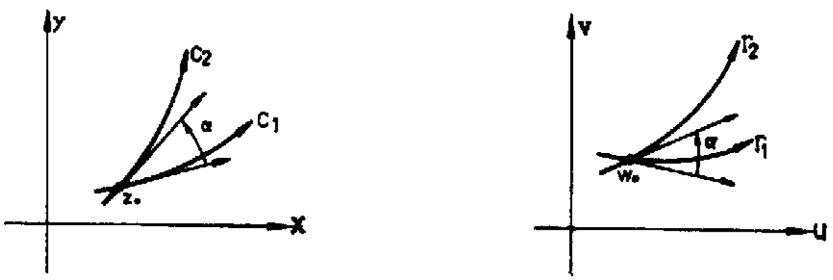
هرگاه ϕ و θ به ترتیب ضریب زاویه خط مماس بر منحنیهای c' و c بوده و $\psi=\arg f'(z)$ آنگاه داریم

$\phi=\psi+\theta$ یا $\theta=\phi-\psi$



حال اگر θ_0 زاویه بین دو منحنی c_1 و c_2 واقع در صفحه xy و ϕ_0 زاویه بین دو منحنی c'_1 و c'_2 نقش منحنی‌های c_1 و c_2 در صفحه uv باشد آنگاه با توجه به نتیجه فوق داریم

$$\theta_0=\theta_2-\theta_1=(\phi_2-\psi)-(\phi_1-\psi)=\phi_2-\phi_1=\phi_0$$

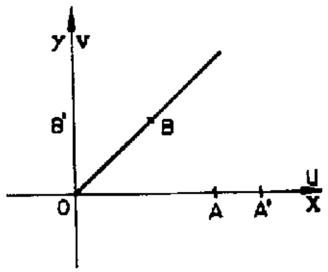


و اثبات حکم به پایان می‌رسد.

حال مجدداً به بررسی توابع برمی‌گردیم و به شناخت توابع جدید می‌پردازیم.

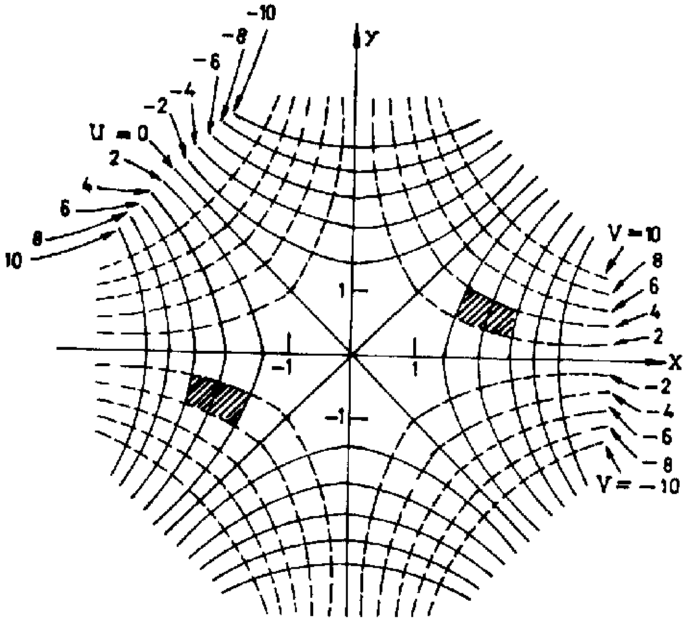
۴. تابع $w=z^۲$

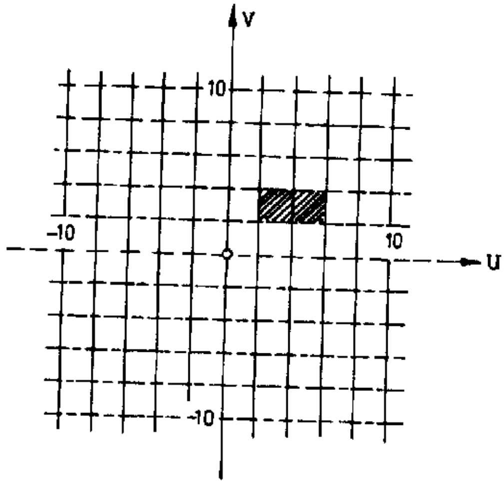
تابع $w=z^۲=x^۲-y^۲+i۲xy$ در همه جا تحلیلی است و در هر نقطه به جز نقطه $z=۰$ که مشتق آن صفراست تابعی همدیس است. با نوشتن $z=re^{i\theta}$ و $w=\rho e^{i\phi}$ می‌یابیم $\rho=r^۲$ و $\phi=۲\theta$ یعنی در این نگاشت یک انبساط یا انقباض به اندازه r و یک دوران به اندازه θ خواهیم داشت و به سادگی می‌توان تحقیق نمود که زاویه $AOB=۴۵^\circ$ در شکل زیر به زاویه $A'OB'=۹۰^\circ$ در صفحه uv تبدیل می‌شود.



یعنی $w=z^۲$ در مبداء مختصات همدیس نیست. نقاط $z=۰$ و $z=۱$ با این نگاشت بدون تغییر می‌ماند یا به عبارت دیگر w این نقاط را به خودشان بدل می‌کند بدین جهت این نقاط نقاط ثابت تبدیل هستند.

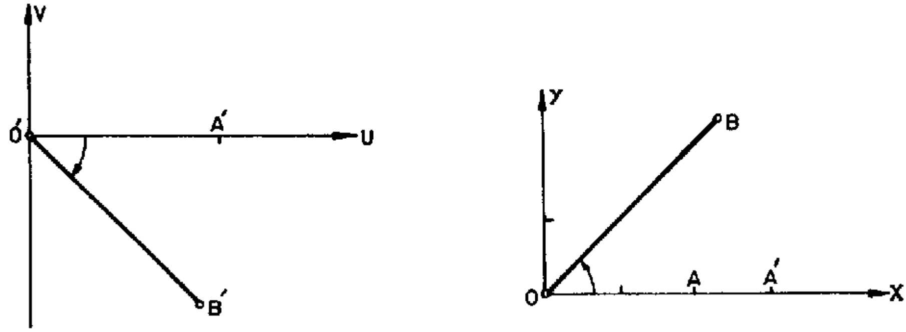
درحالت کلی نقاط ثابت تبدیل $w=f(z)$ از حل معادله $f(z)=z$ به دست می‌آیند. دو هذلولی متعامد $x^۲-y^۲=۱$ و $y=\frac{۱}{x}$ به دو خط راست متعامد $u=۱$ و $v=۲$ تبدیل می‌شوند.





۵. تابع $w=\frac{1}{z}$

این تابع در همه نقاط بجز نقطه $z=0$ تحلیلی است و هر زاویه به رأس مبداء مختصات را هم اندازه خود منتقل می‌کند ولی جهت آنرا تغییر می‌دهد. چنین تغییری در نمودارهای زیر نشان داده شده است.

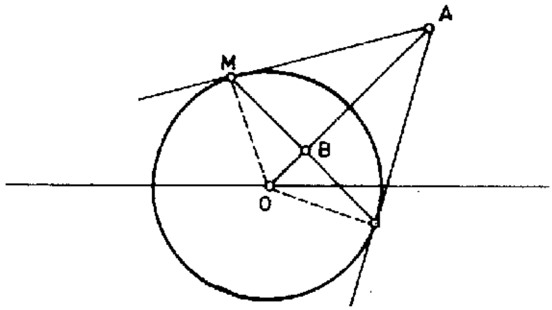


$z=\pm 1$ نقاط ثابت این تبدیل هستند. هرگاه قرار دهیم $z=re^{i\theta}$ و $w=\rho e^{i\phi}$ آنگاه $\rho=\frac{1}{r}$ یا $\rho r=1$ و $\phi=-\theta$ برای رسیدن از z به w می‌توان از انعکاسهای دایره‌ای و آینه‌ای استفاده نمود. یادآوری می‌کنیم که به ازای هر دایره مفروضی به مرکز O نقطه B واقع بر OA را منعکس نقطه A نسبت به دایره‌ای به مرکز O و شعاع R نامند هرگاه $OA\times OB=R^2$ که در آن R شعاع دایره است. در تبدیل فوق هرگاه فرض کنیم z_1 منعکس z نسبت به دایره مثلثاتی است یعنی $|z_1|\,|z|=r\rho=1$ آنگاه w منعکس z_1 نسبت به خط افق نقش نقطه z در صفحه w با تبدیل $w=\frac{1}{z}$ خواهد بود، بنابراین نقش z در صفحه با تبدیل $w=\frac{1}{z}$ بعد از یک انعکاس دایره‌ای نسبت به دایره واحد و یک انعکاس آینه‌ای نسبت به خط افق به دست می‌آید. این نگاشت خارج دایره واحد را به داخل دایره واحد و نیم دایره فوقانی واحد را به نیم دایره تحتانی تبدیل می‌کند. تبدیل $w=\frac{1}{z}$ هر دایره را به یک دایره یا به خط راست و بالعکس تبدیل می‌کند. معادلهٔ کلی یک دایره یا یک خط راست در صفحه z به صورت

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

است. با توجه به $w=\frac{1}{z}$ می‌توان نوشت $z=\frac{1}{w}$ و از آنجا

$$z=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$



و در نتیجه

$$x=\frac{u}{u^2+v^2} \quad \text{و} \quad y=-\frac{v}{u^2+v^2}$$

با جایگزین کردن این عبارات درمعادله فوق می‌یابیم

$$a\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)+\frac{bu}{u^2+v^2}-\frac{cv}{u^2+v^2}+d=0$$

و یا

$$a+bu-cv+d(u^2+v^2)=0$$

بنابراین تبدیل $w=\frac{1}{z}$

الف. به ازای $a\neq 0$ و $d\neq 0$ هر دایره غیر مار بر مبداء مختصات را به یک دایره غیر مار بر مبدأ مختصات تبدیل می‌کند.

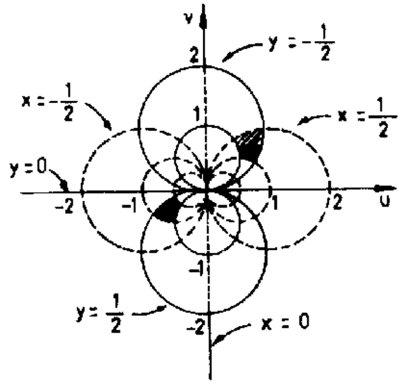
ب. به ازای $a\neq 0$ و $d=0$ هر دایره مار بر مبداء به یک خط راست غیر مار بر مبداء تبدیل می‌کند.

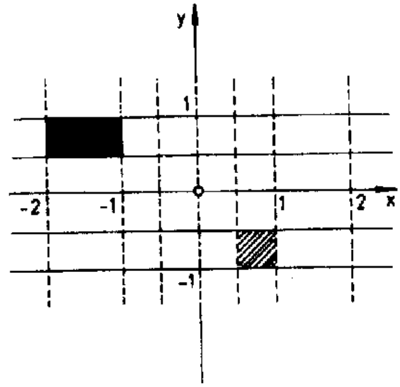
ج. به ازای $a=0$ و $d\neq 0$ هر خط راست غیر مار بر مبداء را به دایره مار بر مبداء تبدیل می‌کند.

هـ به ازای $a=0$ و $d=0$ هر خط راست مار بر مبداء را به یک خط راست مار بر مبداء تبدیل می‌کند. با این تبدیل خطوط متعامد $x=1$ و $y=1$ به ترتیب به دوایر متعامد

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

تبدیل می‌شوند.





۶. تبدیل دو خطی یا تبدیل خطی کسری یا تبدیل موبیوس

هرنگاشت به صورت $w=\frac{az+b}{cz+d}$ که در آن $ad-bc\neq 0$ به تبدیل دو خطی، خطی کسری یا تبدیل موبیوس موسوم است. این تبدیل را می‌توان از ترکیب سایر تبدیلات به دست آورد. در واقع

$$w=\frac{a}{c}\,\frac{z+b/_a}{z+d/_c}=\frac{a}{c}\left(\frac{z+d/_c+b/_a-d/_c}{z+d/_c}\right)=\frac{a}{c}\left(1+\frac{b/_a-c/_d}{z+d/_c}\right)$$

که آن را می‌توان به صورت

$$w=A+\frac{B}{z+C}$$

خلاصه کرد. بنابراین بعداز یک انتقال z به اندازه C و یک انعکاس دایره‌ای نسبت به دایره یکه و یک انعکاس آینه‌ای نسبت به خط افق تبدیل موبیوس به یک تبدیل خطی تبدیل می‌شود. از روی تبدیل $w=\frac{az+b}{cz+d}$ می‌توان نتیجه گرفت $z=\frac{-dw+b}{cw-a}$ یعنی تناظر بین صفحات z و w با این نگاشت یک به یک است. نقش نقطه $z=-\frac{d}{c}$ از صفحه z نقطه بی‌نهایت صفحه w و نقطه $\frac{a}{c}$ از صفحه w نقش نقطه بی‌نهایت صفحه z است. این تبدیل در همه نقاط به جز $z=-\frac{d}{c}$ همدیس است زیرا $w'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ مشتق آن در همه نقاط به جز در $z=-\frac{d}{c}$ موجود است.

این تبدیل دارای خاصیت جالبی است و آن خاصیت این است که تنها یک چنین تبدیلی موجود است که سه نقطه $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ از صفحه z را به ترتیب به روی سه نقطه $w_۱$ و $w_۲$ و $w_۳$ از صفحه w می‌نگارد و این تبدیل را می‌توان از روی تساوی زیر به دست آورد.

$$\frac{w-w_۱}{w-w_۳}\,\frac{w_۲-w_۳}{w_۲-w_۱}=\frac{z-z_۱}{z-z_۳}\,\frac{z_۲-z_۳}{z_۲-z_۱}$$

مثلاً تبدیل $w=\frac{iz+۳}{z-۴}$ نقاط ۱ و ۰ و ۱- را به ترتیب به روی نقاط $-\frac{i}{۳}$-۱، $-\frac{۳}{۴}$ و $\frac{-۳+i}{۵}$ می‌نگارد. همچنین تبدیل $w=\frac{z+۱}{z-۱}$ نقاط ۱ و ۰ و ۱- را به ترتیب به روی نقاط ∞ و ۱- و ۰ می‌نگارد.

۷. تبدیلات خطی کسری خاص

می‌خواهیم تبدیل خطی کسری‌ای بیابیم که نیم صفحه فوقانی $y\geq ۰$ را به روی قرص $|w|\leq ۱$ بنگارد. نظر به اینکه یک تبدیل خطی کسری خط راست را به دایره و یا خط راست بدل می‌کند و ما می‌خواهیم که ناحیه $y\geq ۰$ به قرصی بدل شود بنابراین در این تبدیل خط راست $y=۰$ لازم است که به دایره تبدیل شود و این دایره باید دایره $|w|=۱$ باشد. چون اگر چنین تبدیلی خط $y=۰$ را به دایره‌ای واقع در داخل قرص $|w|<۱$ تبدیل کند آنگاه با توجه به پیوستگی یک تبدیل خطی کسری نقش نقاط نزدیک به خط $y=۰$ و واقع در نیم صفحه تحتانی صفحه z می‌بایست در داخل قرص واقع شوند از طرفی چنین نقاطی می‌بایست نقش نقاطی از نیم صفحه فوقانی باشند و این موضوع با یک به یک بودن تابع خطی کسری متناقض است. بنابراین چنین تبدیل خطی کسریی باید خط $y=۰$ را به دایره $w=۱$ تبدیل کند. حال یک تبدیل خطی به صورت $w=\frac{az+b}{cz+d}$ را در نظر می‌گیریم و این تبدیل را طوری معین می‌کنیم که علاوه برخاصیت فوق سه نقطه $z=۰$ و $z=۱$ و $z=\infty$ را به روی نقاطی واقع بردایرهٔیکه بنگارد نظر به اینکه نقش نقاط $z=۰$ و $z=\infty$ بردایره $|w|=۱$ واقع است می‌یابیم $|b|=|d|$

و $|a|=|c|$ از طرفی با توجه به $ad-bc\neq 0$ می‌یابیم $a\neq 0$ و $c\neq 0$ با توجه به اینکه $|\frac{a}{c}|=1$
و با استفاده از $w=\frac{a}{c}\,\frac{a+b/a}{z+d/c}$ و با فرض

$\frac{a}{c}=e^{i\alpha}$ و $\frac{b}{a}=-z_0$ و $\frac{d}{c}=-z_1$

می‌یابیم

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-z_1}$$

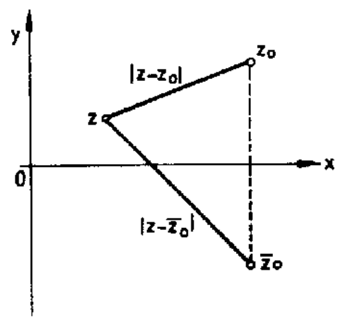
نظر به اینکه $|\frac{b}{a}|=|\frac{d}{c}|$ می‌یابیم $|z_0|=|z_1|$ چون نقش نقطه $z=1$ بر دایره‌یکه واقع است داریم

$$|1-z_1|=|1-z_0|$$

و یا

$$(1-z_1)(1-\bar{z}_1)=(1-z_0)(1-\bar{z}_0)$$

با توجه به $|z_0|=|z_1|$ و یا $z_1\bar{z}_1=z_0\bar{z}_0$ می‌یابیم $z_1+\bar{z}_1=z_0+\bar{z}_0$ بنابراین $Re z_1=Re z_0$ و از $|z_0|=|z_1|$ داریم $z_1=z_0$ یا $z_1=\bar{z}_0$ ولی $z_1=z_0$ به تبدیل ثابت و غیر همدیس $w=e^{i\alpha}$ تبدیل می‌شود. بنابراین تبدیل مورد نظر باید تبدیل $w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ باشد. حال اگر z_0 را در نیم صفحه فوقانی بگیریم آنگاه $|z-z_0|<|z-\bar{z}_0|$ و در نتیجه با چنین انتخابی هر تبدیلی به صورت فوق با هر انتخاب α و با هر انتخاب z_0 از نیم صفحه فوقانی $y>0$ را به روی قرص $|w|\leq 1$ می‌نگارد.



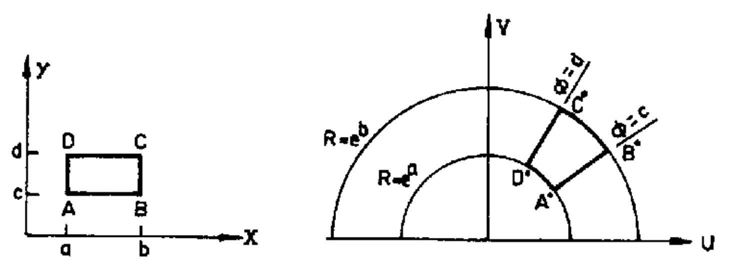
به عنوان مثالی دیگر می‌توان ناحیه $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ را به روی قرص $|w|=1$ نگاشت. برای این منظور کافی است نخست با تبدیل $w_1=z^3$ ناحیه مزبور را به روی ناحیه $0 \le \phi \le \pi$ نگاشت و سپس از تبدیل فوق استفاده نمود و چنین تبدیلی می‌تواند یکی از تبدیلات زیر باشد.

$$w=e^{i\alpha}\frac{z^3-z_0}{z^3-\bar{z}_0} \qquad , Im(z_0)>0$$

۸. نگاشت $w=e^z$

تابع $w=e^z = e^{x+iy}$ را چنین تعریف می‌کنیم $w=e^x e^{iy}$ و با توجه به فرمول اویلر می‌یابیم $w=e^x(cosy+isiny)$ بدیهی است که $u=e^x cosy$ و $v=e^x siny$ در معادلات کشی ریمن صدق می‌کنند. بنابراین تابع $w=e^z$ تابعی تام بوده و مشتق آن با خود تابع برابر است یعنی $w'=e^z$ این تابع همه جا همدیس است زیرا همواره داریم $e^z \neq 0$ نظر به اینکه $e^{z+2k\pi i}=e^z$ بنابراین تابع $w=e^z$ تابعی متناوب با دوره $2k\pi i$ است. و هرگاه فرض کنیم $-\pi<Imz\le\pi$ آنگاه تناظری یک به یک بین نقاط این ناحیه و صفحه w برقرار است. هرگاه بنویسیم $w=\rho e^{i\phi}=e^x e^{iy}$ آنگاه $\rho=e^x$ و $\phi=y$ یعنی خط $-\pi<y\le\pi$; $x=c$ به دایره $\rho=e^c$ و خط $y=d$ به خط شعاعی $\phi=d$ تبدیل می‌شود.

ناحیه $1<x<2$ و $\frac{\pi}{6}<y<\frac{\pi}{3}$ به ناحیه $e<\rho<e^2$ و $\frac{\pi}{6}<\phi<\frac{\pi}{3}$ و ناحیه $x\le 0$ به ناحیه $0\le\rho\le 1$ و ناحیه $x\ge 0$ به ناحیه $\rho\ge 1$ تبدیل می‌شود.



۹. نگاشت $w=\sin z$

تابع $w=\sin z=\sin(x+iy)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$w=\sin x \cos iy+\cos x \sin iy$$

می‌توان ثابت کرد که

$$\sin iy=i\sinh y \quad , \quad \cos iy=\cosh y$$

و در نتیجه

$$\sin z= \sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

توابع

$$v=\cos x \sinh y \quad , \quad u=\sin x \cosh y$$

در معادلات کشی ریمن صدق می‌کنند. بنابراین این تبدیل همه جا تحلیلی است و نظر به اینکه

$$\cos z = \cos x \cosh y-i\sin x \sinh y$$

داریم

$$(\sin z)' = \cos z$$

بسیاری از خواص توابع حقیقی تابع سینوسی در توابع مختلط برقرار است مثلاً می‌توان ثابت نمود.

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2 \quad ; z_1,z_2 \ \varepsilon \mathbb{C}$$

و

$$\sin z= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

همینطور معادله $\sin z=0$ دارای جواب $z=k\pi$ است. در هر صورت این موضوع کلیت ندارد مثلاً معادله $\sin z=5$ نیز دارای جواب است زیرا

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=5$$

نتیجه می‌دهد

$\sin x \cosh y=5$, $\cos x \sinh y=0$ ولی $\sinh y=0$ منجر به $y=0$ و از آنجا $\sin x=5$ می‌شود که غیر ممکن است. بنابراین فرض می‌کنیم $\cos x=0$ که دارای جواب $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ولی جواب $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ منجر به $-\cosh y=5$ می‌شود که غیر ممکن است ولی از $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ نتیجه می‌شود $e^{2y}-10e^{y}+1=0$ که دارای جواب $y=Ln(5\pm2\sqrt{6})$ می‌باشد بنابراین معادله $\sin z=5$ دارای جواب

$$z=2k\pi+\frac{\pi}{2}+iLn(5+2\sqrt{6})$$

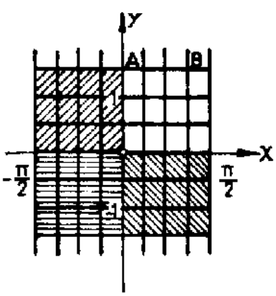
است. نظر به اینکه $\sin(z+2k\pi)=\sin z$ تناظری یک به یک بین ناحیه $-\pi<x<\pi$ و صفحه z برقرار است این تبدیل در نقاط $z=\pm\frac{\pi}{2}$ همدیس نیست زیرا مشتق آن $(\sin z)'=\cos z$ در این نقاط صفر است. خط $0<x=c<\frac{\pi}{2}$ به $u=\sin c \cosh y$ و $v=\cos c \sinh y$ و یا به هذلولی

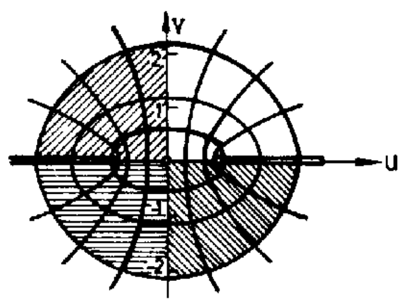
$$\frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

و خط $y=d>0$ به $u=\sin x \cosh d$ و $v=\cos x \sinh d$ و یا به بیضی

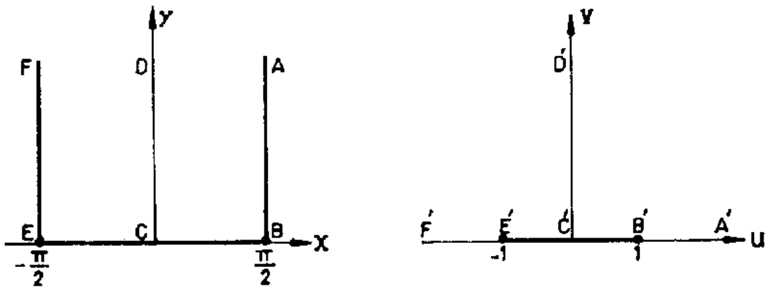
$$\frac{u^2}{\cosh^2 d}+\frac{v^2}{\sinh^2 d}=1$$

تبدیل می‌شود.





نقطه A به A' و نقطه B متناظر با $\frac{\pi}{2} < x = c' < \pi$ به نقطه‌ای در ربع چهارم صفحه w تبدیل می‌شود. خط $x=\frac{\pi}{2}$ به نیم خط $v=0$ و $u=\cosh y \geq 1$، خط $x=-\frac{\pi}{2}$ به نیم خط $v=0$ و نیم خط $u=-\cosh y \leq -1$ و خط $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$ از $y=0$ به پاره خط $v=0$ و $-1 \leq u=\sin x \leq 1$ و خط $x=0$ به خط $u=0$ تبدیل می‌شود.



چنانچه مشاهده می‌کنیم تبدیل $w=\sin z$ در نقاط $z = \pm \frac{\pi}{2}$ همدیس نیست.

۱۰. سایر نگاشت‌ها

بسیاری از تبدیلات را می‌توان از روی تبدیلات دیگر به دست آورد مثلاً نگاشت $w=\cos z$ را می‌توان به صورت

$$w=\cos z=\sin(z+\frac{1}{2}\pi)$$

نوشت یعنی برای یافتن نقش z با نگاشت $\cos z$ اول آن را به اندازه $\frac{1}{2}\pi$ انتقال می‌دهیم و سپس تبدیل سینوسی را برای آن به کار می‌گیریم.

همینطور تبدیل $w=\tan z$ را می‌توان چنین نوشت

$$w=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{(e^{iz}-e^{-iz})}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=\frac{(e^{2iz}-1)}{i(e^{2iz}+1)}$$

با فرض $w_1=e^{2iz}$ می‌توان نوشت

$$w=-i\,\frac{w_1-1}{w_1+1}$$

یعنی نگاشت $tanz$ بعد از یک نگاشت نمائی به یک نگاشت موبیوس تبدیل می‌شود.

تبدیلات سینوسی و کسینوسی هذلولی را نیز می‌توان از روی تبدیلات سینوسی به دست آورد مثلاً $w=coshz$ را چنین می‌نویسند

$$w=cosiz=sin(iz+\frac{\pi}{2})$$

بنابراین تبدیل $coshz$ بعد از یک دوران z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ و انتقالی به اندازه $\frac{\pi}{2}$ و سپس با به کاربردن نگاشت سینوسی برآن حاصل می‌شود. همینطور تبدیل $w=sinhz$ را چنین می‌نویسیم.

$$w=sinhz=-isiniz$$

از اینرو تبدیل $w=sinhz$ بعد از دوران z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ و انجام تبدیل سینوسی بر آن و سپس دورانی به اندازه $\frac{\pi}{2}$- به دست می‌آید.

۱۱. تابع $w=lnz$

تابع $e^w=z$ را به صورت $w=lnz$ نیز می‌نویسند و آن را تابع لگاریتم z می‌نامند. هرگاه بنویسیم $z=re^{i\theta}\ ;\ -\pi\leq\theta\leq\pi$ و $w=u+iv$ آنگاه می‌یابیم

$$e^{u+iv}=e^u e^{iv}=re^{i\theta}$$

و از آنجا $e^u=r$ یا $u=lnr$ و $v=\theta+2k\pi$ بنابراین

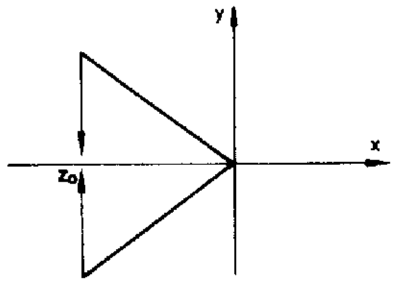
$$lnz=lnr+i(\theta+2k\pi)\ ; \qquad -\pi<\theta\leq\pi$$

چنانچه که مشاهده می‌کنیم لگاریتم یک تابع نیست و بی‌نهایت مقداری است. ولی به ازای هر k ی مشخص فرمول فوق بیانگر یک تابع است. تابعی که به ازای یک k ی مشخص به دست می‌آید به شاخهٔ k ام لگاریتم موسوم است و شاخه متناظر با $k=0$ را شاخه اصلی لگاریتم می‌نامند و به Lnz نمایش می‌دهند بنابراین

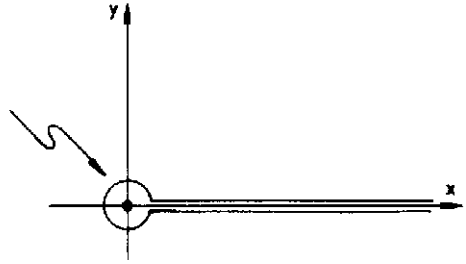
$$Lnz=lnr+i\theta \quad ; -\pi<\theta\leq\pi$$

ما بحث در مورد توابع لگاریتمی با شاخه اصلی را ادامه می‌دهیم. بررسی سایر شاخه‌های لگاریتمی همانند شاخه اصلی است. تابع لگاریتمی Lnz بر روی نیم محور حقیقی منفی تابعی غیر پیوسته است زیرا اگر $z_{\circ}$ واقع بر نیم محور حقیقی منفی باشد آنگاه داریم

$$\lim_{z\uparrow z_{\circ}} Lnz=ln|z_{\circ}|-i\pi \qquad ,\lim_{z\downarrow z_{\circ}} Lnz=ln|z_{\circ}|+i\pi$$



یعنی Lnz بر روی نیم محور حقیقی منفی تابعی غیر پیوسته بوده و اگر z از بالا یا از پایین به سمت $z_{\circ}$ میل کند دارای دو حد غیر برابر بوده و در این نقطه دارای پرشی به اندازهٔ $2\pi i$ است. در سایر نقاط $u=lnr$ و $v=\theta$ در معادلات کشی ریمن صدق کرده و تابع Lnz دارای مشتق $\frac{1}{z}$ است. بنابراین تابع $w=Lnz$ بر روی صفحه مختلط به جز برنیم محور حقیقی نامثبت تحلیلی است. نیم محور حقیقی منفی را یک خط شاخه‌ای تابع لگاریتم می‌نامند و اگر تصور کنیم صفحه مختلط را در طول نیم محور حقیقی بریده‌ایم آنگاه $w=Lnz$ برکل چنین صفحه بریده شده‌ای تحلیلی است. هرگاه به جای $-\pi<\theta\leq\pi$ فرض کنیم $\alpha<\theta\leq\alpha+2\pi$ آنگاه خط شاخه‌ای نیم خط شعاعی $\theta=\alpha$ خواهد بود و بریدگی در طول نیم خط $\theta=\alpha$ صورت می‌پذیرد. همهٔ چنین خطوط شاخه‌ای از یک نقطه می‌گذرند که در اینجا مبداء مختصات می‌باشد چنین نقطه‌ای را نقطه شاخه‌ای می‌نامند. بریدگیها را به صورت زیر نمایش می‌دهند.



خط شاخه‌ای $\theta=0$ $(0<\theta\leq 2\pi)$

۱۲. توابع $w=\sqrt[n]{z}$ ، $w=\sqrt{z}$

هرگاه $-\pi<\theta\leq\pi$ و $z=re^{i\theta}$ آنگاه $w=\sqrt{z}$ به علت آنکه دارای دو جواب

$$w=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \quad و \quad w=\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} = -\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

است نمی‌تواند یک تابع باشد ولی هرکدام از توابع

$$w=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \quad و \quad w=-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

را یک شاخه تابع $w=\sqrt{z}$ نامیده و تابع $w=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ را شاخه اصلی آن می‌نامند. هرگاه بنویسیم $w=u+iv$ داریم

$$u=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} \quad , \quad v=\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$$

آنگاه در هرنقطه غیر از مبداء مختصات و نقاط روی خط شاخه‌ای $\theta=\pi$، u و v در معادلات کشی ریمن صادق‌اند و داریم

$$u_r=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{r}v_\theta \quad , \quad v_r=\frac{\sqrt{r}}{2r}\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{r}u_\theta$$

و

$$f'(z)=e^{-i\theta}(u_r+iv_r)=e^{-i\theta}\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{i}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$\frac{۱}{۲\sqrt{r}} e^{i\frac{\theta}{۲}} e^{-i\theta} = \frac{۱}{۲\sqrt{r}} e^{-i\frac{\theta}{۲}} = \frac{۱}{۲\sqrt{z}}$$

که در آن $\frac{۱}{۲\sqrt{z}}$ شاخه اصلی است.

همانند بحث فوق برای $w=\sqrt{z}$ می‌توان به بررسی $w=\sqrt[n]{z}$ پرداخت (بررسی کنید).

۱۳. تابع توانی $w=z^c$

$w=z^c$ را چنین تعریف می‌کنیم $w=z^c=e^{clnz}$ بنابراین $w=e^{clnz}$ به علت چند مقداری بودن lnz تابع نیست. همانند بحث توابع لگاریتمی کافی است تنها به بررسی تابع $w=e^{cLnz}$ پرداخت. که ما بحث در این مورد را به خواننده واگذار می‌کنیم و در اینجا تنها به محاسبه i^i می‌پردازیم

$$i^i=e^{iLni}=e^{iLne^{(i\pi/۲)}}=e^{i(i\pi/۲)} = e^{-\pi/۲} = \frac{۱}{\sqrt{e^{\pi}}}$$

۹.۳. مسائل حل شده

۱. تبدیل موبیوسی بیابید که نقاط i و ۰ و ۱ را به ترتیب به روی نقاط $\frac{i}{۲}$ و ۰ و $\frac{۱}{۲}(۱+i)$ بنگارد

با توجه به

$$\frac{w-w_۱}{w-w_۳}\,\frac{w_۲-w_۳}{w_۲-w_۱} = \frac{z-z_۱}{z-z_۳}\,\frac{z_۲-z_۳}{z_۲-z_۱}$$

داریم

$$\frac{w-\frac{i}{۲}}{w-\frac{۱}{۲}(۱+i)}\,\frac{۰-\frac{۱}{۲}(۱+i)}{۰-\frac{۱}{۲}i} = \frac{z-i}{z-۱}\,\frac{۰-۱}{۰-i}$$

$$\frac{w-\frac{۱}{۲}i}{w-\frac{۱}{۲}(۱+i)}\,\frac{۲+۲i}{۲i} = \frac{z-i}{z-۱}\,\frac{۱}{i}$$

و یا

$$(w-\frac{i}{۲})(۱+i)(z-۱)=(w-\frac{۱}{۲}(۱+i))(z-i)$$

$$w[(۱+i)(z-۱)]-\frac{i}{۲}(۱+i)(z-۱)=-\frac{۱}{۲}(۱+i))(z-i)+w(z-i)$$

$$w(iz-۱)=-\frac{۱}{۲}(۱+i))(z-i)+\frac{i}{۲}(i+۱)(z-۱)=-\frac{۱}{۲}(۲z)=-z$$

در نتیجه تبدیل مورد نظر عبارت است از

$$w=-\frac{z}{iz-۱}$$

۲. تبدیل موبیوسی بیابید که نقاط $\frac{۱}{۲}$و ۱ و ۳ را به ترتیب به روی ∞ و ۴ و $\frac{۶}{۵}$بنگارد داریم

$$\frac{w-\infty}{w-\frac{۶}{۵}}\ \frac{۴-\frac{۶}{۵}}{۴-\infty}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{z-۳}\times\frac{۱-۳}{۱-\frac{۱}{۲}}$$

$$\frac{\frac{۱۴}{۵}}{w-\frac{۶}{۵}}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{z-۳}(-۴)$$

$$-۴(w-\frac{۶}{۵})\ (z-\frac{۱}{۲})=\frac{۱۴}{۵}(z-۳)$$

و یا

$$w(z-\frac{۱}{۲})=-\frac{۷}{۱۰}(z-۳)+\frac{۶}{۵}(z-\frac{۱}{۲})$$

و در نتیجه

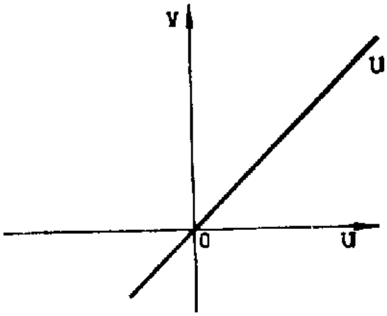
$$w=\frac{z+۳}{۲z-۱}$$

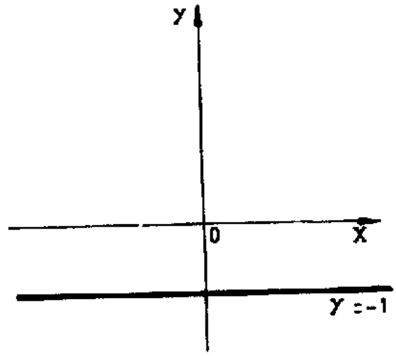
۳. نقش خط $y=-۱$ را با تبدیل $w=(۱+i)z-۲$ پیدا کنید.

$$w=(۱+i)z-۲=(۱+i)(x+iy)-۲=x-y-۲+i(x+y)$$

هرگاه بنویسیم $w=u+iv$ آنگاه می‌یابیم $u=x-y-۲$ ، $v=x+y$ با توجه به $y=-۱$ نتیجه می‌شود $u=x-۱$ و $v=x-۱$ و از آنجا نتیجه می‌شود

$$v=u$$





یعنی خط ۱-=y از صفحه xy به خط $v=u$ در صفحه uv تبدیل می‌شود.

۴. نقش ناحیه $-\pi<x<\pi$ و ۲>y>۱ را با نگاشت $w=sinz$ بیابید

$w=sinz=sinxchy+icosxshy$

بافرض $w=u+iv$ می‌یابیم

$v=cosxshy \quad , u=sinxchy$

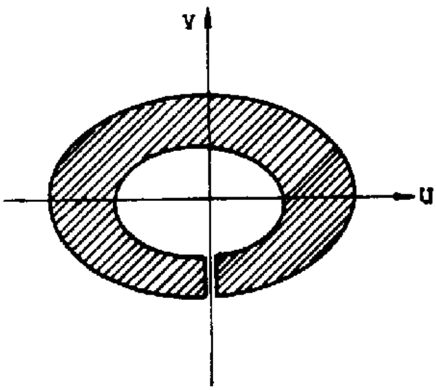
از ۱ = y بیضی

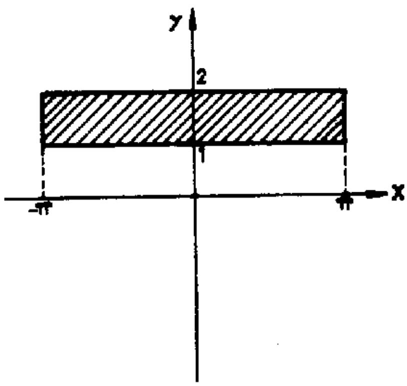
$$\frac{u^۲}{ch^۲۱}+\frac{v^۲}{sh^۲۱}=۱$$

و از ۲ = y بیضی

$$\frac{u^۲}{ch^۲۲}+\frac{v^۲}{sh^۲۲}=۱$$

حاصل می‌شود.





چون x در یک فاصله تناوب $\sin z$ تغییر می‌کند و تناظر بین نوار $-\pi<x<\pi$ و صفحه uv یک به یک است واز طرفی x مقادیر $-\pi$ و π را اختیار نمی‌کند همچنین $x=0$ به خط $u=0$ و $v=shy$ تبدیل می‌شود و چون $1<y<2$ پس مبدل ناحیه مورد نظر به حلقه بین دو بیضی فوق تبدیل می‌شود که در طول محور v بریده شده است.

۵. نقش ناحیه $0<x<1$ و $0<y<1$ را با نگاشت $w=e^z$ بیابید.

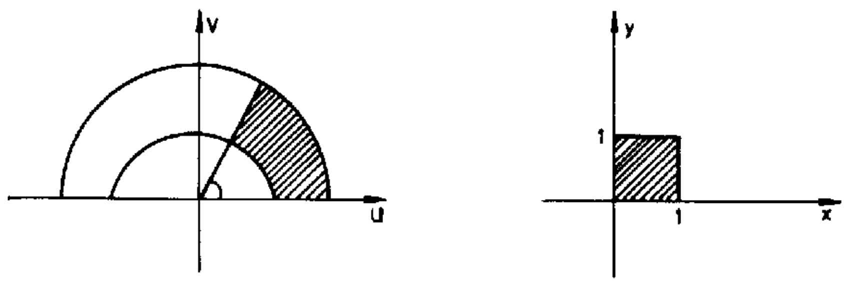
بانوشتن

$$z=x+iy \qquad , \; w=\rho e^{i\phi}$$

می‌یابیم

$$\phi=y \qquad , \; \rho=e^x$$

نوار $0<x<1$ به ناحیه $1<\rho<e$ و نوار $0<y<1$ به ناحیه $0<\phi<1$ تبدیل می‌شود و در نتیجه ناحیه مبدل مورد نظر عبارت است از



۶. نشان دهید که با تبدیل $w=\frac{1}{z}$ مرکز یک دایره به مرکز دایره دیگر تبدیل نمی‌شود.

دایره

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

را در نظر می‌گیریم. نظر به اینکه قرار است دایره به دایره تبدیل شود بنابراین لازم است که $a\neq0$ و $d\neq0$ با تبدیل فوق دایره فوق به دایره

$$a(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

تبدیل می‌شود. معادلات این دوایر را چنین می‌نویسیم

$$(x+\frac{b}{2a})^2+(y+\frac{c}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c^2}{4a^2}-\frac{d}{a}$$

$$(u+\frac{b}{2d})^2+(v-\frac{c}{2d})^2=\frac{b^2}{4d^2}+\frac{c^2}{4d^2}-\frac{a}{d}$$

برای اینکه مراکز دو دایره به یکدیگر تبدیل شوند لازم است که $\frac{b}{2d}=\frac{b}{2a}$ و از آنجا $a=d$ و همچنین

$$\frac{c}{2a}=-\frac{c}{2d}$$

و بنابراین $a=-d$ در نتیجه لازم است $a=d=0$ که خلاف فرض $a\neq 0$ و $d\neq 0$ است. درنتیجه تبدیل $w=\frac{1}{z}$ مراکز دوایر فوق را به یکدیگر تبدیل نمی‌کند.

۷. نشان دهید که

$$|\sin hy|\leq|\sin z|\leq\cosh y$$

داریم

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

و

$$|\sin z|^2=\cos^2x\sinh^2y+\sin^2x\cosh^2y=(1-\sin^2x)\sinh^2y+\sin^2x\cosh^2y$$

$$|\sin z|^2=\sinh^2y+\sin^2x\geq\sinh^2y$$

درنتیجه

$$|\sin z|\geq|\sinh y|$$

ازطرفی

$$|\sin z|^2=\cos^2x\sinh^2y+(1-\cos^2x)\cosh^2y=\cosh^2y-\cos^2x\leq\cosh^2y$$

بنابراین

$$|\sin z|\leq\cosh y$$

۸. مطلوب است محاسبه

$$۲^{۳+۲i}=e^{(۳+۲i)ln۲}=e^{(۳+۲i)(ln۲+۲k\pi i)}=e^{۳ln۲-۴k\pi+i(۲ln۲+۶k\pi)}$$

$$=\{cos(۲Ln۲)+isin(۲Ln۲)\}\, e^{۳ln۲-۴k\pi}$$

۹. نشان دهید که

$$tanh^{-۱}z=\frac{۱}{۲}Ln\frac{۱+z}{۱-z}$$

فرض کنید $w=tanh^{-۱}z$ و از آنجا

$$z=tanhw=\frac{e^{w}-e^{-w}}{e^{w}+e^{-w}}$$

ویا

$$\frac{۱+z}{۱-z}=\frac{۲e^{w}}{۲e^{-w}}=e^{۲w}$$

بنابراین

$$۲w=Ln\frac{۱+z}{۱-z} \qquad \text{ویا} \qquad w=\frac{۱}{۲}Ln\frac{۱+z}{۱-z}$$

۳.۱۰. تمرینات

۱. نقش هریک از منحنیهای زیر را با نگاشت $w=z^{۲}$ بیابید.

$a)\ y=-x \qquad b)\ x=۳ \qquad c)\ y=۱+x \qquad d)\ y^{۲}=x^{۲}+۱$

۲. نقش هریک از نواحی زیر را بانگاشت $w=z^{۲}$ بیابید:

$a)\ |z|>۲ \qquad b)\ ۰\le y\le ۱ \qquad c)\ -\frac{\pi}{۴}<argz<\frac{\pi}{۲}$

۳.نقش هریک از منحنیهای زیر را با نگاشت $w=\frac{۱}{z}$ بیابید:

$a)\ ۰<argz<\frac{\pi}{۴} \qquad b)\ -\frac{\pi}{۴}<argz<\frac{\pi}{۴} \qquad c)\ ۰<x<۱, ۰<y<۱$

۴. نقش هر یک از نواحی زیر را با نگاشت $w=\frac{۱}{z}$ بیابید.

$a)\ |z+۱|=۱ \qquad b)\ y=x-۱ \qquad c)\ x=۱ \qquad d)\ |z-۳i|=۳$

۵. نقش ناحیه $۰\le argz\le\frac{\pi}{۴}$ را با هریک از نگاشتهای زیر بیابید:

$a)\ w=iz$ $b)\ w=z^{۲}$ $c)\ w=iz^{۲}$ $d)\ w=-iz^{۲}$ $e)\ w=z^{۳}$

۶. تبدیل موبیوسی بیابید که

a. سه نقطه ۰، ۱ و ۲ را بر روی ۱، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ بنگارد.

b. $-i$ و ۰ و i را بر روی ۰ و ۱− و ∞ بنگارد.

c. $z=۰$ یک نقطه ثابت آن باشد.

d. ناحیه $|z|\leq ۱$ را بر روی $|w|\leq ۱$ طوری بنگارد که $z=\frac{i}{۴}$ بر روی $w=۰$ نگاشته شود.

e. ناحیه $۰<argz<\frac{\pi}{۴}$ را به روی قرص یکه $|w|=۱$ بنگارد.

f. نقاط $-i$ و i نقاط ثابت آن باشند.

۷. نشان دهید که تبدیل $w=iz+i$ نیم صفحه $x>۰$ را به روی نیم صفحه $v>۱$ می‌نگارد.

۸. نقش ناحیه $y>۱$ را با تبدیل $w=(۱-i)z$ بیابید.

۹. نقش هذلولی $x^{۲}-y^{۲}=۱$ را با تبدیل $w=\frac{۱}{z}$ بیابید.

۱۰. ثابت کنید که اگر مبداء مختصات نقطه ثابت یک تبدیل دوخطی باشد آنگاه آن تبدیل را می‌توان به صورت $w=\frac{z}{cz+d}$ نوشت.

۱۱. نشان دهید که با تبدیل $w=\frac{z-۲}{z}$ قرص $|z-۱|\leq ۱$ به روی نیم صفحه $Rew\leq ۰$ نگاشته می‌شود.

۱۲. نقش هریک از نواحی زیر را با تبدیل $w=e^{z}$ بیابید.

$a)\ -\frac{\pi}{۲}<y<\frac{\pi}{۲}\quad,\quad -۱<x<۱$

$b)\ ۰<y<۱\quad,\quad ۰<x<۲$

$c)\ ۰<y<\frac{\pi}{۴}\quad,\quad -۳<x<-۲$

$d)\ ۰\leq y\leq \pi\quad,\quad x\geq ۰$

$e)\ -\pi\leq y\leq\pi\quad,\quad -۱\leq x\leq ۳$

۱۳. نقشهای هریک از نواحی زیر را با نگاشت $w=sinz$ بیابید.

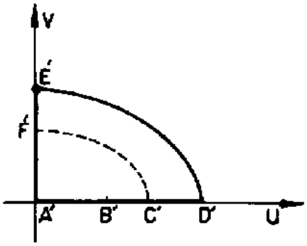
$a)\ ۰<y<۲\quad,\quad ۰<x<\frac{\pi}{۲}$

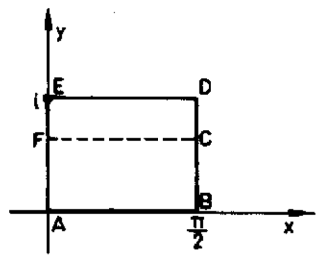
$-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$, $۰<y<۱$ (b

$۰<x<۲\pi$, $۱<y<۲$ (c

۱۴. نشان دهید که $w=\sin z$ خط $x=c$ $(۰<c<\frac{\pi}{۲})$ را به طور یک به یک به روی شاخه سمت راست یک هذلولی می‌نگارد.

۱۵. نشان دهید که تحت تبدیل $w=\sin z$ نقش مرز ناحیه $۰\le x\le\frac{\pi}{۲}$, $۰\le y\le ۱$ پاره‌خطهای $A'D'$ و $A'E'$ و منحنی $E'D'$ است که در آن $E'D'$ قسمتی از یک بیضی است.





۱۶. نشان دهید که نگاشت $w=\cosh z$ پاره خط $z=iy$ $(۰\le y\le\frac{\pi}{۲})$ را به روی پاره خط $۰\le u\le ۱$ و $v=۰$ می‌نگارد.

۱۷. نشان دهید که تبدیل $w=\sin^۲ z$ ناحیه $۰\le x\le\frac{\pi}{۲}$, $y\ge ۰$ را به روی ناحیه $v\ge ۰$ می‌نگارد.

۱۸. نشان دهید که تحت تبدیل $w=(\sin z)^{۱/۴}$ نوار نیمه متناهی $-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲}$ و $y\ge ۰$ به روی قسمتی از ربع اول که زیر خط $u=v$ واقع است نگاشته می‌شود. کرانه‌اش را مشخص کنید.

۱۹. نقش هریک از نواحی زیر را با تبدیل $w=\cos z$ بیابید.

a) $y\ge ۰$, $۰\le x\le\pi$ b) $\frac{۱}{۲}\le y\le ۱$, $۰\le x\le ۲\pi$

۲۰. نقش ناحیه $\frac{\pi}{۴}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و $۲\le|z|\le ۳$ را با تبدیل $w=Lnz$ بیابید.

۲۱. با استفاده از صورت قطبی z نشان دهید که تبدیل $w=z+\frac{1}{z}$ هر دو نیمه بالائی و پائینی دایره ۱ = $|z|$ را به روی پاره خط $-2 \le u \le 2$ و $v=0$ می‌نگارد.

۲۲. نشان دهید که

$a.\ \cos\bar{z} = \overline{\cos z}\quad,\ \sin\bar{z} = \overline{\sin z}$

$b.\ |\sinh y| \le |\cos z| \le \cosh y$

$c.\ |\cosh z| \le \cosh x$

$d.\ \sin^{-1} z = -iLn(iz+\sqrt{(1-z^2)})$

$e.\ \cos^{-1} z = -iLn(z+\sqrt{(z^2-1)})$

$f.\ \cosh^{-1} z = Ln(z+\sqrt{(z^2-1)})$

$g.\ \tan^{-1} z = \frac{1}{2} Ln\frac{1+z}{1-z}$

۲۳. کلیه ریشه‌های معادله $\sin z=\cosh 4$ را بیابید.

۲۴. کلیه ریشه‌های معادله $\cos z=2$ رابیابید.

۲۵. نشان دهید که $\overline{\cos(iz)}=\cos(i\bar{z})$ اگر و فقط اگر $z=n\pi i$.

۲۶. کلیه ریشه‌های معادله $\sinh z=i$ را بیابید.

۲۷. ثابت کنید که اگر

$$z=re^{i\theta}\quad,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\quad,\ r>0$$

آنگاه $Lnz^2=2Lnz$

ولی این تساوی به ازای $-\pi<\theta<\pi$ برقرار نیست.

۲۸. نشان دهید که تابع $\frac{Ln(z-i)}{z^2+i}$ همه جا بجز روی نیمخط $y=1$, $x\le 0$ تحلیلی است.

۲۹. هریک از عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید.

$a.\ (1+i)^i$ $\qquad$ $b.\ (1-i)^{4i}$

۳۰. نقش ناحیه $y>1$ را با تبدیل $w=(1-i)z$ بیابید.

۳۱. نقش هذلولی $x^2-y^2=1$ را با تبدیل $w=\frac{1}{z}$ بیابید.

۳۲.نشان دهید که ترکیب دو تبدیل خطی یک تبدیل خطی است.

۳۳. شاخه‌ای از $Ln(z-۱)$ را تعریف کنید که صفحه z بریده شده در طول نیمخط $x \geq ۱$ ، $y=۰$ را بروی نوار $۰<v<۲\pi$ در صفحه w بنگارد.

۳۴. تبدیل $w=\cosh z$ را برحسب نگاشتهای زیر بیان کنید.

$$Z=e^z \quad , \quad w=\frac{۱}{۲}\left(Z+\frac{۱}{Z}\right)$$

فصل چهارم

انتگرالگیری از توابع مختلط

۱.۴. انتگرال روی خط در صفحه مختلط

در توابع مختلط تنها به تعریف انتگرال روی منحنی می‌پردازند. برای این منظور منحنی c با معادله

$$z(t)=x(t)+iy(t) \qquad ; a\le t\le b$$

را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $w=f(z)$ تابعی پیوسته بوده که براین منحنی تعریف شده باشد. فاصله $a\le t\le b$ را با انتخاب مقادیر $a=t_0<t_1<t_2 \ \dots \ <t_n=b$ به n زیر فاصله تقسیم می‌کنیم و این موضوع سبب می‌شود که نقاط $s_0 , s_1 , \dots , s_n$ بر منحنی c مشخص شوند. هم اکنون نقاط $z_1 , z_2 , \dots , z_n$ را بر روی منحنی‌های جزء $s_0s_1 , s_1s_2 , \dots , s_{n-1}s_n$ به طور دلخواه انتخاب می‌کنیم آنگاه حد زیر در صورت وجود

$$\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k \ ; \ \Delta z_k=z_k-z_{k-1}= \Delta x_k+i\Delta y_k$$

به انتگرال خط تابع $f(z)$ بر منحنی c موسوم است و به صورت $\int_c f(z)\ dz$ نمایش داده می‌شود. بنابراین

$$\int_c f(z)\ dz = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k$$

با فرض آنکه $f(z)=u+iv$ و $f(z_k)=u_k+iv_k$ می‌یابیم.

$$\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k = \lim_{\max \Delta x_k, \Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i(u_k\Delta y_k + v_k\Delta x_k)]$$

بنابراین

$$\int_c f(z)dz = \int_c (udx-vdy) + i\int_c (udy+vdx) = \int_a^b (ux'-vy')dt + i\int_a^b (uy'+vx')dt =$$

$$\int_a^b (u+iv)(x'+iy')dt$$

از اینرو

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t))dz(t)$$

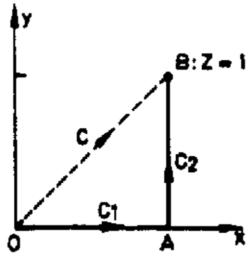
بسیاری از خواص انتگرال روی خط توابع حقیقی در توابع مختلط نیز برقرارند مثلاً هرگاه $c=c_1+c_2$ آنگاه به سادگی می‌توان ثابت کرد

$$\int_c f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz$$

مثال ۱. از تابع $w=z^2$

الف ـ در طول OB ب ـ در طول OAB

انتگرال بگیرید.



حل. معادله پارامتری OB عبارت است از

$$OB: \quad \begin{cases} x=x \\ y=x \end{cases} \quad 0\le x\le 1$$

داریم

$$dz=(1+i)dx\ ,\ z^2=(1+i)^2x^2\ ,\ z=x+ix=x(1+i)$$

بنابراین

$$\int_{OB} z^2dz = \int_0^1 (1+i)^3x^2dx = \frac{(1+i)^3}{3}$$

انتگرال بر OAB چنین می‌نویسیم

$$\int_{OAB} z^2dz = \int_{OA} z^2dz + \int_{AB} z^2dz$$

معادلات پارامتری OA و AB به ترتیب عبارت‌اند از

$$OA: \quad \begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases} \quad 0\le x\le 1\ ;\ AB: \quad \begin{cases} x=1 \\ y=y \end{cases} \quad 0\le y\le 1 \quad ;$$

بر OA داریم

$$dz=dx\ ,\ z^2=x^2\ ,\ z=x$$

همینطور بر AB داریم

$$dz=idy\ ,\ z^2=(1+iy)^2\ ,\ z=1+iy$$

بنابراین

$$\int_{OAB} z^2dz = \int_0^1 x^2dx + i\int_0^1 (1+iy)^2dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1+iy)^3\Big|_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3}$$

مثال ۲. از تابع $w=\frac{1}{z}$ در طول دایره یکه و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید

$$z=e^{i\theta} \quad ;\ 0\le\theta\le 2\pi$$

نمایش دایره یکه است و از آنجا می‌یابیم

$$dz=ie^{i\theta}\,d\theta$$

بنابراین

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}} = 2\pi i$$

مثال ۳. از تابع $w=\frac{1}{z^2}$ در طول دایره یکه در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{2i\theta}} = i\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\, d\theta = 0$$

به طور کلی می‌توان ثابت کرد

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0 & ; n\neq 1 \\ 2\pi i & ; n=1 \end{cases}$$

(ثابت کنید).

مثال ۴. از هر یک از توابع $f(z)=\bar{z}$ و $g(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ در طول دایره یکه و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید:

$$\int_{|z|=1} \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\, ie^{i\theta}\, d\theta = 2\pi i$$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{\bar{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{-i\theta}} = \int_0^{2\pi} ie^{2i\theta}\, d\theta = 0$$

۲.۴. برخی دیگر از خواص انتگرال روی خط مختلط

الف. هرگاه ازتابع $w=f(z)$ روی منحنی c از A تا B و از B تا A انتگرال بگیریم آنگاه می یابیم

$$\int_A^B f(z)\,dz = -\int_B^A f(z)dz$$

ب . هرگاه α و β دو عدد ثابت باشند آنگاه

$$\int_c [\alpha f(z)+\beta g(z)]dz = \alpha \int_c f(z)dz+\beta \int_c g(z)]dz$$

ج – هرگاه L طول قوس منحنی c و $|f(z)| \leq M$ آنگاه داریم

$$|\int_c f(z)dz| \leq ML$$

در واقع

$$|\int_c f(z)dz| \leq \int_a^b |f(z)|\,|z'(t)|dt \leq M\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = ML$$

در انتگرالگیری از توابع مختلط اصولاً با سه نوع از توابع سروکارداریم. دسته اول توابعی هستند که بر cر چنانچه c بسته باشد در داخل c تحلیلی هستند. نوع دوم توابعی هستند که بر c و یا بینهایت نقطه واقع بر c یا درون c تحلیلی نیستند. دسته سوم توابعی هستند که بر c یا درون c در تعدادی متناهی نقاط تحلیلی نیستند.

چگونگی انتگرالگیری از این توابع را در این بخش و بخشهای آینده به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش آخر به کمک انتگرالگیری به روش مختلط به محاسبه برخی انتگرالهای جالب حقیقی می‌پردازیم.

موضوع را با ارائه قضیه زیر که به قضیه انتگرال کشی یا به قضیه کشی گورسا موسوم است آغاز می‌کنیم و با توجه به این قضیه به چگونگی انتگرالگیری از توابع تحلیلی می‌پردازیم.

قضیه ۱ (قضیه انتگرال کشی)

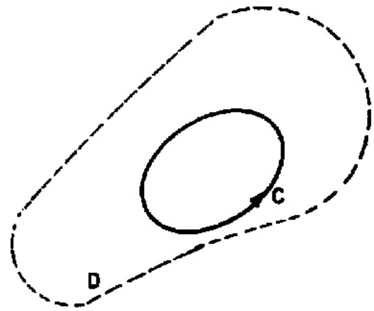
هرگاه $f(z)$ برناحیه کراندار و همبند ساده D تحلیلی و $f'(z)$ پیوسته باشد آنگاه به ازای هر مسیر بسته c واقع در D

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

که در آن انتگرالگیری بر منحنی بسته c در جهت مثلثاتی است.

اثبات. داریم:

$$\oint_c f(z)dz = \oint_c (udx - vdy) + i\oint_c (udy + vdx)$$



با استفاده از قضیه گرین می‌توان نوشت

$$\oint_c f(z)dz = \int_{D'}\int \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int_{D'}\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

با توجه به تحلیلی بودن تابع $f(z)$ می‌یابیم

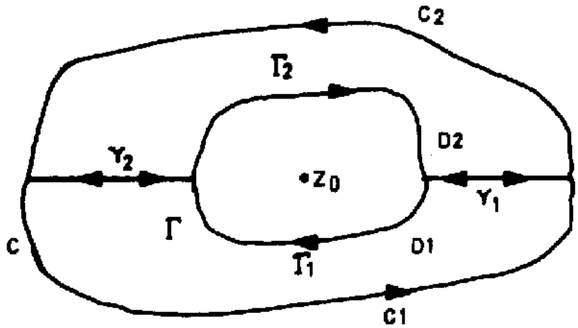
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

بنابراین

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

اثبات این قضیه با شرطی ضعیف‌تر توسط گورسا ارائه شده است. او نشان داد که شرط پیوستگی $f'(z)$ را از قضیه می‌توان حذف نمود. این قضیه دارای کاربردهایی در حل مشکلات مربوط به توابع تحلیلی و غیرتحلیلی است. مثلاً هرگاه $f(z)$ بر c و درون c به جزء در نقطه z_0 تحلیلی باشد آنگاه به ازای هر منحنی بسته Γ واقع در درون c که نقطه z_0 یک نقطه درونی آن باشد داریم

$$\oint_c f(z)dz = \oint_\Gamma f(z)dz$$



که در آن انتگرالگیری بر c و Γ در جهتهای مثلثاتی است. با رسم منحنی‌های γ_1 و γ_2 حلقه واقع بین دو منحنی c و Γ را به دو ناحیه D_1 و D_2 تبدیل می‌کنیم و به علت تحلیلی بودن $f(z)$ بر این دو ناحیه و مرز آنها مقادیر انتگرال تابع $f(z)$ برروی این مرزها صفر است و با انتگرالگیری بر روی γ_1 و γ_2 دو جهت مختلف می‌یابیم

$$\int_{c_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$$

ویا

$$\oint_{c} f(z)dz + \oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

که در آن انتگرالگیری بر c در جهت مثلثاتی و بر Γ در جهت خلاف مثلثاتی صورت می‌پذیرد و در نتیجه

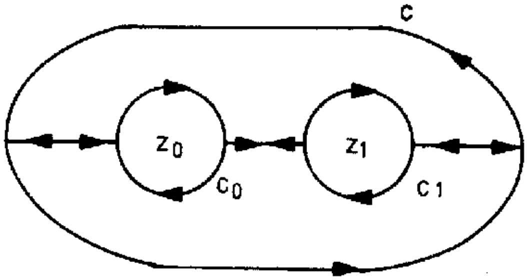
$$\oint_{c} f(z)dz = -\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} f(z)dz$$

که در آن انتگرال گیری در انتگرال اول و آخر در جهت مثلثاتی و در دومین انتگرال در خلاف جهت مثلثاتی انجام می‌شود

این موضوع را می‌توان برای تابع تحلیلی $f(z)$ که بر c و درون آن به جز در نقاط $z_0, z_1, \ldots, z_n$ تحلیلی باشد تعمیم داد. مثلاً هرگاه $f(z)$ تنها در دو نقطه z_0 و z_1 تحلیلی نباشد آنگاه داریم

$$\oint_{c} f(z)dz = \oint_{c_0} f(z)dz + \oint_{c_1} f(z)dz$$

که در آن انتگرالگیری بر c، c_0 و c_1 در جهت مثلثاتی صورت می‌پذیرد.

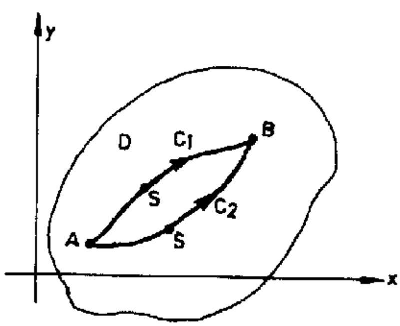


با توجه به قضیه ۱ می‌توان نتیجه گرفت که مقدار انتگرال $f(z)$ از A تا B از مسیری که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند مستقل است. در واقع هرگاه دو نقطه A و B را با دو منحنی c_1 و c_2 واقع در درون c که همدیگر را قطع نکنند به هم وصل کنیم آنگاه $\Gamma=c_1+c_2$ یک منحنی بسته است و با توجه به قضیه انتگرال کشی می‌یابیم

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

و از آنجا

$$\int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz = 0$$



که در آن انتگرالگیری بر c_1 از A تا B و بر c_2 از B تا A محاسبه می‌شود و بنابراین

$$\int_{c_1} f(z)dz=-\int_{c_2} f(z)dz$$

و هرگاه انتگرالگیری بر c_2 را از B تا A به انتگرالگیری از A تا B تغییر دهیم آنگاه مشاهده می‌کنیم که انتگرالگیری از A تا B بر منحنیهای C_1 و C_2 با هم برابرند و ازاین به بعد چنین انتگرالی را به صورت $\int_A^B f(z)dz$ نمایش می‌دهیم و در این مورد قضیه زیر را داریم که بسیار شبیه قضیه انتگرال معین (قضیه نیوتن لایبنیتز) در توابع حقیقی است.

قضیه ۲. هرگاه $f(z)$ در حوزه همبند ساده، D تحلیلی باشد و فرض کنیم z_0 نقطه دلخواهی از D بوده و

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(s)ds$$

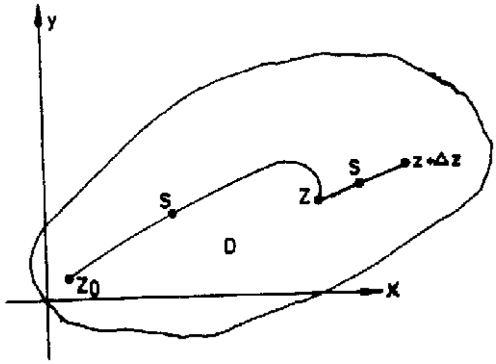
آنگاه

$$F'(z)=f(z)$$

همچنین به ازای هر دو نقطه A و B از D

$$\int_A^B f(z)dz=F(B)-F(A)$$

که در آن $F'(z)=f(z)$.



اثبات. به علت آنکه z یک نقطه داخلی D است. یک همسایگی N از z واقع در D موجود است. با انتخاب $z+\Delta z$ در این همسایگی عبارت مشتق را درنقطه z تشکیل داده می‌یابیم

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds-\int_{z_0}^{z} f(s)ds\right] = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds$$

از طرفی می‌توان نوشت

$$f(z)=\frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} ds=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)ds$$

حال چنین می‌نویسیم

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(s)-f(z)]ds$$

تابع $f(z)$ به علت تحلیل بودن پیوسته نیز هست. بنابراین به ازای عدد مثبت ε عددی مثل δ موجود است به طوری که هرگاه $|\Delta z|<\delta$ آنگاه $|f(z+\Delta z)-f(z)|<\varepsilon$. هم اکنون δ را کوچکتر از شعاع همسایگی N از z می‌گیریم. چون انتگرالگیری از z تا $z+\Delta z$ است داریم

$$|f(s)-f(z)|<\varepsilon \quad \text{و} \quad |s-z|\le|\Delta z|<\delta$$

در آن صورت

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(s)-f(z)]ds\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon\times|\Delta z|=\varepsilon$$

در نتیجه

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$$

$G(z)$ را یک تابع اولیه تابع $f(z)$ نامند هرگاه $G'(z)=f(z)$ بنابراین

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(s)ds$$

یک تابع اولیه $f(z)$ است. نظر به اینکه $F'(z)=f(z)$ از این رو

$$G'(z)-F'(z)=0$$

و بنابراین $G(z)-F(z)=c$ یعنی تفاضل دو تابع اولیه عددی ثابت است.

حال اگر A و B دو نقطه واقع در D باشند آنگاه با انتخاب یک نقطه $Z_{\circ}$ در D می‌توان نوشت

$$\int_A^B f(z)dz=\int_A^{Z_{\circ}} f(z)dz+\int_{z_{\circ}}^B f(z)dz=\int_{z_{\circ}}^B f(z)dz-\int_{z_{\circ}}^A f(z)dz=F(B)-F(A)=F(z)\Big|_A^B$$

مثلاً

$$\int_{\circ}^{۱+i} z^{۲}dz=\frac{۱}{۳}z^{۳}\Big|_{\circ}^{۱+i}=\frac{(۱+i)^{۳}}{۳}$$

بنابراین انتگرالگیری از توابع تحلیلی همانند انتگرالگیری از توابع حقیقی است. قواعد گوناگون انتگرالگیری همچون انتگرالگیری به روش جزء به جزء و روش تغییر متغیر و سایر قواعد را می‌توان در اینجا نیز به کار گرفت.

انتگرالگیری از توابع غیر تحلیلی بر c یا در D تنها وقتی امکان پذیر است که نمایش پارامتری منحنی در دست باشد و انتگرالگیری از آنها تنها با استفاده از

$$\int_c f(z)dz=\int_a^b f(z(t))dz(t)$$

امکان پذیر است. مثالهایی در این مورد نیز در اول این فصل ارائه شده‌اند. بنابراین آنچه باقی می‌ماند انتگرالگیری از توابعی است که در برخی نقاط واقع بر c یا در وزن c تحلیلی نباشند. گرچه از کلیه این توابع با شناخت نمایش پارامتری c می‌توان انتگرال گرفت ولی هدف آن است که از این توابع بر منحنی c بدون نمایش پارامتری منحنی c انتگرال بگیریم. ما در راه رسیدن به چنین اهدافی نیاز به ارائه یک سری قضایای دیگر داریم. این قضایا از قضایای بسیار جالب در توابع مختلط هستند که به شرح زیر ارائه می‌گردند.

قضیه ۳. (فرمول انتگرال کشی)

فرض کنید $f(z)$ بر ناحیه همبند ساده D تحلیلی و c یک منحنی بسته واقع در D و z نقطه‌ای در درون c باشد آنگاه داریم

$$\oint_c \frac{f(s)}{s-z}\,ds = 2\pi i f(z) \quad \text{یا} \quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(s)}{s-z}\,ds$$

که در آن انتگرالگیری بر c در جهت مثلثاتی صورت می‌پذیرد

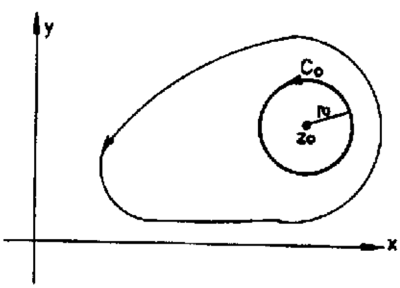
اثبات. می‌نویسیم

$$\oint_c \frac{f(s)}{s-z}\,ds=\oint_c \frac{f(z)}{s-z}\,ds+\oint_c \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds = f(z)\oint_c \frac{ds}{s-z}+\oint_c \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds$$

$$=2\pi i\, f(z) + \oint_c \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds$$

حال نشان می‌دهیم که آخرین انتگرال برابر صفر است. برای این منظور نشان می‌دهیم که قدر مطلق آن از هر عدد مثبت ε کوچکتر است. به ازای ε مفروض عدد مثبت $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2\pi}$ را در نظر می‌گیریم و با توجه به پیوسته بودن تابع $f(z)$ در z، عدد مثبتی مثل δ موجود است به طوری که به ازای هر z که $|s-z|<\delta$ می‌توان نتیجه گرفت $|f(s)-f(z)|<\varepsilon_1$. هم‌اکنون دایره Γ به مرکز z و با شعاعی کوچکتر یا مساوی δ طوری رسم می‌کنیم که در داخل c واقع شود آنگاه می‌یابیم

$$\left|\oint_c \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds\right| = \left|\oint_\Gamma \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds\right| \le \frac{\varepsilon_1}{\delta}\times 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon_1=\varepsilon$$



و چون این نامساوی به ازای هر ε برقرار است بنابراین داریم

$$\oint_c \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\, ds = ۰$$

و در نتیجه

$$f(z)=\frac{۱}{۲\pi i}\oint_c \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

و در یک نقطه مفروض $z=z_۰$ می‌توان نوشت

$$f(z_۰)=\frac{۱}{۲\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_۰}\, dz$$

از روی این قضیه نتیجه می‌گیریم که مقدار تابع را با شناخت تابع بر روی مرز می‌توان به دست آورد و همچنین از دسته خاصی از توابع غیرتحلیلی به صورت $\frac{f(z)}{z-z_۰}$ بر روی هر مسیر بسته c که f برآن و درون آن تحلیلی است بدون استفاده از نمایش پارامتری منحنی c می‌توان انتگرال گرفت. برای این منظور مثال زیر را ارائه می‌کنیم.

مثال ۴. از تابع $f(z)=\frac{z^۲+۲}{z(z^۲-۲)}$ بر روی دایره یکه انتگرال بگیرید.
باتوجه به فرمول انتگرال کشی می‌یابیم .

$$\int_{|z|=۱} \frac{z^۲+۲}{z(z^۲-۲)}\, dz=\int_{|z|=۱} \frac{\frac{z^۲+۲}{z^۲-۲}}{z}\, dz=۲\pi i\, \frac{z^۲+۲}{z^۲-۲}\Big|_{z=۰}=-۲\pi i$$

چنانچه مشاهده کردیم انتگرال یک تابع تحلیلی تابعی تحلیلی است و هم اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم چنین مطلبی را در مورد مشتقات توابع تحلیلی نیز اثبات کنیم. این موضوع رابا ارائه قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۴. هرگاه مفروضات قضیه ۳ برقرار باشد آنگاه داریم

$$f'(z)=\frac{۱}{۲\pi i}\oint_c \frac{f(s)}{(s-z)^۲}\, ds \qquad (۱)$$

و در حالت کلی
(۲)

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds \quad ; n=0,1,2...$$

که در آن انتگرالگیری در طول c در جهت مثلثاتی صورت می‌پذیرد.

اثبات. با توجه به تحلیلی بودن $f(z)$ در نقطه z، $f'(z)$ موجود است و می‌توان نوشت

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

حال با به کار گرفتن فرمول انتگرال کشی برای توابع $f(z)$ و $f(z+\Delta z)$ داریم.

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\oint_c \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{s-(z+\Delta z)}-\frac{1}{s-z}\right]f(s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\oint_c \frac{f(s)ds}{[s-(z+\Delta z)](s-z)}$$

با نوشتن

$$\frac{1}{[s-(z+\Delta z)](s-z)}=\frac{1}{(s-z)^2}+\frac{\Delta z}{(s-z)^2[s-(z+\Delta z)]}$$

می‌یابیم

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\oint \frac{f(s)}{(s-z)^2[(s-z)-\Delta z]}$$

حال اگر $|\Delta z|$ را از d کوتاهترین فاصله از z تا هر نقطه از مرز c اختیار کنیم آنگاه داریم

$$\left|\Delta z\oint_c \frac{f(s)ds}{(s-z)^2[(s-z)-\Delta z]}\right|\leq\frac{ML|\Delta z|}{(d-|\Delta z|)d^2}$$

که در آن M یک کران بالای $|f(z)|$ و L طول قوس منحنی c است. حال اگر Δz به سمت صفر میل کند آنگاه عبارت سمت راست در نامساوی فوق به سمت صفر میل می‌کند و با توجه به آن تساوی (۱) به اثبات می‌رسد.

با به کاربردن فرمول (۱) به طور متوالی می‌توان به فرمول (۲) رسید.

قضیه ۵ (قضیه مررا) هرگاه f بر ناحیه همبند ساده D پیوسته بوده و به ازای هر مرز بسته c واقع در D $\oint_c f(z)dz=0$ آنگاه f در سراسر D تحلیلی است.

اثبات. در قضیه ۲ بیان کردیم که مشتق تابع $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(s)ds$ در صورت تحلیلی بودن $f(z)$ موجود و برابر $F'(z)=f(z)$ است. حال نظر به اینکه F تابعی تحلیلی است بنا به قضیه ۴ مشتق آن که برابر $F(z)$ است تحلیلی خواهد بود بدین طریق قضیه مررا به اثبات می‌رسد.

قضیه ۶ (قضیه اصل ماکزیمم). هرگاه F در ناحیه‌ای تحلیلی و غیر ثابت باشد آنگاه $|f(z)|$ مقدار ماکزیمم خود را روی مرز ناحیه اختیار می‌کند.

اثبات. هرگاه $f(z)$ مقدار ماکزیمم خود را روی مرز اختیارنکند و در یک نقطه z_0 متعلق به داخل D اختیار کند آنگاه ناحیه دایره‌ای $|z-z_0|<r$ را طوری اختیار می‌کنیم که در D واقع شود آنگاه به ازای هر z از ناحیه دایره‌ای داریم $|f(z)|\leq|f(z_0)|$ و با انتگرالگیری از آن می‌یابیم.

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|\, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0)|d\theta = 2\pi |f(z_0)|$$

ویا

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|\, d\theta \leq |f(z_0)| \qquad (1)$$

حال با جایگزین کردن $z-z_0=re^{i\theta}$ و $dz=ire^{i\theta}d\theta$ در فرمول انتگرال کشی

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

که در آن c_1 مرز ناحیه دایره‌ای $|z-z_0|<r$ است، می‌یابیم

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

و از آنجا

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|\,d\theta$$

و با توجه به این نامساوی و نامساوی (۱) می‌یابیم

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|\,d\theta$$

و یا

$$\int_0^{2\pi} [\,|f(z_0)| - |f(z)|\,]\,d\theta = 0$$

نظر به اینکه فرض شده است $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ بنابراین تابع انتگران انتگرال اخیر نامنفی است و چون انتگرال آن صفر است بنابراین لازم است به ازای هر z داشته باشیم $|f(z_0)| = |f(z)|$ از اینرو $f(z)$ باید مطلقاً ثابت باشد که خلاف فرض قضیه است. بنابراین $|f(z)|$ ماکزیمم مقدار خود را در داخل c_1 نمی‌تواند اختیار کند و ماکزیمم را می‌بایستی روی c_1 اختیار کند.

حال اگر چنین نقطه‌ای بر c_1 را z_0 بنامیم نقطه z_0 یک نقطه داخلی در D خواهد بود. هم اکنون با مرکز قرار دادن z_0 و در نظر گرفتن ناحیه دایره‌ای دیگر و با تعمیم اثبات فوق نتیجه می‌شود که $|f(z)|$ تنها می‌تواند مقدار ماکزیمم خود را روی مرز D اختیار می‌کند (ثابت کنید).

قضیه ۷ (قضیه لیوویل). هرگاه f تابعی تام و کراندار باشد آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

اثبات. در قضیه ۴ مشاهده کردیم که چنانچه f در درون دایره $c_0: |s-z| = r$ تحلیلی باشد آنگاه

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{c_0}\frac{f(s)ds}{(s-z)^{n+1}}$$

حال اگر M کران بالای $|f(z)|$ باشد آنگاه به نامساوی زیر که به نامساوی کشی موسوم است می‌رسیم

$$|f^{(n)}(z)|\le\frac{n!M}{r^n}$$

و به ازای $n=1$ داریم

$$|f'(z)|\le\frac{M}{r}$$

به علت تام بودن تابع $f(z)$ می‌توان r را هرقدر که مایل باشیم بزرگ اختیار نمود. حال چنانچه r به سمت بی‌نهایت میل می‌کند می‌یابیم $f'(z)=0$ و از آنجا $f(z)=c$ و اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

قضیه ۸ (قضیه اصلی جبر). هر چند جمله‌ای به صورت

$$p_n(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+....+a_nz^n \qquad ; \qquad a_n\neq 0$$

لااقل دارای یک صفر است. یعنی نقطه‌ای مانند z_0 موجود است به طوری که

$$p_n(z_0)=0$$

اثبات. چنانچه به ازای هر z، $p_n(z)\neq 0$ آنگاه عبارت $f(z)=\frac{1}{p_n(z)}$ همه جا دارای مشتق $f'(z)=-\frac{p'_n(z)}{p^2_n(z)}$ خواهد بود. می‌توان ثابت کرد که عددی مثل R موجود است که به ازای هر z، $|z|\ge R$، داریم (تمرین ۸)

$$|f(z)|=\frac{1}{|p_n(z)|}<\frac{2}{|a_n|R^n}$$

در نتیجه $|f(z)|$ کراندار است و به علت تحلیلی بودن $f(z)$ لازم است که $f(z)$ یا $p_n(z)$ تابعی ثابت باشد که خلاف فرض تعریف یک چند جمله‌ای است. حال بعد از ارائه قضایای جالب فوق مجدداً به چگونگی محاسبه انتگرال توابع غیر تحلیلی‌ای می‌پردازیم که در یک یا چند

نقطه واقع بر مرز انتگرالگیری یا درون آن تحلیلی نیستند. قضایای فوق ما را برای رسیدن به چنین اهدافی یاری خواهند نمود. در هر صورت قبل از بررسی انتگرال چنین توابعی نیاز به شناخت سریها و علی‌الخصوص سریهای توانی مختلط، سریهایی موسوم به سریهای تیلور و لوران داریم که در ذیل به معرفی آنها می‌پردازیم.

۳.۴. سریهای توانی، سریهای تیلور و لوران

هرگاه $\{z_n\}_{n=1}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد آنگاه عبارت $z_1+z_2+\ldots$ که آن را به صورت صوری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ نیز می‌نویسند به یک سری از اعداد مختلط موسوم است. مثلاً

$\left\{ \frac{(1+i)^n}{n!} \right\}_{n=1}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط و $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1+i)^n}{n!} \right\}$ یک سری از اعداد مختلط است. بحث در مورد دنباله‌ها و سریهای توابع مختلط همانند بحثهای متناظر در توابع حقیقی است. ما در اینجا نمی‌خواهیم بحثهای جامعی در مورد دنباله‌ها و سریها در توابع مختلط را ارائه نمائیم در اغلب اوقات می‌توان از قوانین موجود در توابع حقیقی همچون قواعد همگرایی و واگرایی استفاده کرد و در توابع مختلط آنها را به کار گرفت. مجدداً متذکر می‌شویم که ما بدان جهت بحث مربوط به انتگرالها را رها کرده و به سریها روی آورده‌ایم که به کمک آنها بتوانیم به نحوی مشکلات انتگرالگیری را حل کنیم و برای این منظور تنها نیاز به شناخت دسته‌ای خاص از سریها، موسوم به سریهای توانی داریم.

هریک از سریهای

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

$$C_0 + C_1 (z-z_0) + C_2 (z-z_0)^2 + \ldots = \sum^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

به ترتیب به سریهای توانی در حول مبدأ مختصات و حول نقطه $z_\circ$ موسوم‌اند. مابین سریهای توانی سریهای توانی تیلور و لوران از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و ما در ذیل به معرفی آنها می‌پردازیم.

قضیه ۱ (قضیه تیلور). فرض کنید f در درون دایره $c_\circ$ با مرکز $z_\circ$ تحلیلی و z نقطه‌ای در درون $c_\circ$ باشد آنگاه داریم.

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n(z-z_\circ)^n$$

که در آن

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_\circ)}{n!} = \frac{۱}{۲\pi i} \oint_{c_۱} \frac{f(z)\, dz}{(z-z_\circ)^{n+۱}}$$

و $c_۱$ دایره‌ای به مرکز $z_\circ$ واقع در درون $c_\circ$ است.

اثبات. دوایر $c_\circ$ و $c_۱$ را به ترتیب با شعاعهای $r_\circ$ و $r_۱$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم z نقطه‌ای واقع در درون $c_۱$ و $r = |z-z_\circ|$ آنگاه داریم $r<r_۱<r_\circ$ به علت تحلیلی بودن $f(z)$ بر $c_۱$ و درون آن می‌توان نوشت

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i} \oint_{c_۱} \frac{f(s)\, ds}{s-z}$$

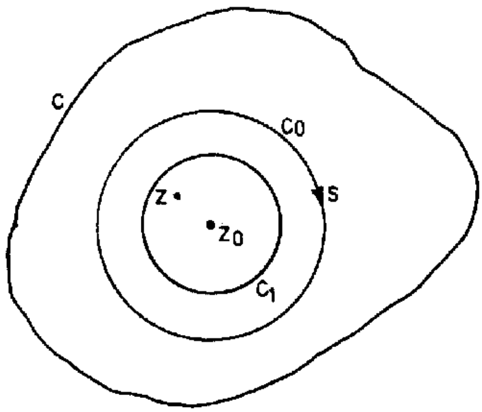
که در آن z یک نقطه درونی $c_۱$ و انتگرالگیری بر $c_۱$ در جهت مثلثاتی است. با توجه به اینکه به ازای $|u| < ۱$

$$\frac{۱}{۱-u} = ۱ + u + u^۲ + ... + u^{k-۱} + \frac{u^k}{۱-u}$$

چنین می‌نویسیم.

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

$$\frac{1}{s-z_0}\left\{1+\frac{z-z_0}{s-z_0}+\dots+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{k-1}+\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{s-z_0}}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^k\right\}$$



چون $\left|\frac{z-z_0}{s-z_0}\right| < 1$ با ضرب طرفین این تساوی در $f(s)ds$ و انتگرالگیری بر روی c_1 و توجه به اینکه

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\ ;\ n=0,1,\dots$$

می‌یابیم

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z-z_0)^{k-1} + R_k(z)$$

که در آن

$$R_k(z) = \frac{(z-z_0)^k}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z)(s-z_0)^k}$$

با توجه به اینکه

$$|s-z| \geq \big||s-z_0|-|z-z_0|\big| = r_1 - r$$

که در آن

$$r= | z - z_0 | , r_1 = | s - z_0 |$$

حال اگر M یک کران بالای $| f(s) |$ در D باشد آنگاه داریم.

$$| R_k (z) | \leq \frac{r^k}{2\pi} \frac{2M \pi r_1}{(r_1 - r) r_1^k} = \frac{M r_1}{r_1 - r} \left(\frac{r}{r_1} \right)^k$$

و چون $\frac{r}{r_1} < 1$ بنابراین $\lim_{k\to\infty} | R_k (z) | = 0$ در نتیجه به ازای هر z که $|z-z_0| < r_0$ می‌یابیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

که در آن

$$a_n= \frac{f^{(n)} (z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(z)\, dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

سری توانی حاصل به سری تیلور حول نقطه $z=z_0$ موسوم است. سری تیلور در حول مبدأ مختصات به سری مکلورن موسوم است. مثلاً در ذیل سری مکلورن چند تابع مقدماتی ارائه شده است.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots ; \qquad | z | < \infty$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots ; \qquad | z | < \infty$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots ; \qquad | z | < \infty$$

$$\sin hz = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots ; \qquad | z | < \infty$$

$$\cos hz = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots; \qquad |z| < \infty$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - + \dots; \qquad |z| < 1$$

$$Ln\,(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \dots; \qquad |z| < 1$$

$$Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right); \qquad |z| < 1$$

همینطور می‌توان ثابت کرد.

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \dots; \qquad |z| > 0$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots; \qquad |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots; \qquad |z| > 0$$

$$\frac{\sin z^2}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - + \dots \qquad |z| > 0$$

$$\frac{1}{z^2} = 1 + 2\,(z+1) + 3(z+1)^2 + \dots; \qquad |z+1| < 1$$

$$e^{z+1} = e\,[1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots] \qquad |z| < \infty$$

هم اکنون مجدداً به توابع تحلیلی بر می‌گردیم و برخی از خواص آنها را مورد بررسی قرار

می‌دهیم چنانچه $f(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی باشد آنگاه می‌توان نوشت.

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z-z_\circ)^n$$

که در آن $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_\circ)$، هرگاه تابع $f(z)$ در $z_\circ$ طوری باشد که

$$f(z_\circ) = f'(z_\circ) = \dots = f^{(m-1)}(z_\circ) = \circ , f^{(m)}(z_\circ) \neq \circ$$

آنگاه $z_\circ$ را یک صفر مرتبه mام تابع $f(z)$ می‌نامند.

قضیه ۲. صفرهای تابع تحلیلی $f(z)$ تنها هستند. یعنی هرگاه $z_\circ$ یک صفر مرتبه mام تابع تحلیلی $f(z)$ باشد آنگاه یک همسایگی از $z_\circ$ موجود است به طوری که به ازای هر $z \neq z_\circ$ از این همسایگی $f(z) \neq \circ$.

اثبات. در بسط تیلور تابع $f(z)$ در حول نقطه $z_\circ$ داریم

$$a_n = \circ \; ; n=1, \dots, m-1 \text{،} \quad a_m \neq \circ$$

و

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_\circ)^n = (z-z_\circ)^m \sum_{n=\circ}^{\infty} a_{n+m} (z-z_\circ)^n$$

بافرض $g(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_{n+m} (z-z_\circ)^n$ مشاهده می‌کنیم که $g(z)$ تابعی تحلیلی در $z_\circ$ است و $g(z_\circ) = a_m \neq \circ$. نظر به پیوسته بودن $g(z)$ در $z_\circ$ به ازای هر عدد مثبت ε عددی مثل δ موجود است به طوری که به ازای هر z با $|z-z_\circ| < \delta$ داریم $|g(z) - g(z_\circ)| < \varepsilon$. با انتخاب $\varepsilon = \frac{1}{2} |a_m|$ عددی δ ی متناظر با آن را به $\delta_\circ$ نمایش می‌دهیم آنگاه به ازای $|z-z_\circ| < \delta_\circ$ داریم $|g(z) - a_m| < 1/2 \, |a_m|$ حال همسایگی به مرکز $z_\circ$ و به شعاع $\frac{1}{2} |a_m|$ همسایگی مورد نظر است و به ازای هر $z \neq z_\circ$ از این همسایگی $g(z) \neq \circ$ زیرا اگر

به ازای $z=z_1$ از این همسایگی $g(z_1) = 0$ آنگاه با جایگزین کردن z_1 به جای z در نامساوی فوق نتیجه می‌شود $|a_m| < \frac{1}{2}|a_m|$ که امری خلاف است. در نتیجه قضیه به اثبات می‌رسد.

هم اکنون با ارائه قضیه زیر به معرفی سری لوران می‌پردازیم.

قضیه ۳ (قضیه لوران). هرگاه $f(z)$ در ناحیه D و مرز آن به جز در نقطه z_0 واقع در D تحلیلی باشد آنگاه

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \ ; \ c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)\, dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

که در آن c یک منحنی بسته و z نقطه‌ای واقع در حلقه بین دو دایره متحدالمرکز c_1 و c_2 به مرکز z_0 واقع در D است.

اثبات . هرگاه دایره Γ به مرکز z واقع در حلقه بین دو دایره c_1 و c_2 را در نظر بگیریم آنگاه داریم

$$\oint_{c_1} \frac{f(s)\, ds}{s-z} - \oint_{c_2} \frac{f(s)\, ds}{s-z} - \oint_{\Gamma} \frac{f(s)\, ds}{s-z} = 0$$

با توجه به فرمول انتگرال کشی می‌یابیم

$$\oint_{c_1} \frac{f(s)\, ds}{s-z} - \oint_{c_2} \frac{f(s)\, ds}{s-z} - 2\pi i\, f(z) = 0$$

و از آنجا

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(s)\, ds}{s-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2} \frac{f(s)\, ds}{s-z} \qquad (1)$$

اکنون چنین می‌نویسیم

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0} + \frac{1}{(s-z_0)^2}(z-z_0) + \dots + \frac{1}{(s-z_0)^k}(z-z_0)^{k+1} + (z-z_0)^k \frac{1}{(s-z)-(s-z_0)^k} \qquad (2)$$

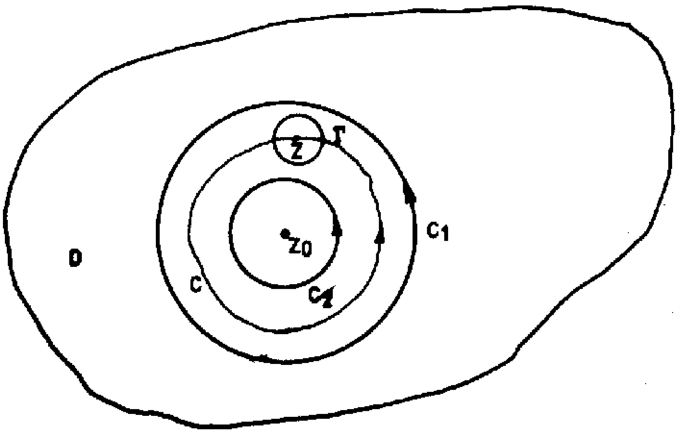
$$\frac{-1}{s-z} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \times \frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{s-z_0}{(z-z_0)^2} + \dots +$$

$$\frac{(s-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k} + \frac{1}{(z-z_0)^k} \times \frac{(s-z_0)^k}{z-s}$$

همینطور

$$\frac{-1}{s-z} = (z-z_0)^{-1} + (z-z_0)^{-2} \times \frac{1}{(s-z_0)^{-1}} + \dots + (z-z_0)^{-k} \times \frac{1}{(s-z)^{-k+1}} +$$

$$\frac{1}{(z-z_0)^k} \times \frac{1}{(z-s)(s-z_0)^{-k}} \qquad (۳)$$



با ضرب طرفین تساویهای (۲) و (۳) در $f(s)\ ds$ و انتگرالگیری بر روی c که با انتگرالگیری بر c_1 و c_2 برابرند و جمع طرفین تساویهای حاصل و با توجه به تساوی (۱) می‌یابیم

$$f(z) = c_0 + c_1 (z-z_0) + c_2 (z-z_0)^2 + \dots + c_{k-1} (z-z_0)^{k-1} + R_k(z) + c_{-1} (z-z_0)^{-1}$$
$$+ c_{-2} (z-z_0)^{-2} + \dots + c_{-k} (z-z_0)^{-k} + Q_k(z)$$

که در آن

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \; ; n=0 , \pm 1 , \pm 2 , \dots , \pm (k-1) , \pm k$$

$$Q_k (z) = \frac{1}{2\pi i (z-z_0)^k} \oint_{c_2} \frac{(s-z_0)^k f(s) \, ds}{z-s} ,$$

$$R_k (z) = \frac{(z-z_0)^k}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(s) \, ds}{(s-z) \, (s-z_0)^k}$$

هرگاه $r= | z-z_0 |$ آنگاه $r_2 < r < r_1$، همانند آنچه در قضیه تیلور گفته شد می‌توان ثابت کرد.

$$| Q_k (z) | \leq \frac{Mr_2}{r-r_2} \left(\frac{r_2}{r} \right)^k \qquad \text{و همچنین} \qquad \lim_{k\to\infty} R_k (z) \to 0$$

و به علت آنکه $\frac{r_2}{r} < 1$ داریم $\lim_{k\to\infty} Q_k (z) \to 0$ و در نتیجه قضیه لوران به اثبات می‌رسد.

بدیهی است که بسط تابع $f(z)$ به صورت یک سری لوران در حول نقطه z_0 که در آن نقطه $f(z)$ غیر تحلیلی است با توجه به قضیه فوق امکان پذیر نیست. زیرا به علت غیر تحلیلی بودن $f(z)$ در z_0 محاسبه ضرایب c_n ممکن نیست. ولی هرگاه بتوان به روشی غیر از روش انتگرالگیری به محاسبه ضرایب سری لوران پرداخت علی‌الخصوص به طریقی ضریب c_{-1} را محاسبه نمود آنگاه می‌یابیم $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f (z) \, dz$ و از آنجا انتگرال تابع غیر تحلیلی $f(z)$ بر روی مسیر c که z_0 یک نقطه داخلی آن است از روی تساوی $\oint_c f(z) \, dz = 2\pi i \, c_{-1}$ قابل محاسبه است. c_{-1} با ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ در حول z_0 از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا با محاسبه آن می‌توان به محاسبه انتگرال توابع غیرتحلیلی پرداخت.

c_{-1} را مانده تابع $f(z)$ در نقطه z_0 می‌نامند و به صورت $\underset{z=z_0}{Res} f(z)$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \underset{z=z_0}{Res} f(z)$$

مثال ۱. هریک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$a)\ \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz \qquad b)\ \int_{|z|=1} z^2 e^{1/z}\, dz$$

a) می‌نویسیم

$$\frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\cos z = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - + \dots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{z} + \frac{1}{4}z - + \dots$$

و از آنجا خواهیم داشت

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

همینطور برای انتگرال دوم می‌نویسیم

$$z^2 e^{1/z} = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{z^3} + \dots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{z} + \dots$$

در نتیجه:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} z^2 e^{1/z} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

و از آنجا

$$\int_{|z|=1} z^2 e^{1/z}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} z^2 e^{1/z} = 2\pi i \times \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$$

همانند فوق می‌توان به محاسبه انتگرال توابع غیر تحلیلی‌ای پرداخت که در چند نقطه واقع در درون مرز بسته‌ای تحلیلی نیستند. برای این منظور قضیه زیر را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۴ (قضیه مانده‌ها). هرگاه $f(z)$ بر مرز ساده و بسته c تحلیلی و در درون آن به جز در نقاط z_1 , z_2 , ... z_n تحلیلی باشد آنگاه.

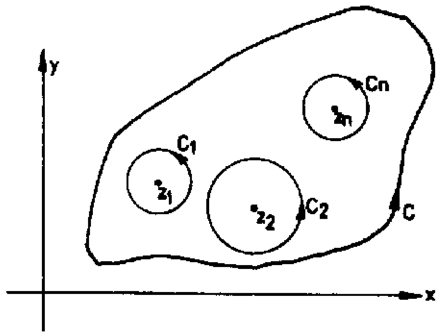
$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum \operatorname*{Rez}_{z=z_k\ ;\ k=1,2,\dots,n} f(z)$$

اثبات. n دایره c_1 و c_2 و c_3 و ... و c_n به مراکز z_1 و z_2 و z_3 و ... و z_n را طوری رسم

می‌کنیم که در داخل منحنی بسته c بوده و با هم نقطه مشترکی نداشته باشند آنگاه می‌توان نوشت.

$$\oint_{c} f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz + \oint_{c_2} f(z)dz + \dots + \oint_{c_n} f(z)dz$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Rez}_{z=z_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Rez}_{z=z_2} f(z) + \dots + 2\pi i \operatorname*{Rez}_{z=z_n} f(z) = 2\pi i \sum \operatorname*{Rez}_{z=z_k \;;\; k=1,2,\dots,n} f(z)$$



مثال ۲. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z(z+1)}\,dz$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z(z+1)}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{z^2+1}{z(z+1)} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^2+1}{z(z+1)} \right)$$

برای یافتن مانده $\frac{z^2+1}{z(z+1)}$ در نقطه $z=0$ بسط لوران این تابع را در نقطه $z=0$ می‌یابیم. با فرض $g(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$ می‌نویسیم

$$\frac{1}{z}\,\frac{z^2+1}{z+1} = \frac{1}{z}\,g(z) = \frac{1}{z}\,[g(0) + g'(0)\,z + \dots]$$

بنابراین

$$\underset{z=z_0}{Rez} \quad \frac{1}{z}\,\frac{z^2+1}{z+1} = g(0) = \left.\frac{z^2+1}{z+1}\right|_{z=0} = 1$$

و همینطور با نوشتن $h(z) = \frac{z^2+1}{z}$ می‌یابیم.

$$\frac{1}{z+1}\,\frac{z^2+1}{z} = \frac{1}{z+1}h(z) = \frac{1}{z+1}[h(-1)+h'(-1)(z+1)+ \dots]$$

و از آنجا

$$\underset{z=-1}{Rez} \quad \frac{1}{z+1}\,\frac{z^2+1}{z} = h(-1) = \left.\frac{z^2+1}{z}\right|_{z=-1} = -2$$

بنابراین

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z(z+1)}\,dz = 2\pi i\ (1-2) = -2\pi i$$

چنانچه مشاهده کردیم برای محاسبه انتگرال توابع غیر تحلیلی بر روی یک منحنی بسته می‌توان به محاسبه مقادیر مانده این تابع در نقاط غیر تحلیلی مورد نظر پرداخت و به کمک آن به محاسبه انتگرال همت گماشت. بدین جهت است که محاسبه مقادیر مانده توابع غیر تحلیلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در برخی از موارد این کار به سادگی صورت می‌پذیرد و این موضوع بیشتر به نوع خود تابع $f(z)$ وابسته است و ما بنا داریم به چگونگی محاسبه مقادیر مانده برای دسته خاصی از توابع $f(z)$ بپردازیم ولی قبل از محاسبه آنها تعاریف زیر را می‌آوریم که در بحثهای مربوط به محاسبه مانده‌ها برای پیشرفت کار مفید هستند.

تعریف ۱. نقطه z_0 را یک نقطه تکین یا یک نقطه منفرد تابع $f(z)$ نامند هرگاه $f(z)$ در این نقطه تحلیلی نباشد.

تعریف ۲. هرگاه بسط لوران تابع $f(z)$ در حول نقطه تکین z_0 را به صورت زیر بنویسیم.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n$$

آنگاه $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n$ یعنی جملات با توانهای منفی در بسط لوران را قسمت اصلی بسط لوران می‌نامند.

تعریف ۳. نقطه تکین z_0 یک نقطه تکین اساسی نامند هرگاه قسمت اصلی بسط لوران دارای تعداد نامتناهی جمله باشد.

تعریف ۴. نقطه تکین z_0 را یک قطب مرتبه mام تابع $f(z)$ نامند هرگاه همه ضرایب c_{-n} به ازای $n > m$ در قسمت اصلی بسط لوران تابع $f(z)$ در حول نقطه z_0 برابر صفر باشد و $c_{-m} \neq 0$ یعنی:

$c_{-n} = 0 \;\; ; n=m+1 , m+2 , \dots$ و $c_{-m} \neq 0$

به عبارت دیگر بسط لوران تابع $f(z)$ در حول z_0 به صورت زیر باشد.

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + c_0 + c_1 (z-z_0) + c_2 (z-z_0)^2 + \dots$$

هر قطب مرتبه اول را یک قطب ساده می‌نامند.

تعریف ۵. نقطه تکین z_0 را یک نقطه تکین برداشتنی نامند هرگاه $f(z)$ را در z_0 بتوان طوری تعریف کرد که تابع غیر تحلیلی در z_0 به تابعی تحلیلی در z_0 تبدیل شود.

مثال ۳. سری لوران هر یک از توابع زیر را بیابید و با توجه به آن نوع نقاط تکین را مشخص کنید.

a) $f(z)=z^3 e^{1/z^2}$ b) $f(z) = \frac{\cos z^2}{z^5}$ c) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$

d) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

در همه توابع فوق $z=0$ یک نقطه تکین است.

$$z^2 e^{1/z^2}=z^3 \left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^4}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^6}+\dots\right)=z^3+z+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\dots$$

یعنی نقطه $z=0$ یک نقطه تکین اساسی است.

$$\frac{\cos z^2}{z^5}=\frac{1}{z^5}\cos z^2=\frac{1}{z^5}\left(1-\frac{1}{2!}z^4+\frac{1}{4!}z^8-+\dots\right)=\frac{1}{z^5}-\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{4!}z^3+\dots$$

بنابراین نقطه تکین $z=0$ یک قطب مرتبه پنجم است.

$$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\dots$$

یعنی $z=0$ یک قطب مرتبه اول یا یک قطب ساده است.

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+-\dots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+-$$

و با تعریف $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ در نقطه $z=0$ به صورت $f(0)=1$ تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ در $z=0$ تحلیلی خواهد شد. بنابراین نقطه صفر یک نقطه تکین برداشتنی $f(z)$ است.

۴.۴. محاسبهٔ مقادیر مانده‌ها

هرگاه $f(z)$ در z_0 دارای قطب مرتبه mام باشد آنگاه به سادگی می‌توان مانده $f(z)$ در z_0 را محاسبه نمود. با توجه به اینکه z_0 قطب مرتبه mام تابع $f(z)$ است می‌یابیم

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\dots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+c_0+c_1(z-z_0)+\dots$$

با ضرب طرفین این تساوی در $(z-z_0)^m$ داریم

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-1}(z-z_0)^{m-1}\, c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\dots c_{-m}+c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+\dots$$

با $m-1$ بار مشتقگیری از طرفین این رابطه نسبت به z و جایگزین کردن z_0 به جای z در نتیجه حاصل می‌یابیم.

$$(m-1)!\, c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

و از آنجا

$$c_{-1} = \underset{z=z_0}{Res} \ f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

هرگاه $z=z_0$ یک قطب ساده $f(z)$ باشد آنگاه

$$c_{-1} = \underset{z=z_0}{Res} \ f(z) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

مثال ۱. مانده‌های تابع $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2+4}$ را بیابید.

این تابع دارای دو قطب ساده $z=\pm 2i$ است و داریم

$$\underset{z=2i}{Res} \ \frac{z^2+1}{z^2+4} = \lim_{z \to 2i} (z-2i) \frac{z^2+1}{z^2+4} = \lim_{z \to 2i} \frac{z^2+1}{z+2i} = \frac{-3}{4i} = \frac{3}{4} i$$

$$\underset{z=-2i}{Res} \ \frac{z^2+1}{z^2+4} = \lim_{z \to -2i} (z+2i) \frac{z^2+1}{z^2+4} = \frac{-3}{-4i} = -\frac{3}{4} i$$

مثال ۲. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} dz$$

تابع $\frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$ دارای قطب ساده $z=0$ و قطب مرتبه دوم $z=\pi$ در داخل دایرهٔ $|z|=4$ است.

$$\underset{z=0}{Res} \ \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} = \lim_{z \to 0} z \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\underset{z=\pi}{Res} \ \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} = \lim_{z \to \pi} \left((z-\pi)^2 \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}\right)' = \lim_{z \to \pi} \left(\frac{\cos z}{z}\right)' = \lim_{z \to \pi} \frac{-z \sin z - \cos z}{z^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

بنابراین

$$\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} dz = 2\pi i \underset{z=0,\pi}{Res} \ \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{4i}{\pi}$$

در حالتی که $f(z)$ را بتوان به صورت $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ نوشت که در آن $P(z)$ و $q(z)$ توابعی

تحلیلی در z_0 هستند و $p(z_0) \neq 0$ و $q(z_0)=0$ ولی $q'(z_0) \neq 0$ آنگاه.

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{q'(z_0)(z-z_0) + 1/2q''(z_0)(z-z_0)^2+\dots} = \frac{1}{z-z_0}\frac{p(z)}{g(z)}$$

$\frac{p(z)}{g(z)}$ تابعی تحلیلی در z_0 است و با توجه به اینکه $g(z_0)=q'(z_0)$ می‌توان نوشت

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{z-z_0}\left[\frac{p(z_0)}{q'(z_0)} + \left(\frac{p(z)}{g(z)}\right)'\Big|_{z=z_0}(z-z_0)+\dots\right]$$

بنابراین $\frac{p(z)}{q(z)}$ دارای قطب ساده است و در نتیجه

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

یعنی هرگاه $f(z)$ در z_0 دارای قطب ساده باشد آنگاه داریم

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{q'(z)}$$

مثال ۳. مانده‌های تابع $f(z) = \frac{z^2+1}{4z^4+3z^2+z}$ را در نقاط $z=0$ و $z=-1$ بیابید.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z^2+1}{4z^4+3z^2+z} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{16z^3+9z^2+1} = 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{z^2+1}{4z^4+3z^2+z} = \lim_{z\to -1}\frac{z^2+1}{16z^3+9z^2+1} = -\frac{1}{3}$$

۵.۴. محاسبهٔ انتگرالهای حقیقی به کمک انتگرالگیری بـه روش مختلط

۱. محاسبه انتگرالهایی به صورت

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

برای محاسبه این انتگرال تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ داده می‌یابیم

$$d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz} \qquad \text{یا} \qquad ie^{i\theta}\, d\theta = dz$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2z}(z^2+1)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2iz}(z^2-1)$$

بنابراین

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} f\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{z}$$

از اینرو انتگرال حقیقی مزبور به یک انتگرال مختلط تبدیل می‌شود که با محاسبه آن به روش مانده‌ها مقدار انتگرال حقیقی محاسبه می‌گردد.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = -\frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-2\sqrt{2}\,z+1}$$

تابع انتگران دارای دو قطب ساده $z=\sqrt{2}\pm 1$ است که تنها قطب $z=\sqrt{2}-1$ در داخل دایره یکه است. بنابراین

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = -2\pi i \times \frac{2}{i} \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1} \frac{1}{z^2-2\sqrt{2}\,z+1} = -\frac{1}{2}(-4\pi) = 2\pi$$

مثال ۲. انتگرال $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$ را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{iz}\,dz}{3-(z+\frac{1}{z})+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})} =$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}$$

تابع انتگران دارای دو قطب ساده $z_1=\frac{1}{5}(2-i)$ و $z_2=2-i$ است که تنها $z_1=\frac{1}{5}(2-i)$ در داخل دایره یکه است. بنابراین

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta} = 2\pi i \lim_{z\to\frac{1}{5}(2-i)} (z-\frac{1}{5}(2-i))\left(\frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}\right)$$

$$=2\pi i \lim_{z\to\frac{1}{5}(2-i)} \frac{1}{(1-2i)z+6i} = 2\pi i \times \frac{1}{2i} = \pi$$

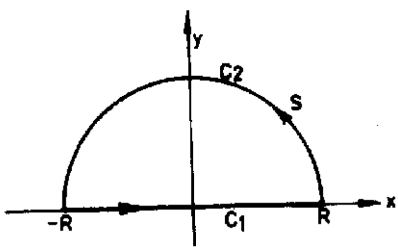
۲. محاسبه انتگرالهای توسعی به یکی از صورتهای

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx \quad , \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx \quad , \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

که در آن $f(x)$ به صورت یک تابع کسری از نسبت دو چند جمله‌ای است درجه مخرج لااقل دو واحد بیشتر از درجه صورت است و مخرج دارای ریشه حقیقی نیست. برای محاسبه هریک از انتگرالهای فوق مثلاً $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$ کافی است به محاسبه انتگرال

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$ بپردازیم. قسمت حقیقی این انتگرال برابر انتگرال کسینوسی و قسمت موهومی آن برابر انتگرال سینوسی است و انتگرال اول به ازای $\alpha=0$ حاصل می‌شود.

برای محاسبه انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$ از تابع $f(z)e^{i\alpha z}$ بر روی مسیر زیر انتگرال می‌گیریم و سپس شعاع نیم دایره را به سمت بینهایت میل می‌دهیم.



داریم

$$\int_{c} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = \int_{c_1} f(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{c_2} f(z)\,e^{i\alpha x}\,dz$$

نظر به اینکه بر مرز c_1 ، $z=x$ می‌یابیم

$$\int_{c} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \int_{c_2} f(z)\,e^{i\alpha z}\,dz$$

نظر به اینکه درجه مخرج تابع $f(z)$ لااقل دو واحد بیشتر از درجه صورت است عدد ثابتی مثل M می‌توان یافت به طوری که .

$$|\,f(z)\,| \le \frac{M}{R^2}$$

در نتیجه می‌توان نوشت.

$$\left| \int_{c_2} f(z)e^{iaz}\,dz \right| \le \frac{M}{R^2} \times \pi R = \frac{\pi M}{R} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx = \lim_{R\to\infty} \oint_{c} f(x)e^{iax}\,dx$$

$$= 2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} Res\, f(z)\, e^{iaz}$$

از اینرو

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} Res\, f(z)\, e^{iaz}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx = Re\,\{2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} Res\, f(z)\, e^{iaz}\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx = Im\,\{2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} Res\, f(z)\, e^{iaz}\}$$

همینطور می‌توان ثابت کرد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} Res\, f(z)$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبه انتگرال: $\int_{0}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$

داریم

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2} \times 2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} Res\, \frac{1+z^2}{1+z^4}$$

معادله $1+z^4=0$ دارای دو جواب $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ در نیم صفحه فوقانی است:

بنابراین

$$\sum_{z=z_1,z_2} Res \frac{1+z^2}{1+z^4} = \frac{1+z^2}{4z^3}\Big|_{z=z_1} + \frac{1+z^2}{4z^3}\Big|_{z=z_2}$$
$$= \frac{1+e^{i\pi/2}}{4e^{i3\pi/4}} + \frac{1+e^{i\frac{3\pi}{2}}}{4e^{i9\pi/4}} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}(i-1)} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}(i+1)} = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \pi i \times \frac{-\sqrt{2}}{2} i = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

مثال ۴. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)^2}$ را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} Res \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$$

در نیم صفحه فوقانی تنها قطب مرتبه دوم $z=i$ را داریم. بنابراین

$$\underset{z=i}{Res} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2 e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} =$$

$$\lim_{z\to i} \frac{ie^{iz}(z+i)^2-2(z+i)e^{iz}}{(z+i)^4} = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}(iz-3)}{(z+i)^3} = -\frac{i}{2e}$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i \times \frac{-i}{2e} = \frac{\pi}{e}$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{e}$$

۳. محاسبه برخی انتگرالهای خاص

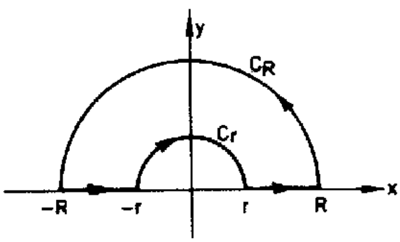
در این قسمت با ارائه چند مثال به محاسبه برخی از انتگرالهای خاص و جالب حقیقی می‌پردازیم. محاسبه این انتگرالها به کمک انتگرالگیری از توابع مختلط صورت می‌پذیرد.

مثال ۵. مطلوب است محاسبه انتگرال: $\int_{0}^{\infty} \frac{Lnx}{(x^2+1)^2}\,dx$

برای محاسبه این انتگرال از تابع $f(z) = \frac{Lnz}{(z^2+1)^2}$ بر روی مسیر بسته c به صورت زیر انتگرال می‌گیریم و سپس R را به بینهایت و r را به صفر میل می‌دهیم.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{-r} f(z)\,dz + \int_{r}^{R} f(z)\,dz + \int_{C_r} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i\left[\frac{d}{dz}\frac{Lnz}{(z+i)^2}\right]\Big|_{z=i} = 2\pi i\left(\frac{\pi+2i}{8}\right) = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}$$



باتوجه به اینکه $0 \le \theta \le \pi$ بر روی نیم دایره بزرگتر c_R می‌توان نوشت

$$|\,Lnz\,| = \sqrt{Ln^2R+\theta^2} \le 2Ln\,R$$

در نتیجه

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \left[\frac{LnR}{(R^2-1)^2}\,\pi R\right] \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

همینطور بر روی نیم دایره کوچکتر c_r داریم $|\,Lnz\,| < 2Ln\,\frac{1}{r}$ و در نتیجه

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,dz\right| \le \left[\frac{2Ln\frac{1}{r}}{(1-r^2)^2}\,\pi r\right] \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

از طرفی

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-r} f(x)\,dx = \int_{r}^{R} \frac{Lnx}{(1+x^2)^2}\,dx + i\pi \int_{r}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

در نتیجه

$$\int_{c} f(z)\,dz = 2 \int_{r}^{R} \frac{Lnx}{(1+x^2)^2}\,dx + i\pi \int_{r}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}$$

و از آنجا داریم

$$2 \int_{0}^{\infty} \frac{Lnx}{(1+x^2)^2}\,dx + i\pi \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}$$

ولی

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\, 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

$$= \pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 \frac{1}{(z^2+1)^2}\right] = \pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right) = \pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{4}$$

در نتیجه

$$2 \int_{0}^{\infty} \frac{Lnx}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{\pi^2}{4} i = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{Lnx}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$$

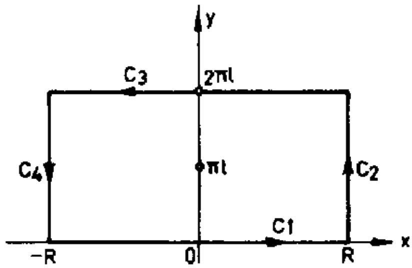
مثال ۶. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^{x}}\,dx \; ; \; 0 < \lambda < 1$ را محاسبه کنید.

از تابع $f(z) = \frac{e^{\lambda z}}{1+e^{z}}$ بر روی مسیر زیر انتگرال گرفته و R را به سمت بی‌نهایت میل

می‌دهیم هرگاه c مسیر مورد نظر باشد و $c=c_1+c_2+c_3+c_4$ آنگاه

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i\pi} \frac{e^{\lambda z}}{1+e^z} = -2\pi i e^{\lambda\pi i}$$



ولی

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\,dx$$

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{\lambda(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,dx = -e^{2\lambda\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\,dx$$

از طرفی بر روی مسیرهای c_2 و c_4 به ترتیب داریم.

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{\lambda(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \leq \frac{e^{\lambda R}}{e^R-1} = \frac{e^{(\lambda-1)R}}{1-e^{-R}}$$

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{\lambda(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right| \leq \frac{e^{-\lambda R}}{1-e^{-R}}$$

و

$$\left|\int_{C_4} f(z)dz\right| \leq 2\pi\left(\frac{e^{-\lambda R}}{1-e^{-R}}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\left|\int_{C_2} f(z)dz\right| \leq 2\pi\left(\frac{e^{(\lambda-1)R}}{1-e^{-R}}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

در نتیجه

$$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)dz = (1-e^{2\lambda\pi i})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i e^{\lambda\pi i}$$

بنابراین

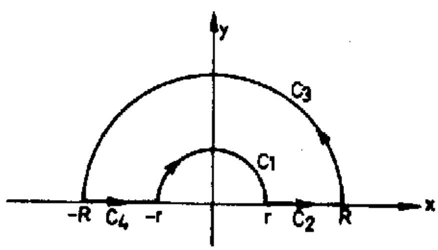
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^{x}}\,dx = \frac{-2\pi i\, e^{\lambda\pi i}}{1-e^{2\lambda\pi i}} = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi} \quad ; 0<\lambda<1$$

مثال ۷. انتگرال $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ را محاسبه کنید.

از تابع $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ بر روی مسیر زیر انتگرال می‌گیریم و فرض می‌کنیم $R\to\infty$ و $r\to 0$ هرگاه c مسیر مورد نظر بوده و $c=c_1+c_2+c_3+c_4$ آنگاه

$$\oint_{C} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0 \quad ,(1)$$



بر روی نیمدایره c_3 به جهت تحلیلی بودن $\frac{e^{iz}}{z}$ می‌توان به طریق جزء به جزء انتگرالگیری نمود و نتیجه گرفت

$$\int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \frac{1}{i}\int_{C_3} \frac{d(e^{iz})}{z} = \frac{e^{iz}}{iz}\Big|_{-R}^{R} + \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{iz^2}\,dz = \frac{e^{iR}+e^{-iR}}{iR} + \frac{1}{i}\int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz$$

بر روی نیمدایره c_3 داریم $|e^{iz}| \le 1$ و از آنجا نتیجه می‌گیریم

$$\left|\int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le \left|\frac{e^{iR}+e^{-iR}}{iR}\right| + \left|\frac{1}{i}\int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz\right| \le \left(\frac{2}{R} + \frac{\pi R}{R^2}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

درنتیجه $\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. بر روی نیم دایره C_1 داریم

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{C_1} \frac{dz}{z} + \int_{C_1} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = -\pi i + \int_{C_1} \frac{e^{iz}-1}{z}\, dz$$

برای تابع $\frac{e^{iz}-1}{z}$ $z=0$ از نوع تکین برداشتنی است و تابع $\frac{e^{iz}-1}{z}$ بجز در $z=0$ تحلیلی و در نتیجه کراندار است یعنی عددی مثل M موجود است که

$$\left| \frac{e^{iz}-1}{z} \right| \le M$$

از اینرو

$$\left| \int_{C_1} \frac{e^{iz}-1}{z} dz \right| \le (M \times \pi r) \underset{r\to 0}{\to} 0$$

هم اکنون اگر در (۱) فرض کنیم $r \to 0$ و $R \to \infty$ آنگاه می‌یابیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \pi i = 0$$

و از آنجا $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \pi i$ و در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۸. انتگرالهای $\int_0^{\infty} \sin x^2\, dx$ و $\int_0^{\infty} \cos x^2\, dx$ را که به انتگرالهای فرنل

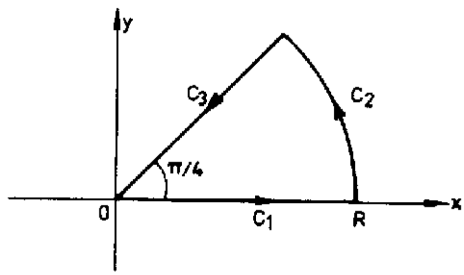
موسوم‌اند محاسبه کنید

از تابع $f(z)=e^{iz^2}$ بر روی مسیر زیر انتگرال می‌گیریم و سپس R را به سمت بی‌نهایت می‌دهیم هرگاه $c=c_1+c_2+c_3$ آنگاه

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz + \int_{c_3} f(z)\,dz = 0 \qquad (1)$$

بر روی مسیر c_3، $z=r\sqrt{i}$ و داریم

$$\lim_{R\to\infty} \int_{c_3} e^{iz^2}dz = \sqrt{i}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,dr = \frac{\sqrt{i}}{2}\sqrt{\pi}$$



بر c_2 بر روش جزء به جزء انتگرال می‌گیریم و می‌یابیم

$$\int_{c_2} e^{iz^2}dz = \int_{c_2} \frac{d(e^{iz^2})}{2iz} = \frac{e^{iz^2}}{2iz}\Bigg|_{R}^{\sqrt{i}\,R} + \frac{1}{2i}\int_{c_2} \frac{e^{iz^2}}{z^2}\,dz$$

$$\left| \frac{e^{-R^2}}{2i\sqrt{i}\,R} - \frac{e^{-iR^2}}{2iR} \right| \le \left(\frac{e^{-R^2}}{2R} + \frac{1}{2R} \right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

و از طرفی

$$\left| \frac{e^{iz^2}}{z^2} \right| = \left| \frac{e^{iR^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}}{z^2} \right| = \frac{e^{-R^2\sin 2\theta}}{R^2}$$

نظر به اینکه $\frac{\pi}{2} \geq 2\theta \geq 0$ ، $0 \leq \sin 2\theta$ و $1 \geq e^{-R^2 \sin 2\theta}$ و بنابراین $\left| \frac{e^{iz^2}}{z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2}$ و در نتیجه

$$\left| \int_{C_2} \frac{e^{iz^2}}{z^2}\, dz \right| \leq \frac{1}{R^2}\frac{\pi R}{4} = \frac{\pi}{4R} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

بنابراین

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} e^{iz^2}\, dz = 0$$

حال اگر در (۱) فرض کنیم $R\to\infty$ آنگاه می‌یابیم

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} e^{iz^2}\, dz - \sqrt{i} \int_0^\infty e^{-r^2}\, dr = 0$$

و با توجه به نتایج فوق داریم

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\, dx = \sqrt{i} \int_0^\infty e^{-r^2}\, dr = \sqrt{i}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ولی

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx + i \int_0^\infty \sin x^2\, dx$$

بنابراین

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \int_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

۶.۴. مسائل حل شده

۱. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z|=1} \frac{(z+4)^3}{z^4 + 5z^3 + 6z^2}\, dz$$

تابع انتگران تنها یک قطب مرتبه دوم $z=0$ در داخل دایره $|z| = 1$ دارد. در نتیجه

$$\int_{|z|=1} \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2}dz=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2}=2\pi i \lim_{z\to 0}[(\frac{(z+4)^3}{z^2(z^2+5z+6)})z^2]'$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z\to 0}\ (\frac{(z+4)^3}{z^2+5z+6})' = -\frac{8}{9}\times\ 2\pi i = -\frac{16\pi i}{9}$$

۲. مطلوب است محاسبه

$$\int_{|z|=1} \frac{\cot z}{z}\ dz$$

تابع $\frac{\cot z}{z}$ دارای قطب مرتبه دوم در $z=0$است. بنابراین

$$\int_{|z|=1} \frac{\cot z}{z}\ dz=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\cot z}{z}=2\pi i\lim_{z\to 0}(z^2\frac{\cos z}{z\sin z})'=2\pi i\lim_{z\to 0}(\cos z)'=0$$

۳. انتگرال $\int_{|z|=1}\frac{1}{e^z-1}\ dz$ را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{e^z-1}=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{e^z-1}=2\pi i\ \frac{1}{(e^z-1)'}\Big|_{z=0}=2\pi i\frac{1}{e^z}\Big|_{z=0}=2\pi i$$

۴. $\int_c \frac{dz}{\sqrt{z}}$ را بر روی نیمدایره مثلثاتی واقع در نیم صفحه فوقانی و در جهت مثلثاتی محاسبه کنید.

$$z=e^{i\theta}\ ,\qquad \sqrt{z}=e^{i\frac{\theta}{2}}\ ,\qquad dz=ie^{i\theta}d\theta$$

$$\int_c \frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_0^\pi e^{-i\frac{\theta}{2}}\ ie^{i\theta}\ d\theta=i\int_0^\pi e^{i\frac{\theta}{2}}\ d\theta=2e^{i\frac{\theta}{2}}\Big|_0^\pi=2(i-1)$$

۵. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^6}\ dz$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} Res \frac{1}{1+z^6}$$

در

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad , \quad e^{i\frac{\pi}{6}} \quad , \quad e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi}{6} i} + \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi}{2} i} + \frac{1}{6} e^{-\frac{25\pi}{6} i} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

۶. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2} dx$ را محاسبه کنید.

به محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{(x^2+4)^2} dx$ می‌پردازیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{(x^2+4)^2} dx = 2\pi i \ \underset{z=2i}{Res} \frac{e^{i2z}}{(z^2+4)^2} = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \left[(z-2i)^2 \frac{e^{i2z}}{(z^2+4)^2} \right]'$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2i} \left(\frac{e^{i2z}}{(z+2i)^2} \right)' = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{2ie^{i2z}(z+2i)^2 - 2(z+2i)\, e^{i2z}}{(z+2i)^4} = \frac{5\pi}{16e^4}$$

۷. نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{1-2a\cos\theta + a^2} = \frac{2\pi a^2}{1-a^2} \quad ; \quad a^2 < 1$$

با فرض $z=e^{i\theta}$ داریم

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right), \ \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \ d\theta = \frac{dz}{iz}$$

بنابراین

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{(z^4+1)dz}{z^2(z-az^2-a+a^2z)} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{(z^4+1)}{z^2(z-a)(1-az)}dz$$

تنها قطبهای $z=a$ و $z=0$ در داخل دایره یکه هستند. از اینرو

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = 2\pi i \sum_{z=0,a} Res \frac{z^4+1}{z^2(z-a)(1-az)} = \pi \left[\lim_{z\to a} \frac{z^4+1}{z^2(1-az)} \right.$$

$$\left. + \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^4+1}{z-az^2-a+a^2z}\right)\right] = \pi \left[\frac{a^4+1}{a^2(1-a^2)} - \frac{a^2+1}{a^2} \right] = \frac{2\pi a^2}{1-a^2}$$

۸. نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi i \sum_{z=i,\ 2i} Res \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = 2\pi i\left(\frac{i}{6}-\frac{i}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

۹. مطلوب است محاسبه

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n}$$

با فرض $z - z_0 = e^{i\theta}$ می‌یابیم $dz = ie^{i\theta}d\theta$ و از آنجا

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = i \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0 \; ; n \neq 1 \\ 2\pi i \; ; n = 1 \end{cases}$$

۷.۴. تمرینات

۱. مطلوب است محاسبه $\int_c f(z)dz$ که در آن

a) $f(z)=Re z$, c سهمی $y=x^2$ از $z=0$ تا $z=1+i$

b) $f(z) = |z|^2$, c دایره واحد

c) $f(z) = \cos z$ روی خط راست از $1-i$ تا $1+i$

d) $f(z) = Im(z^2)$ از صفر تا $2+4i$ در طول یک پاره خط

۲. هرگاه $|f(z)| \leq M$ و منحنی c به طول L باشد آنگاه $|\int_c f(z)dz| \leq ML$

۳. فرض کنید c قوسی از دایرهٔ $|z| = 2$ از $z=2$ تا $z=2i$ باشد که در ربع اول است آنگاه

بدون آنکه انتگرال بگیرید نشان دهید که

$$\left| \int_c \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

۴. هرگاه c دایره $|z|=R>1$ باشد آنگاه نشان دهید که

$$\left| \oint_c \frac{Ln\, z}{z^2} dz \right| < 2\pi \frac{\pi + Ln\, R}{R}$$

و اگر $R\to\infty$ آنگاه $\oint_c \frac{Ln\, z}{z^2} dz$ به سمت صفر میل می‌کند.

۶. با نوشتن $\int_a^b dz$ برحسب انتگرالهای توابع حقیقی نشان دهید که مقدارانتگرال برابر $b-a$ است.

۷. هرگاه c پاره خطی از ۰ تا $3+4i$ باشد آنگاه کران بالایی برای هر یک از انتگرالهای زیر بیابید.

$$a)\ \int_c Ln(z+1)\,dz \qquad b)\ \int_c \frac{dz}{z+1}$$

۸. نشان دهید که اگر

$$p(z) = a_0+a_1z+a_2z^2 + \dots + a_nz^n \ ; \ a_n\neq 0$$

یک چند جمله‌ای از درجه n باشد که در آن $n\geq 1$ آنگاه عدد مثبتی مثل R موجود است به طوری که به ازای هر z با $|z| > R$ داریم

$$|p(z)| > \frac{|a_n|\,|z|^n}{2}$$

۹. نشان دهید که اگر f در درون و روی منحنی ساده بسته c تحلیلی باشد و z_0 روی c نباشد آنگاه

$$\int_c \frac{f'(z)dz}{z-z_0} = \int_c \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$$

۱۰. فرض کنید f در ناحیه بسته وکراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی وغیر ثابت باشد. با فرض اینکه در همه جا در R ، $f(z)\neq 0$، تابع $\frac{1}{f(z)}$ را در نظر بگیرید و ثابت کنید که $|f(z)|$ جائی در R دارای مقدار مینیمم N است و به ازای هر نقطه داخلی z داریم $|f(z)| > N$

۱۱. فرض کنید f تابع تامی باشد که به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)| \leq A|z|$ که در آن A عددی ثابت و مثبت است. نشان دهید که یا به ازای هر z، $f(z)=0$ و یا به ازای هر z، $f(z)=a_1z$ و $a_1\neq 0$

۱۲. مطلوب است محاسبه $\oint_c f(z)dz$ که در آن

a) $f(z)=\frac{۲\text{-}\sin z}{z^{۲}\text{-}z}$ و c مرز مستطیلی با رئوس $\pm i\frac{۱}{۲}$ و $\pm i-\frac{۱}{۲}$

b) $f(z)=\frac{\tan z}{z\text{-}i}$ و c مرز لوزی با رئوس ۱− و ۱ و $۲i$ و $۲i-$ است.

c) $f(z)=\frac{e^{z}+i}{ze^{z}\text{-}۲iz}$ و c مرز مربعی با رئوس ۱ ± و $\pm i$ است.

d) $f(z)=\frac{Ln(z+۱)}{z^{۲}+۱}$ که در آن c مرز مثلثی با رئوس i $\frac{۱}{۲}$-۱ و i $\frac{۱}{۲}$-۱-و $۲i$ است.

e) $f(z)=\frac{Ln(z\text{-}۱)}{z\text{-}۵}$ که در آن c دایره $|z\text{-}۴|=۲$ است.

۱۳. نشان دهید که

a)
$$\frac{۱}{z^{۲}}=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(n+۱)\,(z+۱)^{n}\quad;\quad |z+۱|<۱$$

b)
$$\frac{۱}{z^{۲}}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\quad(-۱)^{n}\,(n+۱)\,(\frac{z\text{-}۲}{۲})^{n}\quad;\quad |z\text{-}۲|<۲$$

c) هرگاه $۰<|z|<۴$ آنگاه ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۴z\text{-}z^{۲}}=\sum_{n=۰}^{\infty}\quad\frac{z^{n\text{-}۱}}{۴^{n+۱}}$$

۱۴. سری تیلور هر یک از توابع زیر را در حول نقاط داده شده به دست آورید.

a) $f(z) = \cos z \; ; z = \frac{\pi}{2}$ b) $f(z) = \sin hz \; ; z = \pi i$

c) $f(z) = z^5 \; ; z = -1$ d) $f(z) = (z+1)^3 \; ; z = 2i$

e) $f(z) = \sin z^2 \; ; z = 0$ f) $f(z) = Lnz \; ; z = 1$

۱۵. سه جمله اول از سری مکلورن هر یک از توابع زیر بیابید.

a) $f(z) = e^z \sin z$ b) $f(z) = z \cot z$ c) $f(z) = z \sin z^2$

۱۶. هر یک از توابع زیر را در حول مبدأ مختصات به صورت سری لوران بسط دهید

a) $\frac{e^{2z}}{z^3}$ b) $z \cos \frac{1}{z}$ c) $\frac{\sin h\pi z}{z^3}$

d) $\frac{1}{z^2+z^3}$ e) $\frac{z-1}{z^2-z^3}$ f) $z^3 \cos h\frac{1}{z}$

۱۷. بسط لوران هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده به دست آورید.

a) $\frac{e^z}{(z-1)^2} \; ; z_0 = 1$ b) $\frac{1}{z^2+1} \; ; z_0 = i$

c) $\frac{z+1+i}{(z+i)^2} \; ; z_0 = -i$ d) $\frac{\sin z}{(z-1/4)^3} \; ; z_0 = \frac{\pi}{4}$

۱۸. با مشتقگیری از سری مکلورن $\frac{1}{1-z}$ نشان دهید که

a) $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ b) $\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$

۱۹. با انتگرالگیری از سری مکلورن $\frac{1}{1+s}$ در امتداد مرزی از $s=0$ تا $s=z$ در داخل دایرهٔ

همگرائی نشان دهید که

$$Ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} ; \ |z|<1$$

۲۰. ثابت کنید هرگاه $f(0)=1$ و به ازای $z\neq 0$، $f(z)=z^{-1}Ln(z+1)$ آنگاه f در سراسر حوزه $|z|<1$ تحلیلی است.

۲۱. ثابت کنید که اگر f در z_0 تحلیلی باشد و $f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(m)}(z_0)=0$ آنگاه تابع

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z-z_0)^{m+1}} f(z) \ ; \ z\neq z_0 \\[2ex] \dfrac{1}{(m+1)} f^{(m+1)}(z_0) \ ; \ z=z_0 \end{cases}$$

در z_0 تحلیلی است.

۲۲. مطلوب است محاسبه مانده هریک از توابع زیر در نقاط تکین آنها

$a)\ \dfrac{1}{1-e^z}$ $\qquad b)\ \dfrac{z}{z^4-1}$ $\qquad c)\ \dfrac{6-4z}{z^3+3z^2}$

$d)\ \dfrac{1}{(z^4-1)^2}$ $\qquad e)\ \dfrac{z+2}{(z+1)(z^2+16)}$ $\qquad f)\ \dfrac{-z^2-22z+8}{z^3-5z^2+4z}$

۲۳. مطلوب است محاسبه هریک از انتگرالهای زیر

$a)\ \oint_{|z|=1} z\cot z\, dz$ $\qquad b)\ \oint_{|z|=1} \tan z\, dz$ $\qquad c)\ \oint_{|z|=1} \dfrac{\sin \pi z}{z^4}\, dz$

$d)\ \int_{|z|=1} \dfrac{z+1}{z^4-2z^3}\, dz$ $\qquad e)\ \int_{|z|=1} \dfrac{1}{z^4+5z^3+6z^2}\, dz$

$f)\ \int_{|z|=1} \dfrac{6z^2-4z+1}{(z-2)(1+4z^2)}\, dz$ $\qquad g)\ \int_{|z|=1} \dfrac{z^2-3z^3+1}{(2z+1)(z^2+4)}\, dz$

$$h)\ \int_{|z|=1} \frac{e^{(z-i)\pi/2}}{\sin z}\, dz \qquad i)\ \int_{|z|=1} \frac{\cos hz}{z^2-4iz}\, dz$$

$$j)\ \int_{|z|=1} \frac{30z^2-23z+5}{(2z-1)^2(3z-1)}\, dz \qquad k)\ \int_{|z|=1} \frac{\cos hz}{z(z^2+1)}\, dz$$

$$l)\ \int_{|z|=1} \frac{e^{z^2}\cos hz}{\cos\frac{z}{2}}\, dz \qquad m)\ \int_{|z|=2} \frac{-z^2-22z+8}{z^3-5z^2+4z}\, dz$$

۲۴. مطلوب است محاسبه هریک از انتگرالهای زیر

$$a)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} \qquad b)\ \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{1}{3}\cos\theta} \qquad c)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{17-8\cos x}\, dx$$

$$d)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}\, d\theta \qquad e)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta}\, d\theta \qquad f)\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos 2\theta}\, d\theta$$

$$g)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta}\, d\theta \qquad h)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\, d\theta \qquad j)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{4+\frac{4}{3}\sin 2\theta}\, d\theta$$

۲۵. نشان دهید که

$$a)\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \pi\sqrt{2} \qquad b)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{(1-a^2)}}\ ;\ -1<a<1$$

$$c)\ \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}\ ;\ a>1$$

$$d)\ \int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta\, d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi\ ;\ n=1,2,\dots$$

۲۶. مطلوب است محاسبه هریک از انتگرالهای زیر

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2} dx$

c) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^6} dx$

g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x+a)^2+b^2}$

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+9)^2} dx$

j) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+13x^2+36} dx$

k) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$

l) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{4x^4+13x^2+9} dx$

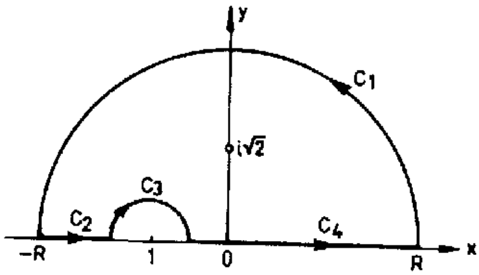
m) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

n) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1} dx$

۲۷. با انتگرالگیری از e^{-z^2} بر روی کرانه مستطیلی با رئوس $b,-b$ ؛ $R+ib$ و $-R+ib$ و فرض $R\to\infty$ و استفاده از $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

۲۸. مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$ رابا انتگرالگیری بر روی مرز زیر محاسبه کنید.



۲۹. نشان دهید که

$$\int_{0}^{\infty} \frac{Lnx}{1+x^2}\, dx = 0$$

۸.۴ مسائل متفرقه

۱. ثابت کنید

$$a)\ |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z^2|^2)$$

$$b)\ |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z^2|^2)$$

$$c)\ |z_1 + z_2| \geq \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|$$

$$d)\ |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1^2 + z_2^2| \leq 2\frac{|a_1 z_1 + a_2 z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1^2 + z_2^2|$$

که در آن a_1 و a_2 اعداد حقیقی و $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

۲. هرگاه $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ و $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ آنگاه نقاط z_1 و z_2 و z_3 رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع محاط در یک دایره یکه هستند.

۳. هرگاه $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ و $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ آنگاه z_1، z_2، z_3 و z_4 رئوس یک مستطیل بوده و یا باهم برابرند.

۴. ثابت کنید که

a) $\sin iz = i \sin hz$ b) $\cos iz = \cos hz$

c) $\tan iz = i \tan hz$ d) $\cot iz = -i \cot hz$

۵. همه مقادیر z را طوری بیابید که

a) $|\tan z| = 1$ b) $|\tan hz| = 1$

۶. اشکال کار را در استدلال برنولی که به شرح ذیل بیان شده است پیدا کنید :

داریم $(-z)^2 = z^2$ و از آنجا $2Ln(-z) = 2Lnz$ و در نتیجه $Ln(-z) = Lnz$ توجه کنید که Lnz شاخهٔ اصلی lnz است.

۷. کدامیک از توابع $\frac{Rez}{z}$, $\frac{z}{|z|}$, $\frac{Re(z)^2}{|z|^2}$, $\frac{zRez}{|z|}$ را با یک تعریف مناسب در مبدأ مختصات می‌توان به یک تابع پیوسته در این نقطه تبدیل کرد.

۸. نشان دهید که تابع $e^{-1/|z|}$ در داخل دایره $|z| = R$ که شامل مبدأ مختصات نباشد به طور یکنوا همگرا است.

۹. نقش دایره $|z| = 1$ را با هر یک از نگاشتهای $w = z + \frac{1}{z}$, $w = z - \frac{1}{z}$ بیابید.

۱۰. تابع $w = e^{-\frac{1}{z}}$ همه جا به جز در $z = 0$ تعریف می‌شود. ثابت کنید که

a) این تابع در نیم دایره $0 < |z| \leq 1$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ کراندار ولی غیر پیوسته است.

b) در داخل نیم دایره فوق تابع پیوسته ولی به طور یکنوا پیوسته نیست.

c) تابع فوق در ناحیه $0 < |z| \leq 1$, $|\arg z| \leq \alpha < \frac{R}{2}$ به طور یکنوا پیوسته است.

۱۱. a و b و c را طوری بیابید که هریک از توابع زیر تحلیلی باشند.

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b) $f(z) = \cos x\ (\cos hy + a \sin hy) + i \sin x\ (\cos hy + b \sin hy)$

۱۲. نواحی‌ای را در صفحه مختلط پیدا کنید که تابع $f(z) = |x^2 - y^2| - 2i|xy|$ در آن تحلیلی باشد.

۱۳. تابع $f(z) = u + iv = \rho e^{i\theta}$ تابعی تحلیلی است. ثابت کنید هرگاه یکی از توابع θ, ρ, v, u ثابت باشد آنگاه به جهت تحلیلی بودن $f(z)$ لازم است که تابع $f(z)$ ثابت باشد.

۱۴. ثابت کنید که تابع $f(z) = 2\sqrt{xy}$ در شرایط کشی ـ ریمن در مبدأ مختصات صدق می‌کند ولی در این نقطه مشتقپذیر نیست.

۱۵. هرگاه $w=f(z)$, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| Im \dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ موجود باشد آنگاه مشتقات جزئی u_y و v_x موجودند و $u_y=-v_x$.

۱۶. هرگاه u و v در تابع $w=f(z)=u+iv$ و مشتقپذیر باشند و $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \dfrac{\Delta f}{\Delta z} \right|$ موجود باشد آنگاه $f(z)$ یا $\overline{f}(z)$ در نقطه z مشتقپذیر است.

۱۷. هرگاه u و v در $w=f(z)=u+iv$ مشتقپذیر بوده و $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ موجود باشد آنگاه تابع $f(z)$ در نقطه z مشتقپذیر است.

۱۸. نشان دهید که معادله لاپلاس را به صورت $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial \overline{z}} = 0$ نیز می‌توان نوشت.

۱۹. آیا همساز بودن u دلیلی برای همساز بودن u^2 است.

۲۰. هرگاه $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه کدامیک از توابع $|f(z)|$, $\arg f(z)$ ، $f(z)$ ، $Ln\ |f(z)|$ و $\sqrt{f(z)}$ ، $z^2 f(z)$ تحلیلی و کدامیک غیر تحلیلی هستند.

۲۱. در هر یک از مسائل زیر تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را طوری بیابید که

a) $u=e^x (x \cos y - y \sin y)+2\sin x \sin hy + x^3 - 3xy^2+y$

b) $v= Ln\ (x^2+y^2)+x-2y$

۲۲. نقش هر یک از منحنیهای زیر را با نگاشت $w=\dfrac{1}{z}$ بیابید

a) $x^2+y^2=ax$ b) $x^2+y^2=by$ c) $y=x+b$ d) $y=x^2$

۲۳. در هر یک از مسائل زیر:

a) نقش ناحیه $x>0$, $y>0$ را با تبدیل $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ بیابید.

b) نقش ناحیه $|z|<1$ و $Imz>0$ را با تبدیل $w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$ بیابید.

c) نقش ناحیه $\frac{\pi}{۴} > \phi > ۰$ را با تبدیل $w = \frac{z}{z-۱}$ بیابید.

۲۴. تبدیل موبیوسی بیابید که:

a) نیم صفحه فوقانی را به روی خودش بنگارد.

b) نیم صفحه فوقانی را به روی نیم صفحه تحتانی بنگارد.

c) نیم صفحه فوقانی را به روی نیم صفحه طرف راست بنگارد.

۲۵. نشان دهید که نگاشت $w=e^{i\alpha}\,\frac{z-\bar{z}_۰}{z-z_۰}$ نیم صفحه فوقانی را به توی خارج دایره واحد می‌نگارد.

۲۶. نشان دهید که نگاشت $w=e^{i\alpha}\,\frac{z-z_۰}{۱-z\bar{z}_۰}$ با فرض $|z_۰| < ۱$ قرص واحد را به روی خودش می‌نگارد.

۲۷. یک تبدیل دو خطی با نقطه ثابت $z_۰$ را سهموی می‌نامند. نشان دهید که یک تبدیل سهموی را می‌توان به صورت

$$\frac{۱}{w-z_۰} = \frac{۱}{z-z_۰} + h \;\; ; \;\; z_۰ \neq \infty$$

یا $w=z+h \;\; ; \;\; z_۰ = \infty$ نوشت.

۲۸. دوایری را بیابید که تحت تبدیل سهموی $\frac{۱}{w-z_۰} = \frac{۱}{z-z_۰} + h$ به خودشان تبدیل می‌شوند.

۲۹. نقش هریک از خطوط $y=x+۲$, $y=x$, $y=kx+b$ را با تبدیل $w=e^z$ به دست آورید.

۳۰. نقش هر یک از نواحی زیر را با نگاشت $w=arc\ sin\ z$ بیابید:

a) نیم صفحه فوقانی

b) صفحه z که در طول $(-\infty,-۱]$, $(۱,\infty)$ واقع بر محور x بریده شده باشد.

c) ربع اول

۳۱. نقش هر یک از نواحی زیر را با تبدیلات داده شده بیابید:

a) خطوط $x=c$ و $y=c$ با $w=\cos z$ و $w=\cos hz$

b) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ و $y > 0$ با $w = \cos z$

c) $0 < y < \pi$, $x > 0$ با $w = \cos hz$

d) $0 < x < \pi$ و $y > 0$ با $w = \tan z$

e) $0 < y < \pi$ با $w = \cot hz$

۳۲. مطلوب است محاسبه $\int_c |z|\, dz$ که در آن

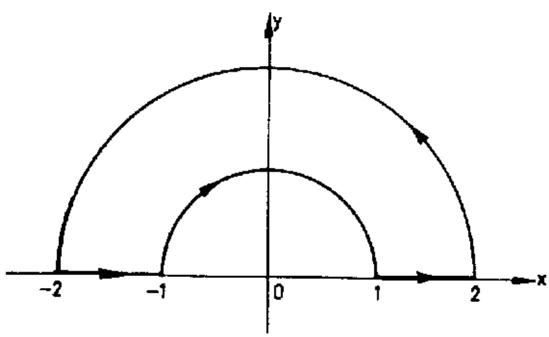
a) c پاره خطی از مبدأ مختصات تا نقطه $z=-i$

b) c در طول نیمدایره $|z|=1$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ با شروع از نقطه $z=-i$

۳۳. مطلوب است محاسبه $\oint_c |z|\bar{z}\, dz$ که در آن c منحنی بسته شامل نمیدایره $|z|=1$

$y > 0$ و $-1 \le x \le 1$ است.

۳۴. انتگرال $\oint_c \frac{z}{\bar{z}}\, dz$ را بر روی مسیر زیر محاسبه کنید.



۳۵. انتگرال $\int_c \frac{dz}{\sqrt{z}}$ را در طول هر یک از مسیرهای زیر محاسبه کنید:

a) در طول نیمدایرهٔ $|z|=1$ و $y \ge 0$

b) در طول دایرهٔ ۱ = $|z|$

۳۶. مطلوب است محاسبه $\int_c Lnz\, dz$ را در طول هر یک از مسیرهای زیر

a) در طول دایرهٔ واحد

b) در طول دایرهٔ $|z|=R$ و با فرض $Lnz = LnR + ۲\pi i$

۳۷. مطلوب است محاسبه $\int_{|z|=۱} z^n\, Lnz\, dz$ که در آن n عددی است صحیح.

۳۸. انتگرال $\int_{|z|=۱} z^c\, dz$ را که در آن c عددی است مختلط محاسبه کنید.

۳۹. ثابت کنید که به ازای $|a| \neq R$

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a|\,|z+a|} < \frac{۲\pi R}{|R^۲ - |a|^۲|}$$

۴۰. هرگاه $f(z)$ در یک همسایگی از مبدأ مختصات پیوسته باشد آنگاه

$$\lim_{r\to ۰} \int_۰^{۲\pi} f(re^{i\phi})\, d\phi = ۲\pi f(۰)$$

۴۱. نشان دهید که اگر f در درون و روی مرزسادهبسته c تحلیل باشد و $z_۰$ واقع بر c نباشد آنگاه

$$\oint_c \frac{f'(z)}{z-z_۰}\, dz = \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_۰)^۲}\, dz$$

۴۲. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z-a|=a} \frac{z\, dz}{z^۴-۱}\ ;\ a>۱$$

۴۳. مطلوب است محاسبه $\frac{۱}{۲\pi i} \oint_c \frac{ze^z\, dz}{(z-a)^۲}$ در صورتی که نقطه a واقع در داخل منحنی بسته c باشد.

۴۴. تابع $f(z)$ در یک ناحیه کراندار که به وسیله مرز بسته ساده c محصور شده است و مبدأ مختصات یک نقطه داخلی آن است تحلیلی میباشد. ثابت کنید که به ازای هر شاخه از lnz

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c f'(z) \ln z \, dz = f(z_0) - f(0)$$

که در آن z_0 نقطه شروع انتگرالگیری است.

۴۵. مطلوب است محاسبه انتگرال $\frac{1}{2\pi i} \oint_c z^2 \ln \frac{z+1}{z-1} dz$ در صورتی که

a) c دایره $|z|=2$ است.

b) c دایره $|z-1|=1$ بوده و نقطه شروع انتگرالگیری $z_0 = 1+i$ باشد.

۴۶. ثابت کنید که اگر یک تابع تحلیلی غیر ثابت $f(z) \neq c$ در ناحیه D تحلیلی بوده و صفر نباشد آنگاه $|f(z)|$ مینیمم مقدار خود را در داخل D نمی‌تواند اختیار کند.

۴۷. هرگاه $f(z)$ در $|z|<1$ تحلیلی بوده و $f(0)=0$ و $|f(z)| \leq 1$ آنگاه بر سراسر ناحیه $|f(z)| \leq |z|$. این نتیجه به لم شوآرتز نیز موسوم است.

همچنین ثابت کنید که اگر به ازای یک نقطه داخلی $|z| = |f(z)|$ آنگاه $f(z)=e^{i\alpha z}$ که در آن α عددی حقیقی است.

راهنمایی . تابع $\frac{f(z)}{z}$ را مورد بررسی قرار دهید و اصل مدویل ماکزیمم را به کار برید.

۴۸. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرالهای زیر

a) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$

b) $\int_{|z|=1} \sin^2 \frac{1}{z} \, dz$

c) $\int_{|z|=1} z^n e^{\frac{2}{z}} dz$

d) $\int_{|z|=3} (1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) dz$

e) $\int_{|z|=5} \frac{dz}{(1-\cos z)\sin z}$

f) $\int_{|z|=r\neq 1} \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$

g) $\int_c \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{(z^2+1)}} \; ; c: y^2 = x$

۴۹. مطلوب است محاسبه هریک از انتگرالهای زیر

a) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\phi \, d\phi}{1-2a\cos\phi + a^2}$; $a \neq \pm 1$, $a \in \mathbb{C}$

b) $\int_{0}^{2\pi} e^{\cos\phi} \cos(n\phi - \sin\phi)\, d\phi$; $n \in N$

c) $\int_{0}^{\pi} \tan(x+ia)dx$; $a \in R$

d) $\int_{0}^{2\pi} \cot(x+a)dx$; $a \in \mathbb{C}$, $Im\, a \neq 0$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}$

f) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$; $n \in N$

g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2-2x+10}$

h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20} dx$

k) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{(x^2+4)(x-1)}$

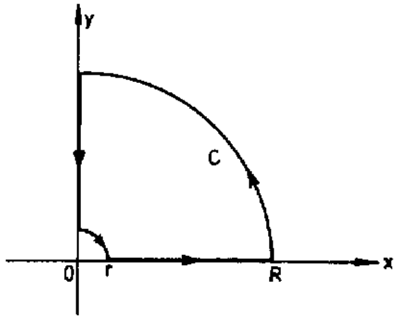
l) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2} \frac{\sin ax}{x} dx$

۵۰. با انتگرالگیری از تابع $z^{p-1} e^{-az}$ بر روی مسیر زیر به محاسبه انتگرالهای

$a > 0$, $0 < p < 1$, $\int_{0}^{\infty} x^{p-1} \cos ax \, dx$

$a > 0$, $-1 < p < 1$, $\int_{0}^{\infty} x^{p-1} \sin ax \, dx$

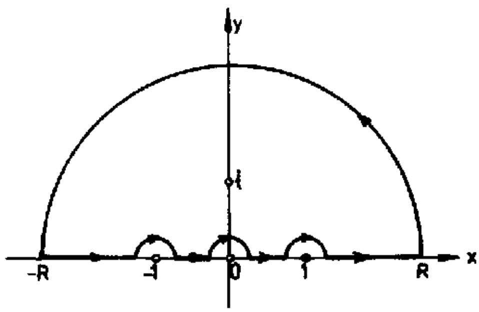
بپردازید.



۵۱. با محاسبه $\int_C \ln(\frac{1}{z} - z) \frac{dz}{1+z^2}$ بر روی مسیر زیر به محاسبهٔ انتگرال

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x} - x\right) \frac{dx}{1+x^2}$$

بپردازید.



۵۲. ثابت کنید.

a) $|z-1| \leq \big||z|-1\big| + |z||\arg z|$

b) هرگاه $|z| < \frac{1}{2}$ آنگاه $|(1+i)z^3+iz| < \frac{3}{4}$

c) هرگاه $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ آنگاه $\arg \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{1}{2} \arg \frac{z_2}{z_1}$

۵۳. ثابت کنید.

$$a)\ (\sqrt{3}-i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i\sin \frac{n\pi}{6}\right)$$

$$b)\ (1+i)^n = 2^{n/2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i\sin \frac{n\pi}{4}\right)$$

$$c)\ (1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i\sin \frac{n\alpha}{2}\right)$$

۵۴. نشان دهید که تابع

$$u(x,y) = \begin{cases} x\ ; & |y| > |x| \\ -x\ ; & |y| \le |x| \end{cases}$$

دارای مشتقات جزئی $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ در مبدأ مختصات بوده ولی در آن دارای مشتق پیوسته نیست.

۵۵. نشان دهید که تابع $f(z) = z\,Re z$ تنها در $z=0$ دارای مشتق است و $f'(0)$ را بیابید.

۵۶. نقش ناحیه $-\pi \le y \le \pi$ را با تبدیل $w=z+e^z$ بیابید.

۵۷. نشان دهید

$$1^{\sqrt{2}} = \cos(2k\pi\sqrt{2}) + i\sin(2k\pi\sqrt{2})$$

۵۸. هرگاه تعریف کنیم $\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a}$ آنگاه $\log_{1+i}(1+i)$ ، $\log_{1+i}(1-i)$ را بیابید.

۵۹. نشان دهید که

$$a)\ \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}\ ; \quad 0 < a < 1$$

$$b)\ \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}}{b} \arctan \frac{b}{a}$$

۶۰. نشان دهید که معادلات کشی ریمن در مختصات قطبی به صورت زیر در می‌آیند.

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

۶۱. هرگاه $f(z)$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) | f(z) |^2 = 4 \, | f'(z) |^2$$

۶۲. نشان دهید که

$$a) \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta \, d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{\pi}{b^2} \left[-a^2 + \frac{3}{2} ab^2 + (a^2-b^2)^{3/2} \right]$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \frac{1\times3\times5\times\ldots(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times 2n} \; \frac{\pi}{2} \quad ; \quad n \in N$$

۶۳. هریک از مسائل زیر را حل کنید.

$a)\ \nabla^2 u = x^2 - y^2 \ ; \ 0<x<a \ , \ 0<y<a$

$u_x(a,y)=0 \ , \ u_x(0,y)=0 \ , \ u_y(x,0)=0 \ , \ u_y(x,a)=0$

$b)\ u_t = c^2\nabla^2 u + xy\sin t \ ; \ 0<x<\pi \ , \ 0<y<\pi \ , \ t>0$

$u_t(x,y,0) = x + y$

$u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0 \ , \ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0$

$c)\ u_t - c^2\nabla^2 u = 0 \ ; \ 0<x<\pi \ , \ 0<y<\pi \ , \ t>0$

$u(x,y,0)=0 \ , \ u(0,y,t)=0 \ , \ u(\pi,y,t)=0$

$u(x,0,t)=2(x-\pi)\sin t \ , \ u(x,\pi,t)=0$

۶۴. مطلوب است حل مسئله بایهامورنیک زیر

$$\nabla^4 u = f(x,y) \ ; \ \nabla^4 u = \nabla^2(\nabla^2 u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$
$$u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0 \ , \ u_{xx}\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u_{xx}\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0$$

$u(x,0) = u(x,b) = 0 \;,\; u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,b) = 0$

۶۵. هریک از مسائل زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2x\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2x \;;\; u(x,0) = 1 \;,\; u(0,t) = 1$

b) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = xt \;;\; u(x,0) = 0 \;;\; x > 0 \;,\; u(0,t) = 0 \;;\; t \geq 0$

۶۶. هریک از مسائل زیر را به روش تفکیک متغیرها حل کنید.

a) $u_t - u_{xx} + au = 0 \;;\; 0 < x < \pi \;,\; t > 0$

$u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \;,\; u(x,0) = x(\pi - x) \;;\; 0 \leq x \leq \pi$

b) $u_{xx} + u_{yy} = 0 \;;\; 0 < x < \pi \;,\; 0 < y < 1$

$u(x,0) = u(x,1) = \sin^2 x \;,\; u(0,y) = \sin y \;,\; u(\pi,y) = 0$

c) $u_{xx} + u_{yy} + u_x = 0 \;;\; 0 < x < \pi \;,\; 0 < y < \pi$

$u(x,0) = u(x,\pi) = 0 \;,\; u(0,y) = 0 \;\; u(\pi,y) = \sin y$

d) $u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \;;\; r < 1 \;,\; 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

$u(r,0) = 0 \;,\; u_\theta(r, \dfrac{1}{2}\pi) = 0 \;,\; u(1,\theta) = \theta$

e) $u_{tt} + 2u_t - c^2u_{xx} = 0 \;;\; 0 < x < \pi \;,\; t > 0$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \;,\; u(x,0) = 0 \;\; u_t(x,0) = x$

f) $u_{tt} + u_t - c^2u_{xx} = tx(1-x) \;;\; 0 < x < 1 \;,\; t > 0$

$u(0,t) = 0 \;,\; u_x(1,t) = 0 \;,\; u(x,0) = \sin\dfrac{1}{2}\pi x \;,\; u_t(x,0) = 0$

g) $u_{xx} + u_{yy} = \sin x - \sin^2 x \;;\; 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \;,\; 0 < y < 2$

$u(0,y) = 0 \;,\; u_x(\dfrac{\pi}{2},y) = 0 \;,\; u_y(x,0) = 0 \;,\; u_y(x,2) = 0$

۶۷. هریک از مسائل زیر را حل کنید (به روش تفکیک متغیرها)

$a)\ \nabla^2 u = 0 \ ; \ 0<x<\pi \ , \ 0<y<\pi \ , \ 0<z<\pi$

مقدار u به ازای $x=0$ و $x=\pi$ و $y=0$ و $y=\pi$ و $z=\pi$ برابر صفر است و

$u(x,y,0) = \sin x \sin^2 y$

$b)\ \nabla^2 u - u = 0 \ ; \ 0<x<\pi \ , \ 0<y<\frac{\pi}{2} \ , \ 0<z<1$

به ازای $x=0$ و $y=0$ و $z=1$ داریم $u=0$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,0) = 2x-\pi \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0$$

$c)\ \nabla^2 u = 0 \ ; \ r<1 \ , \ 0<z<\pi$

$u(r,\theta,0) = u(r,\theta,\pi) = 0 \ , \ u(1,\theta,z) = z(\pi-z)\cos^2\theta$

$d)\ \nabla^2 u = 0 \ ; \ r<1 \ , \ 0<z<\pi$

$u(r,\theta,0) = 0 \ , \ u_z(r,\theta,\pi) = 0 \ , \ u(1,\theta,z) = z\cos^3\theta$

۶۸. هرگاه c دایره $z=e^{i\theta} \ ; \ -\pi<\theta\leq\pi$ باشد آنگاه نشان دهید که

$$\int_c \frac{e^{az}}{z}\, dz = 2\pi i$$

که در آن a عددی حقیقی و ثابت است. با نوشتن انتگرال فوق بر حسب θ نشان دهید که

$$\int_0^{p} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\, d\theta = \pi$$

۶۹. فرض کنید که تابع $f(z)=u+iv$ در ناحیهٔ بسته و کراندار D پیوسته و در داخل آن تحلیلی و غیر ثابت باشد. آنگاه با به‌کاربردن اصل ماکزیمم با تابع $e^{f(z)}$ نشان دهید که تابع $u(x,y)$ مقدار ماکزیمم خود ر روی کران D اختیار می‌کند.

۷۰. نشان دهید که (لم‌ژردان)

$$\int_0^{\frac{p}{2}} e^{-R\sin\theta}\, d\theta < \frac{\pi}{2R} \;;\; R>0$$

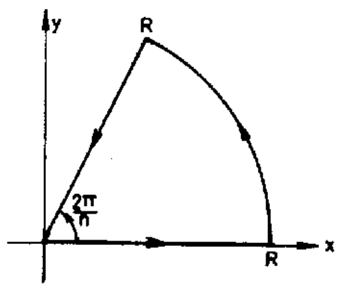
۷۱. نشان دهید که

$$a)\ \int_0^{\infty} \sin^{2n}\theta\, d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\pi$$

$$b)\ \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

۷۲. با انتگرالگیری بر روی مرز زیر نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}$$



مراجع

1. *A first course in partial Differential Equations , Hans F. Weinbergar, XEROX college publishing , 1965.*
2. *Advenced Engineering Mathematics, Erwin kreyszing, sixth Edition, John wiley , 1988.*
3. *Partial Differential Equations of Mathematical physics , second Edition , Tyn Mint - U , North Holland , 1973.*
4. *Advanced Calculus, second Edition , wilfred kaplan, Addison-wesley publishing, 1973.*
5. *Mathematics for Engineering students, P.D.S Verma, kalyani publisher, 1977.*
6. *Higher Engineering Mathematics, B.S. Grewal, kanahan publisher, 1983.*
7. *Functions of complex veriables, philip Franklin, pitman, 1958.*
8. *Introductory complex Analysis, Richard A. silverman, prentice-Hall, Inc. , 1967.*
9. *The theory of Functions of a complex variable, George rankovsky, Mir publisher, 1971.*
10. *problems in the theory of Functions of a complex variable, Victor shiffer, Mir publisher, 1972.*
11. *Complex Variables and Applications , third Edition, Ruel V. cherchil, James W. Brown and Roger F. Verhey, Mc Graw-Hill, 1974.*
12. *Elements of partial Differential Equations, Ian sneddon, International student Edition, 1957.*
13. *Introduction to partial Differential Equations with Applications , E.C. Zachmanoglou and Dale W. Troe, the Williams and Wilkchgs co , 1976.*

14. *Introduction to partial Differential Equations, karl E. Gustafson, John Wily, 1980.*

15. *partial Differential Equations, E.T. copson, Cambridge University press, 1976.*

16. *patial Differential Equations, P. Duchateau, D.W. zachmann, schaum's series, 1986.*

17. *Advanced Engineering Mathematics, M.D. Greenberg, prentice Hall International, Inc., 1988.*

جدولهای تبدیلات کسینوسی فوریه، تبدیلات سینوسی فوریه و تبدیلات فوریه

جدول اول. تبدیلات کسینوسی فوریه

	$f(x)$	$\hat{f}_c(w) = F_c(f)$
۱	$\begin{cases} ۱; & ۰<x<a \\ ۰; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\ \frac{\sin aw}{w}$
۲	$x^{a-۱}; \quad ۰<a<۱$	$\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\ \frac{\Gamma(a)}{w^a}\cos\frac{aw}{۲}$
۳	$e^{-ax} \quad a>۰$	$\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\ \left(\frac{a}{a^۲+w^۲}\right)$
۴	$e^{-x^۲/۲};$	$e^{-w^۲/۲}$
۵	$e^{-ax^۲}; \quad a>۰$	$\frac{۱}{\sqrt{۲a}}\, e^{-w^۲/۴a}$
۶	$x^n\, e^{-ax}$	$\sqrt{۲\pi}\ \frac{n!}{(a^۲+w^۲)^{n+۱}}\, Re(a+iw)^{n+۱}$
۷	$\begin{cases} \cos x; & ۰<x<a \\ ۰; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\ \left[\frac{\sin a(۱-w)}{۱-w} + \frac{\sin a(۱+w)}{۱+w}\right]$
۸	$\cos ax^۲; \quad a>۰$	$\frac{۱}{\sqrt{۲a}}\cos\left(\frac{w^۲}{۴a} - \frac{\pi}{۴}\right)$
۹	$\sin ax^۲; \quad a>۰$	$\frac{۱}{\sqrt{۲a}}\cos\left(\frac{w^۲}{۴a} + \frac{\pi}{۴}\right)$
۱۰	$\frac{\sin ax}{x}; \quad a>۰$	$\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\, H(a-w)$
۱۱	$\frac{e^{-x}\sin x}{x};$	$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\ \arctan\frac{۲}{w^۲}$
۱۲	$J_o(ax) \quad a>۰$	$\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\ \frac{H(a-w)}{\sqrt{a^۲-w^۲}}$

جدول دوم. تبدیلات سینوسی فوریه

	$f(x)$	$\tilde{f}_s(w) = F_s(f)$
۱	$\begin{cases} 1; & 0<x<a \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1-\cos aw}{w}\right]$
۲	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$
۳	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{w}$
۴	$x^{a-1}; \quad 0<a<1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(a)}{w^a}\sin\frac{a\pi}{2}$
۵	$e^{-x}; \quad a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{w}{1+w^2}\right)$
۶	$\frac{e^{-ax}}{x}; \quad a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\arctan\frac{w}{a}$
۷	$x^n e^{-ax}; \quad a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n!}{(a^2+w^2)^{n+1}}\, Im(a+iw)^{n+1}$
۸	$xe^{-x^2/2}$	$we^{-w^2/2}$
۹	$xe^{-ax^2}; \quad a>0$	$\frac{w}{(2a)^{3/2}}e^{-w^2/4a}$
۱۰	$\begin{cases} \sin x; & 0<x<a \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w}-\frac{\sin a(1+w)}{1+w}\right]$
۱۱	$\frac{\cos ax}{x}; \quad a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, H(w-a)$
۱۲	$\arctan\frac{2a}{x}; \quad a>0$	$\sqrt{2\pi}\,\frac{\sinh aw}{w}e^{-aw}$

جدول سوم. تبدیلات فوریه

	$f(x)$	$\tilde{f}(w) = F(f)$
۱	$\begin{cases} 1; & -b < x < b \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin bw}{w}$
۲	$\begin{cases} 1; & b < x < c \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
۳	$\frac{1}{x^2+a^2};\quad a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{e^{-a\|w\|}}{a}$
۴	$\begin{cases} x; & 0 < x < b \\ 2x-a; & b< x <2b \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{-1+2e^{ibw} - e^{-2ibw}}{\sqrt{2\pi}\ w^2}$
۵	$\begin{cases} e^{-ax}; & x > 0 \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ (a+iw)}$
۶	$\begin{cases} e^{ax}; & b < x < c \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}\ (a-iw)}$
۷	$\begin{cases} e^{iax}; & -b < x < b \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin b\ (w-a)}{w-a}$
۸	$\begin{cases} e^{iax}; & b < x < c \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a-w}$
۹	$e^{-ax^2};\quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\ e^{-w^2 a}$
۱۰	$\frac{\sin ax}{x};\quad a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \|w\| < a\ ;\ 0\ \mathit{if}\ \ \|w\| > a$

مختصات قطبی

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

برخی مقادیر ثابت

$e=$	۲.۷۱۸۲۸	۱۸۲۸۴	۵۹۰۴۵	۲۳۵۳۶
$\sqrt{e}=$	۱.۶۴۸۷۲	۱۲۷۰۷	۰۰۱۲۸	۱۴۶۸۵
$e^2=$	۷.۳۸۹۰۵	۶۰۹۸۹	۳۰۶۵۰	۲۲۷۲۳
$\pi=$	۳.۱۴۱۵۹	۲۶۵۳۵	۸۹۷۹۳	۲۳۸۴۶
$\pi^2=$	۹.۸۶۹۶۰	۴۴۰۱۰	۸۹۳۵۸	۶۱۸۸۳
$\sqrt{\pi}=$	۱.۷۷۲۴۵	۳۸۵۰۹	۰۵۵۱۶	۰۲۷۳۰
$\log_{10}\pi=$	۰.۴۹۷۱۴	۹۸۷۲۶	۹۴۱۳۳	۸۵۴۳۵
$\ln\pi=$	۱.۱۴۴۷۲	۹۸۸۵۸	۴۹۴۰۰	۱۷۴۱۴
$\log_{10}e=$	۰.۴۳۴۲۹	۴۴۸۱۹	۰۳۲۵۱	۸۲۷۶۵
$\ln 10=$	۲.۳۰۲۵۸	۵۰۹۲۹	۹۴۰۴۵	۶۸۴۰۲
$\sqrt{2}=$	۱.۴۱۴۲۱	۳۵۶۲۳	۷۳۰۹۵	۰۴۸۸۰
$\sqrt[3]{2}=$	۱.۲۵۹۹۲	۱۰۴۹۸	۹۴۸۷۳	۱۶۴۷۷
$\sqrt{3}=$	۱.۷۳۲۰۵	۰۸۰۷۵	۶۸۸۷۷	۲۹۳۵۳
$\sqrt[3]{3}=$	۱.۴۴۲۲۴	۹۵۷۰۳	۰۷۴۰۸	۳۸۲۳۳
$\ln 2=$	۰.۶۹۳۱۴	۷۱۸۰۵	۵۹۹۴۵	۳۰۹۴۲
$\ln 3=$	۱.۰۹۸۶۱	۲۲۸۸۶	۶۸۱۰۹	۶۹۱۴۰
$\gamma=$	۰.۵۷۷۲۱	۵۶۶۴۹	۰۱۵۳۲	۸۶۰۶۱
$\ln\gamma=$	−۰.۵۴۹۵۳۹۳۱۲۹	۸۱۶۴۴	۸۲۲۳۴	
	(cf. p. ۲۱۴)			
$1^\circ=$	۰.۰۱۷۴۵	۳۲۹۲۵	۱۹۹۴۳	۲۹۵۷۷r^{ad}
$1r^{ad}=$	۵۷.۲۹۵۷۷	۹۵۱۳۰	۸۲۳۲۰	۸۷۶۸۰°
	= ۵۷°۱۷′۴۴.۸۰۶″			

برخی سریهای مکلورن

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \quad (|x|<1)$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m} \quad (|x|<1)$$

$$\arctan x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} \quad (|x|<1)$$

بردارها

$$a.b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$\text{div } V = \nabla . f = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

$$\text{curl } V = \nabla \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

حروف یونانی

α	alpha	ν	Nu
β	Beta	ξ	Xi
γ, Γ	Gamma	o	omicron
δ, Δ	Delta	π	pi
ε	Epsilon	ρ	Rho
ζ	zeta	σ, Σ	sigma
η	Eta	τ	Tav
$\theta, \vartheta, \Theta$	Theta	υ, Υ	Upsilon
ι	Iota	ϕ, φ, Φ	phi
κ	Kappa	χ	Chi
λ, Λ	Lambda	ψ, Ψ	psi
μ	Mu	ω, Ω	omega

برخی فرمولهای انتگرالگیری

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'\,v\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$$

$$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + c$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$$

برخی فرمولهای مشتقگیری

$$(cu)' = cu' \qquad (c \text{ constant})$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \quad (\text{chain rule})$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

تبدیلهای سیستم به یکدیگر

The most important systems of units are shown in the table below. The Mks System is also Known as the International System of Units (abbreviated SI System), and the abbreviations s (instead of sec) and N (instead of nt) are also used.

System of units	Length	Mass	Time	Force
Cgs system	centimerer(cm)	gram(gm)	second(sec)	dyne
Mks system	meter(m)	kilogram(kg)	second(sec)	newton(nt)
Engineering system	foot (ft)	slug	second(sec)	pound(lb)

1 inch (in.) = 2.54000 51 cm *1 foot (ft)= 12 in. = 30.48006 12 cm*

1 yard (yd) = 3ft = 91.44018 36 cm *1 statute mile(mi) = 5280 ft = 1.609335 km*

1 nautical mile = 6080.2ft = 1.8532 km

1 acre = 4840 yd ^{2} *4046.773m* ^{2} *1 mi* ^{2} *= 640 acres = 2.58999 87 km* ^{2}

1 fluid ounce = 29.5737 cm ^{3}

1 U.S. gallon = 4 quarts (liq) = 8 pints (liq) = 128 fl oz = 3785.432 cm ^{3}

1 British Imperial and Canadian gallon = 1.20094 U.S. gallons = 4546.1 cm ^{3}

1 slug = 14.59390 kg

1 pound (lb) = 4.448444 nt *1 newton (nt) = 10* ^{5} *dynes*

1 British thermal unit(Btu)=1054.8 joules *1 joule = 10* ^{7} *ergs*

1 calorie (cal) = 4.1840 joules

1 kilowntt-hour (kWh) = 3413 Btu = 3.6.10 ^{6} *joules*

1 horsepower (hp) = 2545 Btu/h = 178.2 cal/sec = 0.74570 kW

1 kilowatt (kW) = 1000 watts = 3413 Btu/h = 238.9 cal/sec

°F = °C. 1.8 + 32 *1 = 60′ = 3600′ = 0.01745 radian*

for further details see.e.g.D. Halliday and R.Resnick. Physics.3rd ed.. New York: Wiley.1978.See also AN American National Standard. ASTM / IEEE Standard Metric Practice. Institute of Electrical and Electronics Engineers. Inc.. 345 East 47th Street. New York. N.Y. 10017.

فهرست راهنما