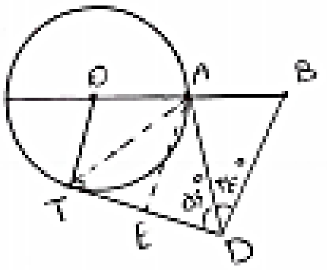
۱۲۵- گزینه‌ی ۳



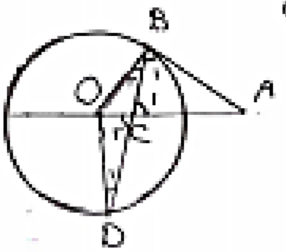
اگر از نقطه‌ی A خطی به موازات BD رسم نماییم تا TD را در نقطه‌ی E قطع کند، آن‌گاه $AE \perp TD$. همچنین چون A وسط OB است پس E نیز وسط TD می‌شود. چون AE در مثلث ATD، هم ارتفاع و هم میانه است، پس این مثلث متساوی‌الساقین است، یعنی $A\hat{T}D = 56^\circ$ و بدین ترتیب داریم:

$$T\hat{A}D = 180^\circ - (56^\circ + 56^\circ) = 68^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle OAT:\ OA = OT \Rightarrow O\hat{A}T = O\hat{T}A \\ O\hat{T}A = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{A}T = 34^\circ$$

$$O\hat{A}D = O\hat{A}T + T\hat{A}D = 34^\circ + 68^\circ = 102^\circ$$

۱۲۶- گزینه‌ی ۲



$$\left.\begin{array}{l} OB \perp AB \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ \\ AB = AC \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{B}_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\hat{C}_1 = \hat{C}_2} \hat{C}_2 + \hat{B}_2 = 90^\circ$$

از طرفی $OB = OD$، پس $\hat{D}_1 = \hat{B}_2$، بنابراین داریم:

$$\hat{C}_2 + \hat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow C\hat{O}D = 90^\circ$$

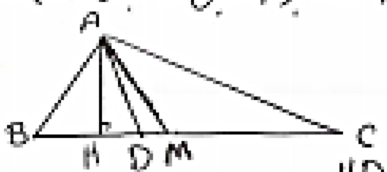
بنابراین مثلث OCD در رأس O قائم‌الزاویه است.

۱۲۷- گزینه‌ی ۳

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BDN:\ AM \parallel DN \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{MN}{BM} \\ \triangle ACM:\ EN \parallel AM \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{MN}{CM} \end{array}\right\} \xrightarrow{BM = CM} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

۱۲۸- گزینه‌ی ۴

در مثلث ABC، چون $AB \neq AC$، در این صورت میانه‌ی AM و نیمساز AD بر هم منطبق نیستند. با فرض $AB < AC$،

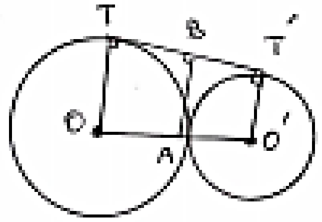


$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{AB<AC} BD < DC \Rightarrow 2BD < BC \Rightarrow BD < \frac{BC}{2}$$

بنابراین چون $BM = \frac{BC}{2}$، پس $BD < BM$، یعنی مطابق شکل $HD < HM$ و داریم:

$$HD^2 < HM^2 \Rightarrow AH^2 + HD^2 < AH^2 + HM^2 \Rightarrow AD^2 < AM^2 \Rightarrow AD < AM$$

۱۲۹ـ گزینهٔ ۲



اگر A وسط OO' باشد، آن‌گاه درصورتی‌که از A عمود AB را بر مماس مشترک خارجی رسم کنیم، $AB \parallel OT \parallel O'T'$ بوده و طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه، $AB = \frac{OT + O'T'}{2}$ یعنی $AB = \frac{R+R'}{2}$، پس AB دقیقاً نصف طول OO'، یعنی برابر با شعاع دایره‌ای است که به قطر OO' رسم می‌شود. پس این دایره بر مماس مشترک TT' مماس است.

۱۳۰ـ گزینهٔ ۱

طبق روابط طولی در دایره داریم:

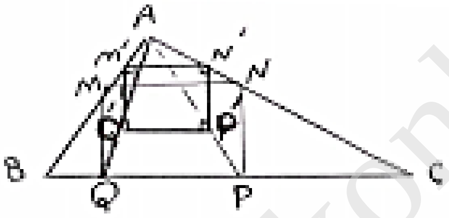
$$CC' \times CA = CM \times CD \quad (1)$$
$$BB' \times BA = BD \times BM \quad (2)$$

از طرفی چون AD نیمساز داخلی زاویهٔ A در مثلث ABC است، پس داریم: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \quad (3)$

با تقسیم رابطهٔ (۲) بر رابطهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{BB' \times CA}{CC' \times BA} = \frac{CM \times CD}{BD \times BM} \xrightarrow{BM = CM} \frac{BB'}{CC'} \times \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} \xRightarrow{(3)} \frac{BB'}{CC'} = 1$$

۱۳۱ـ گزینهٔ ۴



در مثلث ABC، پاره‌خط دلخواه $M'N'$ را موازی BC رسم می‌کنیم (M' روی AB و N' روی AC). سپس دو عمود در نقاط M' و N' بر این پاره‌خط رسم کرده و به اندازهٔ $M'N'$ روی آن‌ها جدا می‌کنیم. چهارضلعی $M'N'P'Q'$ مربع است. حال از A به P' و Q' وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند. در نقطهٔ P عمودی بر BC رسم کرده تا AC را در نقطهٔ N قطع کند و از نقطهٔ N، پاره‌خط MN را موازی BC رسم می‌کنیم. چهارضلعی MNPQ مربع و خواسته مسأله است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} M'N' \parallel MN \Rightarrow \frac{AM'}{AM} = \frac{AN'}{AN} = \frac{M'N'}{MN} \\ P'Q' \parallel PQ \Rightarrow \frac{AQ'}{AQ} = \frac{AP'}{AP} = \frac{P'Q'}{PQ} \end{array}\right\} \xrightarrow[PQ = MN]{P'Q' = M'N'} \frac{AM'}{AM} = \frac{AN'}{AN} = \frac{AQ'}{AQ} = \frac{AP'}{AP}$$

بنابراین چهارضلعی MNPQ، متجانس چهارضلعی $M'N'P'Q'$ با مرکز تجانس A می‌باشد.

۱۳۲ـ گزینهٔ ۴

اگر وسط پاره‌خط‌های BC، BD و CD را به ترتیب M، N و P بنامیم، آن‌گاه صفحاتی که از A و دو نقطه از میان نقاط M، N و P بگذرند (سه صفحه) از این سه نقطه به یک فاصله‌اند. همچنین صفحه‌ای که از A به موازات صفحهٔ مثلث BCD رسم می‌شود، نیز از این سه نقطه به یک فاصله است.

۱۳۳ـ گزینه‌ی ۱

اگر $M=(x,y,z)$ را درنظر بگیریم، آن‌گاه:

$\overrightarrow{AM}=(x-5,\ y+4,\ z-1)$

$\overrightarrow{AB}=(-9,\ 6,\ 3)$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow (x-5,\ y+4,\ z-1)=(-6,4,2) \Rightarrow \begin{cases} x-5=-6 \Rightarrow x=-1 \\ y+4=4 \Rightarrow y=0 \\ z-1=2 \Rightarrow z=3 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}=(-1,0,3) \Rightarrow |\overrightarrow{OM}|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}$$

۱۳۴ـ گزینه‌ی ۲

فرض کنیم $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$ و $d': (x=2y+1\ ,\ z=-y+2)$ باشند.

در معادله‌ی خط d'، اگر $y=t$ فرض شود، آن‌گاه داریم: $d': \begin{cases} x=2t+1 \\ y=t \\ z=-t+2 \end{cases}$ و از مقایسه‌ی بردارهای هادی دو خط، موازی بودن آن‌ها مشخص می‌شود. حال نقطه‌ی $A=(1,0,2)$ را از خط d' درنظر گرفته و فاصله‌ی آن را از d به‌دست می‌آوریم.

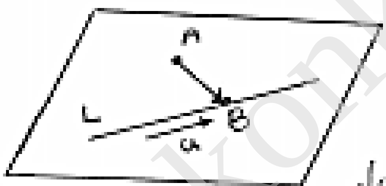
$A_0=(1,-2,0)$ (نقطه‌ای دلخواه روی d)

$u=(2,1,-1)$ (بردار هادی خط d)

$$\overrightarrow{A_0A}=(0,2,2) \Rightarrow \overrightarrow{A_0A}\times u=(-4,4,-4)$$

$$(\text{فاصله‌ی } d \text{ و } d')\quad D=\frac{|\overrightarrow{A_0A}\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{2}$$

۱۳۵ـ گزینه‌ی ۴



نقطه‌ی $B=(-1,0,2)$ را روی خط $L: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$ درنظر گرفته و با کمک بردار $\overrightarrow{AB}$ و بردار هادی خط L، بردار نرمال صفحه را پیدا می‌کنیم.

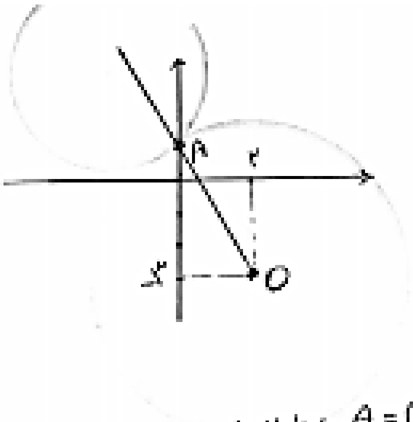
$$\begin{matrix} A=(0,3,0) \\ B=(-1,0,2) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-1,-3,2),\quad u=(2,3,-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times u=(-3,3,3)$$

بردار نرمال را می‌توان به‌صورت $n=(-1,1,1)$ درنظر گرفت. معادله‌ی صفحه عبارت است از:

$$-(x-0)+(y-3)+(z-0)=0 \Rightarrow -x+y+z=3$$

برای یافتن ارتفاع برخورد با محور zها، x و y را برابر صفر قرار می‌دهیم. در این صورت $z=3$ به‌دست می‌آید.

۱۳۶ـ گزینه‌ی ۱



مطابق شکل، مراکز دو دایره‌ی مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایره‌ی C' در ناحیه‌ی دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم تمام قطرهای رسم شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O=(2,-3)$ و $A=(0,1)$، داریم:

$$m_{OA}=\frac{1-(-3)}{0-2}=-2$$

معادله‌ی OA: $y-1=-2(x-0)\Rightarrow y=-2x+1$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطه‌ای $(-1,3)$، نقطه‌ای است که در ناحیه‌ی دوم دستگاه مختصات است و روی امتداد خط OA قرار دارد. با فرض $O'=(-1,3)$ داریم:

$$O'A=\sqrt{(0+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$$

۱۳۷ـ گزینه‌ی ۲

با توجه به معادله‌ی خط هادی، سهمی قطعاً افقی است و چون کانون در سمت راست خط هادی قرار دارد، پس سهمی رو به راست باز می‌شود. رأس سهمی دقیقاً وسط فاصله‌ی کانون و خط هادی قرار دارد، پس $S=(1,2)$ رأس سهمی است. فاصله‌ی رأس تا کانون برابر $|a|$ می‌باشد و چون $a>0$، پس $a=2$ است.

معادله‌ی سهمی: $(y-2)^2=4\times 2(x-1)$

برای یافتن محل تلاقی با محور xها، $y=0$ در معادله جایگزین می‌شود، داریم:

$$(-2)^2=8(x-1)\Rightarrow x-1=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

پس نقطه‌ی $A=(\frac{3}{2},0)$، محل تلاقی سهمی با محور xهاست.

$$AF=\sqrt{(3-\frac{3}{2})^2+(2-0)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}=2/5$$

۱۳۸ـ گزینه‌ی ۲

اگر زاویه‌ی دوران را برابر θ فرض کنیم، داریم:

$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{24}{5-(-2)}=\frac{24}{7}$$

$$\Rightarrow\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{24}{7}\Rightarrow 14\tan\theta=24-24\tan^2\theta\xrightarrow{\div 2}12\tan^2\theta+7\tan\theta-12=0$$

$$\Rightarrow\tan\theta=\frac{-7\pm 25}{24}\Rightarrow\begin{cases}\tan\theta=\frac{3}{4}\\ \tan\theta=-\frac{4}{3} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۳۹ـ گزینه‌ی ۴

چون ماتریس B ، ۴×۳ است ، بنابراین ترانهاده‌ی آن یعنی B^t ، ۳×۴ می‌باشد . حال تعداد سطرهای B^t با تعداد ستون‌های A برابر است پس ضرب AB^t امکان‌پذیر می‌باشد .

۱۴۰ـ گزینه‌ی ۳

اگر R_1 و R_3 را به ترتیب سطر اول و سوم ماتریس A در نظر بگیریم ، آن‌گاه $R_3 \times R_1$ معادل ستون دوم ماتریس A^* (ماتریس الحاقی) خواهد بود .

$$R_3 = (۰, ۰, ۳)$$
$$R_1 = (۱, -۱, ۲) \Longrightarrow R_3 \times R_1 = (۳, ۳, ۰)$$

از طرفی ماتریس A ، بالامثلثی است پس دترمینان آن برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی یعنی برابر ۶ است ، داریم :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{۶}\begin{bmatrix} & ۳ & \\ & ۳ & \\ & ۰ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \frac{1}{۲} & \\ & \frac{1}{۲} & \\ & ۰ & \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^{-1} ، برابر ۱ است .

۱۴۱ـ گزینه‌ی ۳

جدول فراوانی داده‌های متناظر با نمودار چندبر فراوانی به صورت زیر است :

حدود دسته	۲۲٫۵–۲۵٫۵	۲۵٫۵–۲۸٫۵	۲۸٫۵–۳۱٫۵	۳۱٫۵–۳۴٫۵	۳۴٫۵–۳۷٫۵
فراوانی	۸	۱۰	۱۲	۱۱	۹

داده‌ی ۲۹ در دسته‌ی سوم (دسته‌ی وسط) و داده‌ی ۳۲ در دسته‌ی چهارم قرار می‌گیرد . بنابراین فراوانی دسته‌ی سوم برابر ۱۳ و فراوانی کل داده‌ها برابر ۵۲ می‌گردد و داریم :

$$\text{فراوانی نسبی دسته‌ی وسط} = \frac{۱۳}{۵۲} \times ۱۰۰ = ۲۵$$

۱۴۲ـ گزینه‌ی ۳

ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم :

$$\bar{x} = \frac{۶۰ + ۹۸ + ۱۲۰ + ۱۸a + ۶۰}{۲۵ + a} = ۱۶ \Longrightarrow a = ۱۱$$

واریانس داده‌ها برابر است با :

$$S^2 = \frac{۵(۱۲-۱۶)^2 + ۷(۱۴-۱۶)^2 + ۱۱(۱۸-۱۶)^2 + ۳(۲۰-۱۶)^2}{۳۶}$$

$$\Longrightarrow S^2 = \frac{۲۰۰}{۳۶} = ۵٫۵۵$$

۱۴۳- گزینه‌ی ۱

اگر $n=5$ قرار داده شود، داریم: $2^6 < 5!$. با توجه به برقراری رابطه، پس $m=5$، عدد مناسب برای استقرای تعمیم یافته است. حال برای اثبات استقرا می‌توان نوشت:

فرض استقرا: $k! > 2^{k+1}$

حکم استقرا: $(k+1)! > 2^{k+2}$

با ضرب کردن طرفین فرض استقرا در عدد ۲ داریم: $2k! > 2^{k+2}$، پس کافی است ثابت کنیم:

$$(k+1)! > 2k! \Rightarrow (k+1)\times k! > 2\times k! \Rightarrow k+1 > 2$$

که رابطه‌ی اخیر، بدیهی است ($k \geq 5$ است)

۱۴۴- گزینه‌ی ۲

در تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد ۲۷، ۲۷ باقیمانده‌ی مختلف (۰، ۱، ۲، ...، ۲۶) وجود دارد.

حال چون $4\times 27 < 115 < 5\times 27$، پس حداقل $4+1=5$ عدد عضو مجموعه‌ی S، دارای باقیمانده‌ی یکسان در تقسیم بر ۲۷ هستند.

۱۴۵- گزینه‌ی ۲

با توجه به تعریف A_n داریم:

$A_1 = \{-1, 0, 1\}$

$A_4 = \{-4, -3, \dots, 3\}$

$A_6 = \{-6, -5, \dots, 3\}$

$(A_6 - A_4) \cup A_1 = \{-6, -5\} \cup \{-1, 0, 1\} = \{-6, -5, -1, 0, 1\}$

۱۴۶- گزینه‌ی ۳

چون $|x| \leq 3$، پس $-3 \leq x \leq 3$.

$x=-3 \Rightarrow |y| \leq 3 \Rightarrow y = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \longrightarrow$ ۷ جواب

$x=-2 \Rightarrow |y| \leq 2 \Rightarrow y = -2, -1, 0, 1, 2 \longrightarrow$ ۵ جواب

$x=-1 \Rightarrow |y| \leq 1 \Rightarrow y = -1, 0, 1 \longrightarrow$ ۳ جواب

$x=0 \Rightarrow |y| \leq 0 \Rightarrow y = 0 \longrightarrow$ ۱ جواب

واضح است که به ازای $1 \leq x \leq 3$، رابطه عضوی ندارد، پس کل تعداد اعضای رابطه برابر ۱۶ است.

۱۴۷ـ گزینهٔ ۱

تعداد حالت‌های فضای نمونه‌ای برابر $6! = n(S)$ است. برای اینکه شماره‌های زوج و فرد، یک در میان تکرار گردند، داریم:

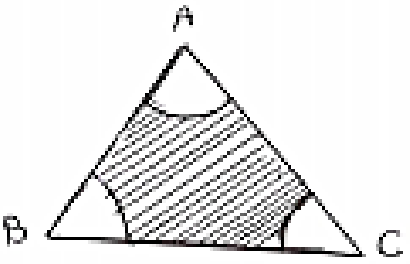
فرد زوج فرد زوج فرد زوج

$3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 3! \times 3!$

ولی چون می‌توان ابتدا با عدد فرد شروع کرد، پس تعداد اعضای پیشامد مورد نظر برابر است با: $n(A) = 2 \times 3! \times 3!$.

$$P(A) = \frac{2 \times 3! \times 3!}{6!} = \frac{1}{10} = 0/1$$

۱۴۸ـ گزینهٔ ۳



مساحت فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$a(S) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\sqrt{2\pi\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3\pi}{2}$$

سه قطاع دایره که هر کدام معادل 60° هستند، روی هم یک نیم دایره ایجاد می‌کنند که مساحت آن برابر است با:

$$S(\text{نیم دایره}) = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$a(A) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

۱۴۹ـ گزینهٔ ۱

$$\text{تعداد دورهای به طول } m \text{ در گراف } K_p = \binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$$

$$\text{تعداد دورهای به طول ۵ در گراف } K_5 = \binom{5}{5} \times \frac{4!}{2} = 12$$

۱۵۰ـ گزینهٔ ۲

عدد a مضرب ۱۱ است پس می‌توان آن را به صورت $11k \; (k \in \mathbb{Z})$ نوشت. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{4}{\equiv} 1 \\ a \overset{5}{\equiv} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{20}{\equiv} 1 \Rightarrow 11k \overset{20}{\equiv} 1 \overset{20}{\equiv} 121 \Rightarrow k \overset{20}{\equiv} 11$$

به ازای مقادیر $k = 11, 31, 51, 71$، عدد a یک عدد سه‌رقمی است، پس ۴ مقدار برای a وجود دارد.

۱۵۱ ـ گزینه‌ی ۲

اگر دو عدد را a و b $(a>b)$ و ب.م.م آن‌ها را d فرض کنیم: $a=a'd\,,\ b=b'd\quad (a',b')=1$

$$a+b=2772 \Rightarrow (a'+b')d=2772 \xRightarrow{d=231} a'+b'=12$$

چون عدد کوچک‌تر برابر d نیست، پس تنها ترکیب قابل قبول عبارت است از $a'=7\,,\ b'=5$.

$$a-b=(a'-b')d=2\times 231=462$$

---

۱۵۲ ـ گزینه‌ی ۴

$$2x^2-x-6 \overset{53}{\equiv} 0 \Rightarrow (x-2)(2x+3) \overset{53}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 \overset{53}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{53}{\equiv} 2 \\ 2x+3 \overset{53}{\equiv} 0 \Rightarrow 2x \overset{53}{\equiv} -3 \overset{53}{\equiv} 50 \Rightarrow x \overset{53}{\equiv} 25 \end{cases}$$

بزرگ‌ترین اعداد سه رقمی که در معادله‌های $x \overset{53}{\equiv} 2$ و $x \overset{53}{\equiv} 25$ صدق می‌کنند به ترتیب عبارت‌اند از ۹۵۶ و ۹۷۹. پس ۹۷۹ بزرگ‌ترین عدد سه رقمی با مشخصات مورد نظر است و رقم یکان آن ۹ می‌باشد.

---

۱۵۳ ـ گزینه‌ی ۴

اگر M ماتریس متناظر با رابطه‌ی R باشد، آن‌گاه داریم:

$$M=\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

رابطه‌ی RoR متناظر با ماتریس $M^{(2)}$ است.

$$M^{(2)}=\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

---

۱۵۴ ـ گزینه‌ی ۴

با افزودن متغیر x_4 به این نامعادله، آن را به یک معادله با ضرایب واحد تبدیل می‌کنیم.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4 \Longrightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{7}{4}=35$$

---

۱۵۵ ـ گزینه‌ی ۴

طرف اول: $\frac{7}{12}\times\frac{6}{24}$

طرف دوم: $\frac{5}{12}\times\frac{3}{18}$

$$P(\text{مهره‌ی سفید})=\frac{7}{12}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{48}+\frac{5}{72}=\frac{31}{144}$$