

فصل ششم: فرم قوی و ضعیف برای مسائل اسکالر چند بعدی

قضایای گرین و دیورژانس

در این فصل با نحوه بدست آوردن فرم ضعیف برای مسائل اسکالر چند بعدی آشنا می‌شویم.

به این منظور ابتدا قضیه گرین و قضیه دیورژانس را برای یادآوری مرور می‌کنیم.

مطابق با قضیه گرین برای یک میدان اسکالر θ داریم:

$$(۱-۶)$$

در این رابطه Ω ناحیه مسأله، Γ مرز ناحیه، $\vec{\nabla}$ بردار گرادیان و $\vec{n}$ بردار نرمال بر مرز ناحیه است.

XX

بر اساس قضیه دیورژانس برای میدان برداری $\vec{q}$ داریم:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \vec{q} d\Gamma \quad (۲-۶)$$

برای تابع اسکالر دلخواه w و میدان برداری $\vec{q}$ می‌توان نوشت:

$$(۳-۶)$$

یا به فرم انتگرالی:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (w\vec{q}) d\Omega = \int_{\Omega} w\vec{\nabla} \cdot \vec{q} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot \vec{q} d\Omega \quad (\text{الف})$$

XX

با اعمال قضیه دیورژانس به سمت چپ معادله اخیر خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (w\vec{q}) d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot (w\vec{q}) d\Gamma = \int_{\Gamma} w\vec{n} \cdot \vec{q} d\Gamma \quad (\text{ب})$$

بنابراین از معادله (الف) نتیجه می‌شود:

$$(\text{ج})$$

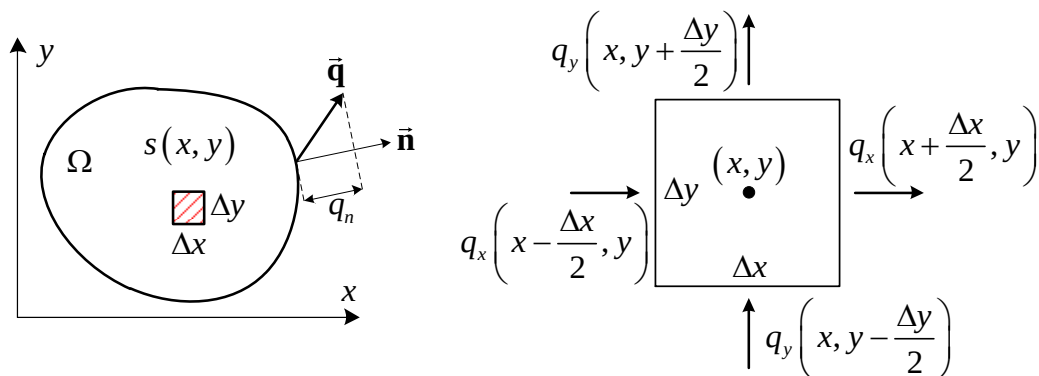
با جابجایی ترم‌های معادله بالا، فرمول گرین که مشابه انتگرال‌گیری جزء به جزء در یک بعد است بدست می‌آید:

$$\int_{\Omega} w\vec{\nabla} \cdot \vec{q} d\Omega = \int_{\Gamma} w\vec{n} \cdot \vec{q} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot \vec{q} d\Omega \quad (۴-۶)$$

XX

فرم قوی مسأله رسانایی گرمایی

معادله انتقال حرارت حاکم بر جسم دوبعدی شکل زیر با نوشتن معادله پایداری انرژی برای حجم کنترل نشان داده شده بدست می آید:

[illegible]

فرم برداری معادله اخیر عبارت است از:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - s = 0 \quad (5-6)$$

قانون فوریه در حالت چندبعدی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (9-9)$$

با جاگذاری از معادله (۶-۶) در (۵-۶) خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} \cdot (-k \vec{\nabla} T) - s = 0 \quad (Y-6)$$

یا اگر ضریب رسانایی ثابت باشد:

(1-6)

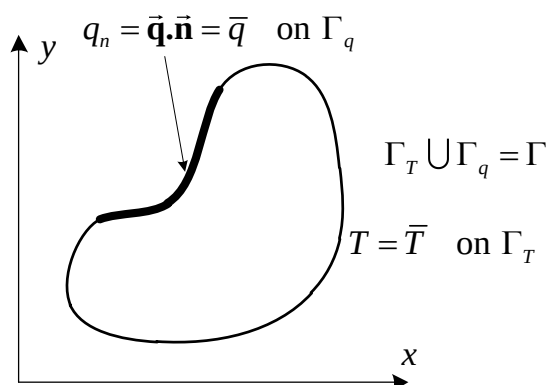
XX

عملگر ∇^2 عملگر لاپلاسین و معادله اخیر معادله یواسون نام دارد.

بنابر این معادله رسانایی گرمایی در دو بعد بصورت زیر خواهد بود:

(9-6)

برای حل این معادله دیفرانسیل پاره‌ای نیاز به شرایط مرزی داریم.

$$\Gamma_g \cup \Gamma_T = \Gamma \quad , \quad \Gamma_g \cap \Gamma_T = \emptyset \quad (1.6)$$


شرط مرزی شار گرما (شرط طبیعی) بصورت زیر هستند:

$$T = \bar{T} \quad \text{on } \Gamma_T \quad (11-6)$$

(۱۲-۶)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + s &= 0 && \text{on } \Omega \\ q_n &= \vec{q} \cdot \vec{n} = \bar{q} && \text{on } \Gamma_q \\ T &= \bar{T} && \text{on } \Gamma_T \end{aligned} \tag{13-6}$$

برای بدست آوردن فرم ضعیف مانند قبل معادله دیفرانسیل را در تابع وزن w ضرب کرده و روی ناحیه مسأله انتگرال

می گیریم:

(۱۴-۶)

حال با استفاده از فرمول گرین یعنی معادله (۶-۴)، ترم اول معادله بالا را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_{\Omega} w \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) d\Omega = \oint_{\Gamma} w \vec{n} \cdot (k \vec{\nabla} T) d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot (k \vec{\nabla} T) d\Omega \quad (15-6)$$

با جاگذاری از این معادله در معادله (۶-۱۴) بدست می‌آید:

$$\oint_{\Gamma} w \vec{n} \cdot (k \vec{\nabla} T) d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot (k \vec{\nabla} T) d\Omega + \int_{\Omega} w s d\Omega = 0$$

یا از رابطه (۶-۶):

[illegible]

یا به عبارت دیگر:

$$-\int_{\Gamma_g} w(\vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_T} w(\vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} w) \cdot (k \vec{\nabla} T) d\Omega + \int_{\Omega} w s d\Omega = 0$$

با توجه به اینکه تابع وزن باید روی مرزهای ضروری صفر باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$-\int_{\Gamma_a} w \bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} w) \cdot (k \vec{\nabla} T) d\Omega + \int_{\Omega} w s d\Omega = 0$$

بنابر این فرم ضعیف مسأله رسانایی گرمایی چندبعدی عبارت است از:

(۱۶-۶)

XX

فرم ضعیف مسأله تحلیل تنش

برای بدست آوردن فرم ضعیف مسأله تحلیل تنش می‌توان همان رویکردی را که برای مسأله رسانایی گرما استفاده شد بکار گرفت.

یعنی ابتدا فرم قوی مسأله را در دو یا سه بعد بدست آورد.

انجام این رویکرد به دانشجویان محول می‌گردد.

در این بخش برای بدست آوردن فرم ضعیف مسأله تحلیل تنش از یک رویکرد دیگر یعنی اصل انرژی پتانسیل مینیوم استفاده می‌کنیم.

XX

طبق اصل انرژی یثانسیل مینی موم:

- از میان تمام میدان‌های جابجایی ممکن که شرایط مرزی جابجایی مسأله را ارضا می‌کنند،
- میدانی که معادلات تعادل استاتیک را هم ارضا نماید (یعنی جواب مسأله باشد) کمترین انرژی پتانسیل کل را در جسم ایجاد می‌کند.

- تغییر در انرژی پتانسیل داخلی ماده یعنی U_i با تغییر در کار انجام شده توسط نیروهای خارجی روی آن یعنی W_e برابر باشد:

[illegible]

$$\delta U_i = \int_V \left(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \delta \varepsilon_{zx} \right) dV$$

(۱۸-۶)

اگر نیروی جسمی بر واحد حجم را با ρ ، نیروی مرزی بر واحد طول را با σ و نیروهای متمرکز را با f_p نشان دهیم تغییر در W_e برابر است با:

$$\delta W_e = \int_V (b_x \delta u_x + b_y \delta u_y + b_z \delta u_z) dV + \int_S (s_x \delta u_x + s_y \delta u_y + s_z \delta u_z) dS + \sum_{n=1}^N (f_{px} \delta u_x + f_{py} \delta u_y + f_{pz} \delta u_z)$$

[illegible]

N در ترم سوم معادله تعداد نیروهای متمرکز وارد بر جسم است.

فرم ماتریسی این معادله عبارت است از:

(19-6)

با قرار دادن (۶-۱۸) و (۶-۱۹) در معادله (۶-۱۷) بدست می‌آید:

$$\int_V (\delta \tilde{\mathbf{e}})^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dV = \int_V (\delta \tilde{\mathbf{u}})^T \tilde{\mathbf{b}} dV + \int_S (\delta \tilde{\mathbf{u}})^T \tilde{\mathbf{s}} dS + \sum_{p=1}^N (\delta \tilde{\mathbf{u}})^T \tilde{\mathbf{f}}_p \quad (20-6)$$

معادله بالا فرم ضعیف مسأله تحلیل تنش می باشد.

[illegible]