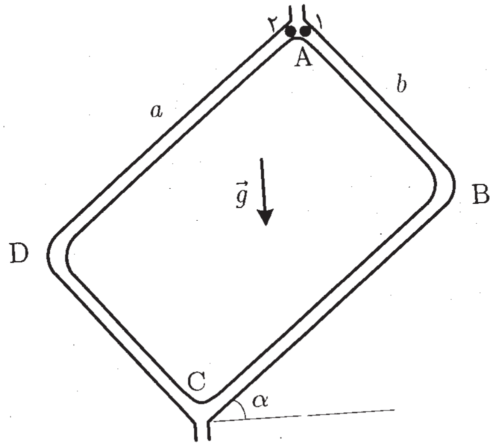
۱)



الف) اگر t_1 زمان رسیدن گلوله ۱ از A تا B

و v_B سرعت آن در B باشد

$$b=\frac{1}{2}g\cos\alpha\, t_1^2 \quad , \quad v_B = g\cos\alpha\, t_1$$

$$t_1=\sqrt{\frac{2b}{g\cos\alpha}} \quad , \quad = \sqrt{2gb\cos\alpha}$$

اگر t'_1 زمان رسیدن گلوله ۱ از B تا C باشد

$$a=\frac{1}{2}g\sin\alpha\, {t'_1}^2+\sqrt{2bg\cos\alpha}\; t'_1$$

$$t'_1=\frac{1}{g\sin\alpha}\left(-\sqrt{2bg\cos\alpha}+\sqrt{2g(b\cos\alpha+a\sin\alpha)}\right)$$

$$T_1=\sqrt{\frac{2b}{g\cos\alpha}}+\frac{1}{g\sin\alpha}\left(-\sqrt{2bg\cos\alpha}+\sqrt{2g(b\cos\alpha+a\sin\alpha)}\right)$$

ب) با تبدیل $a\leftrightarrow b$ و $\sin\alpha\leftrightarrow\cos\alpha$

$$T_2=\sqrt{\frac{2a}{g\sin\alpha}}+\frac{1}{g\cos\alpha}\left(-\sqrt{2ag\sin\alpha}+\sqrt{2g(a\sin\alpha+b\cos\alpha)}\right)$$

پ) $$T_1-T_2=\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{a\sin\alpha}+\sqrt{b\cos\alpha}-\sqrt{a\sin\alpha+b\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

$$\Downarrow$$

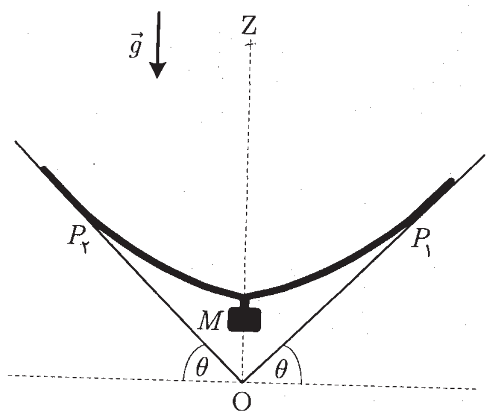
$$f(a,b,\alpha)=\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{a\sin\alpha}+\sqrt{b\cos\alpha}-\sqrt{a\sin\alpha+b\cos\alpha}\right)$$

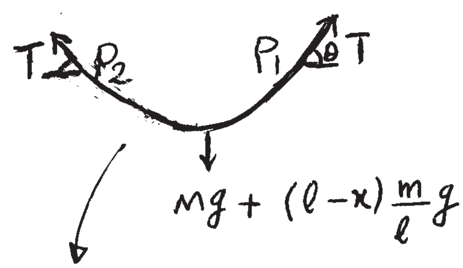
اما $f(a,b,\alpha)>0$

بنابراین برای اینکه $T_1-T_2<0$ باید $\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}<0$

یعنی $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$

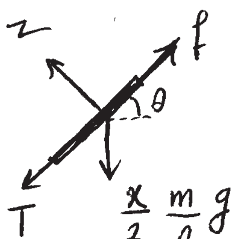
۲) آ) نیروهای وارد بر قسمتی از طناب که روی سطح شیبدار نیست مطابق شکل است





در راستای قائم $\quad 2T\sin\theta - Mg - (l-x)\frac{m}{l}x = 0$

بنابراین $\quad T = \frac{g}{2\sin\theta}\left(M + \left(1-\frac{x}{l}\right)m\right)$



ب) نیروهای وارد بر تکه های روی سطح مطابق شکل،

و در آستانه لغزش داریم

$$\begin{cases} f - T - \frac{x}{2}\frac{m}{l}g\sin\theta = 0 \\ f = \mu N \\ N - \frac{x}{2}\frac{m}{l}g\cos\theta \end{cases}$$

از سوی دیگر اگر جسمی (مانند طناب) روی سطح شیبدار α در آستانه لغزش باشد

$$\mu = \tan\alpha$$

بنابراین از معادلات اخیر

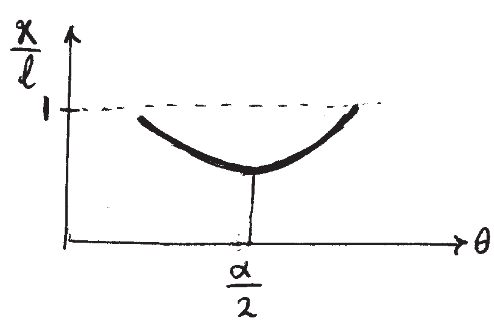
$$\frac{x}{l} = \left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha + \cos(\alpha-2\theta)}$$

نمودار x برحسب θ حول $\theta = \frac{\alpha}{2}$ متقارن است. همچنین از $\frac{dx}{d\theta} = 0$ به دست می‌آید $\theta = \frac{\alpha}{2}$ و نمودار در این نقطه کمینه است.

$$x_{min} = x\Big|_{\theta=\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{min} = l\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$



ب) به ازای $\theta=0$ و $\theta=\alpha$ ، داریم $x>l$ که قابل قبول نیست. بنابراین

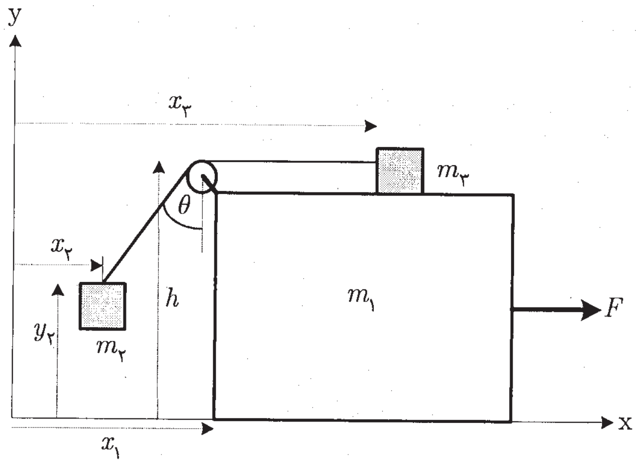
محدوده‌ی مجاز θ جایی است که $0<x\leqslant l$ بنابراین باید

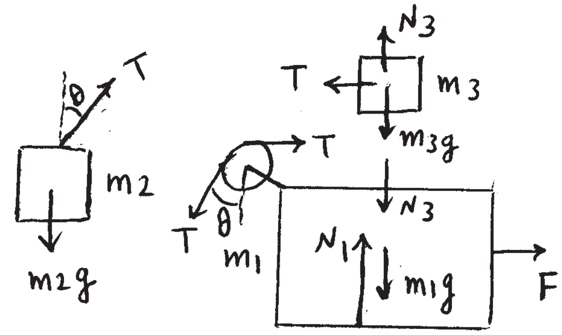
$$\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos(\alpha-2\theta)}\leqslant 1 \Rightarrow \left(\frac{2M}{m}+1\right)\cos\alpha\leqslant\cos(\alpha-2\theta)$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2}\left(\alpha-\cos^{-1}\left[\left(1+\frac{2M}{m}\right)\cos\alpha\right]\right)\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\left(\alpha+\cos^{-1}\left[\left(1+\frac{2M}{m}\right)\cos\alpha\right]\right)$$

۳) آ) نیروهای وارد بر هر جسم در شکل نشان داده شده است.





m_1 : $F + T - T\sin\theta = m_1 a_1$

m_2 : $\begin{cases} T\cos\theta - m_2 g = m_2 a_{2y} \\ T\sin\theta = m_2 a_{2x} \end{cases}$

m_3 : $-T = m_3 a_3$

ب) $$(x_3 - x_1) + (x_1 - x_2)/\sin\theta = l$$

پس از دوبار مشتق‌گیری نسبت به زمان : $a_3 \sin\theta + a_1(1-\sin\theta) - a_{2x} = 0$

پ) $$\tan\theta = \frac{x_1 - x_2}{h - y_2}$$

پس از دوبار مشتق‌گیری نسبت به زمان : $a_1 \cos\theta - a_{2x}\cos\theta + a_{2y}\sin\theta = 0$

ت)

$$a_1 = g\tan\theta$$

$$F = \left(m_1 \tan\theta - \frac{m_2 m_3 (1-\sin\theta)^2}{(m_2+m_3)\cos\theta}\right) g$$

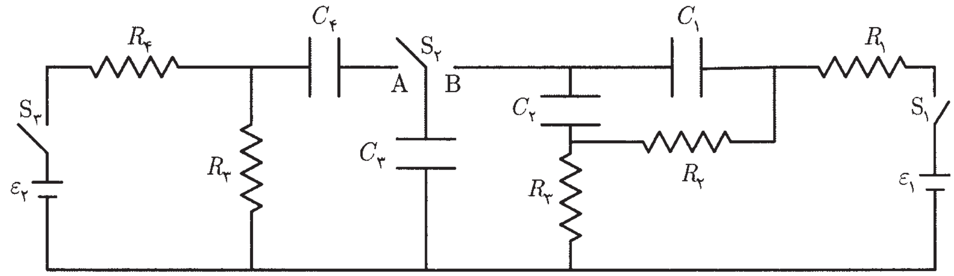
سایر مجهولات که در سؤال خواسته نشده عبارتند از :

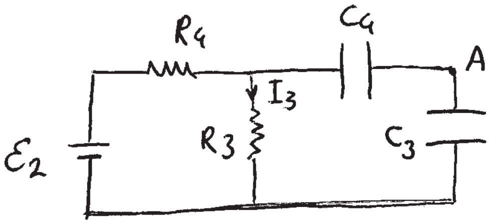
$$a_{2x} = \frac{m_3 g}{m_2+m_3}(1-\sin\theta)\tan\theta \quad , \quad a_{2y} = -\frac{m_2 + m_3\sin\theta}{m_2+m_3} g$$

$$a_3 = -\frac{m_2 g}{m_2+m_3}\,\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad T = \frac{m_2 m_3 g}{m_2+m_3}\,\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

۴) الف)

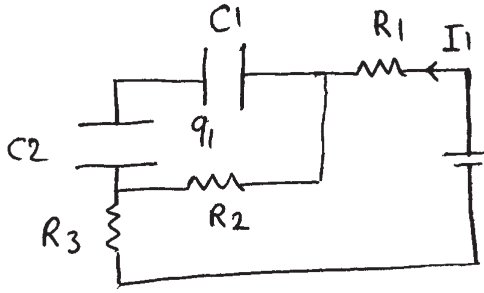
در ابتدا که کلید S_2 به A وصل می‌شود دو قسمت مدار مطابق شکل به صورت جداگانه عمل می‌کنند.





پس از زمان طولانی $\Longrightarrow$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_2}{R_3+R_4} \Rightarrow q_3 = \frac{R_3}{R_3+R_4}\,\frac{C_3C_4}{C_3+C_4}\,\varepsilon_2$$

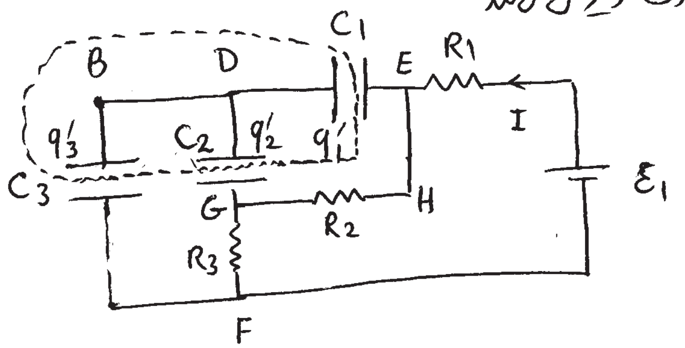


پس از زمان طولانی $\Longrightarrow$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1+R_2+R_3}$$

$$q_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2+R_3}\,\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\,\varepsilon_1$$

ب) در این حالت مدار به صورت زیر عمل می‌کند



پس از گذشت زمان طولانی $\Longrightarrow$

$$I = \frac{\varepsilon_1}{R_1+R_2+R_3}$$

اختلاف پتانسیل نقطه‌های E و F از مسیر EBF و EGF:

(1) $$\frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_3}{C_3} = (R_2+R_3)I$$

اختلاف پتانسیل نقطه‌های E و G از مسیر EDG و EHG:

(2) $$\frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_2}{C_2} = R_2 I$$

بار کل روی صفحه‌هایی که داخل نقطه‌چین هستند در ابتدای وصل شدن کلید S_2 به B و پس از زمان طولانی یکسان است یعنی:

(3) $$-q'_1 + q'_2 + q'_3 = -q_1 + q_2 + q_3$$

پس از حذف q'_2 بین دو معادله ۲ و ۳ و قرار دادن I در آن ،
و نیز قرار دادن I در معادله ۱ خواهیم داشت

$$\begin{cases} \dfrac{q'_1}{C_1} + \dfrac{q'_3}{C_3} = \dfrac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}\,\varepsilon_1 \\[2ex] q'_1\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}\right) - \dfrac{q'_3}{C_2} = \dfrac{-q_3}{C_2} + \dfrac{R_2}{R_1+R_2+R_3}\,\varepsilon_1 \end{cases}$$

پ) به ازای $C_1 = C_2 = C_3 = C$ و $R_1 = R_2 = R_3 = R$ خواهیم داشت
و $q_3 = \frac{1}{4}C\varepsilon_2$

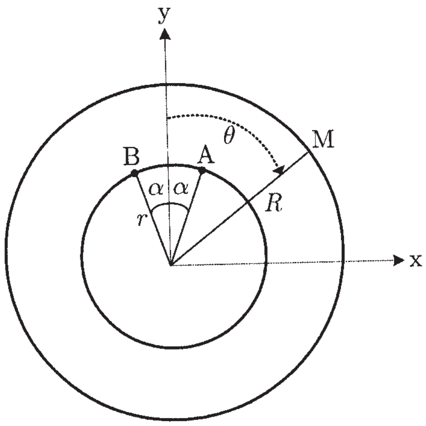
$$\begin{cases} q'_1 + q'_3 = \frac{2}{3}C\varepsilon_1 \\[1ex] 2q'_1 - q'_3 = \frac{1}{3}C\varepsilon_1 - \frac{1}{4}C\varepsilon_2 \end{cases}$$

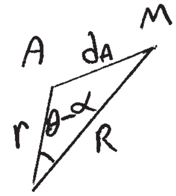
$$\Downarrow$$

$$q'_1 = \frac{1}{3}C\varepsilon_1 - \frac{1}{12}C\varepsilon_2$$

$$q'_3 = \frac{1}{3}C\varepsilon_1 + \frac{1}{12}C\varepsilon_2$$

۵) ۱۳)





$$d_A = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\alpha)}$$

ب)

$$d = d_B - d_A$$

$$d = \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta+\alpha)} - \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}$$

پ)

$$d = R\left(1 - 2\frac{r}{R}\cos(\theta+\alpha) + \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} - R\left(1 - \frac{2r}{R}\cos(\theta-\alpha) + \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}$$

$$d \approx R\left(1 - \frac{2r}{R}\cos(\theta+\alpha)\right)^{1/2} - R\left(1 - \frac{2r}{R}\cos(\theta-\alpha)\right)^{1/2}$$

$$d \approx R\left(1 - \frac{r}{R}\cos(\theta+\alpha)\right) - R\left(1 - \frac{r}{R}\cos(\theta-\alpha)\right) = r\left(\cos(\theta-\alpha) - \cos(\theta+\alpha)\right)$$

$$d \approx 2r\sin\alpha\sin\theta$$

ت)

$$|\Delta\phi| = 2\pi\frac{d}{\lambda} \Rightarrow |\Delta\phi| = \frac{4\pi r}{\lambda}\sin\alpha\,|\sin\theta|$$

ث) در بیشینه‌ها

$$|\Delta\phi| = 2n\pi \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Downarrow$$

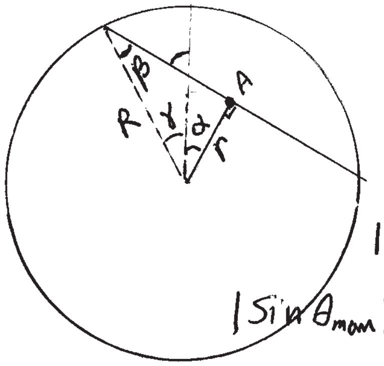
$$|\sin\theta| = \frac{n\lambda}{2r\sin\alpha} \Rightarrow \theta = \pm\sin^{-1}\left(\frac{n\lambda}{2r\sin\alpha}\right)$$

ج) در کمینه‌ها

$$|\Delta\phi| = (2n+1)\pi \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

$$|\sin\theta| = \frac{(2n+1)\lambda}{4r\sin\alpha} \Rightarrow \theta = \pm\sin^{-1}\left(\frac{(2n+1)\lambda}{4r\sin\alpha}\right)$$

چ) محدوده‌ی θ مطابق شکل برابر 2γ است.



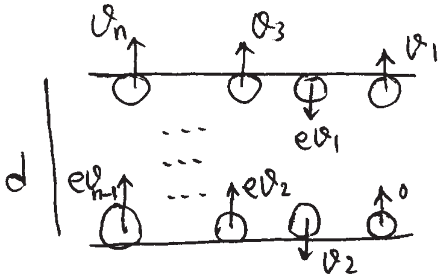
اما $\sin\beta = \frac{r}{R}$ و $\gamma + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

بنابراین $\sin\gamma = \cos(\alpha+\beta)$ ، یعنی $|\sin\theta_{max}| = |\sin\gamma|$

اگر به تقریب $\beta \approx 0$ باشد آنگاه $\gamma \approx \frac{\pi}{2} - \alpha$ و $|\sin\theta_{max}| \approx \cos\alpha$

و $n_{max} = \frac{r\sin 2\alpha}{\lambda}$ و تعداد نوارهای روشن خواهد شد $2n_{max}+1 = \frac{2r\sin 2\alpha}{\lambda} + 1$

۶۰) آ) شتاب هر توپ که دارای بار q و جرم m است



همواره ثابت است و برابر $a=\dfrac{q\mathcal{E}}{md}$ می باشد.

اگر در ابتدا هر توپ با سرعت صفر از صفحه پایین جدا شود

و سرعت اش درست هنگام رسیدن به صفحه بالای v_1 باشد:

$$v_1^2-0^2=2ad$$

و اگر t_1 زمان رسیدن این توپ به صفحه بالای باشد:

$$d=\frac{1}{2}a t_1^2$$

$$\Downarrow \qquad v_1=\sqrt{\frac{2q\mathcal{E}}{m}} \quad \text{و} \quad t_1=\sqrt{\frac{2md^2}{q\mathcal{E}}}$$

ب) با توجه به شکل در دفعه دلخواه n، توپ با سرعت ev_{n-1} از یک صفحه جدا می شود

و با سرعت v_n به صفحه دیگر می رسد به طوری که $v_n^2-e^2v_{n-1}^2=2ad$.

این رابطه را از دفعه اول $n=1$ تا دفعه kام $n=k$ می نویسیم، به خاطر داشته باشیم که $v_0=0$ است

$$v_1^2-e^2v_0^2=2ad \qquad \times (e^2)^{k-1}$$
$$v_2^2-e^2v_1^2=2ad \qquad \times (e^2)^{k-2}$$
$$\vdots$$
$$v_{k-1}^2-e^2v_{k-2}^2=2ad \qquad \times (e^2)^1$$
$$v_k^2-e^2v_{k-1}^2=2ad \qquad \times (e^2)^0$$

اگر معادله ها را به ترتیب از آخر به اول در $(e^2)^0$، $(e^2)^1$، ...، $(e^2)^{k-1}$ ضرب و پس با هم جمع کنیم خواهیم داشت

$$v_k^2 = 2ad\left(1+e^2+e^4+\dots+e^{2(k-1)}\right)$$

بنابراین

$$\boxed{v_k=\sqrt{\frac{2q\mathcal{E}}{m}}\sqrt{\frac{1-(e^2)^k}{1-e^2}}}$$

و اگر t_k زمان طی مسافت بین دو صفحه در دفعه kام باشد

$$v_k = a t_k + e v_{k-1} \Rightarrow \boxed{t_k=\sqrt{\frac{2md^2}{q\mathcal{E}}}\left(\sqrt{\frac{1-e^{2k}}{1-e^2}}-e\sqrt{\frac{1-e^{2(k-1)}}{1-e^2}}\right)}$$

پ) اگر مساحت هر صفحه A باشد، کل باری که در هر مرحله بین دو صفحه انتقال می یابد $Q=nAq$ است. در مرحله kام به طور متوسط پس از زمان t_k بار Q منتقل می شود. بنابراین طبق $I_k=\dfrac{Q}{t_k}$:

$$\boxed{I_k=nA\sqrt{\frac{q^3\mathcal{E}}{2md^2}}\left(\sqrt{\frac{1-e^{2k}}{1-e^2}}+e\sqrt{\frac{1-e^{2(k-1)}}{1-e^2}}\right)^{-1}}$$

ت) از آنجایی که $0<e^2<1$ لذا $(e^2)^{\infty}=0$ و در نتیجه

$$I_\infty = nA\sqrt{\frac{q^3\varepsilon}{2md^2}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

ث) اندازه‌ی اتلاف انرژی در برخورد kام برای یک توپ :

$$\Delta K_k = \frac{1}{2}m v_k^2 - \frac{1}{2}m(e v_k)^2$$

$$= q\varepsilon(1-e^{2k})$$

و برای همه‌ی توپ‌ها $\boxed{nAq\varepsilon(1-e^{2k})}$ است.

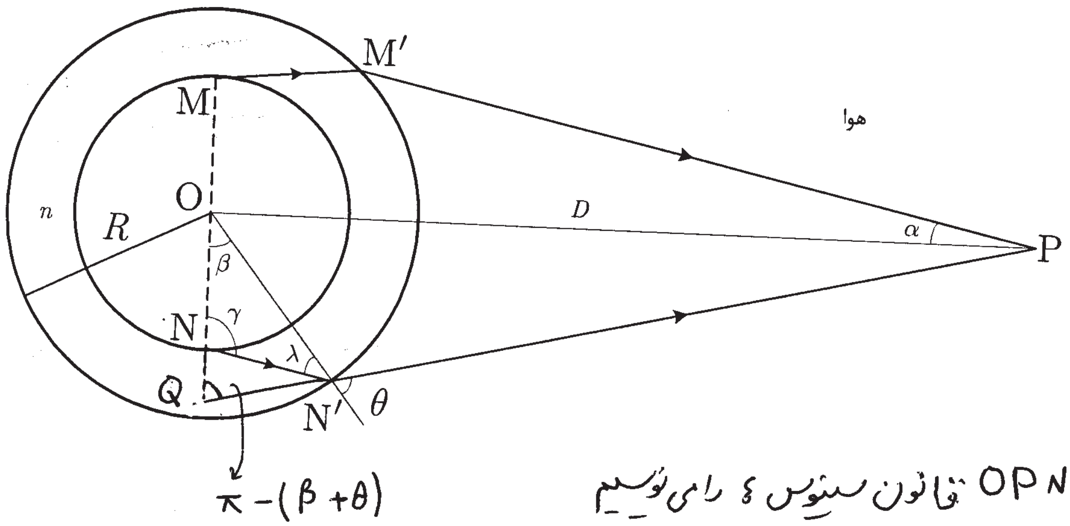
$$P_k = \frac{nAq\varepsilon(1-e^{2k})}{t_k} \Rightarrow \boxed{P_\infty = nA\sqrt{\frac{(q\varepsilon)^3}{2md^2}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}$$

ج) آهنگ انجام کار به وسیله‌ی باتری εI_∞ است که برابر است با

$$\varepsilon I_\infty = nA\sqrt{\frac{(q\varepsilon)^3}{2md^2}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

که با P_∞ برابر است.

۷) آ)



در مثلث OPN' قانون سینوس ها را می نویسیم

$$\frac{\sin\alpha}{R}=\frac{\sin\theta}{D} \Rightarrow \boxed{\sin\theta=\frac{D}{R}\sin\alpha}$$

قانون اسنل $n\sin\lambda=\sin\theta \Rightarrow \boxed{\sin\lambda=\frac{D}{Rn}\sin\alpha}$

اما در مثلث OPN'، θ زاویه خارجی است و برابر است با $\theta=\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$

$$\Downarrow$$

$$\sin\beta=\cos(\theta-\alpha) \Rightarrow \sin\beta=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$$

$$\boxed{\sin\beta=\frac{D}{R}\sin^2\alpha+\cos\alpha\sqrt{1-\left(\frac{D}{R}\right)^2\sin^2\alpha}}$$

در مثلث ONN' : $\pi-\gamma=\beta+\lambda \Rightarrow \sin\gamma=\sin(\beta+\lambda)$

$$\sin\gamma=\sin\beta\cos\lambda+\cos\beta\sin\lambda$$

باز هم با استفاده از $\theta=\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$: $\cos\beta=\sin(\theta-\alpha)$ بنابراین

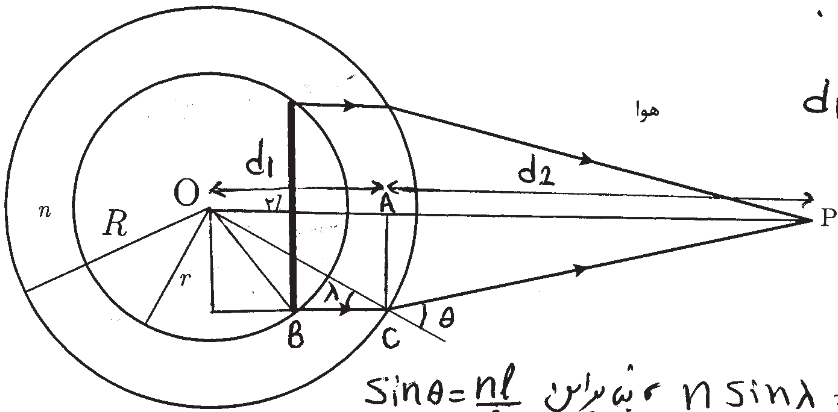
$$\sin\gamma=\sin\beta\cos\lambda+\sin\lambda\left(\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\gamma=&\left(\frac{D}{R}\sin^2\alpha+\cos\alpha\sqrt{1-\left(\frac{D}{R}\right)^2\sin^2\alpha}\right)\sqrt{1-\left(\frac{D}{Rn}\right)^2\sin^2\alpha}\\&+\frac{D}{Rn}\sin^2\alpha\left(\frac{D}{R}\cos\alpha-\sqrt{1-\left(\frac{D}{R}\right)^2\sin^2\alpha}\right)\end{aligned}}$$

ب) در مثلث ONN' : $\frac{\sin\gamma}{R}=\frac{\sin\lambda}{ON}$ بنابراین $MN=2R\frac{\sin\lambda}{\sin\gamma}$

پ) در مثلث OAC :

$$d_1=\sqrt{R^2-l^2} \quad \text{و} \quad \sin\lambda=\frac{l}{R}$$



بنا به قانون اسنل: $n\sin\lambda = \sin\theta$ ، بنابراین $\sin\theta=\frac{nl}{R}$

در مثلث PAC : $d_2 = l\cot(\theta-\lambda)$ ، در نتیجه

$$OP = d_1+d_2 = R\sqrt{1-\frac{l^2}{R^2}} + l\,\frac{\sqrt{1-\frac{n^2l^2}{R^2}}\sqrt{1-\frac{l^2}{R^2}}+n\frac{l^2}{R^2}}{\frac{nl}{R}\sqrt{1-\frac{l^2}{R^2}}-\frac{l}{R}\sqrt{1-\frac{n^2l^2}{R^2}}}$$

پس از ساده کردن:

$$OP=\frac{R}{\sqrt{1-\frac{l^2}{R^2}}-\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{l^2}{R^2}}}$$

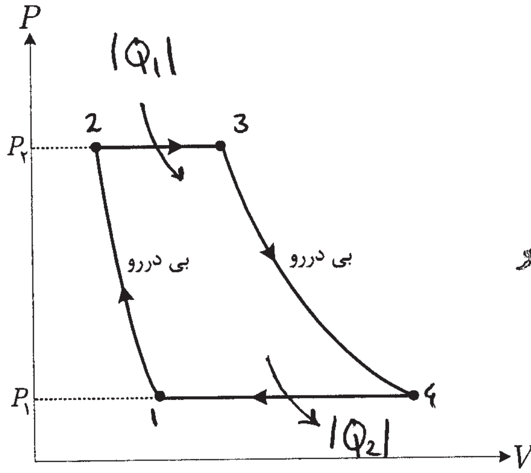
۸) آ) در فرآیند بی‌دررو: ثابت = PV^{γ}

اما برای گاز کامل $PV=nRT$ پس بنابراین

$$P\left(\frac{nRT}{P}\right)^{\gamma} = \text{ثابت}$$

بنابراین $PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ در یک فرآیند بی‌دررو گاز کامل ثابت است و

$$\boxed{\alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma}}$$



ب) $\boxed{T_1 = T_C}$ و $\boxed{T_3 = T_H}$ ونیز

برای دو فرآیند بی‌دررو: $P_2 T_3^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_1 T_4^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ و $P_1 T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_2 T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{T_4 = T_H\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \qquad \boxed{T_2 = T_C\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

پ)

$$|W| = |Q_1| - |Q_2|$$

$$|W| = C_{mp}(T_H - T_2) - C_{mp}(T_4 - T_C)$$

$$|W| = C_{mp}\left(T_H + T_C - T_C r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_H r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)$$

$$\boxed{|W| = C_{mp}\left(T_H - T_C r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\left(1 - r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

ت)

$$|W| = 0 \Rightarrow \boxed{r_1 = 1} \text{ و } \boxed{r_2 = \left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

ث)

$$\boxed{\eta_{max} = 1 - \frac{T_C}{T_H}}$$

ج)

$$\frac{d|W|}{dr} = 0 \Rightarrow C_{mp}\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma}T_C r^{\frac{-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{\gamma}T_H r^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r_m = \left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}$$

$$|W|_{max} = |W|\Big|_{r=r_m} \Rightarrow \boxed{|W|_{max} = C_{mp}\left(\sqrt{T_H} - \sqrt{T_C}\right)^2}$$

چ)

$$\eta_m = \eta\Big|_{r=r_m} \Rightarrow \boxed{\eta_m = 1 - \sqrt{\frac{T_C}{T_H}}}$$

ح)

$$\boxed{1 + \sqrt{\frac{T_C}{T_H}}}$$