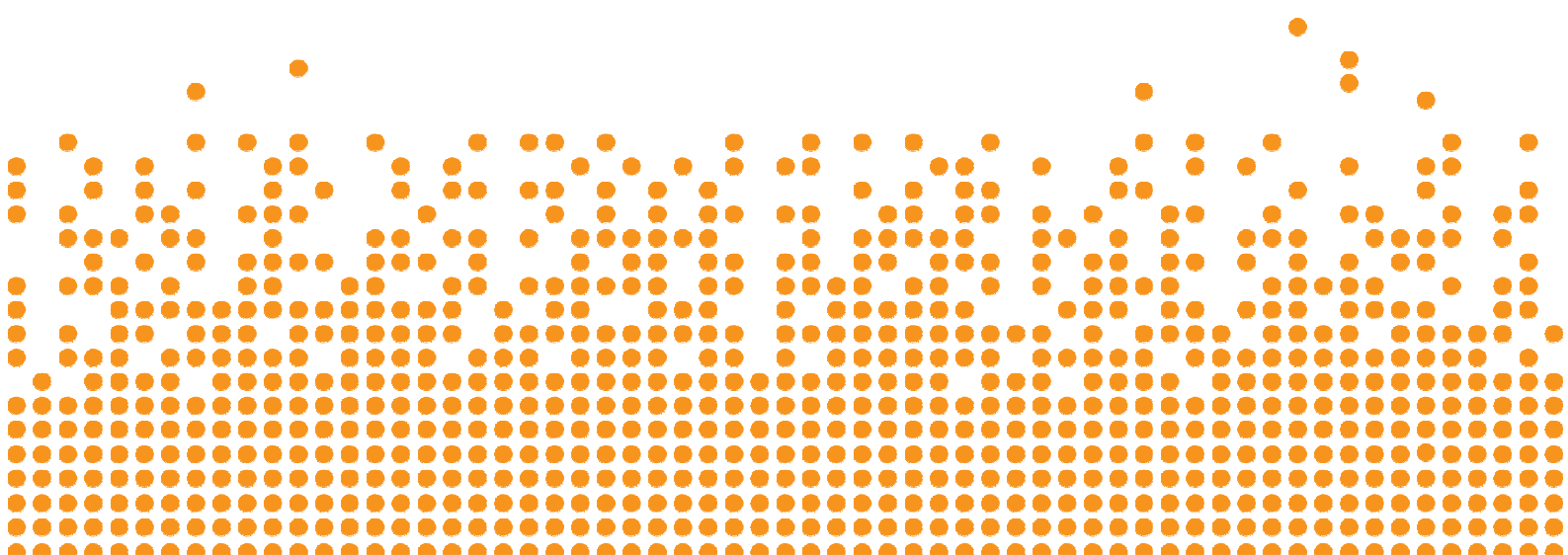
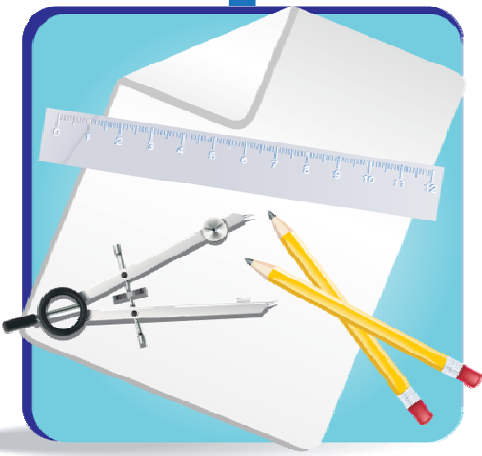


گزینہ دو

مؤسسہ آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲

فصل ۵ ●



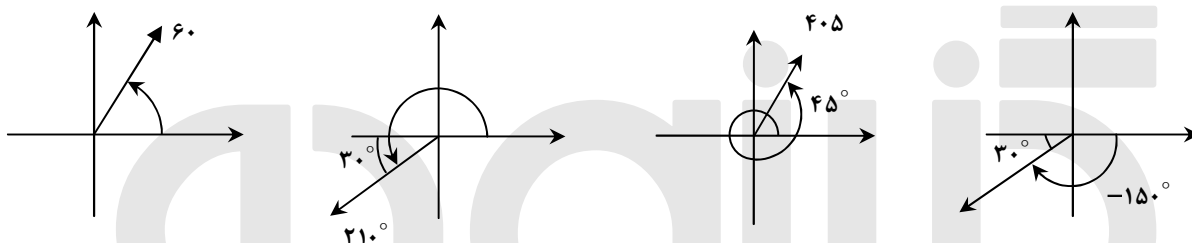
## مثلات

### زاویا و اندازهی زاویا:

در صفحه‌ی مختصات یک زاویه به وسیله‌ی دو نیم‌خط که رأس مشترک دارند، ایجاد می‌شود که یک نیم‌خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع حرکت نیم‌خط دوم است و دیگری را ضلع انتهایی که مکان انتهایی نیم‌خط می‌باشد در نظر می‌گیریم. یک زاویه به وسیله‌ی مقدار و جهت چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع انتهایی تعیین می‌شود. اگر تغییر مکان نیم‌خط دوم از مکان شروع در جهت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه با یک مقدار منفی و اگر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد با یک مقدار مثبت مشخص می‌شود.

مثال: زاویه‌های  $60^\circ$ ،  $210^\circ$ ،  $405^\circ$  و  $-150^\circ$  را روی نمودار مشخص کنید؟

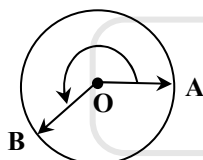
حل:



### وامد دیگری برای زاویه:

اگر متحرکی از نقطه‌ی A روی دایره‌ای به شعاع واحد در جهت مثبت حرکت کند و به مکان B برسد، مسافت طی شده توسط متحرک را اندازه‌ی زاویه‌ی دوران پاره‌خط OA حول O برحسب رادیان می‌نامند.

اگر در جهت منفی حرکت کنیم همین مسافت طی شده را با علامت منفی نشان می‌دهیم.



چون می‌دانیم محیط یک دایره به شعاع R، برابر  $2\pi R$  است، لذا اگر ما کمائی از دایره به اندازه‌ی  $\theta$  را طی کنیم، مسافت طی شده توسط متحرک یا همان طول کمان برابر است با:  $L = R\theta$  (دقت کنید در این رابطه  $\theta$  حتماً باید با واحد رادیان بیان شود).

حال اگر دایره مثلثاتی را در نظر بگیریم (دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ) محیط این دایره برابر  $2\pi$  رادیان است، لذا می‌توان واحدهای درجه و رادیان را به صورت زیر بهم تبدیل نمود:

رادیان	درجه	
$2\pi$	$360^\circ$	}
x	1	
$\rightarrow x = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$		

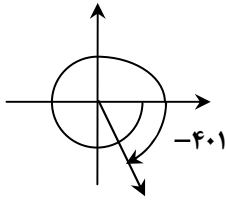
یعنی 1 درجه برابر  $\frac{\pi}{180}$  رادیان است در حالت کلی می‌توان گفت:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \rightarrow R = \frac{\pi}{180} D$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 رادیان                      درجه

مثال: زاویه ی ۷- رادیان را روی نمودار نشان دهید.

حل:

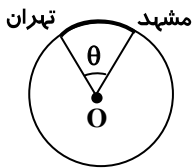


$$D = \frac{180}{\pi} R = \frac{180 \times -7}{3/1415} \approx -401$$

مثال: فرض کنیم فاصله ی تهران تا مشهد روی قسمتی از سطح زمین تقریباً ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. اگر شعاع زمین ۶۴۴۰ کیلومتر فرض شود، زاویه ای از مرکز زمین که یک ضلع آن منتهی به تهران و ضلع دیگر منتهی به مشهد شود، چقدر است؟

حل:

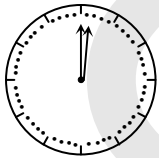
اگر فاصله ی تهران تا مشهد را کمان طی شده در نظر بگیریم، داریم:



$$R\theta = L \rightarrow 6440\theta = 1000 \rightarrow \theta = \frac{100}{644} = 0/155 \text{ rad}$$

مثال: چه مدت طول می کشد تا عقربه ی دقیقه شمار به اندازه ی  $2/5\pi$  رادیان دوران کند؟

حل: دقیقه شمار هر ۱ دقیقه  $\frac{1}{6}$  دایره یعنی  $\frac{\pi}{30}$  رادیان دوران می کند، لذا برای  $2/5\pi$  رادیان دوران  $\frac{2/5\pi}{\pi/30} = 75$  دقیقه زمان لازم است.



مثال: اگر چرخ و فلکی ۴۰ کابین داشته باشد و در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه های ساعت روی کابین ۳ قرار داشته باشیم، پس از  $\frac{47\pi}{10}$  رادیان دوران در موقعیت کدام کابین قرار می گیریم؟

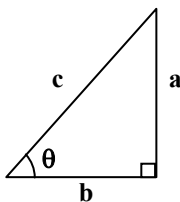
حل: چون چرخ و فلک دایره را به ۴۰ قسمت مساوی تقسیم کرده است، لذا فاصله ی هر ۲ کابین  $\frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$  است، یعنی پس از هر  $\frac{\pi}{20}$  رادیان دوران، ما در جایگاه کابین بعدی قرار می گیریم، لذا اگر بخواهیم  $\frac{47\pi}{10}$  دوران کنیم، در واقع به اندازه ی  $\frac{47\pi}{10} \div \frac{\pi}{20} = 94$  کابین جلو رفته ایم چون هر  $2\pi$  رادیان یکبار به جایی که هستیم برمی گردیم، پس باید فرض کنیم به

اندازه ی ۱۴ کابین پیش رفته ایم. چون  $\frac{47\pi}{10} = 4\pi + \frac{7\pi}{10}$  و  $\frac{7\pi}{10} \div \frac{\pi}{20} = 14$  یعنی الان در جایی قرار داریم که کابین ۱۷ ام در

ابتدای حرکت قرار داشت.

### سینوس و کسینوس یک زاویه:

در مثلث قائم الزاویه نسبت ضلع مقابل یک زاویه به وتر را سینوس آن زاویه و نسبت ضلع مجاور یک زاویه به وتر را کسینوس آن زاویه می نامند.



$$\text{Sin } \theta = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sin x$  و  $f(x) = \cos x$  برابر  $\mathbb{R}$  است.

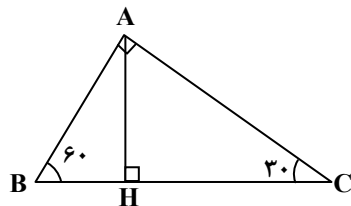
چون همواره  $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  و  $|b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  است، لذا  $|\sin x| \leq 1$  و  $|\cos x| \leq 1$  پس:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

مثال: اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا  $30^\circ$  باشد و ضلع نظیر این زاویه (ضلع غیروتر) ۱۲ باشد، طول ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه و اندازه‌ی قطعاتی که ارتفاع وارد بر وتر روی وتر ایجاد می‌کند را به دست آورید.

حل:



$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} \rightarrow AH = 12 \sin 30^\circ = 6$$

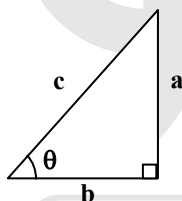
$$\cos 30^\circ = \frac{CH}{AC} \rightarrow CH = 12 \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \rightarrow AB = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = 4\sqrt{3} \cos 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

### تانژانت و کتانژانت یک زاویه:

بنابر تعریف، تانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:



$$\tan x = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

دامنه‌ی تابع تانژانت  $D = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  است.

نکته: در واقع می‌توان گفت شیب یک خط، تانژانت زاویه‌ی بین آن خط و جهت مثبت محور xها است.

بنابر تعریف کتانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مجاور به ضلع مقابل در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:

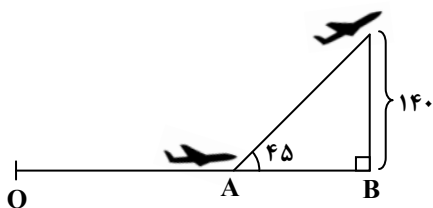
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{b}{a}$$

دامنه‌ی تابع کتانژانت  $D = \mathbb{R} - [k\pi \mid k \in \mathbb{Z}]$  است.

لذا برای  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  داریم:  $\tan x \cdot \cot x = 1$  یا  $\tan x = \frac{1}{\cot x}$

مثال: هواپیمایی می‌خواهد از روی بانده بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند، سپس با زاویه‌ی  $45^\circ$  از زمین بلند می‌شود. وقتی به بالای انتهای بانده می‌رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل بانده چقدر است؟

حل:

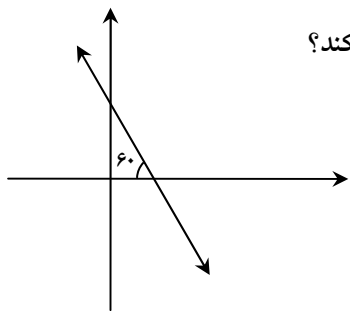


$$\tan 45^\circ = \frac{140}{AB} \Rightarrow AB = \frac{140}{1} \Rightarrow AB = 140$$

$$OA = 300 \rightarrow OB = 300 + 140 = 440$$

مثال: خط مقابل از نقطه  $\left( 1, \frac{1}{2} \right)$  می‌گذرد. این خط محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

حل: شیب تانژانت زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور  $x$ ‌ها است.



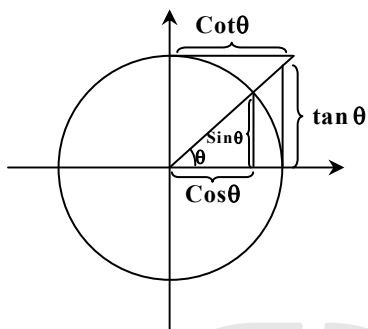
$$m = \tan \theta = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\rightarrow y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}(x - 1) \text{ معادله خط:}$$

$$\rightarrow y = 0 \Rightarrow x - 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}$$

### نمایش هندسی توابع مثلثاتی روی دایره‌ی مثلثاتی:

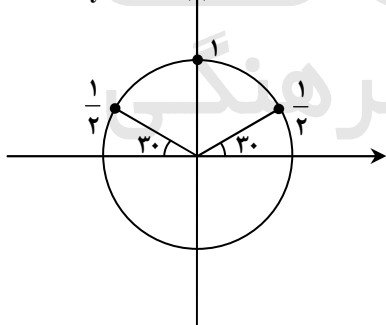
اگر دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ (دایره‌ی مثلثاتی) داشته باشیم، توابع مثلثاتی را می‌توان روی این دایره نمایش داد.



### سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زوایای مهم:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
<b>Sin x</b>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
<b>Cos x</b>	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
<b>tan x</b>	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
<b>Cot x</b>	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

$$y = \sin x$$



مثال: اگر  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$  باشد، محدوده‌ی تغییرات  $y = \sin x$  چقدر است؟

حل: با دقت در دایره‌ی مثلثاتی و تغییرات  $\sin x$  در ربع اول و دوم ملاحظه می‌شود:

$$\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$

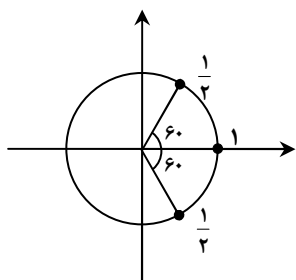
مثال: اگر  $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$  و  $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$  باشد، مقادیر  $m$  در کدام فاصله است؟

حل: با دقت در دایره‌ی مثلثاتی و ملاحظه‌ی تغییرات  $3x$  داریم:

$$-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9} \rightarrow -\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \leq \cos 3x \leq 1$$

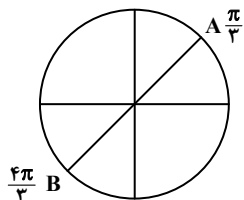
$$\rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{m-1}{2} \leq 1 \rightarrow 2 \leq m \leq 3$$



مثال: اگر  $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$  و  $\sin 2\alpha = \frac{1}{1-3m}$ ، حدود تغییرات  $m$  کدام است؟

حل:

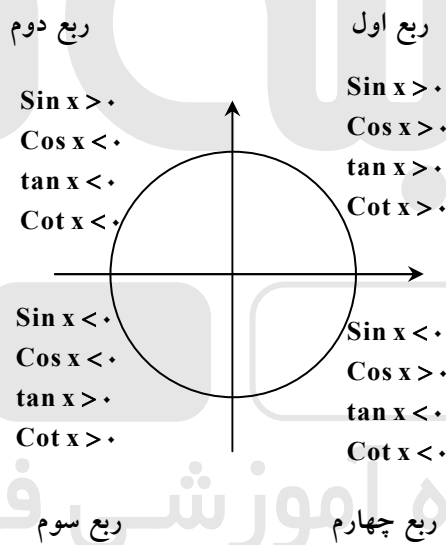
$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\alpha \leq \frac{4\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin 2\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{1-3m} \leq 1$$



$$\begin{cases} \frac{1}{1-3m} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1-3m} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{3m}{1-3m} \leq 0 \\ \frac{1}{1-3m} + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2-3\sqrt{3}m+\sqrt{3}}{2(1-3m)} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3m}{1-3m} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \leq 0 \end{cases} \\ \frac{2+\sqrt{3}-3\sqrt{3}m}{2(1-3m)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \geq \frac{2+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\ m < \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{2+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}, \infty\right)$$

علامت توابع مثلثاتی در ربع‌های مختلف:



اتمادهای مثلثاتی مهم:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1 \quad \theta \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \theta \neq k\pi$$

تذکر:  $\sin^2 \theta$  به معنای  $(\sin \theta)^2$  است و با مقدار  $\sin(\theta)^2$  متفاوت است.

روابط  $\alpha \pm \beta$ :

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta} \quad \alpha + \beta \neq k\pi$$

$$\frac{1 \mp \tan \theta}{1 \pm \tan \theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \theta\right)$$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\alpha \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

مثال:

روابط  $2\theta$ :

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \end{cases}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\cot 2\theta = \frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

مقادیر  $3\theta$ :

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

مثال: اگر  $\tan x = \frac{1}{3}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه سوم باشد، مقدار  $\sin x$  را بیابید.

حل:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{10}$$

$$\rightarrow \cos x = \pm \frac{3}{\sqrt{10}} \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

چون انتهای کمان در ناحیه سوم است، لذا  $\sin x < 0$  است، پس:  $\sin x = \frac{-1}{\sqrt{10}}$

مثال: در صورتی که  $\tan(\alpha + 15) = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $\cot(60 - 2\alpha)$  کدام است؟

کحل:

$$\tan(45 - \alpha) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \rightarrow \tan(30 - \alpha) = \tan(45 - (15 + \alpha)) = \frac{1 - \tan(\alpha + 15)}{1 + \tan(\alpha + 15)} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan(60 - 2\alpha) = \tan[2(30 - \alpha)] = \frac{2 \tan(30 - \alpha)}{1 - \tan^2(30 - \alpha)} = \frac{2(\frac{3}{5})}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{15}{8} \rightarrow \cot(60 - 2\alpha) = \frac{1}{\tan(60 - 2\alpha)} = \frac{8}{15}$$

مثال: اگر  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\sin \beta = \frac{8}{17}$ ، مقدار  $\tan(\alpha + \beta)$  کدام است؟ ( $\alpha$  و  $\beta$  ساده‌اند)

کحل:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \beta = \frac{8}{17} \rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17} \rightarrow \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{8}{15}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{8}{15}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{8}{15}} = \frac{77}{36}$$

مثال: اگر  $\tan(x + y) = \frac{1}{3}$  و  $\tan(x - y) = \frac{2}{3}$ ، حاصل  $\tan 2x$  کدام است؟

کحل:

$$\tan(2x) = \tan((x + y) + (x - y)) = \frac{\tan(x + y) + \tan(x - y)}{1 - \tan(x - y) \tan(x + y)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{9}{7}$$

مثال: ساده شده‌ی عبارت  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x}$  کدام است؟

$$2 \cot \frac{x}{2} \quad (\epsilon)$$

$$\frac{2}{\sin x} \quad (\zeta)$$

$$2 \tan \frac{x}{2} \quad (\delta)$$

$$2 \sin x \quad (\theta)$$

کحل: گزینه ۳ پاسخ است.

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} = \frac{2}{\sin x}$$

مثال: حاصل عبارت  $\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ)$  کدام گزینه است؟

$$\cos 40^\circ \quad (\epsilon)$$

$$\cos 20^\circ \quad (\zeta)$$

$$\sin 40^\circ \quad (\delta)$$

$$\sin 20^\circ \quad (\theta)$$

کحل: گزینه ۲ پاسخ است.

$$\tan 20^\circ (2 \cos^2 20^\circ) = \frac{2 \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \times \cos^2 20^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ$$



مثال: حاصل عبارت  $(1 + 2\cos 7x)\sin \frac{7x}{2}$  برابر است با:

$\cos \frac{7x}{2}$  (۴)

$\cos \frac{7x}{2}$  (۳)

$\sin \frac{7x}{2}$  (۲)

$\sin \frac{7x}{2}$  (۱)

بهر حل: گزینه ۲ پاسخ است.

$$(1 + 2\cos 7x)\sin \frac{7x}{2} = \sin \frac{7x}{2} + 2\sin \frac{7x}{2} \cos 7x = \sin \frac{7x}{2} + 2 \left[ \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{7x}{2} + 7x \right) + \sin \left( \frac{7x}{2} - 7x \right) \right) \right]$$

$$= \sin \frac{7x}{2} + \sin \frac{14x}{2} + \sin \left( -\frac{7x}{2} \right) = \sin \frac{7x}{2} + \sin \frac{14x}{2} - \sin \frac{7x}{2} = \sin \frac{14x}{2}$$

مثال: ساده شده  $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$  کدام است؟

حل:

$$\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 \theta}\right)}{(1 - \cos^2 \theta)(1 + \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^4 \theta \cdot \cos^4 \theta} = \frac{16}{\sin^4 2\theta}$$

روابط توابع مثلثاتی در کمان‌های مثلثاتی مختلف با هم:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$	$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$ $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$ $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$ $\cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan \theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta \rightarrow \tan(k\pi + \theta) = \tan \theta$ $\cot(\pi + \theta) = \cot \theta \rightarrow \cot(k\pi + \theta) = \cot \theta$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$
$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$ $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$ $\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta \rightarrow \sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta$ $\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta \rightarrow \cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta$ $\tan(2\pi + \theta) = \tan \theta \rightarrow \tan(2k\pi + \theta) = \tan \theta$ $\cot(2\pi + \theta) = \cot \theta \rightarrow \cot(2k\pi + \theta) = \cot \theta$

مثال: از تساوی  $\frac{2 \sin(\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = 2$  مقدار  $\tan \alpha$  را به دست آورید.

حل:

$$\sin(\alpha \pm 2k\pi) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm 2k\pi) = \cos \alpha$$

$$\frac{2 \sin(\alpha - \pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = \frac{-2 \sin \alpha + \sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha = 2 \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

مثال: ساده شده عبارت  $A = \cos(\pi - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(\pi + x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$  را به دست آورید.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\cos x + \cos x - \cos x - \cos x = -2\cos x$$

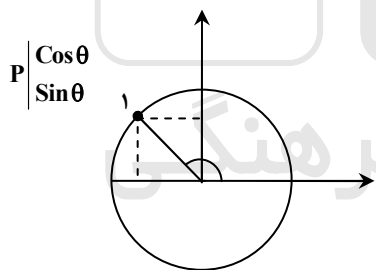
مثال: حاصل  $A = \sin 186^\circ + \cos 186^\circ$  چقدر است؟

حل:

$$186^\circ = 5 \times 36^\circ + 6^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin(10\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(10\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow A = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

مثال: نقطه  $P$  را به اندازه  $\frac{2\pi}{3}$  در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. مختصات نقطه  $P$  حاصل کدام است؟

حل:



$$P = \left( \cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

مثال: ساده شده عبارت  $\cot(115^\circ) \times \cot(155^\circ)$  برابر چیست؟

حل:

$$\cot 115^\circ = \cot(90^\circ + 25^\circ) = -\tan 25^\circ$$

$$\cot 155^\circ = \cot(180^\circ - 25^\circ) = -\cot 25^\circ$$

$$\cot 115^\circ \times \cot 155^\circ = (-\tan 25^\circ)(-\cot 25^\circ) = 1$$

مثال: اگر  $\tan 34^\circ = 0/6$  باشد، حاصل  $\frac{\sin 56^\circ - 2 \sin 146^\circ}{\sin 124^\circ}$  را بیابید.

حل:

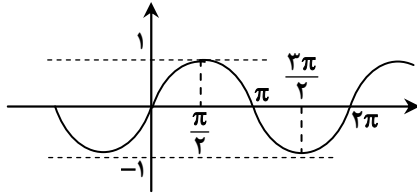
$$\frac{\sin 56^\circ - 2 \sin 146^\circ}{\sin 124^\circ} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 34^\circ) - 2 \sin(\pi - 34^\circ)}{\sin(\frac{\pi}{2} + 34^\circ)} = \frac{\cos 34^\circ - 2 \sin 34^\circ}{\cos 34^\circ} = 1 - 2 \tan 34^\circ = 1 - 2(0/6) = -0/2$$

## توابع مثلثاتی

بسیاری از حرکات متناوب در طبیعت با توابع مثلثاتی بیان می‌شوند.

توابع  $y = \sin x$ ،  $y = \cos x$ ،  $y = \tan x$  و  $y = \cot x$  توابع مثلثاتی نام دارند و دامنه، برد و نمودارشان به صورت زیر است:

(الف)



$$y = \sin x$$

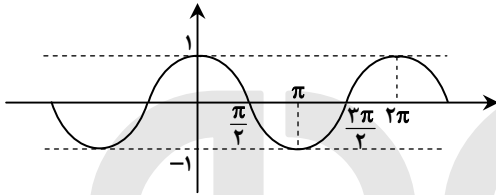
$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-1, 1]$$

چون  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  تابع  $y = \sin x$  تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $2\pi$  است.

\* صفرهای (ریشه‌های) تابع  $y = \sin x$  در  $x = k\pi$  رخ می‌دهد.

(ب)



$$y = \cos x$$

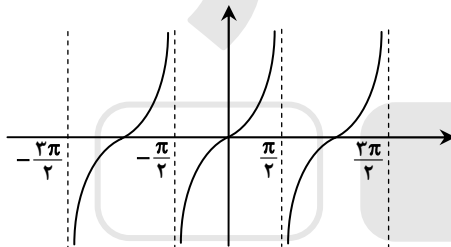
$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-1, 1]$$

چون  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  تابع  $y = \cos x$  تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $2\pi$  است.

\* صفرهای تابع  $y = \cos x$  در  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  رخ می‌دهد.

(ج)



$$y = \tan x$$

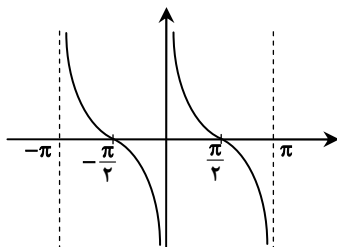
$$D = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$R = \mathbb{R}$$

چون  $\tan(x + \pi) = \tan x$  تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $\pi$  است.

\* صفرهای تابع  $y = \tan x$  در  $x = k\pi$  رخ می‌دهد.

(د)



$$y = \cot x$$

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

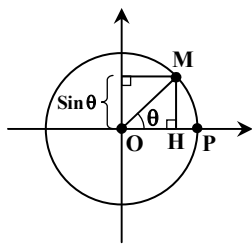
چون  $\cot(x + \pi) = \cot x$  تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $\pi$  است.

\* صفرهای تابع  $y = \cot x$  در  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  رخ می‌دهد.

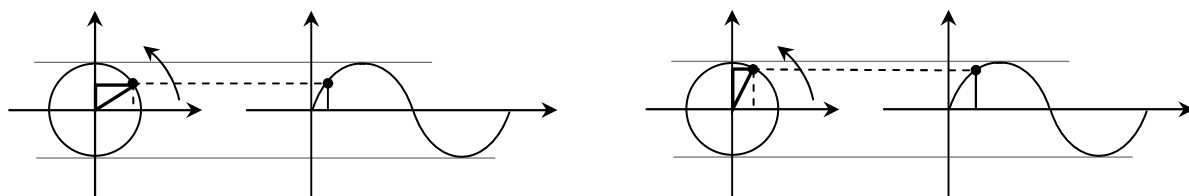
نکته: توابع  $y = A \sin(ax+b)$  و  $y = A \cos(ax+b)$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  می‌باشند. دامنه‌ی این توابع  $\mathbb{R}$  و برد

آن‌ها  $-|A| \leq y \leq |A|$  است.

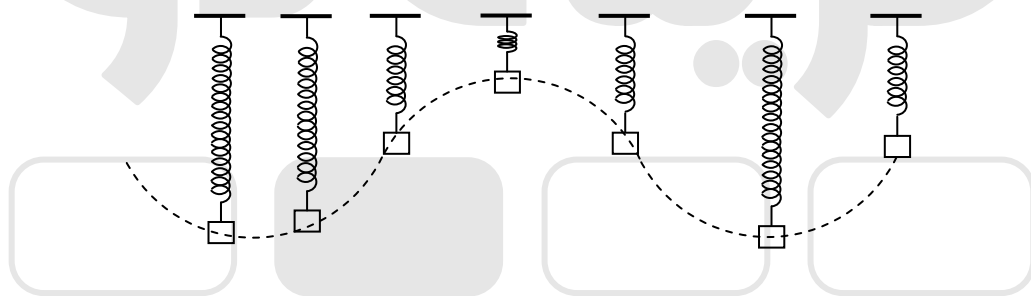
ارتباط بین دایره‌ی مثلثاتی و تابع سینوس:



اگر نقطه‌ای روی دایره‌ی مثلثاتی حرکت کند، مقدار  $y$  نقطه در هر لحظه، برابر مقدار سینوس زاویه‌ای است که بردار مکان نقطه با محور  $x$  می‌سازد. در واقع تصویر متحرک  $M$  روی محور  $y$ ها برابر با سینوس زاویه در هر لحظه است.  
\* یعنی حرکت تصویر  $M$  روی محور  $y$ ها با تابعی سینوس صورت می‌پذیرد.



برخی حرکات در طبیعت وقتی در قالب زمان مورد بررسی قرار می‌گیرند، نموداری سینوسی دارند، مثلاً فرض کنید وزنه را از یک فنر آویزان کرده‌ایم و فنر به حالت تعادل رسیده است. اگر وزنه اندکی کشیده شده و رها شود، با فرض کم بودن اصطکاک، وزنه حرکتی نوسانی انجام خواهد داد. اگر مبدأ محاسبه ارتفاع وزنه، حالت تعادل وزنه باشد و وزنه در  $t=0$  در حالت تعادل باشد، ارتفاع وزنه در هر حالت برابر است با:  $y(t) = A \sin \omega t$   
اگر از مقابل به آونگ نگاه کنیم، و حرکت را در زمان‌های مختلف تصویربرداری کنیم، چیزی شبیه حرکت تصویر نقطه‌ی روی محور  $y$ ها در دایره‌ی مثلثاتی مشاهده می‌شود.



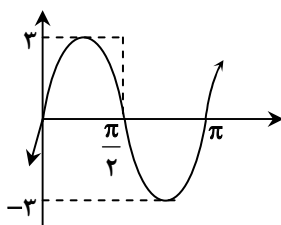
مثال: حداقل، حداکثر و دوره‌ی تناوب توابع زیر را به دست آورده و آن‌ها را رسم کنید.

حل:

$$y = 3 \sin 2x$$

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

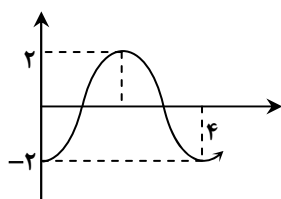
$$-3 \leq y \leq 3$$



$$y = -2 \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$-2 \leq y \leq 2$$



مثال: اگر  $y = \cos^2 x - 3\sin^2 x$  باشد، محدوده‌ی تغییرات  $y$  کدام است؟

حل:

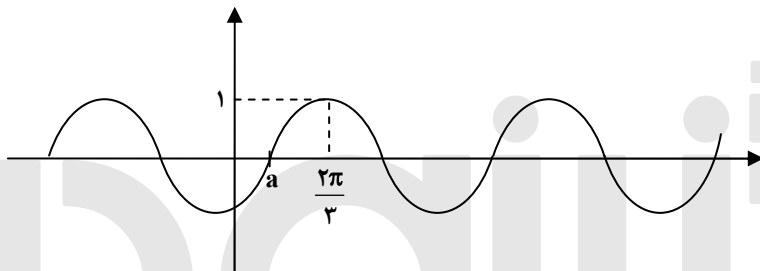
$$y = \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = 4\cos^2 x - 3$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \rightarrow 0 \leq 4\cos^2 x \leq 4 \rightarrow -3 \leq 4\cos^2 x - 3 \leq 1 \rightarrow -3 \leq y \leq 1$$

مثال: اگر  $x = \frac{2\pi}{3}$  طول اولین نقطه‌ی مثبتی با طول مثبت باشد که تابع  $y = \sin(x-a)$  در آن به مقدار حداکثر می‌رسد،  $a$  چقدر است؟

حل: در تابع  $y = \sin x$ ،  $x = \frac{\pi}{2}$  اولین نقطه‌ی مثبتی است که  $y = \sin x$  در آن به اوج می‌رسد. لذا چون این نقطه به

اندازه‌ی  $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$  به جلو حرکت کرده است، پس  $a = \frac{\pi}{6}$  می‌باشد.



مثال: کدام عبارت نادرست است؟

(۲)  $\sin 160^\circ > \cos 285^\circ$

(۱)  $\sin 37^\circ > \cos 75^\circ$

(۴)  $\cos(-65^\circ) < \sin 55^\circ$

(۳)  $\cos 125^\circ < \cos 212^\circ$

حل:

گزینه‌ی ۱: چون  $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$  و  $\sin x$  در فاصله‌ی  $[0, \frac{\pi}{2}]$  صعودی است، لذا:

$$\sin 37^\circ > \cos 75^\circ = \sin 15^\circ$$

گزینه‌ی ۲:

$$\left. \begin{array}{l} \sin 160^\circ = \sin 20^\circ \\ \cos 285^\circ = \cos(-75^\circ) = \cos 75^\circ = \sin 15^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \sin 20^\circ > \sin 15^\circ$$

گزینه‌ی ۳:

$$\cos 125^\circ = \cos(180^\circ - 55^\circ) = -\cos 55^\circ$$

$$\cos 212^\circ = \cos(180^\circ + 32^\circ) = -\cos 32^\circ$$

تابع  $y = \cos x$  در فاصله‌ی  $[0, \pi]$  تابعی نزولی است، لذا:

$$\cos 32^\circ > \cos 55^\circ \rightarrow -\cos 32^\circ < -\cos 55^\circ \rightarrow \cos 212^\circ < \cos 125^\circ$$

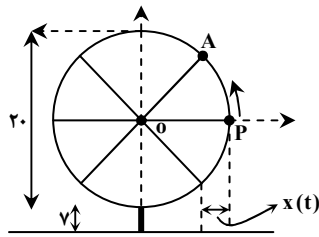
پس گزینه‌ی ۳ نادرست است.

گزینه‌ی ۴:

$$\cos(-65^\circ) = \cos 65^\circ = \sin 25^\circ$$

$$\sin 55^\circ > \sin 25^\circ = \cos(-65^\circ)$$

مثال: فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۰ داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می چرخد. فرض کنید پایین ترین نقطه‌ی چرخ و فلک ۷ متر بالاتر از زمین باشد و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه‌ی  $t=0$  با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است.



الف) در هر لحظه ارتفاع کابین از سطح زمین را مشخص کنید.

ب) اگر در لحظه‌ی  $t$  فاصله‌ی سایه این کابین روی زمین تا نقطه‌ی A را با  $x(t)$  نشان دهیم، این تابع را به دست آورید.

حل:

الف) اگر مبدأ مختصات را مرکز دایره قرار دهیم در لحظه‌ی  $t=30$ ،  $y=10$  است و در لحظه‌ی  $t=60$ ،  $y=0$  و در لحظه‌ی  $t=90$ ،  $y=-10$  و در لحظه‌ی  $t=120$  مجدداً  $y=0$  می شود.

چون معادله‌ی این حرکت نوسانی  $y = A \sin \omega t$  است، لذا با داده‌های فوق می توان  $\omega$  و A را یافت. چون ماکزیمم تابع در  $t=30$  رخ می دهد. پس باید:  $\omega \times 30 = \frac{\pi}{2}$  باشد، پس:  $\omega = \frac{\pi}{6}$  است. اما چون این مقدار ماکزیمم برابر ۱۰ است، لذا

هنگامی که سینوس برابر یک است،  $y$  باید برابر ۱۰ باشد؛ پس:  $y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

حال اگر محورهای مختصات را نسبت

به زمین در نظر بگیریم، معادله‌ی حرکت

نقطه‌ی P عبارت است از:

$$y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 17$$

$t=0$  فاصله‌ی نقطه‌ی P از زمین ۱۷ متر

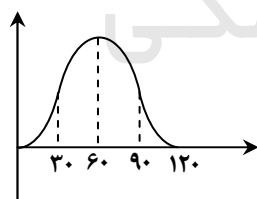
است.

ب) طول سایه هم نوسانی است و در لحظه‌ی  $t=0$  برابر  $x=0$  و در لحظه‌ی  $t=30$  برابر  $x=10$  و در لحظه‌ی  $t=60$  برابر  $x=20$  و در لحظه‌ی  $t=90$  برابر  $x=10$  و در لحظه‌ی  $t=120$  برابر  $x=0$  است.

چون این تابع با مقدار می نیمم آغاز و به مقدار ماکزیمم ختم می شود، از تابع  $\cos x$

استفاده می کنیم. منتها چون این تابع از می نیمم به ماکزیمم حرکت می کند، نمودار آن

به صورت مقابل است:



با دقت در نمودار  $y = A \cos \omega t$  و مقایسه‌ی آن با نمودار فوق

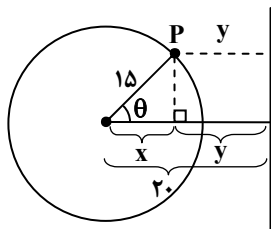
درمی یابیم این تابع به صورت  $y = -A \cos \omega t + B$  است.

ابتدا  $\omega$  را می یابیم:

$$t=0 \Rightarrow y=-10 \Rightarrow y = -A \cos(\omega \times 0) = -10 \Rightarrow \omega \times 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6}, A=10$$

پس تابع با انتقال ۱۰ واحدی به بالا نهایتاً به صورت:  $y = -10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 10$  است.

مثال: فاصله‌ی مرکز یک تاب گردان از میله‌های محافظ کنار آن ۲۰ متر و شعاع آن در هنگام گردش ۱۵ متر است. معادله‌ی فاصله‌ی هر نقطه‌ی تاب در حال گردش را از میله‌ی محافظ به دست آورید. ( $\theta$  زاویه‌ی بین پاره‌خط واصل نقطه‌ی روی تاب به مرکز تاب و نیم‌خط عمود بر میله‌ها از مرکز است).



حل: فاصله‌ی هر نقطه مانند P از میله‌ی فلزی برابر y می‌باشد که به زاویه‌ی  $\theta$  بستگی دارد. داریم:

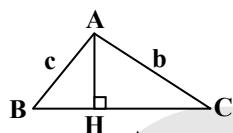
$$\cos \theta = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 15 \cos \theta \quad (*)$$

$$y = 20 - x = 20 - 15 \cos \theta$$

### کاربردهای از مثلثات

#### قضیه‌ی کسینوس‌ها:

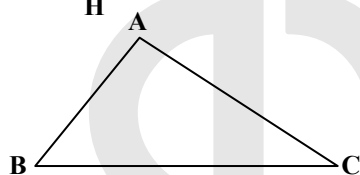
در هر مثلث داریم:



$$BC = BH + HC$$

$$\rightarrow a = c \cos \hat{B} + b \cos \hat{C}$$

لذا در هر مثلث داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

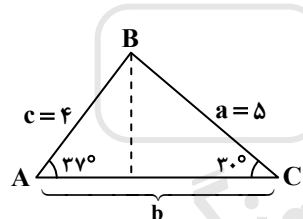
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

اثبات روابط فوق بر اساس قضیه‌ی فیثاغورس و رابطه‌ی فوق صورت گرفته و در کتاب درسی موجود است.

مثال: زمینی مثلث شکل برای ساخت یک فروشگاه زنجیره‌ای در نظر گرفته شده است. محیط این زمین چقدر است؟

$$(\cos 37^\circ = 0/8 \text{ و } \cos 30^\circ = 0/86)$$



حل: از رابطه‌ی  $b = c \cos A + a \cos C$  داریم:

$$b = 4 \cos 37^\circ + 5 \cos 30^\circ = 4(0/8) + 5(0/86) = 3/2 + 4/2 = 7/2$$

بنابراین محیط مثلث برابر است با:

$$\text{محیط} = a + b + c = 5 + 7/2 + 4 = 16/2$$

مثال: اگر اضلاع مثلثی  $a = 3$ ،  $b = 3\sqrt{3}$  و  $c = 6$  باشد، زاویه‌ی A چقدر است؟

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow 9 = 27 + 36 - 2 \times 3\sqrt{3} \times 6 \cos A$$

$$\Rightarrow 36\sqrt{3} \cos A = 54 \rightarrow \cos A = \frac{54}{36\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow A = \frac{\pi}{6}$$

مثال: اگر در مثلث غیر متساوی الساقینی رابطه‌ی  $a^2 - b^2 = c^2 (a - b)$  برقرار باشد، زاویه‌ی C را بیابید.

حل:

$$(a - b)(a^2 + b^2 + ab) = c^2 (a - b) \xrightarrow{a \neq b} a^2 + b^2 + ab = c^2$$

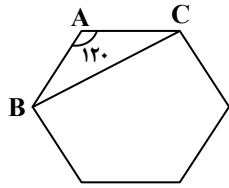
از طرفی همواره داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

با مقایسه‌ی این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\rightarrow -2ab \cos \hat{C} = ab \rightarrow \cos \hat{C} = -\frac{1}{2} \rightarrow \hat{C} = 120^\circ$$

مثال: طول قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم را پیدا کنید که طول ضلع آن ۲ است.



حل: می‌دانیم هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم  $120^\circ$  است. لذا طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

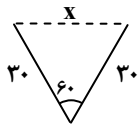
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ$$

$$= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$$

$$\rightarrow BC^2 = 12 \rightarrow BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

نکته: هر زاویه داخلی  $n$  ضلعی منتظم از رابطه‌ی  $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$  به دست می‌آید.

مثال: متحرکی ابتدا ۳۰ متر حرکت کرده و سپس روی مسیری که با مسیر اول زاویه‌ی  $60^\circ$  درجه می‌سازد به همان اندازه حرکت می‌کند. وقتی متحرک به انتهای مسیر دوم می‌رسد، فاصله‌ی وی از نقطه‌ی شروع چقدر است؟



$$x^2 = (30)^2 + (30)^2 - 2(30)(30) \times \frac{1}{2} = 900$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{900} = 30$$

حل: با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

البته این مثال را با روش هندسی نیز می‌توان حل کرد.

مثال: در مثلث ABC اگر  $b^2 + c^2 = a^2(b+c)$ ، زاویه‌ی A چقدر است؟

حل:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{b+c} = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow b^2 + c^2 - bc = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$$

مثال: فاصله‌ی بین دو شهر A و B، ۸ کیلومتر و فاصله‌ی دو شهر B و C،  $6\sqrt{2}$  کیلومتر است. اگر این سه شهر را دوبه‌دو

روی نقشه با خط راست به هم وصل کنیم، زاویه‌ی A با دو شهر دیگر  $60^\circ$  می‌شود. فاصله‌ی شهر A تا شهر C چند کیلومتر

است؟

حل:

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$(6\sqrt{2})^2 = x^2 + 8^2 - 2(8)(x) \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow (72) = x^2 + 64 - 8x \Rightarrow x^2 - 8x - 8 = 0$$

ضلع با طول منفی نداریم پس غیرقابل قبول

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} x = 4 + \sqrt{24} = 4 + 2\sqrt{6} \\ x = 4 - \sqrt{24} = 4 - 2\sqrt{6} < 0 \Rightarrow \text{است} \end{cases}$$

مثال: در مثلث ABC اگر  $\frac{a+c}{b+c} = \frac{b}{a-c}$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی A کدام است؟

حل:

$$a^2 - c^2 = b^2 + bc \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

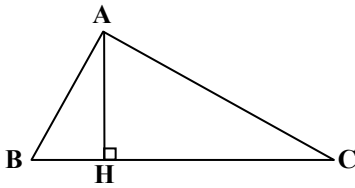
طبق رابطه‌ی کسینوس‌ها  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 + bc \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2\pi}{3}$$



## مساحت مثلث و قضیه سینوسها:

در مثلث ABC مساحت مثلث برابر است با:



$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AH \times BC \\ AH &= AB \times \sin B = AC \times \sin C \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} AC \times BC \sin C$$

$$\rightarrow AB \sin B = AC \sin C \rightarrow \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

با نوشتن این رابطه با یکی دیگر از ارتفاعها و اثباتی مشابه داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

پس:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

قضیه فوق را قضیه سینوسها می نامند.

نکته: مساحت متوازی الاضلاعی به اضلاع a و b و زاویه بین θ عبارتست از:

$$S = ab \sin \theta$$

مثال: در مثلث ABC اگر  $a = 2(1 + \sqrt{3})$ ،  $c = 4$  و  $B = 60^\circ$ ، اندازه زاویه A کدام است؟

حل:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC) \cos B \Rightarrow AC^2 = 16 + (16 + 8\sqrt{3}) - 16(1 + \sqrt{3}) \times \frac{1}{2} = 24 \Rightarrow AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = 45^\circ$$

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

مثال: در مثلثی  $\frac{2ab}{c^2} = \frac{\tan B}{\sin C}$ ، نوع مثلث کدام است؟

حل:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{2 \sin A \cdot \sin B}{\sin^2 C} = \frac{\sin B}{\cos B \cdot \sin C} \Rightarrow 2 \sin A \cdot \cos B = \sin C$$

$$2 \sin A \cdot \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{\sin C}$$

$$\sin C + \sin(A-B) = \sin C \Rightarrow \sin(A-B) = 0 \Rightarrow A-B = 0$$

یعنی  $A = B$ ، پس مثلث متساوی الساقین است.

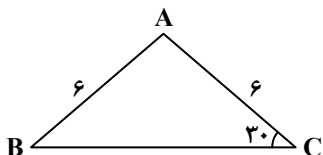
مثال: اگر در مثلثی  $A = 30^\circ$ ،  $B = 120^\circ$  و  $a = 8$  باشد، سه ضلع مثلث و مساحت آن را بیابید.

حل:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 120^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ} \Rightarrow 16 = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2c \Rightarrow c = 8, b = 8\sqrt{3}$$

حال مساحت را با هر کدام از دو ضلع به صورت دلخواه می توان نوشت:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 8\sqrt{3} \sin 30^\circ = 16\sqrt{3}$$



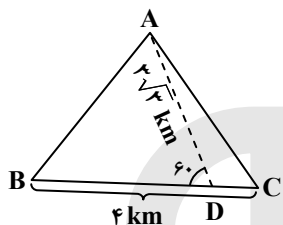
مثال: مؤسسه‌ای غرفه‌ی فروش محصولات خود را در زمینی به ابعاد مقابل برپا کرده است. مساحت این زمین کدام است؟

حل: مثلث ABC متساوی‌الساقین است، لذا  $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$ ، بنابراین  $\hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$  داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 120^\circ = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

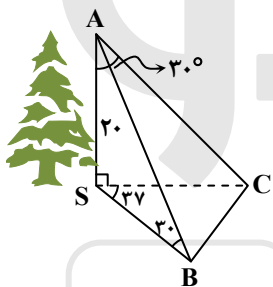
مثال: بانکی مثلثی شکل با پارتیشن‌بندی به طول  $3\sqrt{3}$  متر به دو قسمت برای استفاده‌ی کارمندان و ارباب رجوع تقسیم شده است. اگر بزرگ‌ترین ضلع بانک به طول ۴ متر بوده و زاویه‌ی مرز AD و یکی از نواحی جدید  $60^\circ$  باشد، مساحت بانک چند متر مربع است؟

حل:



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \times DB \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} AD \times DC \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} BD + \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} DC = \frac{9}{4} (BD + DC) = \frac{9}{4} (BC) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$



مثال: رضا می‌خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه است، اندازه بگیرد. او روبه‌روی درخت در نقطه‌ی A ایستاده است. زاویه‌ی دید رضا با نوک درخت  $30^\circ$  است. سپس رضا به سمت نقطه‌ی C حرکت می‌کند به گونه‌ای که SB و SC با یکدیگر زاویه‌ی  $37^\circ$  می‌سازند. اگر در این حالت رضا طول درخت را ۲۰ متر اندازه‌گیری کند، مساحت مثلث SBC چقدر است؟ (درخت بر صفحه‌ی SBC عمود است).

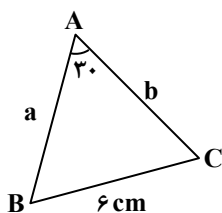
حل:

$$\Delta ASC: \tan A = \frac{SC}{SA} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{SC}{20} \rightarrow SC = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta ASB: \tan B = \frac{SA}{SB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{20}{SB} \Rightarrow SB = 20\sqrt{3}$$

لذا در مثلث SBC داریم:

$$S_{BCS} = \frac{1}{2} (SB \cdot SC \cdot \sin 37^\circ) = \frac{1}{2} \times 20\sqrt{3} \times \frac{20}{\sqrt{3}} \times \frac{6}{10} = 120$$



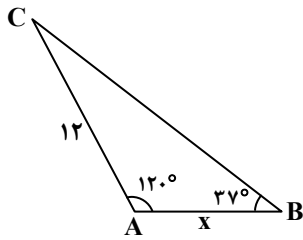
مثال: در مثلث روبه‌رو اگر  $a = 6 \text{ cm}$ ،  $\hat{A} = 30^\circ$  و  $\cos B = \frac{2}{5}$  باشد، طول ضلع b کدام است؟

حل:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\substack{0 < \hat{B} < 180^\circ \\ \text{پس } \sin \hat{B} \text{ مثبت است}}} \sin B = \frac{4}{5}$$

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{4}{5}} \Rightarrow b = 12 \times \frac{4}{5} = \frac{48}{5}$$

مثال: شکل کلی یک زمین گلف به صورت زیر است. مساحت این زمین چقدر است؟ ( $\sin 37^\circ = 0.6$  و  $\sin 23^\circ = 0.4$ )  
 حل:

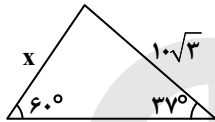


$$\hat{C} = 180^\circ - (120^\circ + 37^\circ) = 23^\circ$$

$$\frac{12}{\sin 37^\circ} = \frac{x}{\sin 23^\circ} \Rightarrow x = \frac{12 \times 0.4}{0.6} = 8$$

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 120^\circ = 48 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

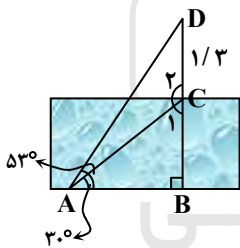
مثال: شمعی به طول ۱۵ سانتی متر را در حالی که خودکاری به طول  $10\sqrt{3}$  به نوک آن تکیه داده شده و شمع با زمین زاویه‌ی  $60^\circ$  می‌سازد، روشن می‌کنیم. مدتی پس از آب شدن شمع (بدون تغییر زاویه با زمین) خودکار بدون تغییر طول کمی روی زمین سُر خورده و زاویه‌ی آن با زمین به  $37^\circ$  کاهش می‌یابد. چند سانتی متر از شمع آب شده است؟ ( $\sin 37^\circ = 0.6$ )  
 حل: ابتدا طول شمع را پس از کاهش از رابطه‌ی سینوس‌ها می‌یابیم:



$$\frac{10\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin 37^\circ} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 0.6 = 12$$

بنابراین  $15 - 12 = 3$  سانتی متر از شمع آب شده است.

مثال: آنتنی روی زمین به صورت عمودی قرار گرفته است. اگر طول قسمت بیرون زمین آنتن،  $1/3$  متر باشد و قسمت انتهایی میله با نقطه‌ی A در داخل زمین زاویه‌ی  $53^\circ$  و قسمت ابتدایی بیرون زمین آنتن با آن نقطه زاویه‌ی  $30^\circ$  بسازد، طول آنتن کدام است؟ ( $\sin 37^\circ = 0.6$  و  $\sin 23^\circ = 0.39$ )

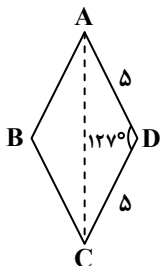


حل: در مثلث ACD با توجه به قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{CD}{\sin (53^\circ - 30^\circ)} = \frac{AC}{\sin D} \Rightarrow \frac{1/3}{\sin 23^\circ} = \frac{AC}{\sin 37^\circ} \Rightarrow AC = \frac{1/3 \times 0.6}{0.39} = 2$$

$$BC = AC \cdot \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow BD = BC + CD = 1 + 1/3 = 2/3$$

مثال: مساحت لوزی‌ای با ضلع ۵ و یک زاویه‌ی  $127^\circ$  چقدر است؟ ( $\cos 127^\circ = -\frac{3}{5}$ )



حل:

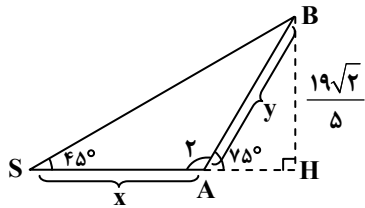
$$\sin^2 D + \cos^2 D = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 D = 1 - \cos^2 127^\circ = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow[\text{مثبت است}]{\text{Sin در ربع دوم}} \sin D = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot DC \cdot \sin D = 5 \times 5 \times \frac{4}{5} = 20$$

مثال: حمید و وحید در یک امتداد روی زمین دراز کشیده‌اند و به نوک یک کوه می‌نگرند. اگر یکی از آن‌ها قله‌ی کوه را در نقطه‌ی A با زاویه‌ی ۷۵ درجه و دیگری در نقطه‌ی S با زاویه‌ی ۴۵ درجه ببیند و ارتفاع کوه برابر ۳/۸ کیلومتر باشد، فاصله‌ی آن دو از هم چند کیلومتر است؟ ( $\sin 75^\circ = 0.95$ )

حل: در مثلث AHB داریم:



$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{3/8}{y} \Rightarrow y = \frac{3/8}{0.95} \Rightarrow y = \frac{4 \times 0.95}{0.95} = 4$$

$$\rightarrow y = 2$$

هم‌چنین داریم:

$$\hat{A}_r = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$

از قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{y}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2x \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

بنابراین این دو نفر به فاصله‌ی  $2\sqrt{2}$  کیلومتر از هم قرار دارند.



مؤسسه آموزشی فرهنگی